

TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

11ª ou 12ª classe - 2º Ciclo

MATEMÁTICA CSPQ 12ª CLASSE

MATEMÁTICA B II

Parte 1 (CSPQ) // Parte 2 (B II)



Ministério da Educação
Cultura e Formação



escola+

★ — — — ★
Educação para Todos

CSPQ 12
B II

ÍNDICE

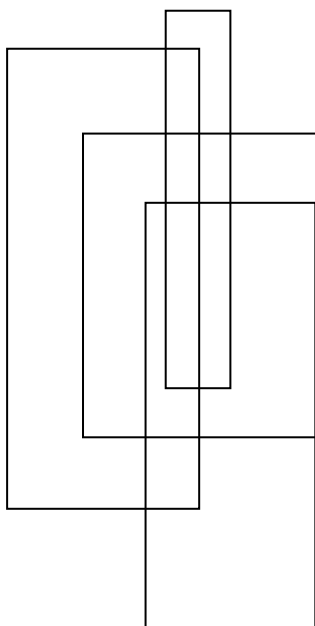
> Matemática CSPQ – 12ª Classe

Tema 1 – Probabilidades	2
▪ Introdução ao Cálculo de Probabilidades	3
▪ Análise Combinatória	13
Bibliografia	23

Tema 2 – Funções (Matemática A – 12ª classe – Parte 2)	29
▪ Funções Exponenciais e Logarítmicas	30
▪ Teoria dos Limites	52
▪ Continuidade de uma Função	68
▪ Cálculo Diferencial	73

> Matemática B II

Tema 2 – Probabilidades (Matemática CSPQ – 12ª classe – Parte 1)	1
▪ Introdução ao Cálculo de Probabilidades	3
▪ Análise Combinatória	14
Bibliografia	23



CSPQ **TEMA 1** BII **TEMA 2**

PROBABILIDADES

INTRODUÇÃO

A incerteza foi, ao longo dos tempos, e continua a ser, a principal razão do estudo das probabilidades. Podem ser conhecidos todos os possíveis resultados de um fenómeno aleatório, mas, antes que esteja concretizado, mantém-se a incerteza quanto ao resultado que ocorrerá.

Essa incerteza é a motivação de muitos jogos, como por exemplo, a lotaria, o totoloto, jogos relacionados com o lançamento de dados ou o girar de roletas. De certa forma, a origem das probabilidades está relacionada com os chamados “jogos de azar”.

Problemas relacionados com o jogo alimentaram, ao longo dos anos, a reflexão e a discussão em torno das probabilidades. Um exemplo disso é a troca de correspondência entre Fermat e Pascal, no século XVII, para discutir um problema colocado por Antoine de Gambard (1610-1685) chamado de “cavaleiro De Méré”.

A partir da correspondência entre Pascal e Fermat, a teoria das probabilidades associada à Matemática, teve um impulso no seu desenvolvimento. Para isso houve vários contributos, como por exemplo, os de Jacob Bernoulli e Laplace.

O problema do cavaleiro De Méré:

Dois jogadores, o cavaleiro e um seu adversário, estão a jogar aos dados. Cada um aposta num determinado número e ganha o primeiro a obter pela terceira vez o número que apostou.

A aposta foi de 64 moedas (32 cada um) e o jogo é interrompido quando o cavaleiro tem 2 sucessos contra 1 do adversário. Como deve ser repartido o valor apostado?

Alguns matemáticos:



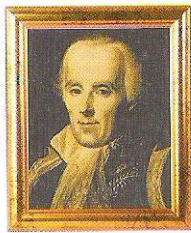
Blaise Pascal
(1623-1662)



Fermat
(1601-1655)



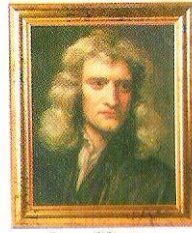
Jacob Bernoulli
(1654-1705)



Laplace
(1749-1827)



Gauss
(1777-1855)



Isaac Newton
(1642-1727)

Legenda de cores utilizada nos exercícios deste tema:

am – amarelo **az** – azul **vd** – verde **vm** – vermelho **l** – laranja **b** – branco **p** – preto

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

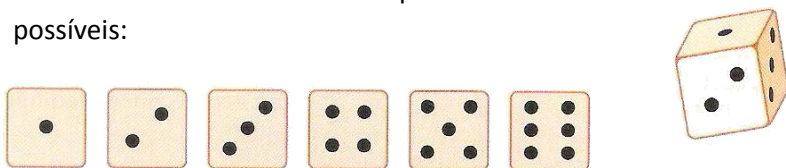
▪ EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA. CONJUNTO DE RESULTADOS. ACONTECIMENTOS

As experiências que realizamos dividem-se em dois tipos: experiências deterministas e experiências aleatórias.

O lançamento de uma pedra a um lago para verificar onde fica a pedra, é um exemplo de experiência determinista porque mesmo antes da realização do lançamento já sabemos que a pedra irá para o fundo do lago.

O lançamento de um dado numerado de 1 a 6 para observar qual o número que fica para cima é um exemplo de uma experiência aleatória pois o resultado apenas é conhecido após a realização do lançamento.

Relativamente a esta última experiência existem seis resultados possíveis:



Assim, os resultados possíveis desta experiência são:

1, 2, 3, 4, 5 e 6

Daqui resulta o conjunto de resultados ou o espaço amostral desta experiência: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Admita que na realização da experiência, há interesse em observar se sai um número ímpar, temos:

$A = \{1, 3, 5\}$

$A \subset S$. A é um acontecimento.



Alguns acontecimentos têm nomes específicos:

- Acontecimento elementar: Se o resultado de uma experiência consta de um só elemento do conjunto de resultados.

Exemplo: B: "Sair o número dois" $B = \{2\}$

- Acontecimento composto: Se o resultado de uma experiência consta de dois ou mais elementos do conjunto de resultados.

Exemplo: C: "Sair um número par" $C = \{2, 4, 6\}$

- Acontecimento certo: Se o resultado de uma experiência consta de todos os elementos do conjunto de resultados.

Exemplo: D: "Sair um número menor que 8" $D = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Acontecimento impossível: Se o resultado de uma experiência não tem qualquer elemento do conjunto de resultados.

Exemplo: E: "Sair um número maior que 7" $E = \{\}$

Para ajudar a determinar o conjunto de resultados pode-se usar diagramas de árvore, tabelas ou outros esquemas.

Experiência aleatória é uma experiência com as seguintes características:

- são conhecidos os resultados possíveis
- não é possível prever (determinar) o resultado de cada uma das experiências
- pode ser repetida em condições idênticas.

Conjunto de resultados ou espaço amostral de uma experiência aleatória é o conjunto de resultados possíveis que lhe está associado a representa-se habitualmente por S , E ou Ω .

Acontecimento de uma experiência aleatória é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exercícios:

1. Das seguintes experiências indique as que são aleatórias e as que são deterministas:

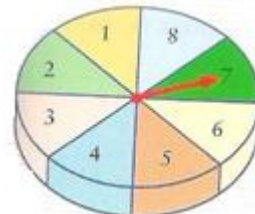
A: Lançar ao ar uma moeda e observar a face que fica voltada para cima.

B: Observar a quantidade de água que é derramada quando se introduz um cubo com 3 cm de aresta dentro de um recipiente cheio de água.

C: Observar, numa localidade, a pluviosidade durante uma semana.

D: Num jogo de cartas, observar o número de ases distribuídos a um dos jogadores.

2. Observe a roleta da sorte representada na figura e considere a experiência de rodar o ponteiro e anotar o número que sai.



2.1. Defina o conjunto de resultados.

2.2. Classifique os acontecimentos:

a) A: "sair múltiplo de 8"

b) B: "sair número par"

c) C: "sair número primo"

d) D: "sair 9"

e) E: "não sair 9"

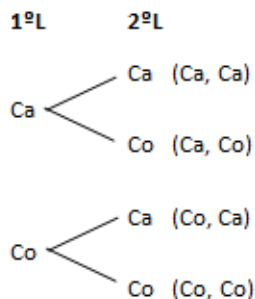
Exemplo 1. O Adamilton lançou duas vezes uma moeda de 1000 dobras e registou, em cada lançamento, a face da moeda que ficou voltada para cima.

Ca – face cala

Co – face coroa



Para obter todos os resultados possíveis, desta experiência, pode recorrer-se a um diagrama de árvore:



O conjunto de resultados possíveis é:

$S = \{ (Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co) \}$

Exemplo 2: Determinemos agora o espaço amostral da experiência aleatória que consiste em lançar dois dados, e observar os resultados.

Para esta experiência a melhor forma de obter todos os resultados é utilizando uma tabela de dupla entrada:

1 ^d \ 2 ^d	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

O espaço amostral é o conjunto formado pelos 36 elementos da tabela.

Exercícios:

3. Na figura estão representadas 6 fichas que foram colocadas num saco.



Indique o espaço de resultados associado a cada uma das seguintes experiências aleatórias:

3.1. Retirar uma ficha e observar a cor.

3.2. Retirar sucessivamente, com reposição, duas fichas e calcular a soma dos números das fichas retiradas

4. Considere a tabela ao lado (**exemplo 2**).

Identifique os acontecimentos:

A: O número de pintas é igual nos dois dados

B: A soma das pintas é 9.

C: O produto do número de pintas é 2.

$S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6) \}$

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Como os acontecimentos são identificados com conjuntos, a forma de operar com acontecimentos decorre da forma de se operar com conjuntos, com a correspondente adaptação a uma linguagem específica.

Exemplo: Num saco foram colocadas 6 bolas numeradas de 1 a 6.

Consideremos a experiência aleatória que consiste em tirar uma bola e observar o número que saiu. Sejam A e B os acontecimentos:

A: sair um número menor que 4. $A = \{1, 2, 3\}$

B: sair um número par. $B = \{2, 4, 6\}$

O espaço amostral da experiência aleatória é: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A representação dos conjuntos (acontecimentos) num diagrama de Venn, permite uma melhor visualização da distribuição do espaço amostral pelos acontecimentos.

> Reunião de dois acontecimentos: Reunião ou união dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se pelo menos um dos acontecimentos se realizar, A ou B. Representa-se por $A \cup B$ e lê-se (A ou B).

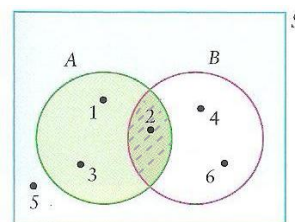
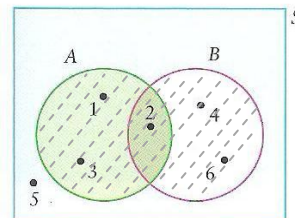
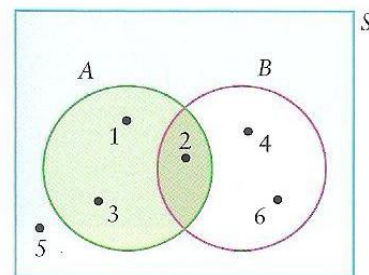
No exemplo: $A \cup B$: Sair um número menor que 4 ou par.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

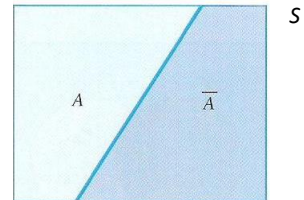
> Intersecção de dois acontecimentos: A intersecção dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A e B se realizarem simultaneamente. Representa-se por $A \cap B$ e lê-se (A e B).

No exemplo: $A \cap B$: Sair um número par menor que 4.

$A \cap B = \{2\}$

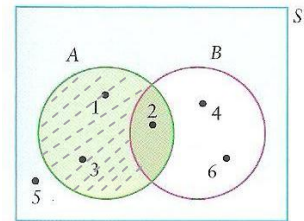


> **Acontecimentos contrários ou complementares:** O acontecimento contrário do acontecimento A representa-se por $\bar{A}$ e é o acontecimento constituído por todos os resultados de S que não pertencem a A.



No exemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ $A \cap \bar{A} = \{\}$
 $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ $A \cup \bar{A} = S$

> **Acontecimento diferença:** Acontecimento diferença entre A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize. Representa-se por $A - B$ ou $A \setminus B$.



No exemplo: $A \setminus B$: Sair um número menor que 4 que não seja par.
 $A \setminus B = \{1, 3\}$

Podemos ainda classificar dois acontecimentos como compatíveis ou incompatíveis:

> **Acontecimentos compatíveis:** Dois acontecimentos A e B são compatíveis se e só se $A \cap B \neq \{\}$.

No exemplo: A e B são compatíveis porque $A \cap B = \{2\}$

> **Acontecimentos incompatíveis:** Dois acontecimentos A e B são incompatíveis se e só se $A \cap B = \{\}$.

No exemplo: Consideremos o acontecimento C: sair o número 1.
B e C são incompatíveis porque $B \cap C = \{\}$

Nota: dado um conjunto finito A, com n elementos, diz-se que o cardinal de A é n e representa-se por $\#A = n$.

Exercícios:

5. Numa caixa foram colocadas dez fichas numeradas de 1 a 10. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma ficha e observar o seu número. Considere os acontecimentos:

A: Sair número primo.

B: Sair número par.

C: Sair número divisor de 6.

5.1. Represente os acontecimentos num diagrama de Venn.

5.2. Represente na forma de conjunto:

a) $A \cup B$ b) $B \cap C$ c) $\bar{C}$ d) $A \setminus C$ e) $C \setminus A$

6. Relativamente à experiência aleatória de lançar dois dados, de cores diferentes, e observar os números, considere os seguintes acontecimentos:

A: saírem dois números pares.

B: a soma dos números é 10.

C: saírem dois números diferentes.

D: o produto dos números é inferior a 5.

6.1. Represente na forma de conjunto:

a) D b) $A \setminus D$ c) $\bar{C}$ d) $A \cap B$

6.2. Defina um acontecimento:

a) compatível com D. b) incompatível com B.
c) contrário a A.

▪ APROXIMAÇÃO FREQUENCISTA DE PROBABILIDADE (FACULTATIVO)

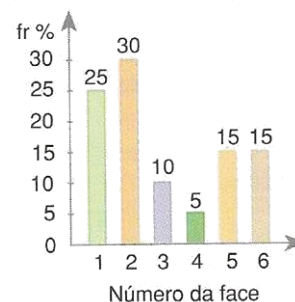
Consideremos a experiência aleatória: lançamento de um dado. Os seguintes gráficos representam a frequência relativa de cada um dos acontecimentos elementares: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$.

Com a ajuda dos gráficos e relembrando os conceitos de frequência absoluta e relativa, estudados na 10ª classe, complete as tabelas.

- Resultados de 100 lançamentos

X_i	1	2	3	4	5	6
n_i	25	30	10	5	15	15
f_i	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{30}{100} = 0,3$	$\frac{10}{100} = 0,1$	0,05	0,15	
$f_i\%$	25%	30%				

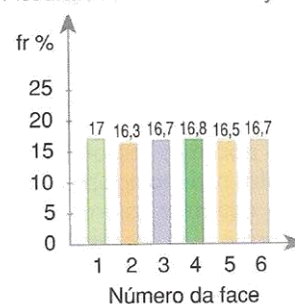
Resultados de 100 lançamentos



- Resultados de 1000 lançamentos

X_i	1	2	3	4	5	6
n_i	170	163	167		165	167
f_i	$\frac{170}{1000} = 0,17$	0,163	0,167		0,165	0,167
$f_i\%$	17%	16,3%	16,7%			

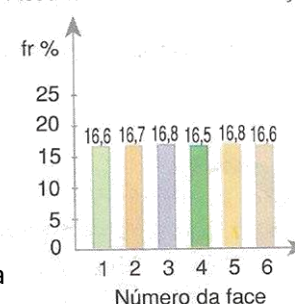
Resultados de 1000 lançamentos



- Resultados de 10 000 lançamentos

X_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1660	1670				
f_i						
$f_i\%$	16,6%	16,7%	16,8%			

Resultados de 10 000 lançamentos



A quantificação da probabilidade de um determinado acontecimento resulta em muitas situações, da observação dos resultados de um grande número de experiências.

No exemplo estudado verifica-se que à medida que o número de experiências aumenta, as frequências relativas de cada acontecimento elementar tendem a estabilizar em torno dos 0,167, assume-se esse valor como sendo a probabilidade dos referidos acontecimentos.

Nota: $fr(A)$ representa a frequência relativa de um acontecimento A e é calculada através do quociente entre o número de vezes que A ocorre e o número de experiências efectuadas.

Probabilidade (frequentista) de um acontecimento A representa-se por $P(A)$ e corresponde ao valor para que tende a estabilizar a frequência relativa da realização desse acontecimento, à medida que aumenta o número de repetições da experiência aleatória.

Nota: quanto maior é o número de vezes que a experiência é repetida, melhor será a estimativa obtida para a probabilidade.

Propriedades da probabilidade

Propriedades das frequências relativas	Propriedades das probabilidades
E – experiência aleatória em que o espaço de resultados é Ω e A e B são dois acontecimentos	
$0 \leq f_r(A) \leq 1$	$0 \leq P(A) \leq 1$
Se $A = \{a, b\}$, então $f_r(A) = f_r(\{a\}) + f_r(\{b\})$	Se $A = \{a, b\}$, então $P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\})$
Se $A = \Omega$, então $f_r(A) = 1$	Se $A = \Omega$, então $P(A) = 1$
Se $A = \{\}$, então $f_r(A) = 0$	Se $A = \{\}$, então $P(A) = 0$
Se $A \cap B = \{\}$, então $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$	Se $A \cap B = \{\}$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$f_r(\bar{A}) = 1 - f_r(A)$	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exercício:

7. Seja A um acontecimento associado a uma experiência aleatória com espaço de resultados S. Quais das seguintes igualdades são necessariamente falsas?

7.1. $fr(A) = -0,2$

7.2. $fr(A) = 1,02$

7.3. $fr(A) = 0,76$

8. Uma nova vacina está em fase de testes. Na tabela seguinte estão os registos do número de sucessos no decorrer dos testes.

Nº de testes	Nº de sucessos
200	165
500	423
1 000	843
2 000	1 682
5 000	4 202
7 500	6 308
10 000	8 403

Faça uma estimativa para a probabilidade de sucesso da aplicação da vacina num novo paciente. Fundamente a sua resposta.

▪ DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE OU DE LAPLACE

A primeira definição que se conhece de probabilidade foi enunciada por Pierre Simon Laplace (1749 – 1827).

Esta definição só pode ser aplicada quando os acontecimentos elementares são igualmente prováveis (equiprováveis).

Assim não podemos calcular a probabilidade de uma carga ficar voltada para cima usando a regra de Laplace. Neste e em muitos outros casos teríamos que recorrer à experiência (noção frequentista de probabilidade).

No entanto, no caso de lançamento de dados e moedas, extração de bolas, fichas e cartas de um baralho e em todas as situações em que os acontecimentos elementares são equiprováveis podemos calcular, com vantagem, a probabilidade usando a definição clássica de probabilidade (regra de Laplace).

Lei de Laplace ou regra de Laplace: Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favoráveis a A}}{\text{nº de casos possíveis}}$$

A regra de Laplace apenas se aplica no caso do conjunto de resultados ser finito.

Exemplo 1: Na figura está representada uma roleta dividida em 8 sectores circulares geometricamente iguais.

1.1. Consideremos a experiência:

I: Rodar a roleta e observar qual o número indicado pela seta.

Qual a probabilidade dos seguintes acontecimentos?

A: sair um número menor que 3. **B:** sair um número par. **C:** sair um número negativo.

Resolução:

Antes de calcular a probabilidade da cada um dos acontecimentos, definamos em extensão cada um deles para podermos ver com certeza quais os casos favoráveis: $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{1, 2\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ $C = \{\}$

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad P(C) = \frac{0}{8} = 0$$

1.2. Consideremos a experiência:

II: Rodar a roleta duas vezes e considerar o produto dos números saídos.

Qual a probabilidade dos seguintes acontecimentos:

D: o produto ser um número ímpar.

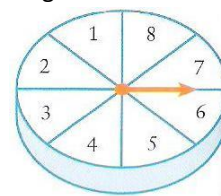
E: o produto ser maior que 5.

Resolução:

Para calcular a probabilidade da cada um dos acontecimento é útil definir o espaço amostral. Nesta experiência vamos usar uma tabela de dupla entrada:

×	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	72

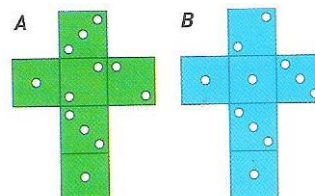
$$P(D) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad P(E) = \frac{54}{64} = \frac{27}{32} = 0,84$$



Exercícios:

9. Na figura estão representadas as planificações de dois dados equilibrados, A e B.

As faces estão pontuadas conforme a figura ilustra.



Indique o espaço de resultados de cada uma das seguintes experiências aleatórias e a probabilidade dos respectivos acontecimentos elementares:

9.1. Lançar o dado A e observar o número de pontos da face que fica voltada para cima.

9.2. Lançar o dado B e observar o número de pontos da face que fica voltada para cima.

10. Um saco contém bolas brancas e bolas pretas. Retira-se ao acaso uma bola.

A probabilidade de ser branca é $\frac{4}{5}$.

10.1. Se existirem 3 bolas pretas, quantas são as bolas brancas?

10.2. Se existirem 40 bolas no total, quantas delas são pretas?

Exemplo 2: Num teste há três afirmações, para as quais cada aluno deve indicar se é verdadeira (V) ou falsa (F). A Joana responde às três questões ao acaso.

Seja C o acontecimento: “A Joana acerta em, pelo menos, uma afirmação”.

Determine a probabilidade do acontecimento C.

Resolução:

Para cada afirmação, a Joana tem duas possibilidades: acertar – A ou errar – E

A contagem dos casos possíveis e dos casos favoráveis fica facilitada com recurso a uma representação em diagrama de árvore.

$S = \{ (A, A, A), (A, A, E), (A, E, A), (E, A, A), (E, A, E), (E, E, A), (E, E, E) \}$

$C = \{ (A, A, A), (A, A, E), (A, E, A), (E, A, A), (E, A, E), (E, E, A) \}$

Conclui-se, então, que há oito casos possíveis igualmente prováveis e sete casos favoráveis.

Por aplicação da lei de Laplace vem: $P(C) = \frac{7}{8}$

Raciocínio alternativo:

C: A Joana acerta em, pelo menos, uma afirmação.

$\bar{C}$: A Joana erra todas as afirmações. $\bar{C} = \{ (E, E, E) \}$

Então: $P(\bar{C}) = \frac{1}{8}$ Como $P(C) = 1 - P(\bar{C})$ tem-se $P(C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Exemplo 3: Na cidade X existem dois jornais com publicação semanal, o “Tira-Teimas” e o “Semanário”. Numa sondagem feita a 200 pessoas da cidade foi obtida a seguinte informação: 70 pessoas assinam o “Tira-Teimas”, 120 pessoas assinam o “Semanário” e 50 não assinam nenhum dos dois.

3.1. Quantas pessoas assinam os dois jornais?

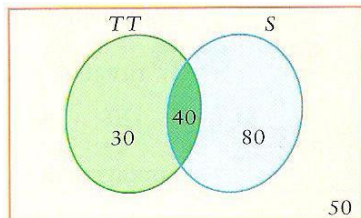
3.2. Escolhendo uma pessoa ao acaso qual a probabilidade de ela assinar apenas o jornal “Semanário”?

Resolução:

3.1. Para facilmente respondermos às questões vamos construir um diagrama de Venn.

$70 + 120 + 50 = 240$

Isso quer dizer que 40 pessoas assinam os dois jornais simultaneamente.



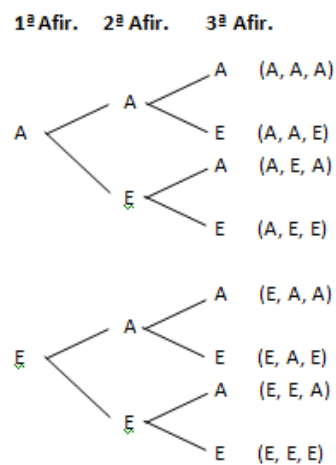
3.2. $P(\text{apenas Semanário}) = \frac{80}{200} = 0,4$

Em problemas anteriores já surgiram situações de experiências que envolviam mais do que uma experiência simples: lançar dois dados, lançar três moedas, tirar de um saco sucessivamente três bolas...

Com o exemplo seguinte vamos aprofundar alguns métodos para a resolução deste tipo de problemas.

Exemplo 4: Temos um saco com 5 fichas com o número 1 e três fichas com o número 2. Retiramos uma ficha do saco e tomamos nota do número, colocamos de novo a ficha no saco e retiramos nova ficha.

Qual a probabilidade das duas fichas terem o número 2?



Exercícios:

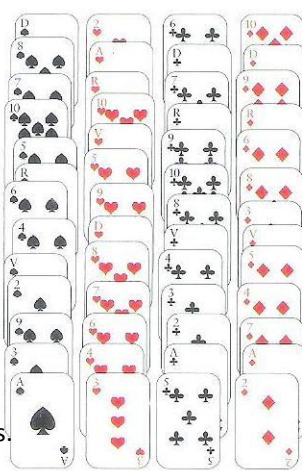
11. De um baralho com 52 cartas é retirada uma ao acaso.

Determine a probabilidade do acontecimento:

11.1. sair uma carta de copas.

11.2. sair uma carta que não seja de paus.

11.3. sair um rei.



12. Numa caixa há 10 bolas indistinguíveis ao tacto, que diferem apenas na cor: 5 vermelhas, 3 amarelas e 2 pretas.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola e observar a cor. Dê um exemplo de um acontecimento cuja probabilidade de ocorrer seja:

12.1. 50% **12.2.** $\frac{1}{5}$ **12.3.** 80% **12.4.** 0,7

13. Numa turma de 22 alunos, 10 praticam futebol, 11 praticam basquetebol e 5 praticam os dois desportos referidos.

13.1. De acordo com os dados construa um diagrama de Venn.

13.2. Encontrou-se ao acaso um dos alunos da turma. Qual a probabilidade de ele:

a) praticar natação?

b) praticar apenas futebol?

14. Considere uma caixa com quatro camisolas, uma de cada cor, e uma caixa com quatro saias, com as mesmas cores das camisolas.

Retirou-se ao acaso, uma camisola e uma saia. Qual a probabilidade de obter uma saia e uma camisola da mesma cor?

Resolução:

Esta experiência é composta por duas experiências simples. Para calcularmos a probabilidade nestas situações procura-se o método mais conveniente para contar os casos favoráveis e os casos possíveis.

Vamos resolver este problema por três métodos diferentes.

1º método: Vamos construir uma tabela de dupla entrada para contarmos os casos favoráveis e os casos possíveis.

1^a	1	1	1	1	1	2	2	2
2^a	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)

Para que as duas fichas tenham o número dois, temos 9 casos favoráveis em 64 possíveis.

$$P(\text{pedida}) = \frac{9}{64}$$

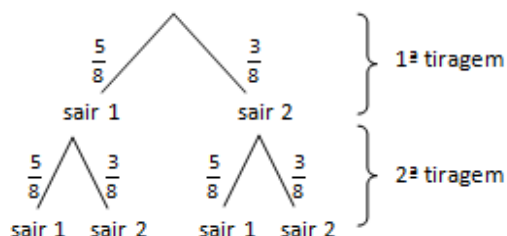
2º método: Regra do produto

Casos possíveis: 1^a tiragem $\times$ 2^a tiragem
 $8 \times 8 = 64$

Casos favoráveis: 1^a tiragem $\times$ 2^a tiragem
 $3 \times 3 = 9$

$$P(\text{pedida}) = \frac{9}{64}$$

3º método: No diagrama seguinte estão representadas as probabilidades correspondentes a cada uma das tiragens



Para determinar a probabilidade de termos dois 2 o raciocínio é:

“Em $\frac{3}{8}$ dos casos a 1^a ficha é 2 e a 2^a ficha é também 2 em $\frac{3}{8}$ dos

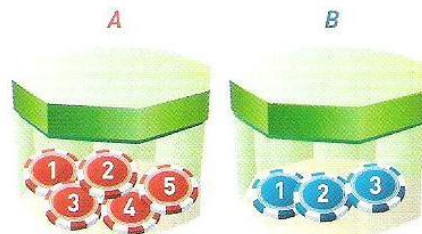
$\frac{3}{8}$ casos.” $P(\text{pedida}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

Notas:

- Dois acontecimentos A e B de uma experiência aleatória dizem-se equiprováveis quando: $P(A) = P(B)$
- Na resolução de um exercício que envolva um acontecimento do tipo “... pelo menos ...” é aconselhável verificar se o recurso ao acontecimento contrário simplifica a sua resolução.

Exercícios:

15. Na figura estão representadas duas caixas.



A caixa A contém cinco fichas numeradas de 1 a 5 e a caixa B contém três fichas numeradas de 1 a 3. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao caso, uma ficha de cada caixa e registar os números das fichas.

Determine a probabilidade de:

15.1. o número da ficha que é retirada da caixa A ser menor que o número da ficha da caixa B.

15.2. a soma dos números das fichas ser um número ímpar.

15.3. as fichas terem o mesmo número.

16. Um inquérito feito a 60 funcionários de uma empresa, relativamente ao transporte público utilizado permitiu concluir que:

- 25 utilizam autocarro;
- 18 utilizam o comboio;
- 20 não utilizam transporte público.

Escolhe-se ao caso, um dos 60 funcionários.

Determine a probabilidade de o funcionário escolhido utilizar:

16.1. o comboio.

16.2. dois transportes públicos.

16.3. apenas um transporte público.

17. Numa caixa há bombons sendo uns de café e outros de licor. Retirando ao acaso, um bombom da caixa, a probabilidade de ser de café é 24%. Quantos são os bombons de licor sabendo que há seis de café?

18. Uma moeda de 500 dobras é lançada três vezes consecutivas.

Determine a probabilidade de ocorrer:

18.1. três vezes a face coroa.

18.2. pelo menos uma vez, a face coroa.

18.3. no máximo uma vez, a face coroa.

19. Sabe-se que os acontecimentos elementares de uma experiência aleatória são equiprováveis e designados por A, B, C e D.

Determine:

19.1. $P(A)$

19.2. $P(\bar{B})$

19.3. $P(A \cup B)$

20. Numa *slot machine* é gerada aleatoriamente uma sequência de quatro algarismos, em cada jogada.



Cada elemento da sequência pode tomar valor de 0 a 9.

- 20.1.** Numa jogada, quantos são os resultados possíveis?
- 20.2.** Qual a probabilidade da sequência ter pelo menos um 1?
- 20.3.** Qual a probabilidade da sequência ser o ano em que nasceu? Apresente o resultado na forma de potência de base 10.
- 21.** Retiram-se duas cartas ao acaso de um baralho de 52, sucessivamente e sem reposição. Determine a probabilidade de:
- 21.1.** ambas serem reis.
- 21.2.** nenhuma ser ás.
- 21.3.** ambas serem de copas.
- 21.4.** ambas serem do mesmo naipe.
- 21.5.** sair um e um só rei.

22. Numa turma de 30 alunos, as suas idades e sexos estão distribuídos como se indica na tabela:

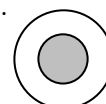
Idade	Rapazes	Raparigas
16	5	6
17	7	8
18	3	1

22.1. Encontrou-se ao acaso um aluno da turma. Qual é a probabilidade de que seja uma rapariga de 17 anos?

22.2. Seleccionaram-se dois alunos da turma ao acaso.

- a)** Determine a probabilidade de serem dois rapazes de idades diferentes.
- b)** Determine a probabilidade de terem mesma idade mas serem de sexos diferentes.

23. Na figura encontra-se representado um alvo circular de raio r , sendo o raio do círculo menor metade do raio do alvo. Admita que se lança um dardo que atinge sempre o alvo e que todos os pontos têm igual probabilidade de serem atingidos.

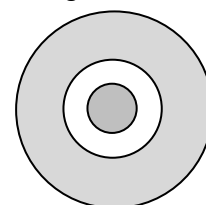


23.1. Mostre que a probabilidade de acertar na coroa circular de cor branca é 75%.

23.2. Admita que se pretende construir um novo alvo, com raio igual ao dobro do raio anterior e com uma nova região como é sugerido na figura.

Justifique a afirmação:

“A probabilidade do dardo acertar na região correspondente ao alvo anterior é 25%.”



▪ DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADES

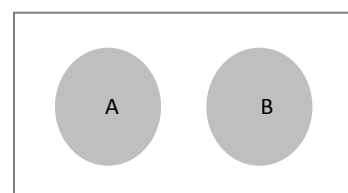
A abordagem intuitiva das probabilidades tornou-se uma preocupação crescente da comunidade matemática, até que nas primeiras décadas do século XX houve uma formalização da teoria das probabilidades, de modo a torná-la logicamente coerente, suportada por um conjunto de afirmações verdadeiras e independentes – os chamados axiomas – a partir dos quais todos os resultados – os teoremas – pudessem ser deduzidos.

Chama-se probabilidade a toda a aplicação P de domínio S e conjunto de chegada $\mathbb{R}$ tal que, a todo o acontecimento A é associado um número real $P(A)$, que se designa por probabilidade do acontecimento A .

Esta aplicação verifica os seguintes axiomas:

- > **Axioma 1 :** $P(A) \geq 0$ A probabilidade de um acontecimento é um número não negativo.
- > **Axioma 2 :** $P(S) = 1$ A probabilidade do acontecimento certo é 1.
- > **Axioma 3 :** Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ A probabilidade da reunião de dois acontecimentos disjuntos é igual à soma das probabilidades desses acontecimentos.

S



Com base nestes três axiomas desmostraremos alguns teoremas.

> **Teorema 1:** $P(\emptyset) = 0$

A probabilidade do acontecimento impossível é zero.

Demonstração: Tem-se: $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$

Pelo axioma 3 temos: $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$ que é equivalente a $P(S) = P(S) + P(\emptyset)$ tendo em conta $(S \cup \emptyset = S)$.

Logo, $P(\emptyset) = 0$

> **Teorema 2:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

A probabilidade do acontecimento contrário $\bar{A}$ é igual à diferença entre 1 e a probabilidade de A.

Demonstração: Tem-se: $A \cup \bar{A} = S$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$

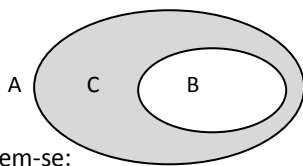
$$P(A \cup \bar{A}) = P(S)$$

$$\text{Então: } P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (\text{Axiomas 2 e 3})$$

$$\text{Logo: } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

> **Teorema 3:** Se A e B são acontecimentos tais que $B \subset A$, então $P(B) \leq P(A)$.

Demonstração: Se $B \subset A$, então existe C tal que $B \cap C = \emptyset$ e $B \cup C = A$.



Por aplicação do axioma 3, tem-se:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = P(A).$$

Pelo axioma 2, sabe-se que $P(C) \geq 0$, então pode-se concluir que $P(B) \leq P(A)$.

> **Teorema 4:** $0 \leq P(A) \leq 1$

A probabilidade de qualquer acontecimento A é um número do intervalo $[0, 1]$.

Demonstração: Pelo axioma 1, sabe-se que $P(A) \geq 0$. (1)
Como $A \subset S$, por aplicação do teorema 3, conclui-se que $P(A) \leq P(S)$

Pelo axioma 2, tem-se $P(S) = 1$. Então $P(A) \leq 1$. (2)

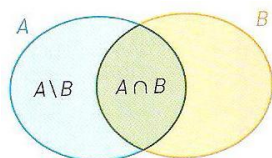
De (1) e (2), conclui-se que $0 \leq P(A) \leq 1$.

> **Teorema 5:** Se A e B são acontecimentos compatíveis, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração:

Os acontecimentos $A \setminus B$ e $A \cap B$ são incompatíveis e $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$



Pelo axioma 3, tem-se:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

Daqui resulta que $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. (3)

Os acontecimentos $A \setminus B$ e B são incompatíveis e $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

Pelo axioma 3, tem-se: $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$

Daqui resulta que $P(A \setminus B) = P(A \cup B) - P(B)$. (4)

Comparando (3) e (4): $P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Ou seja, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Recorde: Leis de Morgan

Vimos na 10ª classe que as leis de Morgan que estudamos para condições também se aplicam a conjuntos. Uma vez que um acontecimento também se pode definir por um conjunto podemos utilizar as seguintes igualdades entre acontecimentos.

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{e} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Exercícios:

24. Sejam A e B dois acontecimentos da mesma experiência aleatória. Sabe-se que $P(A) = 0,5$ e $P(B) = 0,3$. Explique porque não é possível que:

24.1. A e B sejam acontecimentos contrários.

24.2. $P(A \cap B) = 0,4$

24.3. $P(A \cup B) = 0,9$.

25. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que $P(A) = 0,2$ e $P(B) = 0,5$.

Indique, justificando, o intervalo a que pertence $P(A \cup B)$.

26. Sejam A e B dois acontecimentos da mesma experiência aleatória.

Indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

26.1. Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A) = 1 - P(B)$.

26.2. Se A e B são acontecimentos contrários, então: $P(A) + P(B) = 1$.

26.3. Se $P(A) + P(B) = 1$, então A e B são acontecimentos contrários.

27. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos contrários.

- $P(A) \times P(B) = 2/9$

- $P(A) < P(B)$

Determine as probabilidades de A e de B.

28. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Mostre que:

28.1. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

28.2. Se A e B são incompatíveis então

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A}) - P(B)$$

29. A, B e C são os acontecimentos elementares de uma experiência aleatória. Sabe-se que: $P(C) = 0,2$

Determine: $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

▪ PROBABILIDADE CONDICIONADA E PROBABILIDADE DA INTERSECÇÃO DE ACONTECIMENTOS

Consideremos o dominó constituído pelas 28 peças representadas na figura:

Depois de as peças terem sido baralhadas, retira-se uma ao acaso e observa-se a pontuação dessa peça.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos:

A: Sair uma peça com 4 pontos em pelo menos um dos lados.

B: A soma dos pontos da peça é 9.



- Qual a probabilidade de ocorrer o acontecimento A?

Entre os 28 casos possíveis há 7 casos favoráveis. Assim, tem-se: $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

- Qual a probabilidade de ocorrer o acontecimento A, sabendo que ocorreu o acontecimento B?

Saber-se que ocorreu o acontecimento B condiciona o número de casos possíveis que passam a ser dois e nesses casos possíveis existe um favorável.

Neste caso a probabilidade representa-se por: $P(A|B)$



Observe-se que:

$$P(A|B) = \frac{1}{2} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#S}}{\frac{\#B}{\#S}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercícios:

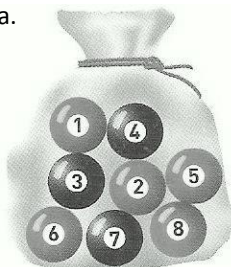
30. Um casal tem três filhos. Se for igualmente provável nascer uma rapariga ou um rapaz, calcule a probabilidade de:

30.1. O filho mais velho ser rapaz;

30.2. O filho mais novo ser rapariga;

30.3. O casal ter exactamente duas raparigas, sabendo que o filho mais novo é do sexo feminino.

31. Num saco há oito bolas numeradas de 1 a 8, sendo cinco cinzentas e três pretas, como é sugerido na figura.



Uma bola é retirada do saco, ao acaso, e observa-se o número e a cor dessa bola.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: Sai bola cinza.

B: Sai bola com um número par.

Determine:

31.1. $P(A|B)$ **31.2.** $P(B|\bar{A})$

31.3. $P(\bar{A}|\bar{B})$ **31.4.** $P(\bar{B}|A)$

31.5. $P(\bar{A}|B)$ **31.6.** $P(B|A)$

No caso geral, sendo A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória e tais que $P(B) \neq 0$, a probabilidade condicionada de A, sabendo B, é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Da igualdade anterior resulta: $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$

32. Considere o lançamento de um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Determine a probabilidade de sair a face com o número 3 se:

32.1. não houver qualquer outra informação.

32.2. souber que saiu número par.

32.3. souber que saiu número ímpar.

33. Numa empresa produzem-se dois tipos de peças, A e B.

Sabe-se que:

- 60% da produção corresponde a peças do tipo A;

- 2% das peças do tipo A têm defeito;

- 4% das peças do tipo B têm defeito.

Escolheu-se, ao acaso, uma peça e verificou-se que não tem defeito. Qual é a probabilidade de ser uma peça do tipo A?

34. A e B são dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória, tais que:

$P(A) = 0,3$ $P(B) = 0,6$ $P(A \cup B) = 0,9$

34.1. Os acontecimentos A e B são incompatíveis? Justifique.

34.2. Determine: **a)** $P(A|B)$ **b)** $P(\bar{A}|\bar{B})$

35. O Ivo desloca-se diariamente para a escola de comboio. Sejam A e B os acontecimentos:

A: Acordar tarde. **B:** Perder o comboio.

Sabe-se que $P(A|B) = 0,8$ e $P(B) = 0,25$

35.1. Defina, em linguagem corrente os acontecimentos $B|A$ e $A|B$.

35.2. Determine $P(A \cap B)$.

▪ ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES

O conceito de independência é um dos mais importantes em probabilidades.

Dois acontecimentos são independentes quando a realização de um deles não interfere na probabilidade do outro.

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se
 $P(A|B) = P(A)$, $P(B) > 0$

Utilizando a definição de probabilidade condicionada podemos ainda concluir:

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

De um modo geral, se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são n acontecimentos independentes, então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

Exercícios:

36. De um baralho com 40 cartas, 10 de cada naipe, foram retiradas três cartas, sucessivamente e com reposição.

Determine a probabilidade de:

36.1. saírem três reis;

36.2. saírem exactamente dois ases;

36.3. saírem espadas;

36.4. não sair qualquer carta de copas.

37. Joga-se um dado duas vezes. Determine a probabilidade de se obter um número par na 1ª jogada e um "5" na 2ª jogada.

38. Em relação a uma experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos independentes.

Sabe-se que $P(A) = 0,2$ e $P(\bar{B}) = 0,7$.

Determine $P(A \cap B)$.

39. Em relação a uma experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos possíveis e independentes.

Mostre que: $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B|A)$

40. Em relação a uma experiência aleatória, os acontecimentos A e B são tais que:

$$P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,5 \text{ e } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,6 .$$

40.1. Verifique se os acontecimentos A e B são independentes.

40.2. Determine a probabilidade de não se verificar A nem B.

41. A Adjamilia e o Edson não sabem que foram convidados para a mesma festa. As probabilidades de a Adjamilia e o Edson irem à festa são, respectivamente, 0,5 e 0,7.

Qual a probabilidade de ambos irem à festa?

Exemplo: Consideremos o duplo lançamento de um dado cúbico numerado de 1 a 6 e os seguintes acontecimentos:

A: Sair o número 4 no primeiro lançamento.

B: A soma dos números que ocorrem nos dois lançamentos é 9.

C: Sair número par no segundo lançamento.

- A e B são acontecimentos dependentes:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(B|A) = \frac{1}{6}$$

Temos que $P(B) \neq P(B|A)$

- A e C são acontecimentos independentes:

$$P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(C|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(C)$$

Temos que $P(C) = P(C|A)$

42. Mostre que o acontecimento impossível é independente de qualquer outro acontecimento.

43. Em relação a uma experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos tais que:

$$P(A) = \frac{1}{2} ; P(B) = \frac{2}{5} \text{ e } P(A|\bar{B}) = \frac{7}{12} .$$

43.1. Determine $P(A \cap B)$.

43.2. Os acontecimentos A e B são independentes?

44. Dejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória, tais que:

$$P(A) = \frac{3}{5} ; P(B) = \frac{1}{2} \text{ e } P(A \cup B) = \frac{3}{5}$$

Mostre que A e B não são independentes.

45. Os alunos de duas turmas A e B encontram-se num autocarro para iniciarem, em conjunto, uma viagem de fim de curso. A turma A é constituída por 15 rapazes e 10 raparigas e a turma B por 8 rapazes e 12 raparigas. Escolhe-se, ao acaso, um aluno.

Calcule a probabilidade de:

45.1. Ser um rapaz da turma A.

45.2. Ser da turma B, sabendo que é rapariga.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

No cálculo de probabilidades, muitas vezes, a principal dificuldade reside na contagem no número de casos possíveis e do número de casos favoráveis associados a um determinado acontecimento.

Em muitas situações, há necessidade de fazer contagens sem a possibilidade de as fazer elemento a elemento. Este tipo de necessidades tem características comuns que permitiram desenvolver os chamados modelos combinatórios.

O estudo desses modelos apoia-se em quatro conceitos fundamentais:

- > princípio fundamental de contagem (regra do produto);
- > permutações e arranjos simples (sem repetição);
- > arranjos completos (ou com repetição);
- > combinações.

▪ PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

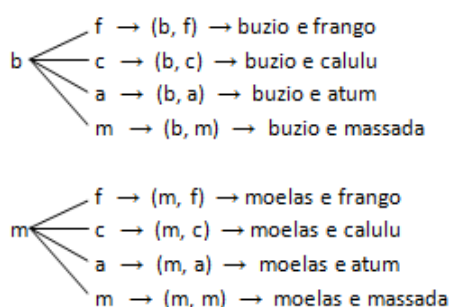
Utilizando um exemplo vamos recordar o princípio fundamental de contagem.

Exemplo 1: Considerando a ementa ao lado, quantas refeições diferentes podemos:

- 1.1. fazer com uma entrada e um prato (sem sobremesa)?
- 1.2. organizar com uma entrada, um prato e uma sobremesa?

Resolução: 1.1. A construção do diagrama de árvore correspondente sugere o processo de contagem e podemos verificar que podemos combinar 8 refeições diferentes.

Este valor aparece da multiplicação do número de entradas com o número de pratos principais: $2 \times 4 = 8$ refeições



Ementa	
Entradas:	
- Buzio	
- Moelas	
Prato principal:	
- Frango assado	
- Calulu	
- Atum grelhado	
- Massada de peixe	
Sobremesas:	
- Ananás	
- Pudim de cocô	
- Doce da casa	

- 1.2. Considerando, agora as sobremesas podemos calcular directamente:
 $2 \text{ entradas} \times 4 \text{ pratos principais} \times 3 \text{ sobremesas} = 24 \text{ refeições diferentes}$

Princípio fundamental de contagem:

Quando é necessário realizar k escolhas sucessivas, em que na primeira há n_1 alternativas, na segunda há n_2 alternativas, ..., e na escolha de ordem k há n_k alternativas, então o número total de alternativas é dado por:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k.$$

Exercícios:

46. Com 3 pares de calças e 2 camisas, de quantas formas diferentes o Adilson se pode vestir?
47. Quantos números pares diferentes e com 3 algarismos existem no sistema decimal?
48. Da ementa de um restaurante escolhido pela Andresa para almoçar constam 2 sopas, 3 pratos de peixe, 3 pratos de carne e 5 sobremesas. Quantas são as escolhas possíveis se a Andresa pretender apenas:
 - 48.1. uma sopa e um prato de peixe?
 - 48.2. um prato de carne e uma sobremesa?
 - 48.3. uma sopa, um prato de peixe e uma sobremesa.

49. O Pedro tem os sacos que estão na figura.



Pretende retirar uma bola de cada saco e escrever o número de três algarismos em que o algarismo das centenas corresponde ao da bola retirada do saco A, o algarismo das dezenas corresponde ao da bola retirada do saco B e o das unidades ao da bola retirada do saco C.

- 49.1. Quantos números distintos podem ser escritos?
- 49.2. Dos números que podem ser escritos, quantos são:
 - a) múltiplos de 5?
 - b) pares?
 - c) capicuas (números que se leem de igual forma da esquerda para a direita e da direita para a esquerda)?

▪ PERMUTAÇÕES E ARRANJOS SIMPLES (SEM REPETIÇÃO)

No estudo que se segue, vamos recorrer frequentemente ao produto dos primeiros n números naturais. Tal produto tem, em Matemática uma notação designada por fatorial.

Dado um número natural n , chama-se fatorial de n (ou n fatorial) ao produto dos n primeiros números naturais e representa-se por $n!$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

Nota: por convenção $0! = 1$

Exercício:

50. Calcule:

50.1. $6!$

50.2. $7! - 5!$

50.3. $\frac{12!}{10!}$

50.4. $\frac{8 \times 10! - 9!}{9}$

Exemplo 2: Cinco amigos vão de férias, fazendo a viagem até à cidade de destino de autocarro. Para irem todos juntos ocupam os 5 lugares que existem no fundo do autocarro.

2.1. De quantas formas diferentes os cinco amigos podem ocupar os cinco lugares?

Resolução: Reparemos que:

- o número de pessoas é igual ao número de lugares disponíveis.
- a ordem interessa, isto é, se se trocar a ordem dos amigos temos uma combinação final diferente.

Para o primeiro lugar temos 5 possibilidades (5 amigos), para o segundo lugar já só temos 4 possibilidades, uma vez que um deles já se sentou, para o terceiro lugar temos 3 possibilidades, para o quarto lugar temos 2 possibilidades e para o quinto lugar (último) resta um dos amigos.

Assim o número total de combinações é: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

Como o número de pessoas é igual ao número de lugares, bastou permutar os lugares entre si. Fez-se a permutação de 5 elementos que se pode representar por $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

Exemplos:

C	D	A	B	E
---	---	---	---	---

A	B	D	E	C
---	---	---	---	---

A	D	B	E	C
---	---	---	---	---

Dado um conjunto com n elementos, dá-se o nome de permutações de n aos grupos que se podem formar tais que:

- todos os grupos têm n elementos
- dois ou mais grupos diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos.

O número de permutações de n é representado por P_n e o valor é dado por:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1, \text{ ou seja, } P_n = n!$$

Exemplo 2: 2.2. Num dos dias os amigos decidiram percorrer a cidade de carruagem, mas cada carruagem só levava três. Tiveram que ocupar, por isso, duas carruagens, a primeira com três amigos e a segunda com dois.

De quantas formas podem ocupar os três lugares da primeira carruagem?

Resolução: Reparemos que:

- o número de pessoas é superior ao número de lugares disponíveis.
- a ordem continua a interessar, isto é, se se trocar a ordem dos amigos temos uma combinação final diferente.

Para o primeiro lugar temos 5 possibilidades (5 amigos), para o segundo lugar já só temos 4 possibilidades e para o terceiro lugar (último) temos 3 possibilidades.

Assim o número total de combinações é: $5 \times 4 \times 3 = 60$

Cada uma das combinações corresponde a uma sequência de três amigos escolhidos de um conjunto de cinco.

Ao número obtido desta forma dá-se o nome de arranjos simples de 5 tomados 3 a 3 e representa-se por 5A_3 .

Observemos que: ${}^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{(5-3)!}$

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjos simples ou arranjos sem repetição de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) aos diferentes grupos que se poder formar com p elementos tais que:

- em cada grupo há p elementos não repetidos;
- dois se diferem em algum elemento ou na ordem de colocação dos mesmos.

O número de arranjos sem repetição de n elementos tomados p a p representa-se por nA_p e o seu valor é dado por:

$${}^nA_p = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times (n-p+1), \text{ ou seja, } {}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exercícios: 51. A Elsa comprou 5 CDs e vai escolher 4 para oferecer um a cada um dos seus sobrinhos. De quantas maneiras diferentes pode apresentar os sobrinhos? 52. Numa turma de 25 alunos vão ser escolhidos 3 alunos. Cada um deverá participar numa reunião. De quantas maneiras se podem escolher os três alunos, sabendo que as reuniões se realizam à mesma hora? 53. Durante o período de férias, às refeições, o Nuno e os seus dois irmãos partilham tarefas. Um põe a mesa, outro levanta-a e o terceiro lava a loiça. De quantas maneiras se pode fazer a distribuição das tarefas?	54. Utilizando todas as letras da palavra “BONITA” quantas palavras diferentes, com ou sem significado, se podem formar? 55. Antes do início de um jogo de futebol 11 jogadores de uma equipa colocaram-se em fila, para tirarem uma fotografia. De quantas formas diferentes se podem dispor os 11 elementos sabendo que: a) o guarda-redes fica no meio. b) o guarda-redes fica num dos cantos. 56. Calcule: a) 6A_2 b) 5A_3 c) ${}^{10}A_4$ 57. Quantos números de quatro algarismos diferentes existem, no sistema de numeração decimal, que não tenham zero? 58. Com as cores vermelha, verde, azul e amarela pretendem-se fazer bandeiras tricolores. Variando as cores ou a ordem. Quantas bandeiras diferentes é possível fazer?
---	--

▪ ARRANJOS COMPLETOS (COM REPETIÇÃO)

Exemplo 3: Considere-se um saco com três fichas como mostra a figura.

Retira-se ao acaso uma ficha do saco, verifica-se o número, introduz-se de novo a ficha no saco e repete-se este processo quantas vezes se queira.

3.1. Quantos números diferentes podemos formar com duas extracções?

3.2. Quantos números diferentes podemos formar com três extracções?

3.3. Quantos números diferentes podemos formar com n extracções?

Resolução: 3.1. Mais uma vez, um diagrama de árvore ajuda a responder à questão, embora a regra da multiplicação permita, desde já, concluir que há $3 \times 3 = 9$ números diferentes.

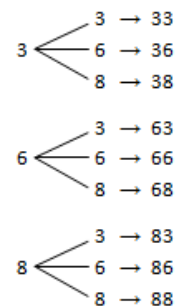
Na 1ª extracção temos três possibilidades, na 2ª extracção repetem-se as três possibilidades, havendo no total $3 \times 3 = 3^2$

3.2. Por um processo idêntico ao anterior, tem-se em cada uma das extracções três possibilidades: 3, 6 e 8.

No total das extracções o número de possibilidades é: $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

3.3. No caso de n extracções, em cada uma delas continuam a existir três possibilidades, havendo no total:

$$3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^n$$



Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjos completos ou arranjos com repetição de n elementos tomados p a p aos diferentes grupos que se poder formar com p elementos tais que:

- em cada grupo há p elementos repetidos ou não;
- dois grupos são diferentes se diferem em algum elemento ou na ordem de colocação dos mesmos.

O número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p representa-se por ${}^nA'_p$ e o seu valor é dado por:

$${}^nA'_p = n^p$$

Exercícios: 59. Com os dígitos 1, 2, 3 e 4 quantos números de três algarismos se podem escrever? 60. Quantos são os resultados possíveis se lançarmos 7 vezes um dado com as faces numeradas de 1 a 6 e registarmos o número da face saída em cada lançamento? 61. Quantos resultados possíveis existem quando se lança uma moeda: 61.1. duas vezes? 61.2. dez vezes?	62. Quatro amigas encontram-se numa pastelaria e cada uma vai escolher um bolo. De quantas maneiras diferentes podem escolher, sabendo que há 9 variedades de bolos. 63. Com os algarismos 0, 2, 3, 5 e 7, quantos números de quatro algarismos e menores que 3000 se podem escrever? 64. O alfabeto Morse utilizava os símbolos • e -. 64.1. Quantas sequências de três símbolos se podiam escrever? 64.2. Qual o número de sequências com o número máximo de três símbolos?
---	---

▪ COMBINAÇÕES SEM REPETIÇÃO

Há problemas de contagem que envolvem a escolha de grupos onde interessam os elementos que constituem o grupo, independentemente da sua ordem.

Exemplo 4: Numa turma de 20 alunos vão ser escolhidos três para representar a turma numa reunião com a Direcção.

4.1. Quantos grupos diferentes podem ser formados?

4.2. Quantos grupos diferentes podem ser formados sabendo que o delegado de turma terá que fazer parte do grupo?

Resolução:

4.1. Na resolução deste problema a ordem não interessa. O grupo ser formado, por exemplo, pelo António, pela Eunice e pelo Emanuel corresponde à mesma situação que ter o grupo constituído pela Eunice, pelo Emanuel e pelo António. Assim o número de grupos que é possível formar corresponde ao número de subconjuntos de 3 elementos que é possível definir num conjunto de 20 elementos.

$$\text{Número de subconjuntos: } \frac{{}^{20}A_3}{3!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

A este número chama-se combinações sem repetição de 20, 3 a 3 e representa-se por: ${}^{20}C_3$

4.2. Uma vez que já sabemos que o delegado terá que fazer parte do grupo, trata-se de escolher dois alunos entre os restantes 19, não interessando novamente a ordem.

$$\text{Temos então: } {}^{19}C_2 = \frac{{}^{19}A_2}{2!} = \frac{19 \times 18}{2} = 171$$

Combinações sem repetição de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) representa-se por nC_p e é o número de subconjuntos com p elementos que se podem obter a partir de um conjunto de n elementos, tais que:

- em cada subconjunto tem p elementos;
- dois grupos são diferentes se diferem em algum elemento não interessando a ordem da sua distribuição.

$${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!} \quad \text{ou} \quad {}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercícios:

65. Considere um baralho de 40 cartas, 10 de cada naipe. De quantas maneiras se pode formar um grupo de seis cartas, sendo duas e só duas de copas?

66. A Marta foi à Feira do Livro e verificou que as suas economias só lhe permitem comprar cinco dos sete livros que lhe interessam. De quantas maneiras pode escolher os cinco livros?

67. Com os vértices de um octógono regular, quantos triângulos se podem definir?

68. Uma empresa vai admitir 6 pessoas.

Apresentaram-se 45 candidatos: 20 homens e 25 mulheres. De quantas maneiras diferentes podem ser preenchidas as vagas se forem escolhidos:

68.1. candidatos do mesmo sexo?

68.2. dois homens e quatro mulheres?

68.3. no máximo dois homens?

68.4. pelo menos uma mulher?

69. Sem recorrer à calculadora, calcule:

a) 5C_2

b) 8C_3

c) ${}^{10}C_9$

Quadro resumo

	Arranjos completos	Arranjos simples	Permutações	Combinações
A ordem influencia?	Sim	Sim	Sim	Não
Pode haver repetição de elementos?	Sim	Não	Não	Não
Cálculo	${}^nA'_p = n^p$	${}^nA_p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$ ${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$P_n = n!$	${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!}$ ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercícios:

70. Oito jovens vão dar um passeio em dois automóveis de cinco lugares cada um. Qualquer um dos jovens pode conduzir. De quantas maneiras os oito jovens se podem repartir pelos dois automóveis?

71. O Olívio comprou um telemóvel e vai introduzir um PIN constituído por uma sequência de quatro dígitos.

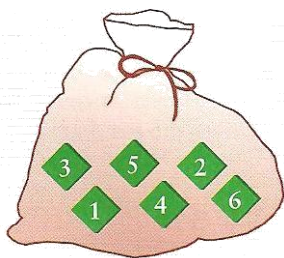
71.1. Qual é o número total de possibilidades distintas que o Olívio dispõe para a escolha do PIN?

71.2. O Olívio não gosta do 0 nem do 9. Quantas são as possibilidades, rejeitando estes dois algarismos?

71.3. Admita que o Olívio quer escolher um PIN envolvendo apenas dígitos que representam números primos. Quantas são as possibilidades?

72. De um saco com seis fichas com os números de 1 a 6, extraem-se sucessivamente e sem reposição três fichas, anotando-se o número da ficha em cada extracção.

Quantos números diferentes é possível obter?



73. De quantas formas diferentes é possível colocar sete bolas todas diferentes em, duas caixas também diferentes se, em cada caixa, tiver que ficar pelo menos uma bola?

74. O Marco está de férias na sua terra natal e tenciona visitar 6 amigos de infância. De quantas maneiras pode organizar as visitas?

75. Os primeiros-ministros de 7 países, incluindo, São Tomé e Príncipe, Portugal, Angola e Moçambique, encontraram-se para uma reunião.

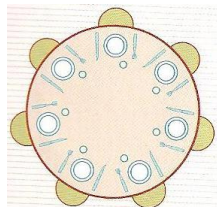
75.1. Todos se cumprimentaram entre si no início da reunião. Quantos cumprimentos foram trocados?

75.2. Sabendo que se sentaram numa mesa em fila:

a) de quantas formas se podem sentar?

b) de quantas formas diferentes se podem sentar se o português e o moçambicano querem ficar juntos e o santomense e o angolano querem ficar nos extremos?

75.3. De quantas formas diferentes se podem sentar os sete à volta de uma mesa redonda?



76. Numa caixa há oito bolas numeradas de 1 a 8. Retiramos uma bola da caixa, registamos o número e colocamos de novo a bola na caixa. Repetimos o procedimento quatro vezes. Quantos resultados diferentes é possível obter?

77. Numa sala há um sofá e cinco almofadas de cores diferentes, sendo uma delas vermelha.

77.1. De quantas formas diferentes, tendo em atenção a cor, as almofadas podem ser colocadas no sofá, lado a lado?

77.2. Admita que as almofadas foram colocadas ao acaso. Determine a probabilidade de a almofada vermelha ficar no meio.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

78. Numa prateleira estão oito livros distintos, lado a lado, sendo três de Matemática, dois de Física e três de Biologia. Determine quantas formas diferentes é possível colocar os oito livros na prateleira lado a lado, de modo que:

78.1. os livros de Física fiquem um em cada extremo;

78.2. os livros de Matemática fiquem juntos;

78.3. os livros de Biologia fiquem juntos num dos extremos

78.4. os livros fiquem agrupados por disciplina.

79. Numa caixa há dez calculadoras, das quais quatro não têm pilhas. Considere a experiência que consiste em retirar aleatoriamente três máquinas da caixa e verificar se têm pilhas ou não.

79.1. Determine a probabilidade de:

a) nenhuma ter pilhas. **b)** apenas uma não ter pilhas.

79.2. Retiram-se da caixa três máquinas, uma a uma.

Sabendo que as duas primeiras têm pilhas, qual a probabilidade de a terceira:

a) não ter pilhas **b)** ter pilhas.

80. Um grupo de 10 amigos, sete rapazes e três raparigas, decidem ir ao cinema, ocupando uma fila de dez lugares. Admitindo que todos os elementos do grupo se sentam de forma aleatória, calcula a probabilidade de:

80.1. as raparigas ficarem juntas;

80.2. as raparigas ficarem juntas e os rapazes também;

80.3. pelo menos um dos extremos ser ocupado por uma rapariga.

81. Numa empresa são atribuídos códigos de acesso a determinadas áreas mais restritas. Sabe-se que os códigos são construídos por uma sequência de quatro algarismos, seguidos de duas letras das 26 do alfabeto.

A sequência 0016-NN é exemplo de um desses códigos.

81.1. Quantos códigos é possível formar com este sistema?

81.2. Escolhido um dos códigos ao acaso, determine a probabilidade de:

a) ter os algarismos diferentes e as letras iguais;

b) ter exactamente dois algarismos iguais a 5 e as letras diferentes;

c) ter, pelo menos, dois algarismos iguais a 8;

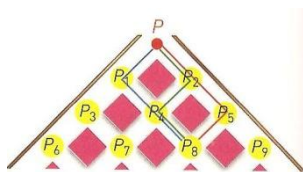
d) as letras não serem ambas vogais.

▪ TRIÂNGULO DE PASCAL

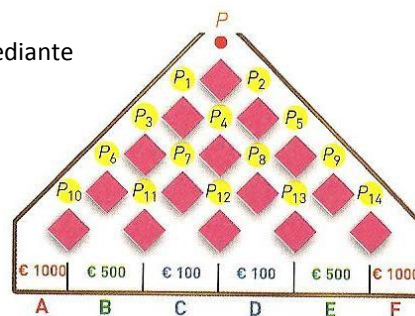
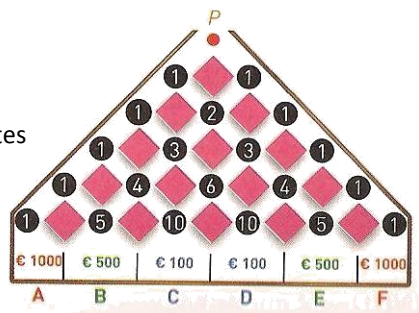
Exemplo 5: Num concurso televisivo, os concorrentes candidatam-se a um prémio mediante a posição atingida por uma bola que é largada na posição P, num aparelho como o representado na figura, e que atinge umas das posições A, B, C, D, E ou F.

Reparemos que:

- de P a P1 há um único percurso;
- de P a P2 há um único percurso;
- de P a P4 há dois percursos;
- de P a P8 há três percursos.



Podemos, então construir um “triângulo numérico” com o número de percursos existentes de P a cada um dos pontos.



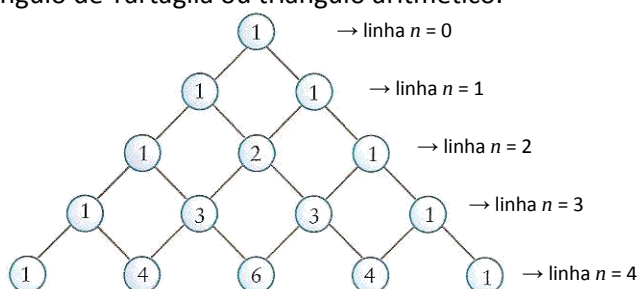
Referência histórica:

Este triângulo numérico foi apresentado por Pascal, matemático francês e por Tartaglia, matemático italiano.



Pascal (1623-1662) Tartaglia (1499-1557)

Ao esquema triangular seguinte chama-se triângulo de Pascal, triângulo de Tartaglia ou triângulo aritmético.

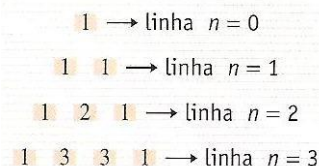


No triângulo de Pascal verifica-se que:

- Os números dos lados oblíquos são sempre iguais a 1.
- Cada termo de uma linha (excepto os extremos) é igual á soma dos que estão em cima.
- Em cada linha, os termos equidistantes dos extremos são iguais.

Exercício:

82. Observe o esquema seguinte:

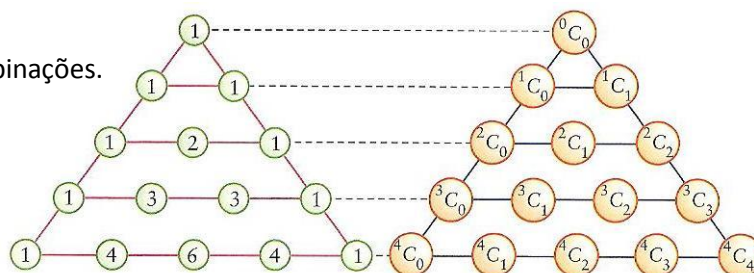


Construa a 7ª linha do triângulo de Pascal ($n=6$) e calcule a soma dos elementos da 8ª linha.

> Propriedades do Triângulo Pascal

O triângulo de pascal pode ser escrito usando combinações.

Podem-se constatar algumas propriedades do Triângulo de Pascal e que resultam das propriedades dos números combinatórios.



Propriedade 1: Todas as linhas começam e acabam com 1.

Demonstração: Efectivamente ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$

Propriedade 2: Em cada linha, os termos equidistantes dos extremos são iguais.

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}, \text{ com } n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } p \leq n$$

Demonstração: Temos que: ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e ${}^nC_{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

$$\text{Logo: } {}^nC_p = {}^nC_{n-p}$$

Propriedade 3: Cada termo de uma linha (excepto os dos extremos) é igual à soma dos que estão acima.

$${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } p \leq n$$

Demonstração:
$$\begin{aligned} {}^nC_p + {}^nC_{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} = \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)!p!(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \\ &= \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = {}^{n+1}C_{p+1} \end{aligned}$$

Logo: ${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$

Propriedade 4: A soma dos $n+1$ elementos de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual a 2^n , com $n \in \mathbb{N}_0$.

Nota: Na linha n o segundo e penúltimo elemento são iguais a n e existem $n+1$ elementos.

Exemplo 6: A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual a 106.

6.1. Determinemos o terceiro elemento da linha seguinte.

6.2. De que linha estamos a falar?

Resolução:

6.1. Se a soma dos três últimos elementos é 106 então a soma dos três primeiros também é 106 (propriedade 2). Visualizemos no triângulo o que acontece:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & x & \\ 1 & + & x & + & y = 106 \\ 1 & & z & & \end{array}$$

Podemos concluir que $x + y = 105$

e pela propriedade 3 sabemos que $z = x + y$.

Ou seja, z , que representa o 3º termo da linha seguinte é igual a 105.

6.2. Sabe-se que a soma dos últimos termos da linha é 106, escrevendo em linguagem matemática e usando as

combinações vem: ${}^nC_n + {}^nC_{n-1} + {}^nC_{n-2} = 106 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 106 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{(n-1)n}{2} = 106 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 210 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+840}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 14 \vee n = -15$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, conclui-se que $n=14$.

Exercícios:

83. A soma dos dois últimos elementos de uma linha do Triângulo de pascal é 35.

83.1. Quantos elementos tem essa linha?

83.2. Indique os três primeiros elementos da linha anterior.

83.3. Indique os três últimos elementos da linha seguinte.

84. Dois elementos consecutivos de uma linha do Triângulo de Pascal são 120 e 45. Indique um elemento maior que estes dois que pertença à linha seguinte.

85. Indique o(s) valor(e)s de $k \in \mathbb{N}_0$, de modo que:

85.1. ${}^{10}C_3 = {}^{10}C_k$ **84.2.** ${}^{21}C_5 = {}^kC_{16}$

85.3. ${}^{17}C_5 + {}^{17}C_6 = {}^{18}C_k$

85.4. ${}^{12}C_3 + 2{}^{12}C_4 + {}^{12}C_5 = {}^{14}C_k$

86. Uma linha do Triângulo de Pascal tem 11 elementos. Determina o maior número que faz parte dessa linha.

87. Uma linha do Triângulo de Pascal tem 16 elementos. Determina o número de elementos dessa linha que são maiores que 4000.

88. O penúltimo elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é 12. Determine:

88.1. o número de elementos dessa linha.

88.2. a soma dos elementos dessa linha.

89. Considere os números: 256 , 789 , 2048 , 3576 e 4500 No Triângulo de Pascal, calculou-se a soma dos elementos de uma linha e, de seguida, a soma dos elementos de outra linha.

Os valores obtidos são representados por dois dos números dados.

Identifique-os e explique a razão porque rejeita os outros três números.

90. A soma dos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 512. Para cada elemento da linha há um cartão no qual esse número é escrito. Os cartões foram introduzidos num saco e de seguida retiraram-se, simultaneamente, dois cartões.

Determine a probabilidade de:

90.1. um e um só cartão ter o número 1;

90.2. os dois cartões terem o mesmo número.

▪ BINÓMIO DE NEWTON

Observemos o seguinte padrão:

Observação:

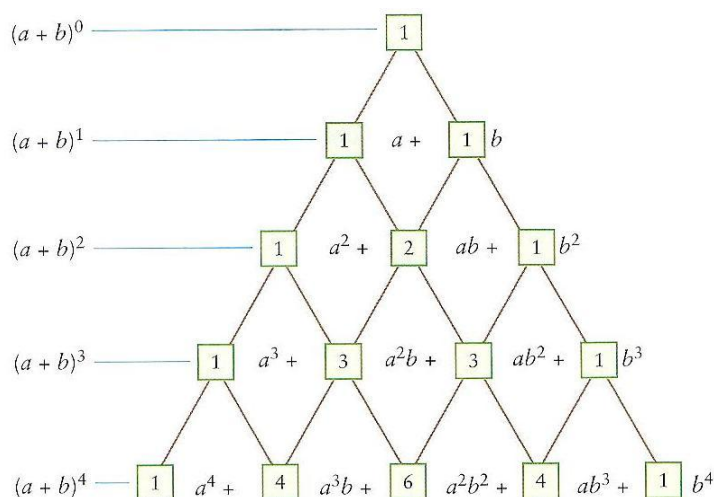
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b)^2$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b) (a+b)^3$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$



Notemos que no desenvolvimento de $(a+b)^n$ se tem:

- o grau do polinómio do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é n .

- os coeficientes são os números do Triângulo de Pascal.

Fórmula do binómio de Newton

De um modo geral tem-se:

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}^nC_{n-1} ab^{n-1} + {}^nC_n b^n, n \in \mathbb{N}_0$$

Ou seja:
$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p a^{n-p} b^p$$

Exemplo 7: Determinemos, sem efectuar o desenvolvimento, o termo em x^5 que aparece no desenvolvimento de $(x+2)^8$.

Resolução:

A partir da expressão
$$(x+2)^8 = \sum_{p=0}^8 {}^8C_p x^{8-p} 2^p$$

verifica-se que o termo em x^5 surge no desenvolvimento quando $8-p=5$ ou seja $p=3$. Substituindo p por 3 na expressão ${}^8C_p x^{8-p} 2^p$, tem-se: ${}^8C_3 x^5 2^3$.

Donde se conclui que o termo em x^5 resultante do desenvolvimento de $(x+2)^8$ é $448x^5$.

No desenvolvimento de $(a+b)^n$, designamos o termo de ordem $p+1$ por T_{p+1} , com $0 \leq p \leq n$, tem-se:

$$T_{p+1} = {}^nC_p a^{n-p} b^p$$

96. Mostre que $1-\sqrt{3}$ é solução da equação $x^4 + 16\sqrt{3} = 28$.

97. Sem efectuar o desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$:

97.1. mostre que não existe qualquer termo do 2º grau no desenvolvimento da expressão.

97.2. determine, caso exista, o termo independente de x .

Exercícios:

91. Recorra ao Triângulo de Pascal e faça o desenvolvimento de:

91.1. $(x+1)^5$

91.2. $(2+x^2)^4$

91.3. $(y-2)^6$

91.4. $(2x-y)^5$

92. Recorra ao Binómio de Newton para desenvolver e representar na forma de polinómio reduzido as expressões:

92.1. $(2+x^2)^5$

92.2. $(3-x)^3$

93. No desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$, determine, caso exista:

93.1. o termo em x^2

93.2. o termo independente de x

93.3. o termo em x^5

94. Determine o termo médio (o que ocupa a posição central) do desenvolvimento de:

94.1. $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^6$

94.2. $(x-3)^8$

95. Considere a expressão: $p(x) = (x-x^2)^6$.

Após se ter representado $p(x)$ na forma de polinómio reduzido, escolheu-se ao acaso um dos monómios que o constituem.

Qual a probabilidade de o monómio escolhido ter coeficiente negativo, sabendo que tem grau superior a 7?

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA NA COMPILAÇÃO:

AAVV, **Programa de Disciplina Matemática 2.º ciclo**, Projecto Escola+, Lisboa 2010

ABRANTES, P. & CARVALHO, R., **O novo M11**, Texto Editora, Lisboa 1991

ANDRADE, Carlos; VIEGAS, Cristina; PEREIRA, Paula Pinto e PIMENTA, Pedro, **Ípsilon 12, Matemática A - 12º Ano**, Texto Editores, 2012

AUBYN, Marinela Cabral St.; BRITO, Cristina, **Mat 12, Matemática A 12º Ano**, Lisboa Editora, 2005

BERNARDES, A.; LOUREIRO, C.; VARANDAS, J.M.; VIANA, J.P., BASTOS, R., **Matemática 11 – Funções 2**, Edições Contraponto, Porto 1999

CARDOSO, M. (S.D.), **Apontamentos de Matemática: Função exponencial, função logarítmica**, São Tomé, Liceu Nacional.

COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda, **Novo Espaço, Matemática A 12º Ano**, Porto Editora 2012

COSTA, Belmiro; RESENDE, Lurdes do Céu e RODRIGUES, Ermelinda, **Espaço 12, Matemática A 12º Ano**, Edições Asa 2008

FERREIRA NEVES, Maria Augusta; GUERREIRO, Luís e MOURA, Ana, **Matemática A 12º Ano**, Porto Editora, 2011

FERREIRA NEVES, Maria Augusta; PEREIRA, Albino e SILVA, Jorge Nuno, **Matemática A 12º Ano**, Porto Editora, 2012

GT T³, APM, **Modelação no Ensino da Matemática: Calculadora, CBL e CBR**, APM, Lisboa 1999

LOPES, A.; BERNARDES, A.; LOUREIRO, C.; VARANDAS, J.M.; VIANA, J.P., BASTOS, R., **Matemática 12 – Funções**, Edições Contraponto, 1999

LOPES, A.; BERNARDES, A.; LOUREIRO, C.; VARANDAS, J.M.; VIANA, J.P., BASTOS, R., **Matemática 12 – Trigonometria e Complexos**, Edições Contraponto, 1999

SILVA, J. C.; PINTO, J.; & MACHADO, V., **Aleph 11 – volume 2**, Edições Asa, Lisboa 2011

SILVA, J. C.; PINTO, J.; & MACHADO, V., **NIUaleph 12**, Lisboa, 2012

TEIXEIRA, P.; PRECATADO, A.; ALBUQUERQUE, C.; ANTUNES, C. & NÁPOLES, S., **Funções 11**, Ministério da Educação, Lisboa 1998

TEIXEIRA, P.; PRECATADO, A.; ALBUQUERQUE, C.; ANTUNES, C. & NÁPOLES, S., **Funções 12**, Ministério da Educação, Lisboa 1998

LOUREIRO, C.; OLIVEIRA, F.; SILVA, J.N.; BASTOS, R., **Trigonometria e Números Complexos**, Ministério da Educação, Lisboa 2000

Sites da Internet

<http://mat.absolutamente.net>

www.educ.fc.ul.pt

<http://www.amatoso.org/>

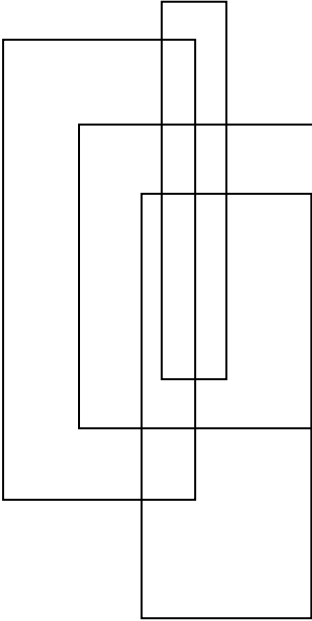
www.apm.pt/

www.nctm.org

<http://www.hidrografico.pt/s.-tome-e-principe.php>

<http://esa.un.org/unpd/wpp/index.htm>

Agradecemos ainda os materiais gentilmente cedidos pelos colegas: Anabela Soares, Filomena, Helena Condeço Silva, Joaquim Pinto, José Leal e Maria Teresa Santos.



TEMA 2

FUNÇÕES

INTRODUÇÃO

O Cálculo Infinitesimal, que engloba os Cálculos Diferencial e Integral, por muitos considerado a mais importante conquista de inteligência humana, desenvolveu-se a partir de alguns problemas originários da Antiguidade.

Como determinar o volume de um sólido, por exemplo, de uma esfera? Como obter a tangente a uma dada curva num ponto? Como saber a área de uma figura plana?

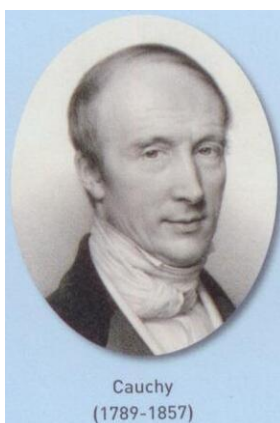
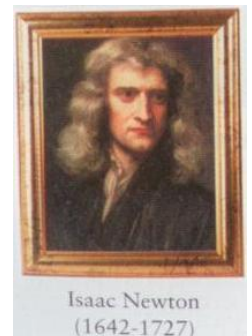
Estes problemas foram abordados pelos Antigos Gregos, que, se bem que fossem muito engenhosos, não conseguiram produzir uma teoria

unificadora que os enquadrasse, o que só veio a suceder no século XVII. Os problemas de áreas e volumes conduziram ao Cálculo Integral, o das tangentes ao Cálculo Diferencial.

O problema da obtenção de tangentes revelou-se intimamente relacionado com o da determinação de áreas.

Esta relação foi compreendida por Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727), que são considerados os “pais” do Cálculo Infinitesimal.

A derivada, que é um conceito básico do Cálculo Diferencial, é hoje apresentada como o limite da variação média ou o declive da recta tangente a uma curva. Mas, para dispor destes conceitos na forma actual, conceptualmente consistentes, foi preciso esperar pelos trabalhos de Cauchy, no século XIX.



FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

A Matemática tem sido uma ferramenta essencial para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. É através da concretização daquilo a que chamamos modelação matemática, modelagem ou matematização que a teoria e as aplicações da matemática se relacionam. Como afirma o matemático Ian Stewart: “Qualquer descrição da matemática do mundo real é um modelo. Manipulando o modelo esperamos compreender algo da realidade”. Claramente os modelos são apenas aproximações (umas vezes mais fiéis do que outras!) da realidade, mas que nos permitem fazer previsões e tomar decisões com pequenas margens de erro. As funções exponenciais e logarítmicas têm um papel privilegiado na compreensão e previsão de fenómenos sociais e físicos, como poderás perceber ao longo deste capítulo.

▪ FUNÇÃO EXPONENCIAL (DE BASE SUPERIOR A 1)

Considera a seguinte situação adaptada de uma lenda do Rei da Pérsia.

Um tabuleiro de Xadrez. Coloca no primeiro quadrado dois grãos de café. No segundo quadrado o dobro dos grãos de café. Continua a repetir o mesmo procedimento. Quantos grãos de café terão que estar na última casa do tabuleiro? Aceitam-se apostas...

Comecemos por organizar a informação numa tabela:

N.º casa	1	2	3	4	...8...	17	...	64
N.º de grãos	2	4	8	16	...256...	131072	...	184467440737096

Como facilmente identificamos pelos valores da 2.ª linha da tabela, o número de grãos de café, estamos perante a sequência de potências de base 2, ou seja, de expressão geral 2^n .

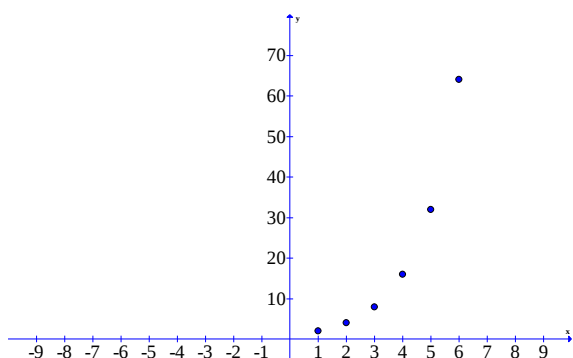
Na realidade o exemplo apresentado é uma progressão geométrica de base 2, já estudada na 11.ª classe. Será que podemos estender o domínio da sucessão de variável natural a uma função de variável real? A resposta é SIM!

Embora nos primeiros passos a crescimento seja pouco acentuado, este crescimento torna-se cada vez mais rápido, à medida que o n aumenta. É o chamado crescimento geométrico ou crescimento exponencial. De facto, embora o raciocínio aqui descrito seja algo passo a passo (discreto), a propriedade em causa, que é o crescimento com razão (divisão) constante entre termos consecutivos, é comum às progressões geométricas, como a dos grãos de café no tabuleiro de xadrez, e à função que iremos estudar agora e que designamos por exponencial. Mas, quão rápido é o crescimento exponencial? Como é que esse crescimento se traduz graficamente?

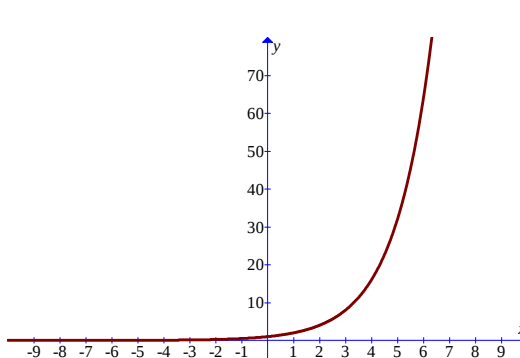
Curiosidade:

Um metro cúbico de café tem cerca de 15 milhões de grãos de café, pelo que, seria preciso cobrir toda a superfície da Terra com uma camada de 25cm de espessura para armazenar os 2^{64} grãos de café!

Quantos algarismos tem o número 2^{64} ? Utiliza uma calculadora...



“Progressão geométrica”: 2^n , n número natural



“Função exponencial”: 2^x , x número real

>Definição de função exponencial

A **função exponencial** é definida pela expressão algébrica $f(x) = a^x$, onde a é um número real positivo, diferente de 1, que constitui a base da função exponencial.

Por exemplo, as funções de expressão: $f(x) = 2^x$; $g(x) = 3^x$; $h(x) = \pi^x$; $j(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$; são funções

exponenciais. Mas, as funções de expressão: $l(x) = (-2)^x$; $m(x) = 0^x$; $n(x) = 1^x$; não são funções exponenciais porque a base da potência não é um número real positivo diferente de 1.

Recordar: A expressão a^x é uma potência onde a é a **base** e x o **expoente**.

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$$

Desafio: A que correspondem as representações gráficas das funções: $m(x) = 0^x$, $n(x) = 1^x$?

Tarefa

Considere as seguintes funções: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ e $h(x) = 10^x$. As três funções estão representadas no mesmo referencial.

1. Completa a tabela seguinte:

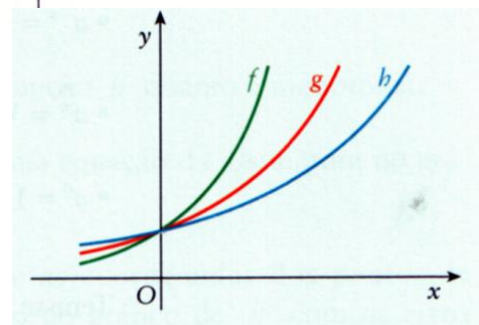
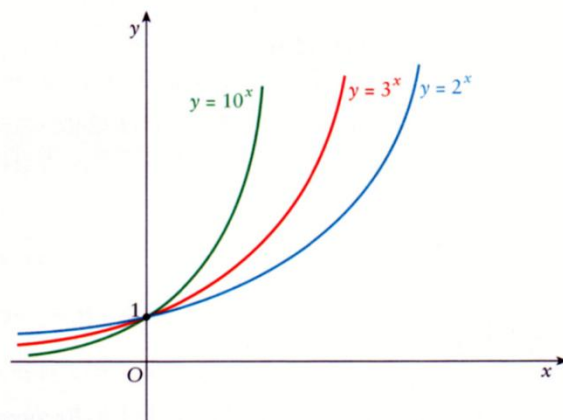
X	2^x	3^x	10^x
-4			
-1			
0			
1			
2			

2. Compare o ritmo de crescimento das referidas funções.

3. Qual a influência da alteração da base (parâmetro a) no gráfico da função do tipo $y = a^x$, $a > 1$?

4. No referencial da figura ao lado estão as representações gráficas das funções f , g e h .

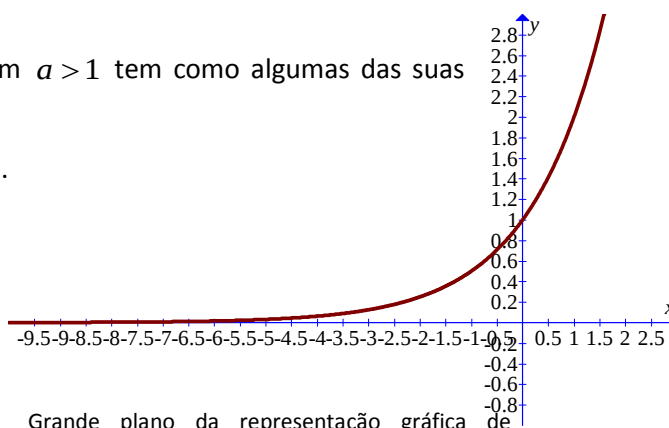
As funções representadas têm as seguintes expressões analíticas, não necessariamente por esta ordem, $y = 3^x$, $y = 1,5^x$ e $y = 4^x$. Associe cada uma das funções f , g e h à sua expressão analítica.



>Propriedades da função exponencial

De uma maneira geral uma função exponencial com $a > 1$ tem como algumas das suas propriedades:

- O domínio de f é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}^+$.
- A função f é estritamente crescente.
- O gráfico da função intersecta o eixo Oy (eixo dos yy) no ponto de coordenadas $(0,1)$.



Grande plano da representação gráfica de $f(x) = 2^x$ no 2.ºQ, junto aos eixos coordenados

- A função f não tem zeros.
- A função f é sempre positiva.
- A função f é injectiva.
- Assíntotas: Tem uma horizontal $y = 0$
- Comportamento: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

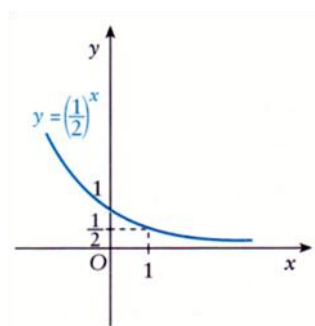
Apesar de não ser alvo de análise exaustiva, repare-se que se $0 < a < 1$ nem todas estas propriedades se verificam.

Por exemplo, $y = (0,5)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Graficamente,

vem:

Veja-se que:

- A função é estritamente decrescente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$



Recordar... Sendo o expoente um número real qualquer poderá em particular, tomar valores negativos e fraccionários, casos em que será fundamental relembrar os casos estudados na 11.ª classe.

Por exemplo:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3; (0,25)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 4^{-4};$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}; 2^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{2^7}; 3^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$$

Tarefa:

1. Averigue a influência do parâmetro k no gráfico da função do tipo $y = a^{kx}$, $a > 1$, $k \in \mathbb{R}$

Sugestão: analise o expoente considerando os casos em que:

1) k é positivo; 2) k é nulo; 3) k expoente é negativo

> Função exponencial de base natural

$$f(x) = e^x$$

Um caso particular de função exponencial com interesse de estudo é a base e , ou seja, $f(x) = e^x$ - *função exponencial natural* - pelas diversas aplicações em modelos matemáticos de áreas tão distintas como as ciências físico-químicas, biológicas, económicas, médicas e sociais. O número e , constante de Euler, número de Neper ou

Napier, é um número irracional $e = 2,7182818284590452353602874...$ e é limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ estudada na 11.ª classe.

▪ CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Existem inúmeras variáveis em situações da realidade que podem ser modeladas por uma função exponencial, ou seja, a função exponencial descreve o comportamento dessas variáveis

Desafio: Quantas vezes precisa de dobrar uma folha de papel para que a espessura seja igual à distância da Terra à lua? 39, 452, 1000, 3000000? E se for para percorrer a distância entre as ilhas de S Tomé e do Príncipe? Registe as diferentes estimativas dos elementos da classe e vamos descobrir quem está mais próximo da verdade! (Poderá precisar de fazer pesquisas algumas distâncias. O seu professor poderá ajudá-lo a encontrá-las.) – Poderá aprofundar o seu conhecimento com o MA1.

com uma aproximação que consideramos ser aceitável. Vejamos alguns exemplos dessas aplicações.

Tarefa: Uma população de bactérias cresce semanalmente 20%. O número inicial de bactérias era 500.

1. Quantas bactérias existem ao fim de uma semana?
2. Quantas bactérias existem um ano depois?
3. Ao fim de quanto tempo existe 1bilhão de bactérias?

Resolução:

1. Ao fim de uma semana, existem o número de bactérias iniciais mais 20% desse valor, ou seja, mais $0,2 \times 500 = 100$ bactérias, o que perfaz um total de $500 + 0,2 \times 500 = 500 \times (1 + 0,2) = 600$ bactérias.

Ao fim de uma semana existiam 600 bactérias.

2. No final da 2.ª semana existem as 600 bactérias mais 20% desse valor, isto é, $600 + 0,2 \times 600 = 600 \times (1 + 0,2) = 500 \times (1 + 0,2) \times (1 + 0,2) = 500 \times (1 + 0,2)^2 = 720$.

Depois de 3 semanas, acrescentamos às 720, mais 20% desse valor:

$$720 + 0,2 \times 720 = 720 \times (1 + 0,2) = \underbrace{500 \times (1 + 0,2)^2}_{720} \times (1 + 0,2) = 500 \times (1 + 0,2)^3 = 864$$

Nas primeiras três semanas, o número de bactérias cresceu em cada semana aumentou.

Será que esta tendência continuará a verificar-se? Construíamos uma tabela para analisar tal evolução:

N.º semana	0	1	2	3	4	...10...	...40...	52
N.º aumento	0	100	120	144	172,8	516	1222481	1092053
N.º bactérias	500	600	720	864	1036,8	3095,9	734885,8	6552315,5

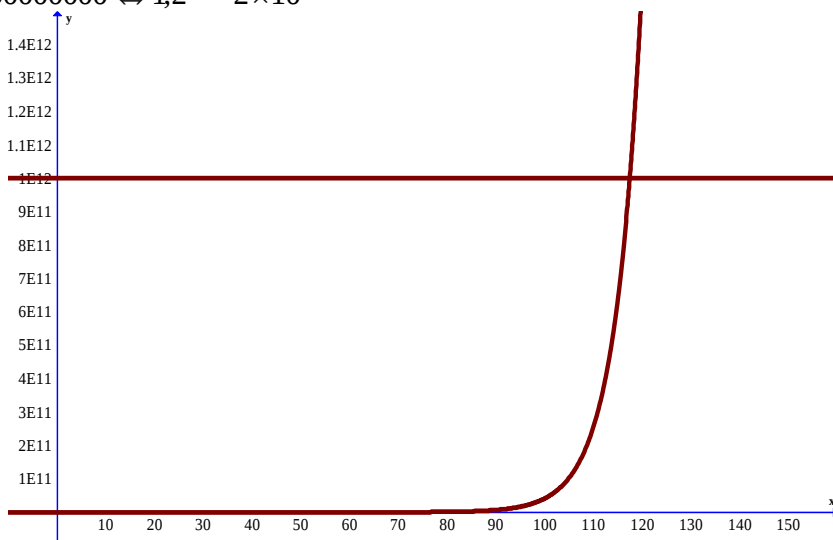
De uma maneira geral, podemos definir o número de bactérias da população utilizando a expressão: $B(x) = 500 \times (1 + 0,2)^x = 500 \times 1,2^x$

O ritmo de crescimento aumentou ao longo do tempo. Tendencialmente continuará a aumentar. Para calcularmos o número de bactérias ao fim de um ano, 52 semanas, podemos substituir o x por 52 na expressão, isto é, $B(52) = 500 \times 1,2^{52} = 6552315,468$. Ao fim de um ano a população de bactérias passa de 500 para 6552315, o que é mesmo muita bactéria!

3. Esta questão consiste em resolver a equação $B(x) = 1000000000000$, ou seja, $500 \times 1,2^x = 1000000000000 \Leftrightarrow 1,2^x = 2000000000 \Leftrightarrow 1,2^x = 2 \times 10^9$

. Como de momento ainda não temos ferramentas para o fazer, por agora poderemos resolvê-la graficamente através da intersecção da função $B(x)$ com a função constante $y = 1000000000000$ (10^{12} ou $1E^{12}$). (Atenção aos valores dos eixos dos yy !)

Por observação gráfica, podemos afirmar que será aproximadamente após 110 semanas (2 anos e 6 semanas) que o número de bactérias atingirá 1 bilhão.



O comportamento da função exponencial caracteriza-se pelo acentuado (de)crescimento ao longo do tempo. Neste caso vamos centrar apenas nos casos de rápido crescimento ($a > 1$).

Este tipo de funções permite descrever fenómenos físicos e das ciências sociais e naturais como exemplo reprodução de bactérias que analisámos. O cálculo de juros e impostos, evolução de populações, desintegração radioactiva são exemplos de outros fenómenos que podem também ser modelados por funções exponenciais.

Para resolver

1. O crescimento de uma população de coelhos, numa dada floresta, é dado pela função: $N(t) = A_0 \times e^{0,2t}$ em que $N(t)$ representa o número de coelhos no ano t e A_0 a população no ano $t = 0$. Sabe-se que $N(1) = 2000$.

1.1. Qual é a população de coelhos para $t = 0$? ; 1.2. Qual é a percentagem de aumento da população por ano?

2. A quantidade, Q , em gramas, de uma substância radioactiva decresce exponencialmente de acordo com a fórmula: $Q(t) = Q_0 \times e^{-0,09t}$, t em anos

Sabe-se que ao fim de 11 anos restavam cerca de 8,51 gramas dessa substância. Qual era a quantidade inicial?

Desafio: Se tiver possibilidade, visualize graficamente as funções dos dois exercícios anteriores. Compare as respectivas propriedades (domínio, contradomínio, monotonia, sinal, existência de zeros) e observando as expressões analíticas de ambas, conjecture a origem de tais diferenças.

Notas:

- O crescimento exponencial é tanto maior quanto maior for a base da potência. No caso de considerarmos o coeficiente de x negativo ($-kx$, $k > 0$), obtemos funções decrescentes.
- Nem todo o tipo de crescimento é exponencial, por exemplos os modelos afins e polinomiais (estudados na 10.ª classe) ou progressões aritméticas (estudadas na 11.ª classe) poderão ser crescentes, mas de uma forma menos acentuada que a exponencial. Um exemplo poderá ser dado pelo crescimento linear. Por exemplo, a relação entre o preço de um pastel e o preço a pagar são grandezas directamente proporcionais. À medida que o número de pastéis aumenta, o preço também aumenta, contudo, aumenta sempre de acordo com a contante que é o preço de 1 pastel que é fixo.

▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

>Regras operatórias das funções exponenciais

Algumas propriedades já estudadas para as potências de expoente racional, são extensíveis às potenciais de expoente real e ser-nos-ão úteis na resolução de equações que envolvam exponenciais - as equações exponenciais!

Para resolver

3. Escreve na forma de potência de base indicada, cada um dos seguintes números.

3.1. $\frac{1}{9}$ (base 3)

3.2. $\frac{1}{32}$ (base 2)

3.3. 0,0001 (base 10)

3.4. 0,008 (base 5)

Recordar:

Transformar número numa potências com determinada base, significa descobrir que expoente para a base dada é que permite obter o número inicial:

Exemplos:

$$0,01(\text{base } 10) = 10^{-2}$$

$$8(\text{base } 2) = 2^3$$

Regras	Exemplos
• $a^x \times a^y = a^{x+y}$	$3^3 \times 3^4 = 3^7$
• $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{5^6}{5^4} = 5^2$
• $a^x \times b^x = (a \times b)^x$	$2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$
• $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 2^3$
• $(a^x)^y = a^{xy}$	$(7^2)^3 = 7^6$
• $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$
• $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z}$	$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$
• $a^0 = 1 \quad (\text{para } a \neq 0)$	$5^0 = 1$
• $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad (\text{para } a > 0)$	$3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

Para resolver

4. Calcula o valor das seguintes expressões:

$$\begin{array}{lll}
 5^3 \times 25^2 = & 2^4 \times \sqrt[3]{2} = & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3^{-3} \div 6^{-4} = \\
 \left(4^3\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \div 2^{\frac{5}{2}} = & 3^{\frac{1}{3}} \times 9 + 4^0 \times 3^{\frac{1}{3}} = & 125^3 \times 5^{-2} - 5^3 \times (-1)^0 =
 \end{array}$$

5. Sabendo que $a^2=9$ e $a^3=27$, determina a^5 e a , recorrendo às regras operatórias das potências.

Escreve na forma de potência de base indicada, cada um dos seguintes números.

>Resolução de equações envolvendo exponenciais

Tarefa: Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

1. $2^{x-3} = \left(\frac{1}{16}\right)$

2. $5^{x+1} = 5^x + 10^x$

3. $3^{2x} = 5 \times 3^x - 6$

Resolução: Na resolução de equações exponenciais, o objectivo é transformarmos **ambos os membros em exponenciais com a mesma base**. Porquê? Porque uma vez que a **função exponencial é injectiva a imagens iguais, correspondem objectos iguais**, logo podemos igualar os expoentes, ou seja, se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$.

$$1. \quad 2^{x-3} = \left(\frac{1}{16}\right) \Leftrightarrow 2^{x-3} = 16^{-1} \Leftrightarrow 2^{x-3} = (2^4)^{-1} \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^{4 \times (-1)} \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^{-4} \Leftrightarrow (\text{pela injectividade da exponencial de base 2})$$

$$\Leftrightarrow x-3 = -4 \Leftrightarrow x = -4+3 \Leftrightarrow x = -1$$

$$C.S. = \{-1\}$$

Nota: Na resolução da equação foram utilizadas: regras operatórias para transformar as bases das potências iguais e a injectividade da função exponencial. É a injectividade que nos permite igualar os expoentes de potências de base igual.

2. Procedemos com o mesmo objectivo de determinar potências com base igual. E quando não é possível, como devemos proceder?

$$5^{x+1} = 5^x + 10^x \Leftrightarrow 5^{x+1} - 10^x = 0 \Leftrightarrow 5^x \times 5^1 - 5^x - (2 \times 5)^x = 0 \Leftrightarrow 5^x \times 5^1 - 5^x - 2^x \times 5^x = 0 \Leftrightarrow (\text{colocar factor } 5^x \text{ em evidência})$$

$$\Leftrightarrow 5^x \times (5^1 - 1 - 2^x) = 0 \Leftrightarrow$$

(aplicar lei do anulamento do produto)

$$\Leftrightarrow 5^x = 0 \vee 5 - 1 - 2^x = 0$$

Já vimos que a função exponencial é sempre positiva, pelo que, a primeira igualdade é falsa para qualquer valor da x . Determinemos agora a solução da segunda equação: $4 - 2^x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee 4 = 2^x \Leftrightarrow x = 1 \vee 2^2 = 2^x \Leftrightarrow x = 1 \vee 2 = x$. $C.S. = \{1, 2\}$. Também na última igualdade foi utilizada a injectividade da função exponencial.

3. Neste caso não só não é possível colocar exponenciais com a mesma base nos dois membros como também não temos qualquer factor para colocar em evidência. Mas $3^{2x} = (3^x)^2$. Façamos uma mudança de variável, considerando $z = 3^x$.

$$3^{2x} = 5 \times 3^x - 6 \Leftrightarrow (\text{fazendo a mudança de variável})$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 5z - 6 \Leftrightarrow z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow (\text{Equação completa de 2.º grau - aplicar fórmula resolvente } a=1, b=-5, c=6)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{6}{2} = 3 \vee z = \frac{4}{2} = 2$$

As soluções da equação são 2 e 3. (Des)Façamos a mudança de variável $z = 3^x$!

$$3^x = 3 \vee 3^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee 3^x = 2 \text{ (voltaremos a esta última equação no final do capítulo)}$$

Nestes exemplos utilizámos três métodos distintos para resolver condições com exponenciais: **igualdade de expoentes com potência de base igual**; **lei do anulamento do produto** e **mudança de variável**. Os últimos dois constituem artifícios para conseguirmos aplicar o primeiro. Deve utilizar o método mais adequado em cada situação.

Mesmo assim ainda não conseguimos resolver todas as equações exponenciais!

Tarefa: Seja f a função definida por: $f(x) = \frac{1}{8} - 2^{x+1}$.

Determine as coordenadas de intersecção de f com os eixos coordenados.

Para resolver

6. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

6.1 $2^x = 64$

6.2 $4^x = \frac{1}{16}$

6.3 $125 = 5^{2-x}$

6.4 $(x-1) \times 4^x = 0$

6.5 $x \cdot 7^{3x+1} = 49x$

6.6 $0,1^{x-1} - 10^{2x} = 0$

6.7 $e^{x^2-5x+6} = 1$

6.8 $\frac{8}{6^x} = 3^{-x}$

6.9 $4^x = \sqrt{2^{x+1}}$

6.10 $4^{2x} + 5 \times 4^x = 8$

6.11 $2^{x+2} + 2^{-x} = 5$

6.12 $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

Resolução: Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos coordenados:

- Ponto de intersecção com o eixo Ox

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} - 2^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^3} - 2^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2^{-3} - 2^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2^{-3} = 2^{x+1} \Leftrightarrow -3 = x+1 \Leftrightarrow x = -4$$

pela injectividade da função exponencial de base 2

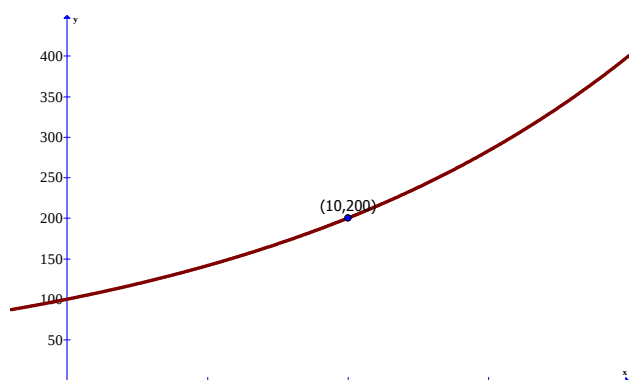
O ponto de intersecção com o eixo Ox tem as coordenadas $(-4, 0)$.

- Ponto de intersecção com o eixo Oy

$$f(0) = \frac{1}{8} - 2^{0+1} = \frac{1}{8} - 2 = \frac{1}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{15}{8}$$

O ponto de intersecção com o eixo Oy tem as coordenadas $(0, -\frac{15}{8})$.

Vejamos agora um exemplo de como determinar um modelo de uma função exponencial a partir de dados do seu gráfico.



Tarefa: Considera que comportamento de um fenómeno, em função do tempo, é dado por funções do tipo $P(t) = P_0 \times 2^{kt}$, onde P_0 é o valor inicial e tem a seguinte representação gráfica ao lado. Determina uma equação deste modelo?

Resolução: Ora, por observação gráfica conhecemos dois pontos: $(0, 100)$ e $(10, 200)$. Sendo P_0 a ordenada na origem, vem $P_0 = 100$, ou algebricamente, substituindo as coordenadas do ponto na expressão geral obtemos:

$$100 = P_0 \times 2^{k \times 0} \Leftrightarrow 100 = P_0 \times 2^0 \Leftrightarrow 100 = P_0 \times 1 \Leftrightarrow 100 = P_0. \text{ Substituindo o ponto de coordenadas } (10, 200) \text{ vem:}$$

$$200 = 100 \times 2^{k \times 10} \Leftrightarrow 2 = 2^{10k} \Leftrightarrow 1 = 10k \Leftrightarrow k = \frac{1}{10} = 0,1. \text{ Logo a expressão será } P(t) = 100 \times 2^{0,1t}.$$

Para resolver

7. O crescimento populacional de um país (em milhões de habitantes) durante um certo período de tempo é dado pela função $P(t) = 10 \times 1,1^{kt}$.

Observe o gráfico da função e indica uma possível expressão para P .

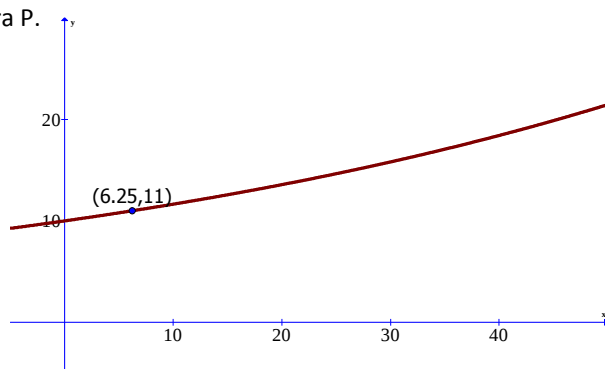
8 A função h é uma função real de variável real definida por:

$$h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} - 1$$

8.1 Determine o domínio e contradomínio de h .

8.2 Determine os zeros da função.

8.3 Resolva a equação $h(x) = \frac{1}{2}$.



Se tiver possibilidade confronte os seus resultados com a representação da função numa calculadora gráfica ou computador.

9 Numa determinada floresta, existe uma árvore de fruto, cujo número de fruto, F , é dado pela lei $F(t) = 820 \times 1,3^t$, com t expressos em anos. Determine:

9.1 Quantos pinheiros havia no início do estudo e ao fim de 10 anos?

9.2 Ao fim de quantos anos duplicará o número inicial de frutos em relação ao valor inicial?

9.3 Quantos anos completos serão necessários para o número de frutos atingir 50mil?

>Resolução de inequações envolvendo exponenciais

Tarefa: Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$$2^x < \sqrt[3]{2} \quad 2^x + 2^{2-x} \leq 5$$

Resolução: $2^x < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 2^x < 2^{\frac{1}{3}}$

Como a função exponencial de base 2 (superior a 1) é estritamente crescente,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ ou seja, o } x$$

poderá tomar valores que verifiquem a desigualdade $x < \frac{1}{3}$, ou seja, no intervalo $]-\infty; \frac{1}{3}[$

$$2^x + 2^{2-x} \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^2 \times 2^{-x} \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{1} + \frac{2^2}{2^{-x}} - \frac{5}{2^{-x}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 4 - 5 \times 2^x \leq 0 \Leftrightarrow \text{Cálculo auxiliar}$$

$$\Leftrightarrow 2^x \geq 1 \quad \wedge \quad 2^x \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x \geq 2^0 \quad \wedge \quad 2^x \leq 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [0; 2]$$

A função exponencial com base a superior a 1 é estritamente crescente. Isso permite concluir:

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1$$

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1$$

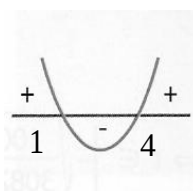
Cálculo auxiliar

Façamos uma mudança de variável :

$$y = 2^x$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \quad \vee \quad y = 1$$



$$y \geq 1 \quad \wedge \quad y \leq 4$$

Nota: Nos casos em que a condição é uma inequação, procedemos da mesma forma do que para as equações, mas atendendo à especificidade da resolução das inequações e na interpretação do resultado.

▪ LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA (DE BASE SUPERIOR A 1)

>Logaritmo de um número

Uma forma diferente de multiplicar!

John Napier, matemático escocês, conseguiu no final do séc XVI, uma forma engenhosa de efectuar multiplicações utilizando a adição, a partir de potências com a mesma base.

Vejamos um caso simples:

16 multiplicado por 32, são potências de base 2, 2^4 e 2^5 , respectivamente, ou seja,

Adicionamos os expoentes ($4+5=9$) e o resultado da multiplicação é dado por $2^9=512$.

$$\text{Simbolicamente, vem: } 16 \times 32 = 2^4 \times 2^5 = 2^{4+5} = 2^9 = 512$$

Em que momento surgem os logaritmos?

Quando os números que queremos multiplicar não são traduzíveis por potências de expoente inteiro. Nestes casos precisamos de descobrir o expoente da potência de um determinado número conhecido.

Por exemplo: $250=10^k$,

Curiosidade:

O desenvolvimento da astronomia e da navegação, pela grandeza dos números que envolvem, trouxe a necessidade de simplificar a multiplicação de números. Devido à escassez de ferramentas de cálculo, muitos matemáticos dedicaram-se a escrever de forma exaustiva listagens com o cálculo de logaritmos nas diferentes bases (2, e, 10,...), as chamadas tábuas de logaritmos.

Neste caso não existe um valor de k , inteiro, que verifique a igualdade, visto que, 250 não é uma potência de base 10. Então designamos k por logaritmo de 250 na base 10 ($\log(250)$).

Simbolicamente: $k = \log(250)$

Voltando ao primeiro exemplo $\log_2(16)=4$ porque $2^4=16$ e $\log_2(32)=5$ porque $2^5=32$.

Nota: $\log_3(27)$ lê-se: logaritmo de 27 na base 3.

Tarefa: 1. Calcula: 1.1. $\log_3(27)$; 1.2. $\log_{\frac{1}{2}}(8)$; 1.3.

$$\log_2\left(\frac{1}{16}\right);$$

Resolução: 1.1. $\log_3(27) = y \Leftrightarrow 3^y = 27 \Leftrightarrow 3^y = 3^3 \Leftrightarrow y = 3$.

Logo, $\log_3(27) = 3$

$$1.2. \quad \log_{\frac{1}{2}}(8) = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow y = -3.$$

Logo, $\log_{\frac{1}{2}}(8) = -3$

$$1.3. \quad \log_2\left(\frac{1}{16}\right) = y \Leftrightarrow 2^y = 2^{-4} \Leftrightarrow y = -4.$$

Logo, $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

Para resolver

11. Calcule o valor de:

$$11.1 \log_2(64) \quad 11.2 \log_5(5)$$

$$11.3 \log_4(1) \quad 11.4 \log_2\left(\frac{1}{32}\right) + \log_{\frac{1}{32}}(2)$$

$$11.5 \log_{\frac{1}{4}}(2) \quad 11.6 \log_3\left(\frac{1}{8}\right)$$

12. Calcule o valor dos números reais:

$$12.1 x = \log_3 27 \quad 12.2 y = \log_5 \frac{1}{125}$$

$$12.3 z = \log_2 \sqrt{8} \quad 12.4 t = \log_{\sqrt{2}} 4$$

$$12.5 u = \log_3 1 \quad 12.6 v = \log_5 5$$

$$12.7 w = \log_7(7^3) \quad 12.8 r = 5^{\log_5 125}$$

Nota:

Como $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, temos:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^x = x$$

Da uma maneira geral, chama-se **logaritmo de um número positivo** x na base a , com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, ao número y , tal que $a^y = x$ e representa-se por $\log_a x$, ou seja,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

>Logaritmos de base natural e base decimal

O símbolo **log** (sem referência a base) designa logaritmos de base **10**, diz-se **logaritmo decimal**. Assim, em vez de $\log_{10} x$ pode-se escrever $\log x$.

O **logaritmo neperiano ou logaritmo natural**, é o logaritmo de base e , e em vez de $\log_e x$ pode-se escrever $\ln x$.

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

Na calculadora existem as teclas **log** e **ln**. A tecla **log** permite calcular logaritmos de base 10 e a tecla **ln** permite calcular logaritmos de base e .

Exemplo:

$$\log 1000 = 3$$

log 1000	3
▶MAT	

$$\log 26 \approx 1,415$$

log 26	1.414973348
▶MAT	

$$\ln e = 0,5$$

ln √(e^1)	0.5
▶MAT	

$$\ln 26 \approx 3,258$$

ln 26	3.258096538
▶MAT	

Para resolver

13. Calcule o valor de:

13.1 $\log(10000)$

13.2 $\ln(e^5)$

13.3 $\log(0,001) + \ln(\sqrt[3]{e^2})$

13.4 $\ln(e^{-7})$

13.5 $\ln(e^{-1}) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) + \log(\sqrt{10})$

13.6 $\ln e + \ln e^2 + \ln e^3$

13.7 $\ln e - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

13.8 $\ln(e\sqrt{2})$

13.9 $\ln e^2 - 2 \ln e$

13.10 $\ln 3 + \ln(27e) - \ln(9e^3)$

>Função logarítmica

A função exponencial de base superior a 1 é injectiva e todas as funções injectivas têm inversa. Em particular, a função inversa da exponencial será uma função que nos permite responder a uma questão do género: “Qual o expoente da potência de base dois, cujo resultado é ...?”, ou simbolicamente: “Qual o valor de A tal que $2^A = \dots$?”

Quais serão as propriedades dessa função inversa? Como é que o crescimento exponencial se traduzirá na função inversa?

Tarefa

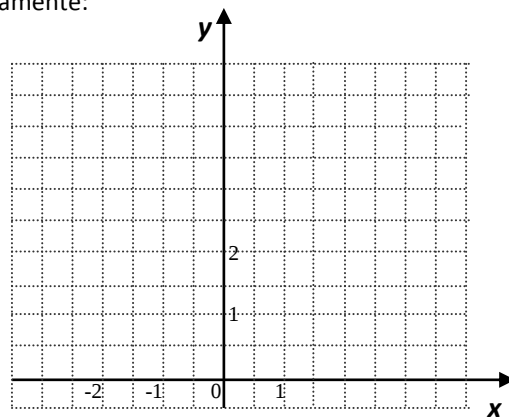
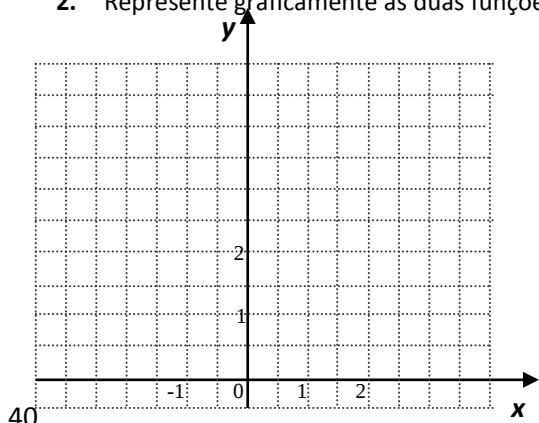
1. Represente na forma tabular as funções de expressão: : $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

x					
f(x)					

x					
g(x)					

1.1. Compara os valores das tabelas

2. Represente graficamente as duas funções graficamente:



3. Por observação gráfica complete os quadros seguintes:

<i>Função exponencial de base $a > 1$</i>	<i>Função logarítmica de base $a > 1$</i>
Domínio:	Domínio:
Contradomínio:	Contradomínio:
Monotonia:	Monotonia:
Assíntotas ao gráfico da função:	Assíntotas ao gráfico da função:
Intersecção com os eixos coordenados:	Intersecção com os eixos coordenados:
Injetividade:	Injetividade:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) =$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$

4. Assinale as diferenças e semelhanças das funções estudadas.

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

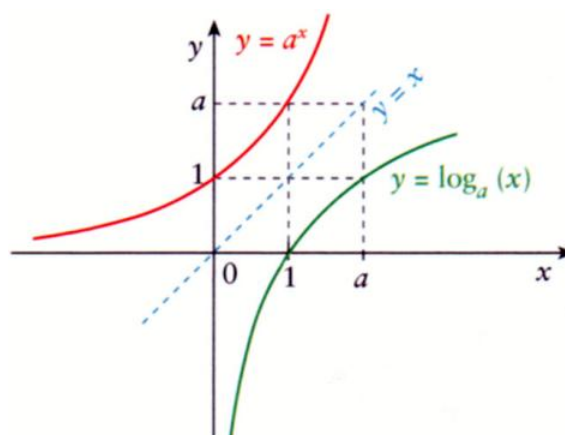
$$y = \log_a x$$

Chama-se **função logarítmica** de base $a > 1$ à função:

As funções exponencial ($y = a^x$) e logarítmica ($y = \log_a x$) são funções inversas.

Os seus gráficos são simétricos relativamente à recta de equação $y = x$.

Para $a > 1$ as suas representações gráficas estão na figura ao lado.

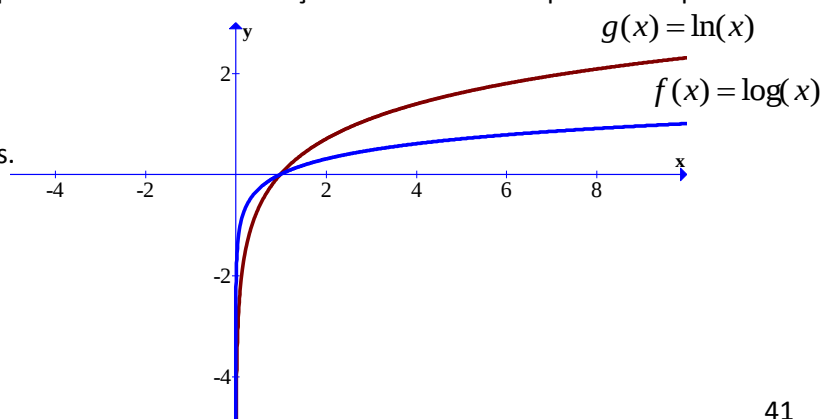


>Propriedades da função logarítmica

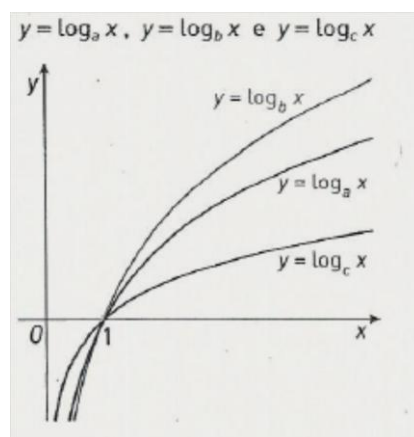
Tarefa:

1. Na figura abaixo estão representadas as funções definidas pelas expressões:
 $f(x) = \log(x)$; $g(x) = \ln(x)$

Compare o valor das bases dos logaritmos das funções representadas.

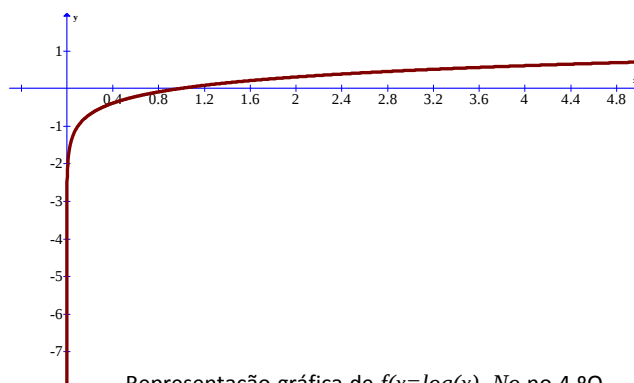


- Aplicando a mesma lógica da alínea anterior, ordene os valores de a , b e c por ordem crescente.
- Qual a influência do valor da base do logaritmo no crescimento da função?



A função logarítmica $f(x) = \log(x)$, $a > 1$, tem as seguintes propriedades:

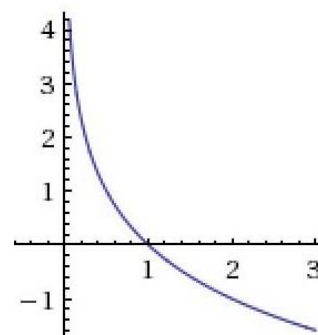
- O domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.
- A função f é estritamente crescente.
- O gráfico da função não intersecta o eixo Oy (eixo dos yy).
- A função f não é zero no ponto de coordenadas $(1,0)$, ou seja, $\log(1) = 0$.
- A função f é injectiva
- Assíntotas: Tem uma vertical $x = 0$
- Comportamento: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Representação gráfica de $f(x) = \log(x)$. No 4.ºQ, a função descreve uma curva próxima ao eixo dos yy , contudo nunca o intersecta.

Apesar de não ser alvo de análise exaustiva, repare-se que se $0 < a < 1$ nem todas estas propriedades se verificam.

Por exemplo, $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$. Graticamente, vem:

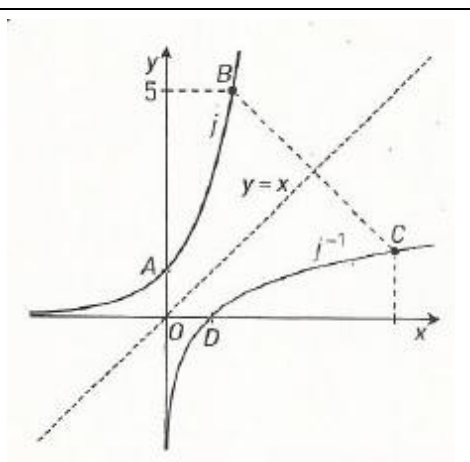


Para resolver

14. *Na figura encontra-se representada graficamente uma função j tal que $j(x) = 3^x$ e a sua função inversa, j^{-1} .

Os pontos A e B pertencem ao gráfico de j e os pontos D e C são as imagens de A e de B, respectivamente, pela reflexão do eixo $y = x$.

Determine as coordenadas dos pontos A, B C e D.



Veja-se que:

- A função é estritamente decrescente.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$

>Determinação de domínio da função logarítmica

Como os logaritmos estão definidos apenas para quantidades positivas, nunca nos podemos esquecer das restrições das propriedades da função logarítmica, ou seja, **o argumento do logaritmo tem de ser positivo (>0)**.

Tarefa: Determina o domínio de cada uma das seguintes funções:

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. $y = \log(2 - x^2)$

3. $y = \frac{1}{\ln(x^2 - 4)}$

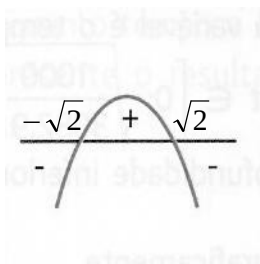
4. $y = \log_3(\sqrt{2-x})$

Resolução: Na resolução deste tipo de exercícios temos de estar atentos que para as funções estarem bem definidas: o denominador não pode ser nulo, o radicando não pode ser negativo e o logaritmo tem de ser positivo. Por vezes isso leva-nos à conjugação de várias condições.

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função exponencial e o seu domínio é $\mathbb{R}$.

2. $D = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 > 0\}; \quad 2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[.$ Logo,
 $D =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

$2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$



3. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0 \wedge \ln(x^2 - 4) \neq 0\};$

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\wedge \ln(x^2 - 4) \neq \ln 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 5$
 $\therefore$

Logo, $D =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}, -2[\cup]2, \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$

4. $D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2-x} > 0 \wedge 2-x > 0\}; \quad \sqrt{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$ Logo, $D =]-\infty, 2[$

Tarefa: Seja f uma função injectiva definida pela expressão

$f(x) = 2 \times 3^{x-2} - 1$

1. Determine, sem recorrer à função inversa, $f^{-1}(5)$

2. Caracterize a função inversa de f .

Resolução:

1. $f^{-1}(5)$ representa um elemento do domínio de f , cuja imagem por f é 5. Queremos determinar x , tal que $f(x) = 5$. Assim $2 \times 3^{x-2} - 1 = 5 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

$f(3) = 5$, então $f^{-1}(5) = 3$

Para resolver

15. Determina domínio das seguintes funções definidas pelas seguintes expressões:

15.1 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

15.2 $g(x) = \ln(x + 3)$

15.3 $h(x) = \log(x^2 - 4)$

15.4 $i(x) = \log_3(9 - x^2)$

15.5 $j(x) = \ln(x^2 + x - 6)$

15.6 $l(x) = \log_2\left(\frac{x-3}{x}\right)$

15.7 $m(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$

$$2.D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2 \times 3^{x-2} - 1 = y \Leftrightarrow 3^{x-2} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = \log_3\left(\frac{y+1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{y+1}{2}\right) + 2$$

$$D_{f^{-1}} = \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{y+1}{2} > 0 \right\} =]-1; +\infty[$$

$$\frac{y+1}{2} > 0 \Leftrightarrow y+1 > 0 \Leftrightarrow y > -1$$

A caracterização da função inversa é:

$$f^{-1} :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = \log_3\left(\frac{y+1}{2}\right) + 2$$

16. Considere a função f definida por: $f(x) = \log_4(x)$.

Sabendo que $4^a = 256$, determine o valor de $f(a)$.

16.1 Calcule o valor exacto de:

a) $f(16)$ b) $f(2)$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

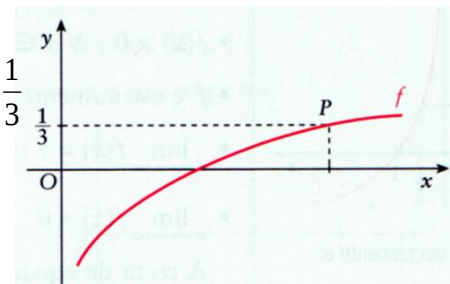
16.2 Determine as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico da função f com a recta de equação $y = 2$.

17 Na figura está parte da representação gráfica da função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \log_8(x)$.

P é um ponto do gráfico

de g que tem ordenada $\frac{1}{3}$

17.1 Determine a abcissa do ponto **P**.



17.2 Caracterize a função inversa de cada uma das funções injectivas, definidas por:

a) $f(x) = 2 - e^{x-5}$

b) $g(x) = \frac{1 - \log_3(1+2x)}{4}$ c) $h(x) = \frac{5}{3} - \ln(2-3x)$

Notas:

- Todas as funções logarítmicas de base maior que 1 e domínio $\mathbb{R}^+$, crescem para $+\infty$, no entanto, o seu crescimento é tão lento, quanto o da função exponencial correspondente é vertiginoso.
- As bases mais utilizadas em cálculo de logaritmos são base 2, 10 e **e**.
- Os logaritmos de base 10 chamam-se decimais e designam-se por $\log(x)$, omitindo-se a base.
- Os logaritmos de base **e** chamam-se Naturais, Neper ou Napier e designam-se por $\ln(x)$.

▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS

>Regras operatórias de exponenciais e logaritmos

Da mesma forma que existem regras que facilitam o cálculo operatório de potências, também existem regras que facilitam o cálculo logarítmico. Como operações inversas, podemos entender as regras para os logaritmos fazendo um paralelismo com as regras existentes para as operações com potências.

Regras operatórias da função exponencial		Regras operatórias dos logaritmos
$a^{\log_a(x)} = x$	identidade	$\log_a(a^x) = x$
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	Multiplicação $\leftrightarrow$ Adição	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^x : a^y = a^{x-y}$	Divisão $\leftrightarrow$ Subtração	$\log_a(x \div y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$(a^x)^p = a^{x \times p}$	Potência $\leftrightarrow$ Multiplicação por valor real	$\log_a(x^p) = p \log_a(x), p \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	Raíz $\leftrightarrow$ Divisão por valor natural	$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{\log_a(x)}{n}$

Desafio:

As propriedades de operações com logaritmos podem ser demonstradas a partir das regras das operações de potências que lhe estão associadas e fazendo as substituições certas, utilizando as igualdades da identidade. Por exemplo para a regra que transforma a adição de logaritmos no logaritmo do produto, experimenta as substituições: $\log_a(x) = u$; $\log_a(y) = v$ (1) $\Rightarrow x = a^u$; $y = a^v$ (2)

Assim, por (2), vem $\log_a(xy) = \log_a(a^u \times a^v)$. Depois de utilizares as propriedades da multiplicação de potências com a mesma base, a identidade ($a^{\log_a(x)} = x$) e (1), certamente que obténs o pretendido. Experimenta fazer a demonstração desta e das outras propriedades. Poderás confirmar os teus resultados consultando um manual de 12.º ano ou alguns de 11.ºano.

Tarefa: Utilizando as propriedades dos logaritmos:

1.1. Simplifica a expressão: $\ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x)$;

1.2. Escreve como um só logaritmo:

$$\log(x^2) + \log x - \log \sqrt{x}.$$

Resolução:

$$1.1 \ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x) = \ln(3 \times x^2 \times x) = \ln(3x^3)$$

1.2 Aplicando as propriedades dos logaritmos temos:

$$\begin{aligned} &\log(x^2) + \log x - \log \sqrt{x} \\ &= 2 \log x + \log x - \frac{\log x}{2} = \left(2 + 1 - \frac{1}{2}\right) \log x = \frac{5}{2} \log x \end{aligned}$$

>Mudança de base

No caso dos logaritmos existe a necessidade de acrescentar uma outra regra (de ouro!) para simplificarmos o cálculo de logaritmos, principalmente utilizando a calculadora. Na verdade, a calculadora só permite efectuar directamente, o cálculo de logaritmos em duas bases: **10** e **e**.

Como determinar por exemplo $\log_5(125)$?

Para responder a esta questão teremos que utilizar o artifício da **mudança de base**. Vejamos:

É possível calcular, por exemplo, $\log_5 125$, usando logaritmos de base **e** e de base **10**.

Seja: $y = \log_5 125 \Leftrightarrow 5^y = 125 \Leftrightarrow 5^y = 5^3 \Leftrightarrow y = 3$. Aplicando $\ln$ (base **e**) aos dois membros em (1), vem:

$$\ln 5^y = \ln 125 \Leftrightarrow y \ln 5 = \ln 125 \Leftrightarrow y = \frac{\ln 125}{\ln 5} \quad (1)$$

Fazendo na calculadora $\frac{\ln 125}{\ln 5} = 3$. Similarmente, aplicando $\log$ (base **10**) aos dois membros em (1), obtemos: $\log_5 125 = \frac{\log 125}{\log 5} = 3$.

Generalizando, vem $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,

fazendo a mudança para a base 10 ou, similarmente,

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \text{ optando pelo logaritmo de base } e.$$

Na calculadora, para calcularmos $\log_3 7$, fazemos

$$\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,771 \text{ ou } \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1,771.$$

>Equações envolvendo exponenciais e logaritmos

Tal como é possível transformar a equação numa igualdade entre exponenciais com a mesma base, pela mesma propriedade (injectividade da função) podemos também transformar a equação numa igualdade de logaritmo com a mesma base:

$$\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Tarefa: Resolve cada uma das seguintes equações:

$$1.1 \log(x^2) = \log(2x) \quad 1.2 \log(x+1) - \log x = \log(2x)$$

Resolução: 1.1 Começamos por definir o domínio onde a equação é válida tendo em conta que o argumento do logaritmo só pode tomar valores positivos. Domínio da equação: $x^2 > 0 \wedge 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Logo, $D =]0, +\infty[$.

$$\log(x^2) = \log(2x) \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Como 0 não pertence ao domínio da equação logarítmica, esta equação tem apenas a solução 2. C.S. = $\{2\}$

$$1.2 \text{ Domínio da equação: } x+1 > 0 \wedge x > 0 \wedge 2x > 0. \text{ Logo, } D =]0, +\infty[.$$

$$\log(x+1) - \log x = \log(2x) \Leftrightarrow \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log(2x).$$

Como a função logarítmica decimal ($a > 1$) é injectiva, vem:

$$\frac{x+1}{x} = 2x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 1\right) \wedge x \neq 0$$

Como $-\frac{1}{2}$ não pertence ao domínio da equação só existe uma solução. C.S. = $\{1\}$.

Repare que neste caso foi necessário utilizar uma das propriedades dos logaritmos, nomeadamente $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$.

Para resolver

18 Calcule, utilizando as propriedades dos logaritmos:

$$18.1 \log_2(64 \times 16)$$

$$18.2 \log_3\left(\frac{81}{27}\right)$$

$$18.3 \log_2(32)^8$$

19 Use as propriedades dos logaritmos para escrever na forma de um único logaritmo:

$$19.1 \ln(x^2) + \ln(x) - \ln(\sqrt{x})$$

$$19.2 2\log(6) - 3\log(3)$$

$$19.3 \ln(x^6) - \ln(x^2) + 2\ln(x)$$

20 Considera $\log(5) \approx 0,7$ e $\log(13) \approx 1,1$ e utilizando as propriedades dos logaritmos determina o valor numérico de:

$$20.1 \log(65) \quad 20.2 \log(0,2)$$

$$20.3 \log\left(\frac{5}{13}\right) \quad 20.4 \log\left(\sqrt{\frac{13}{65}}\right)$$

21 Sabe-se que $\log_2(a) = \frac{1}{5}$. Determine o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$

Recordar:

A solução de equações racionais coincide com soluções que sejam simultaneamente zeros do numerador e em que o denominador **não** se anule.

Para resolver

22 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes condições:

22.1 $\log_5 x = 0$ **22.2** $\log_x 10 = \frac{1}{4}$ **22.3** $\log(x) + \log(40) = 2$ **22.4** $\log(x-3) - \log(2x-9) = 0$
22.5 $\ln(\ln(5x)) = 0$ **22.6** $x = \log_{36} 6$ **22.7** $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 8$ **22.8** $2\ln(x) = \ln(75-10x)$
22.9 $\log_2(x+2) = 0$ **22.10*** $\log_5(25^x + 6) = x+1$

Será que agora já estamos em condições de resolver todas as funções exponenciais?

De facto, aplicando o logaritmo como inverso da exponencial e a mudança de base, vem:

$$3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58(2cd).$$

Nota:

Algumas equações envolvendo logaritmos podem ser resolvidas através de uma equação exponencial equivalente e algumas equações com a incógnita em expoente podem ser resolvidas usando logaritmos. Tal equivalência é possível atendendo a que:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$$

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Tarefa: Resolva a seguinte equação:

1.1 $1 - \log_4(x) = \log_4(5-x)$

Resolução:

1.1 Domínio da equação:

$$x > 0 \wedge 5-x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 5 \Leftrightarrow 0 < x < 5.$$

Logo, $D =]0,5[$.

$$1 - \log_4(x) = \log_4(5-x) \Leftrightarrow 1 = \log_4(x) + \log_4(5-x) \Leftrightarrow (\text{aplicando } \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y))$$

$$\Leftrightarrow 1 = \log_4(x(5-x)) \Leftrightarrow (\text{aplicando a equivalência } \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y)$$

$$\Leftrightarrow x(5-x) = 4^1 \Leftrightarrow 5x - x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \times (-1) \times (-4)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

A fórmula resolvente permitiu determinar soluções da equação de 2.º grau,

1 e 4. Como ambas estão entre 0 e 5, ambas são solução da equação inicial.

Nesta equação, foi utilizada a equivalência entre logaritmos e exponencial, bem como uma das propriedades dos logaritmos.

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

24.1 $\log(x^2) = \log(2x)$

24.2 $4e^{2x} + 3 = 403$

24.3 $\log_3(x) = 5$

24.4 $2^x = 80$

24.5 $3^{2x-1} = \sqrt{3}$

24.6 $x \log(1,25) + 3x \log(20) = 1$

24.7 $\ln(1-3x) = -1$

24.8 $\ln(x^2 - 4) = \ln(1-4x)$

Para resolver

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

23.1 $3^{2x-1} = \sqrt{3}$

23.2 $3^x = 50$

23.3 $e^{3x} - 4 = 6$

>Inequações exponenciais e logarítmicas

A função logarítmica com base a superior a 1 é estritamente crescente. Isso permite concluir

$$\log_a(x) < \log_a(y) \Leftrightarrow x < y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a > 1$$

$$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a > 1$$

Tarefa: Resolva a seguinte inequação:

$$\frac{4 - \log_2(x-1)}{1 - 3^{1-x}} > 0$$

Resolução: Começamos por determinar o domínio onde a expressão é válida:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 0 \wedge 1-3^{1-x} \neq 0\} =]1; +\infty[$$

$$x > 1 \wedge -3^{1-x} \neq -1 \Leftrightarrow x > 1 \wedge 3^{1-x} \neq 1 \Leftrightarrow x > 1 \wedge 1 -$$

Para resolver a equação racional, utilizaremos um quadro de sinais. Para isso determinamos em antecipo os zeros do numerador e denominador.

$$4 - \log_2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x-1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$x-1 = 4^2 \Leftrightarrow x = 16 + 1 \Leftrightarrow x = 17$$

$$1 - 3^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 3^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Para resolver

25 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

25.1 $4^{3x+1} < (\sqrt{2})^{2x}$

25.2 $2e^{x+2} > 3$

25.3 $\log_2(x+2) \leq 0$

25.4 $\log_7(1-x) > 3$

26 Considere a função $g(x) = 1 + \log_3(2-5x)$

26.1 Determine o domínio e os zeros de g .

26.2 Resolva as condições: $g(x) \leq 3$; $g(x) > 1$

27 Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por:

$$f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2(x)$$

27.1 Mostre que $f(x) = 3 + \log_2(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

27.2 Determine a abscissa do ponto de gráfico de f com a recta de equação $y = 8$.

27.3 Resolva, em $\mathbb{R}$, a condição $f(x) < 2$.

x	$-\infty$	1		17	$+\infty$
$4 - \log_2(x-1)$			+	0	-
$1 - 3^{1-x}$	-	0	+	+	+
$\frac{4 - \log_2(x-1)}{1 - 3^{1-x}}$			+	0	-

Assim, vem:

$$\frac{4 - \log_2(x-1)}{1 - 3^{1-x}} > 0 \Leftrightarrow x \in]1, 17[$$

No estudo analítico de situações de modelação matemática de exponenciais e logaritmos é-nos exigida, além do conhecimento das regras operatórias, a destreza na resolução de (in)equações exponenciais e logarítmicas. Vejamos um exemplo.

Tarefa: Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,98 \ln(t) \quad (\ln \text{ é log de base } e)$$

Uma planta tem 50 cm de altura.

Quantos meses tem a planta?

Resolução: 50 cm = 0,5 m

$$h(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,32 + 0,98 \ln(t) = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$0,98 \ln(t) = 0,18 \Leftrightarrow \ln(t) = \frac{0,18}{0,98} \Leftrightarrow$$

$$\ln(t) = 0,202 \Leftrightarrow t = e^{0,202} \Leftrightarrow t \approx 1,2$$

$$(\ln(t) = y \Leftrightarrow t = e^y)$$

Logo, a planta tem, aproximadamente, 1,2 meses, ou seja, 1 mês e 6 dias.

Para resolver

28 Um paciente sujeito a um certo tratamento médico mantém, t horas após a aplicação, uma quantidade, M , em miligramas do medicamento administrado, dada pela relação: $M(t) = 250^{1-0,1t}$

28.1 Qual a quantidade de medicamento aplicada ao doente?

28.2 Sabe-se que a substância foi aplicada às 10 horas.

28.3 A que horas se reduzirá a metade a quantidade ainda existente no corpo do paciente?

28.4 Para fazer efeito, a quantidade de medicamento não deverá ser inferior a 50 mg. A que horas deverá ser administrada nova dose? Apresenta o resultado em horas e minutos arredondados às unidades.

29 Segundo a escala de Richter a magnitude M de um tremor de terra, com epicentro a 100 km do sismógrafo e a amplitude A , em milímetros, registada pela máquina estão relacionadas pela equação: $M = 3 + \log_{10} A$.

29.1 Qual a magnitude de um tremor de terra com amplitude de 2 milímetros? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

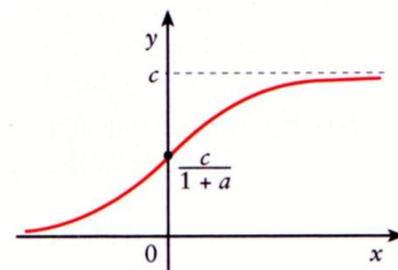
29.2 Uma determinada ponte foi concebida para resistir a um tremor de terra cuja magnitude seja o dobro da magnitude de um tremor de terra de 2 milímetros de amplitude. Qual será a amplitude de tal tremor de terra?

▪ COMPLEMENTO SOBRE MODELO LOGÍSTICO: CRESCIMENTO POPULACIONAL¹

O modelo de crescimento logístico admite que, no início, a população cresce quase exponencialmente, mas a partir de certa altura, tende a estabilizar, existindo, por isso, limites para o crescimento.

O modelo logístico traduz-se por uma expressão do tipo:

$$f(x) = \frac{c}{1 + a e^{-bx}}, \text{ em que } a, b \text{ e } c \text{ são constantes positivas.}$$



>Propriedades das funções logísticas

- A função só toma valores positivos, logo $f(x) > 0$, qualquer que seja o valor de x .
- O ponto de intersecção de gráfico de f com o eixo Oy tem as coordenadas $\left(0, \frac{c}{1+a}\right)$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$
- O gráfico da função admite duas assíntotas horizontais que são as retas de equações $y = 0$ e $y = c$.

¹ Este tópico está integrado neste texto de apoio como tema facultativo.

Tarefa: No mesmo ecossistema existem pombos e garças. A população de pombos é modelada pela função $p(t) = \frac{6}{1 + 0,6e^{-t}}$ e a população de garças por $g(t) = \frac{5}{1 + 0,25e^{-t}}$. O número de pombos e gaivotas está expresso em centenas e o tempo, t , em anos.

1. No instante inicial, qual das populações tem um maior número de indivíduos? Justifique apresentando os cálculos.
2. Depois de um ano e meio a mesma relação verifica-se?
3. Quantos meses são necessários para que o número de pombos atinja 500?
4. Para que valores tende a aproximar-se a população de cada espécie?

Resolução:

1. No instante inicial $t=0$, pelo que, o n.º de garças é dado pela expressão $g(0) = \frac{5}{1 + 0,25e^{-0}} = \frac{5}{1,25} = 4$

Enquanto o número de pombos é dado por $p(0) = \frac{6}{1 + 0,6e^{-0}} = \frac{6}{1,6} = 3,75$

Ora, como $g(0) > p(0)$, a população inicial de garças é superior à população de pombos.

2. O tempo é 1,5 anos. Substituamos o valor de t em ambas as expressões, por este valor:

$$g(1,5) = \frac{5}{1 + 0,25e^{-1,5}} \approx 4,74 \quad ; \quad p(1,5) = \frac{6}{1 + 0,6e^{-1,5}} \approx 5,29$$

Como $g(1,5) < p(1,5)$, a relação não se mantém.

3. Para responder a esta questão, igualamos a expressão do n.º de pombos a 5 (centenas).

$$\frac{6}{1 + 0,6e^{-t}} = 5 \Leftrightarrow 6 = 5 \times (1 + 0,6e^{-t}) \Leftrightarrow 6 = 5 + 3e^{-t} \Leftrightarrow 1 = 3e^{-t} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t \approx 1,09$$

Em meses, 1,09 anos corresponde a: $12 + 0,09 \times 12 = 13,08$. São necessários 14 meses.

4. O limite quando x tende para infinito é o parâmetro c , pelo que, o número de garças tende a aproximar-se de 5 centenas e o número de pombos de 6 centenas.

No MA2 e MA3 tem outras aplicações destas funções a modelos de fenómenos sociais e físicos. Neles desafiamo-lo a aprofundar o seu conhecimento em relação à Evolução da População Mundial e escala de Richter.

Para resolver:

30.0 comprimento médio, em centímetros, de dois pequenos animais A e B , x dias após o nascimento, é dado por:

$$a(x) = \frac{20}{1 + 4e^{-0,07x}} \quad \text{e} \quad b(x) = \frac{30}{1 + 9e^{-0,03x}},$$

respetivamente.

30.1 Qual é o comprimento de cada um dos animais na altura do nascimento?

30.2 Dois animais um A e outro B nasceram no mesmo dia. Quanto é a diferença de comprimento desses animais 2 meses após o nascimento?

30.3 O que se pode afirmar do comprimento médio dos animais A e B quando adultos?

Para resolver

31 A expressão $a^{3-2\log_a 3}$ com $a > 1$ é equivalente a :

- (A) $-a^2$ (B) $9a^3$ (C) $\frac{a^3}{9}$ (D) $-9a^3$

32 Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$. Qual o valor de $\log_a\left(\frac{a}{b}\right)$?

- (A) $a - c$ (B) $\left(\frac{a}{c}\right)$ (C) $a + \left(\frac{b}{c}\right)$ (D) $1 - c$

33 Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.

O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.

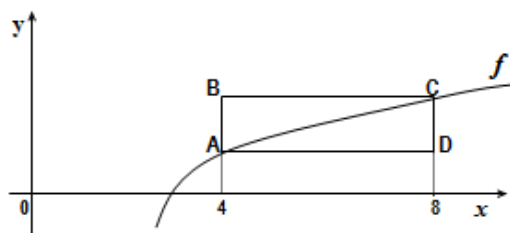
Indique o valor de a . (A) $\ln 2$ (B) 2 (C) e^2 (D) $e + \ln 2$

34 Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e). Os pontos A e C, que pertencem ao gráfico da função f , são vértices de um rectângulo [ABCD], de lados paralelos aos eixos do referencial.

As abcissas de A e de C são 4 e 8, respectivamente.

Qual é a área do rectângulo [ABCD]?

- (A) $\ln 64$ (B) $\ln 72$ (C) $\ln 81$ (D) $\ln 16$



35 Mostra que:

35.1 $2^{5+\log_2(3x)} = 96x$, $x > 0$

35.2 $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} a + \log_b\left(\frac{1}{b}\right) = -2$, $(a > 0 \wedge a \neq 1)$ e $(b > 0 \wedge b \neq 1)$

35.3 $\log_{a^2}(x) = \frac{1}{2} \log_a(x)$, com $a > 0 \wedge a \neq 1$

36 Considere as seguintes funções, reais de variável real: $f(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$ e $h(x) = -2e^{x-3}$

36.1 Mostre que $f(x) = 3 + \log_3 x$ para $x \in \mathbb{R}^+$.

36.2 Determine o valor exacto da abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a recta $y = 4$.

36.3 Resolva a inequação: $f(x) \leq \log_3(x-4) + 3$.

36.4 Resolva a equação $h(x) = h(4)$.

37 O nível N , em decibéis, de um som audível pode ser dado por $N = 170 + 10 \log I$, onde I é o valor da intensidade, em certa unidade, do som emitido.

37.1 Determina o nível de um som de intensidade 0.001.

37.2 Sabe-se que um som de nível superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde. Conclui daí, a partir de que intensidade devem ser utilizados meios de protecção auditiva.

38 Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por $A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p)$, ($\ln$ designa logaritmo de base e). Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

38.1 O Jamilson tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Jamilson estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso? Apresenta o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

38.2 Verifica que, para qualquer valor de p , a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determina um valor aproximado dessa constante (com duas casa decimais) e interprete esse valor na situação descrita.

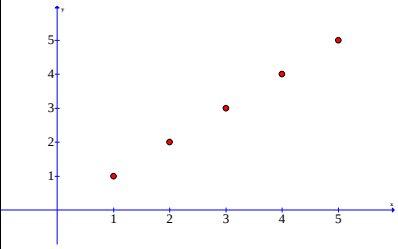
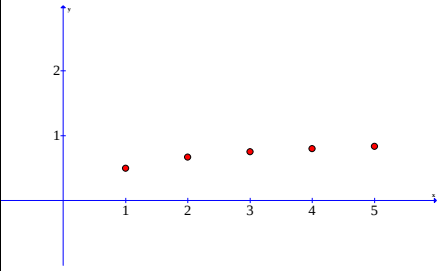
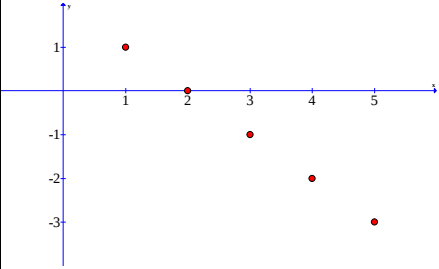
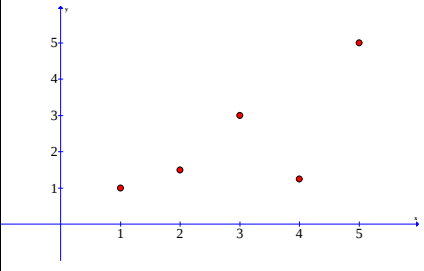
TEORIA DOS LIMITES

NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Imagine que está a fazer um percurso por um trilho na floresta. Ao longe consegue vislumbrar um obstáculo sobre o qual nada conhece. À medida que se aproxima desse obstáculo consegue ver melhor os seus contornos. Aproxima-se cada vez mais e mais, e consegue avaliar se pode continuar a avançar na sua direcção, quanto mais se aproxima mais pormenores consegue observar, dá mais um passo e outro a seguir, cada vez passos mais pequenos para continuar em segurança. Prossegue e aproxima-se do obstáculo tanto quanto queira, mas existe sempre uma infinidade de possibilidades para o atingir, continua até chegar ao seu limite!

A utilização da palavra limite tem, na vida corrente o significado de algo de que nos aproximamos mas que nunca alcançamos. Em Matemática o conceito de limite tornou possível conhecer melhor o comportamento de uma função mesmo nos seus pontos mais inacessíveis. Com o conceito de limite damos um passo em frente, saímos da zona de conforto dos números reais e entramos no chamado Cálculo Infinitesimal, que é a base do estudo da continuidade e da derivada (cálculo diferencial) que serão abordados ao longo deste tema.

Na 11.ª classe já foi abordado o conceito de limite de uma sucessão. Vejamos alguns exemplos:

Sucessões numéricas	Representação gráfica		Dizemos que:
$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$		Os termos tornam-se cada vez maiores, sem atingir um limite	$n \rightarrow +\infty$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}$		Os números aproximam-se cada vez mais de 1, sem nunca atingir esse valor	$n \rightarrow 1$
$1, 0, -1, -2, -3, \dots, -n+2$		Os termos tornam-se cada vez menor, sem atingir um limite	$n \rightarrow -\infty$
$1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \dots,$ $\begin{cases} n, \text{ se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n+1}{n}, \text{ se } n \text{ par} \end{cases}$		Os termos oscilam sem tender para um limite	

Agora vamos estender a noção de limite a funções de variável real (f.r.v.r.), ou seja, a funções que não assumem apenas valores discretos no seu domínio.

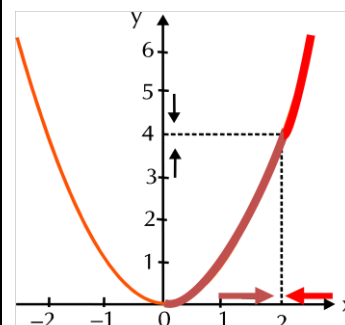
Tarefa: Consideremos a função de expressão algébrica $f(x) = x^2$. De que valores de y se aproxima a função, quando os valores da abscissa se aproximam de 2?

Resolução: Façamos uma tabela com seqüências que se aproximem de 2. Uma seqüência por valores superiores a 2 e outra por valores inferiores a 2. A cada um deles associamos o respectivo valor da função para a seqüência de pontos.

Por observação da tabela concluímos que as imagens da seqüência por f tendem para 4. Para outros valores que escolhessemos, as imagens continuariam a tender para 4.

	x	$f(x)$
Aproximação de 2 por valores inferiores a 2	1,900	3,610
	1,990	3,960
	1,999	3,996
	2,000	4,000
Aproximação de 2 por valores superiores a 2	2,001	4,004
	2,010	4,040
	2,100	4,410

Graficamente obtemos



Assim, dizemos que o limite da função $f(x)$ no ponto de abscissa 2 é 4 e representa-se por: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

A observação do gráfico confirma-nos exactamente que o limite da função no ponto 2 que coincide com o valor da função nesse ponto, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(2) = 2^2 = 4.$$

DEFINIÇÃO DE LIMITE DE FUNÇÃO SEGUNDO HEINE

Antes de prosseguirmos, recomendamos a exploração do MA4.

Existem diferentes definições de limite. Para as compreendermos melhor é necessário ter conhecimento de algumas noções topológicas, nomeadamente de ponto de acumulação e ponto isolado. Por **ponto isolado** entenda-se um valor discreto, que numa determinada proximidade é o único valor que a função assume. Como um termo de uma sucessão. Por sua vez, um **ponto de acumulação** de uma função é um ponto que, qualquer que seja o intervalo que eu escolha na sua proximidade, por mais pequeno que ele seja, conseguimos sempre identificar outros pontos do domínio da função.

Neste caso estudaremos apenas uma das definições de limite, segundo Heine.

Definição de Limite (segundo Heine)

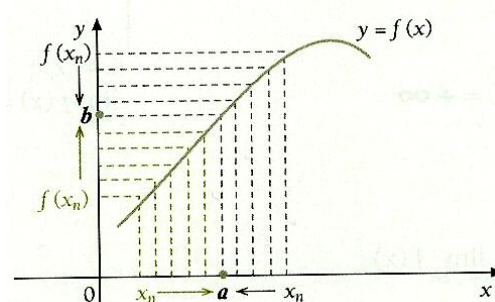
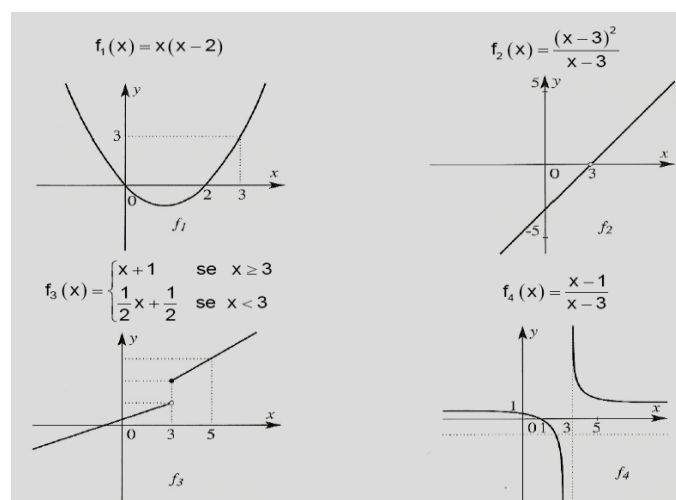
Diz-se que f tende para b , quando x tende para a se, para qualquer sucessão de valores do domínio de f convergente para a , por valores diferentes de a , a correspondente sucessão de imagens $f(x_n)$ convergente para b .

Escreve-se: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Para resolver:

1. Observe os seguintes gráficos:

De acordo com o conceito intuitivo que tem de limite indique, para cada função, se existe ou não, limite quando x tende para 3.



Segundo esta definição de limite, não existe limite para pontos isolados de uma função. Contudo, é possível que o limite de um ponto seja um valor que não coincida com a imagem da função nessa abscissa.

▪ Limite de uma função num ponto

Tarefa: Consideremos a função definida por $f(x) = \frac{1000}{x}$, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Qual o $\lim_{x \rightarrow -20} f(x)$? E o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Resolução: Sobre a função $f(x) = \frac{1000}{x}$, sabemos ser uma função racional, cuja representação gráfica é uma hipérbole com duas assíntotas. Uma assíntota vertical em $x=0$ e uma assíntota horizontal em $y=0$. Assim sendo, a função não tem zeros nem intersecta o eixo das ordenadas em qualquer ponto do seu domínio. Tal como o domínio, o contradomínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Depois de termos uma visão global da função, que nos permite fazer um esboço da mesma, iremos proceder então à determinação do limite da função nos pontos solicitados para conhecermos mais características.

Para calcularmos o limite de f no ponto de abscissa -20 considera-se uma sucessão x_n de valores do domínio da função, convergente para -20 por valores diferentes de -20 .

Seja $x_n = -20 + \frac{1}{n}$. Associemos a cada sucessão a imagem por f .

Graficamente podemos observar a representação da função $f(x)$ e da sucessão x_n

Ora $f(x_n) = \frac{1000}{x_n} = \frac{1000}{-20 + \frac{1}{n}}$, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{-20 + \frac{1}{n}} = \frac{1000}{-20 + 0} = \frac{1000}{-20} = -50, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow -20} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -50$$

Prova-se que, quando existe limite de uma função num ponto ele é único.

Continuemos agora o exemplo determinando o limite da função em causa no ponto de abscissa 0. Como sabemos, 0 não é um elemento do domínio da função, pelo que começemos por estudar o comportamento da função na proximidade do ponto de abscissa 0. Iremos adoptar o mesmo procedimento já utilizado num exemplo anterior: considerar sequências de valores convergentes para 0, uma por valores superiores a zero e outra por valores inferiores a zero.

Para resolver:

2. Seja g uma função real de variável real definida por:
 $g(x) = \frac{4x+3}{x+2}$.

Considere as sucessões: $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $u_n = -2 + \frac{1}{n}$

a. Represente graficamente a função g .

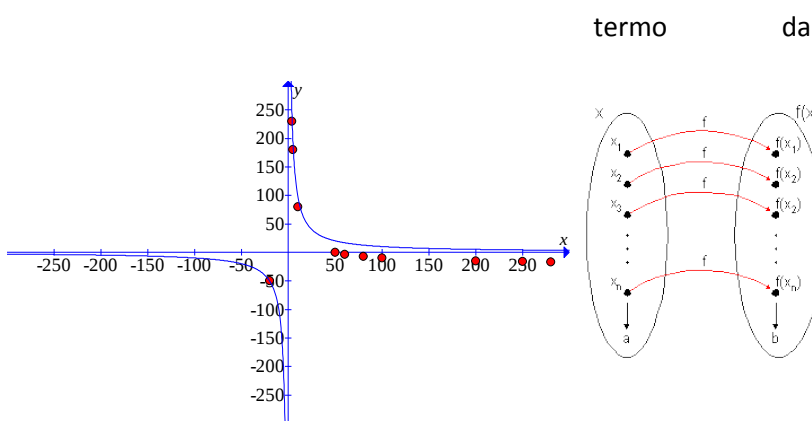
b. Mostre que $v_n \rightarrow 1$ e $u_n \rightarrow -2$

c. O que pode concluir, pela definição de limite segundo Heine, quanto ao: $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(v_n)$? ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$?

3. Considere as seguintes funções reais de variável real.
 $g(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x} & \text{se } x > 1 \\ -1 + x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

a. Tendo em conta a definição de limite de uma função segundo Heine, complete:

- | | |
|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |



O limite de uma função no ponto, quando existe, é único.

Seja $x_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ que sabemos ser um infinitésimo que se aproxima de zero por valores positivos, superiores a 0 ($x_n \rightarrow 0^+$), e $y_n = -\left(\frac{1}{10}\right)^n$ que é, igualmente, um infinitésimo mas que tende para zero por valores negativos, inferiores a 0 ($y_n \rightarrow 0^-$).

Vejamos o comportamento das imagens, por f , destas sucessões numa tabela.

x_n	$f(x_n)$	y_n	$f(y_n)$
$\left(\frac{1}{10}\right)^1 = 0,1$	10000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^1 = -0,1$	-10000
$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0,01$	100000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^2 = -0,01$	-100000
$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0,001$	1000000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^3 = -0,001$	-1000000
$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$	10000000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^4 = -0,0001$	-10000000
...	...	...	...

Neste caso a função não tem limite em 0, pois as imagens das sucessões por f têm limites distintos, pois $f(x_n) \rightarrow +\infty$ e $f(y_n) \rightarrow -\infty$.

▪ Limites Laterais

A partir do exemplo anterior, consideremos, separadamente, o limite no ponto de abcissa zero, primeiro por valores superiores a 0, ou seja, à direita de 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{\left(\frac{1}{10}\right)^n} = \frac{1000}{0^+} = +\infty$$

Isto é, o limite à direita de f em 0 é $+\infty$, pois as imagens dos termos das sucessões aproximam-se de zero, pela direita, por valores maiores que zero.

Analogamente, como $y_n \rightarrow 0^-$ vem:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{-\left(\frac{1}{10}\right)^n} = \frac{1000}{0^-} = -\infty$$

Ou seja, o limite à esquerda de f em 0 é $-\infty$, visto que as imagens das sucessões, à esquerda de zero, se aproximam por valores menores que zero.

Os limites laterais são diferentes, logo a função não tem limite em zero.

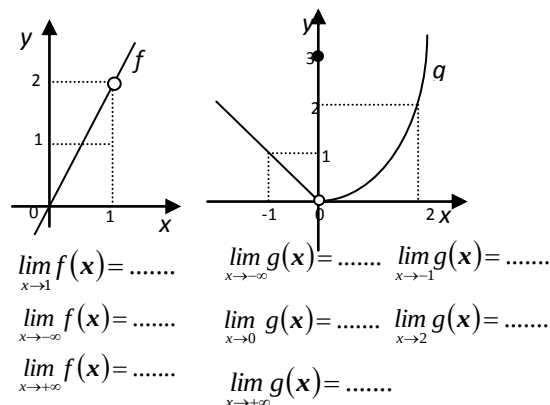
Como já foi referido a recta de equação $x=0$ constitui uma assíntota vertical do gráfico da função f . Assim sendo, o cálculo dos limites laterais em pontos que não pertencem ao domínio da função que sejam infinitos permitem-nos identificar se o gráfico tem assíntotas verticais, independentemente de existir ou não limite nesse ponto.

Para resolver:

4. Verdadeiro ou Falso? Justifique as verdadeiras e corrija as afirmações falsas.

- Pode existir o limite de uma função num ponto que não pertença ao domínio da função.
- Se uma função está definida num ponto, podemos afirmar que existe limite da função nesse ponto.
- Se existem limites laterais num ponto, podemos afirmar que existe limite nesse ponto.

5. Observe os gráficos e complete as expressões:

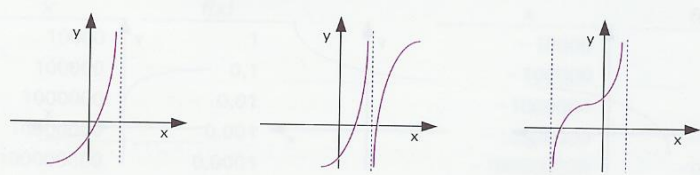


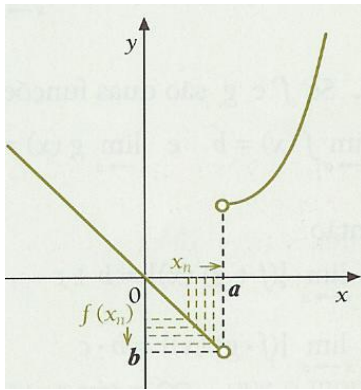
Assíntotas paralelas ao eixo das ordenadas (Verticais)

A recta r de equação $x=a$, $a \in \mathbb{R}$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f se e só se:

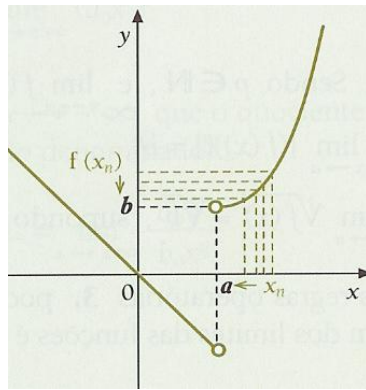
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nota - Em geral, a existência de assíntotas verticais está relacionada com os pontos que não pertencem ao domínio.





Diz-se que o limite lateral à esquerda de a é b e escreve-se: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$



Diz-se que o limite lateral à direita de a é b e escreve-se: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

▪ Limites no infinito

Estudar o comportamento da função pode fazer-se para um determinado número real ou nos ramos infinitos, ou seja, averiguar o comportamento da função quando x converge (ou tende) para $+\infty$ ou $-\infty$.

Tarefa: Continuamos a considerar $f(x) = \frac{1000}{x}$. Determina $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

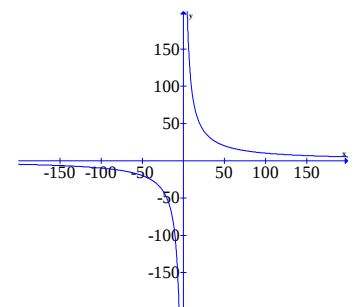
Resolução: Consideremos agora uma sucessão de valores do domínio da função que seja um infinitamente grande positivo, por exemplo $x_n = n^3$ (poderia ser outra qualquer).

Ora, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{x_n} = \frac{1000}{+\infty} = 0$, isto é, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Consideremos agora uma sucessão, y_n que seja um infinitamente grande

negativo. $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1000}{y_n} = \frac{1000}{-\infty} = 0$, isto é, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Por observação do gráfico, facilmente observamos que para grandes valores de x, quer no sentido positivo, quer no sentido negativo a função aproxima-se, por valores maiores e menores que zero, respectivamente, da recta de equação $y=0$, que já vimos ser uma assíntota horizontal. Assim, o cálculo de limites no infinito permite verificar se o gráfico tem ou não assíntotas horizontais.



Propriedades

- O limite da função num ponto existe se e só se os limites laterais são iguais, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

$\downarrow$
 limite lateral
à esquerda

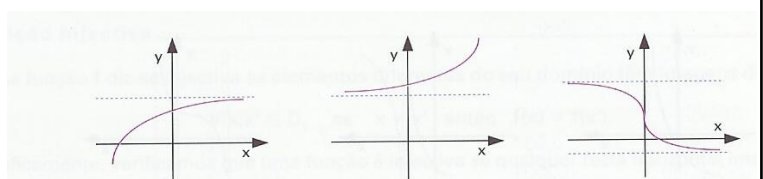
$\downarrow$
 limite lateral
à direita
- Se f só está definida à esquerda de a, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- Se f só está definida à direita de a, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Assíntotas paralelas ao eixo das abcissas (Horizontais)

A recta de equação $y=b$, com $b \in \mathbb{R}$, é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se e só se:

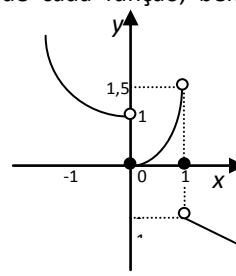
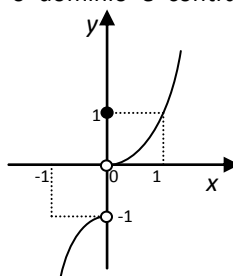
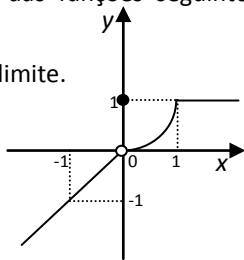
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Nota – Uma assíntota não vertical pode ser intersectada pelo gráfico da função.



Para resolver:

7. Observe os gráficos das funções seguintes e indique o domínio e contradomínio de cada função, bem como os respectivos pontos do domínio onde existe limite.



CÁLCULO DE LIMITES DE FUNÇÕES

Os limites, como já vimos estão associados ao conceito de função. Ao longo do seu percurso escolar já estudou diferentes famílias de funções, entre elas funções polinomiais, racionais, irracionais. Vamos agora calcular limites para exemplos concretos de funções. À medida que os exemplos forem apresentados, definiremos mais alguns conceitos e propriedades da teoria dos limites que nos permitirão avançar no estudo das funções e obter conclusões a partir das suas expressões analíticas.

Limites de funções polinomiais

Tarefa: Considere a função $f(x) = 2x + 1$.

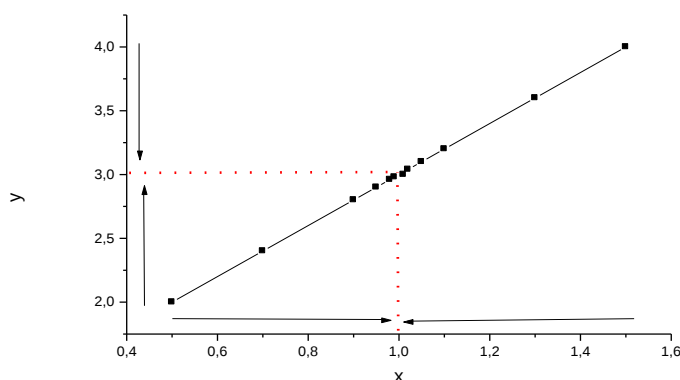
Qual o comportamento da função na vizinhança, que é como quem diz, na proximidade, do ponto de abscissa 1? Obtenha a resposta por processos tabulares, gráficos e analíticos.

Resolução: A representação gráfica desta função sabemos ser uma recta com um declive positivo, ou seja, tem monotonia crescente e intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).

Podemos aproximarmo-nos por valores à esquerda ou à direita de um. Registamos esses valores numa tabela:

Aproximação por valores à direita de 1		Aproximação por valores à esquerda de 1	
x	y	x	y
1,5	4	0,5	2
1,3	3,6	0,7	2,4
1,1	3,2	0,9	2,8
1,05	3,1	0,95	2,9
1,02	3,04	0,98	2,96
1,01	3,02	0,99	2,98
O valor de y decresce aproximando-se de 3		O valor de y é crescente com tendência a atingir o valor 3.	

Graficamente obtemos:



Nota-se que quando x aproxima-se de (tende para) 1, pelos dois lados, ao mesmo tempo, y tende para 3, ou seja, $x \rightarrow 1$ implica que $y \rightarrow 3$. Escrevemos: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.

Neste caso o limite é igual ao valor da função no ponto de abscissa 1, isto é, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3$.

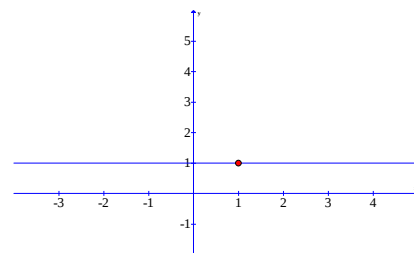
Intuitivamente e por análise tabular e gráfica o comportamento de $f(x)$ na vizinhança de 1 é tender para valores de ordenada 3.

Vamos agora recorrer a processos analíticos. Esta função polinomial é constituída pela soma de outras duas funções: a função linear $g(x)=2x$ e a função constante $h(x)=1$.

Qual o limite de cada uma destas funções quando $x \rightarrow 1$?

Começemos pela função constante.

A representação gráfica é uma recta horizontal, pelo que, ao aproximarmo-nos de qualquer valor, o resultado obtido é sempre o mesmo, neste caso o 1!



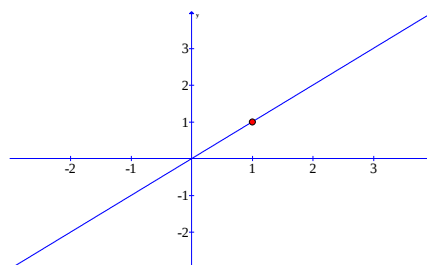
$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$$

O limite de uma função constante em qualquer ponto do seu domínio é sempre a própria constante.

Vejamos agora a função $g(x)$. Esta função ainda pode ser considerada como o produto de duas funções: $j(x)=2$, uma função constante e a função identidade $i(x)=x$.

Ora, já vimos que o limite de uma função constante é sempre a própria constante, pelo que: $\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$.

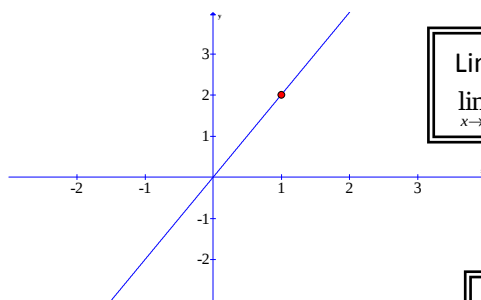
A representação gráfica da função identidade é uma recta que a cada abscissa faz corresponder a mesma ordenada. Observemos o gráfico.



$$\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

O limite da função identidade em qualquer ponto do seu domínio coincide com a sua imagem.

O limite no ponto 1 de $g(x)$ é o produto do limite das funções $j(x)$ e $i(x)$:



$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \times \lim_{x \rightarrow 1} x = 2 \times 1 = 2$$

Assim sendo, o limite do produto é igual ao produto dos limites.

Voltando à função inicial $f(x)=2x+1$, será que o limite da função no ponto de abscissa 1, é também a soma dos limites das funções $g(x)$ e $h(x)$? A resposta é afirmativa!

Ora, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$, logo $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 + 1 = 3$.

Analiticamente obter o comportamento de uma função num ponto é calcular o limite da função nesse ponto. Em termos práticos tal corresponde a substituir x na expressão pelo valor para o qual a variável converge, obtendo, neste caso, a imagem da função no ponto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

Tarefa: Considere a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Qual o $\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 3x + 1)$? Qual o $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1)$?

Limite da função constante:

Se $g(x) = k$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$
para qualquer $a \in D_g$.

Limite da função identidade, $i(x)$:

$\lim_{x \rightarrow a} i(x) = i(a) = a$, para qualquer $a \in D_f$.

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$,

então: $\lim_{x \rightarrow a} [(f \times g)(x)] = b \times c$;

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$,

então: $\lim_{x \rightarrow a} [(f + g)(x)] = b + c$

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, então:

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^p] = b^p$ onde $p \in \mathbb{N}$

Resolução: O polinómio $x^2 - 3x + 1$ pode ser associado a uma função de 2.º grau. Graficamente é representado por uma parábola que, pelo coeficiente de x^2 ser positivo, tem a concavidade voltada para cima.

Ora uma função polinomial é a soma de vários monómios do tipo kx^p onde $p \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{R}$.

Portanto, para calcularmos o limite da função em qualquer ponto, basta aplicar a propriedade da soma de limites. Ficamos com:

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 7} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 7} (-3x) + \lim_{x \rightarrow 7} (1) = 7^2 - 3 \times 7 + 1 = 29$$

Como o limite da função do tipo $f(x) = kx^p$ é igual à imagem da função no ponto em causa, podemos calcular o limite directamente, sem aplicar a propriedade da soma de limites, fazendo:

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 3x + 1) = 7^2 - 3 \times 7 + 1 = 29$$

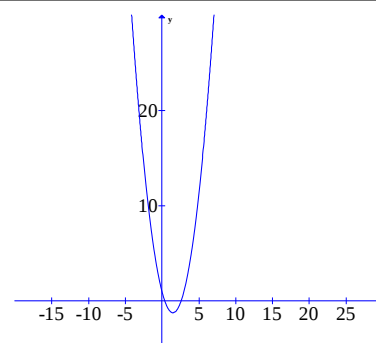
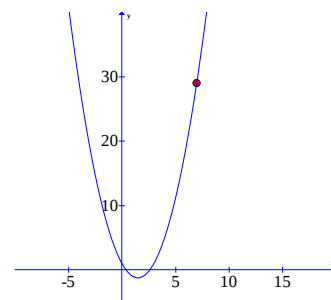
Concluimos que o limite é o valor do polinómio no ponto de abcissa 7.

Determinemos agora o limite da função quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty - 3 \times \infty + 1 = +\infty - \infty = ? \cdot \boxed{+\infty - \infty} \text{ é uma indeterminação,}$$

isto é, é uma situação que não conseguimos identificar qual o limite da função. Nestes casos aplicamos algumas técnicas para conseguirmos prosseguir, ou seja, **levantamos a indeterminação**.

Por observação gráfica facilmente verificamos que, quando $x \rightarrow +\infty$, a função tende para $+\infty$. Assim: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$



Já levantámos a indeterminação por processo gráfico, mas também existem processos analíticos para os fazer.

1.º processo

Se colocarmos x^2 (porque é o **termo de maior grau do polinómio**) em evidência, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \times (1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{Isto é: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$$

Atenção: Esta técnica pode ser usada quando x tende para um n.º real ou para infinito!

2.º processo:

Numa função polinomial, quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, o limite do polinómio $P(x)$ é igual ao limite do monómio de maior grau de $P(x)$.

$$\text{Isto é: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

Atenção: só se pode aplicar quando x tende para infinito!

Limite da função polinomial: O limite de uma função polinomial, $P(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ é igual ao monómio (ou termo) de maior grau quando x tende para esse mesmo valor.

$$\text{Se } P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n$$

Para resolver: 8. Determine, se existirem, os limites das seguintes funções quando $x \rightarrow -1$; $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$

$$8.1. e(x) = 3 \quad 8.2. f(x) = 0,5x^2 \quad 8.3. g(x) = 2x^2 + 3x \quad 8.4. h(x) = -5x^2 - 3x + 2$$

$$8.5. i(x) = x + 1 \quad 8.6. j(x) = x^2 + 1 \quad 8.7. l(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad 8.8. n(x) = -x^3 + 1$$

$$8.9. p(x) = 2x(3x - 1) \quad 8.10. q(x) = (x + 2)^{23} \quad 8.11. r(x) = 5(x - 3)(1 - x)$$

Note bem:

$\pm \infty \times (\pm)(\mp) \infty$ não é uma indeterminação.

$\pm \infty \times (\pm) \infty = +\infty$ e

$\pm \infty \times (\mp) \infty = -\infty$,

aplicando as regras da multiplicação de sinais iguais ou sinais

▪ Limites de funções racionais

As funções racionais foram estudadas detalhadamente na 11.ª classe, inclusive a análise do seu comportamento nos ramos infinitos. Uma função racional é definida por uma expressão do tipo

$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios

e $d(x)$ é diferente do polinómio nulo.

Tarefa: Considere a função $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

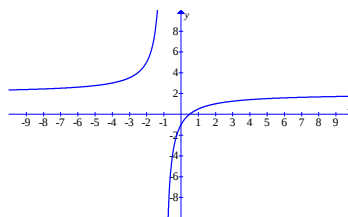
Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$,
então: $\lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \left(\frac{b}{c} \right)$, com $c \neq 0$

Qual o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Qual o $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$? Qual o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Resolução: Neste caso, função racional, precisaremos do limite do quociente. O limite do quociente de duas funções num ponto é igual ao quociente dos limites de cada uma das funções nesse ponto, desde que o limite do denominador não seja zero.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2x-1}{\lim_{x \rightarrow 2} x+1} = \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (-1) - 1}{-1 + 1} = \frac{-3}{0} = ?$$



E no caso do denominador ser zero? Nestes casos calculamos os limites laterais no ponto -1, por ser o que anula o denominador.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (-1^+) - 1}{-1^+ + 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (-1^-) - 1}{-1^- + 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

x	x+1	x	x+1
-1,1	-0,1	-0,9	0,1
-1,2	-0,2	-0,8	0,2
-1,3	-0,3	-0,7	0,3

valor

A construção de uma tabela pode ajudar a averiguar o comportamento do denominador da expressão na vizinhança de -1. De facto, a aproximação à direita de -1 os valores tendem para 0 por valores superiores a este e para valores menores que 0 por aproximação à esquerda de -1.

Destes cálculos podemos retirar duas conclusões: 1.ª a função não tem limite no ponto de abcissa -1 porque os limites laterais são distintos; 2.ª a recta $x = -1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (+\infty) - 1}{+\infty + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = ?$. Obtivemos uma **indeterminação**, neste caso $\frac{\infty}{\infty}$. Para **levantar a**

indeterminação um dos processos é proceder à decomposição da fracção $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ efectuando o **algoritmo**

da divisão de onde obtemos: $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$. Assim facilmente identificamos algumas

características desta função, nomeadamente:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x = -1$ é a assíntota vertical e $y = 2$ é a assíntota horizontal.

$$\begin{array}{r} 2x-1 \quad | \quad x+1 \\ -2x-2 \\ \hline -3 \end{array}$$

Esta técnica permite também determinar os limites da função pela expressão: $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$, evitando as

indeterminações. Vejamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2 - \frac{3}{x+1} = 2 - \frac{3}{2+1} = 2 - \frac{3}{3} = 2 - 1 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{x+1} = 2 - \frac{3}{+\infty + 1} = 2 - \frac{3}{+\infty} = 2 - 0 = 2.$$

Limite da função racional, $P(x)$,
 $Q(x)$: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

Para resolver:

9. Simplifique, quando necessário, as fracções algébricas e, em seguida, calcule o limite.

9.1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+1}$

9.2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16}$

9.3. $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2}$

9.4. $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^3 - b^2}{3b - b^2}$

9.5. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 - 1}{t + 1}$

9.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Por vezes a **decomposição de factores** é suficiente para contornar a indeterminação. Para tal, é necessário recordar os casos notáveis da multiplicação.

Um exemplo poderá ser: $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-2)}{(x+2)}$. Na expressão inicial determinar o

limite no ponto de abcissa 2 conduz-nos a uma **indeterminação** do tipo $\frac{0}{0}$, no entanto, depois de factorizada a

expressão já nos permite obter o valor do limite. Neste caso $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$.

Tarefa: Considere a função $f(x) = \frac{3-x^2}{x+1}$. Determina o domínio e os zeros da função. O gráfico desta função tem assíntotas? Quais?

Resolução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Calculamos os zeros fazendo:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-x^2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3-x^2 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow -x^2 = -3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x^2 = 3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x^2 = \pm\sqrt{3} \wedge x \neq -1$. Os zeros da função são $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

- Assíntotas verticais

O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Como -1 é um zero do denominador, calculamos os limites laterais no ponto de abcissa -1 para averiguar se a recta de equação $x = -1$ é assíntota vertical do gráfico de f . Por observação do gráfico nas imagens 1 e 2 da tabela, observamos que a recta é de facto uma assíntota do gráfico de f . Confirmemos tal informação por processos analíticos:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3-x^2}{x+1} = \frac{3-(-1)^2}{-1^++1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3-x^2}{x+1} = \frac{3-(-1)^2}{-1^-+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$. Como os limites laterais no ponto de abcissa -1 são infinitos, confirma-se a existência de assíntota vertical em $x = -1$.

- Assíntotas horizontais

O gráfico representado na primeira imagem da tabela mostra que não existem assíntotas horizontais. Para o provarmos analiticamente determinamos os limites da funções para os ramos infinitos.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \frac{-\infty}{\infty}$. É uma **indeterminação**. À semelhança da função polinomial, **quando** $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$

também nas funções racionais o **limite de uma função coincide com o quociente dos monómios de maior grau**.

Assim vem: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$.

Utilizando o mesmo procedimento $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$. Os limites são infinitos, logo o gráfico da função não tem assíntotas horizontais.

Limite da função racional: O limite de uma função racional, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ é igual ao quociente dos monómios (ou termo) de maior grau quando x tende para esse mesmo valor.

Se $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ e $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$

- Assíntotas oblíquas

Por observação da imagem 3 da tabela, percebemos que o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua, pelo que a equação da recta será do tipo $y = mx + b$.

Ao fazer a divisão dos polinómios da expressão analítica obtemos: $f(x) = -x + 1 + \frac{2}{x+1}$.

Analisando a expressão, verifica-se que quando $x \rightarrow +\infty$, a função f tende para $-x + 1$.

Vejamos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 1 + \frac{2}{x+1} - (-x + 1) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$. Pelo que a recta $y = -x + 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f .

De facto, analisar a expressão resultante da divisão da fracção permite-nos verificar que a recta $y = -x + 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f , de acordo com os conhecimentos sobre funções racionais.

Relembre que é possível transformar algumas expressões de funções racionais em expressões do tipo $y = mx + a + \frac{b}{cx+d}$, onde: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Assíntota vertical: $x = -\frac{d}{c}$; Assíntota oblíqua: $y = mx + a$ ou Assíntota horizontal: $y = a$, se $m=0$.

Outra forma de determinar uma assíntota oblíqua é, ao calcularmos os limites no infinito ($x \rightarrow +\infty(-\infty)$), a equação dessa recta se confundir com o gráfico da função, ou seja: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$. Resolvendo a expressão em ordem a m e a b , obtemos:

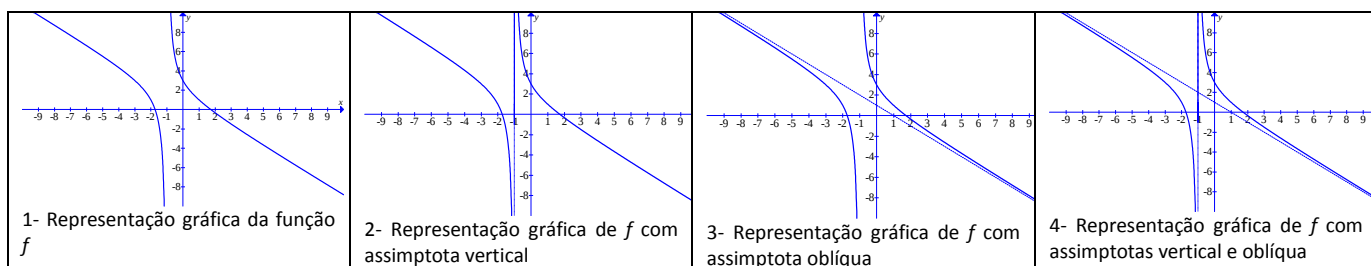
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \left(\text{repare que } -\frac{b}{m} \rightarrow 0 \right). \text{ Neste caso } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx). \text{ Neste caso } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3-x^2}{x+1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2+x^2+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ (em ambos os limites levantámos a indeterminação } \frac{\infty}{\infty} \text{)}$$

aplicando o método do quociente dos termos de maior grau dos polinómios em numerador e denominador.)

Confirma-se que $y = -x + 1$ é a equação da assíntota oblíqua do gráfico da função f .

Portanto o gráfico da função f tem duas assíntotas, uma vertical e outra oblíqua, como podemos confirmar na imagem 4 da tabela abaixo.



Para resolver: 10. Dê exemplos de funções polinomiais f e g tais que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

11. Considere a função f definida por: $\frac{x-3}{x+3}$

11.1. Indique o domínio de f .

11.2. Calcule, se existirem, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

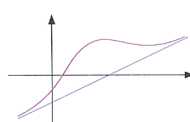
11.3. Escreva as equações das assíntotas do gráfico da função f .

Assíntotas Oblíquas

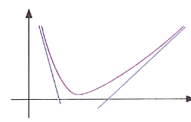
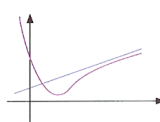
Uma recta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de uma função f se, quando x tende para $\pm \infty$, o gráfico da função se confunde com essa recta. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

O declive m e a ordenada na origem b , da equação da assíntota, podem ser determinados da seguinte forma:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$



uma assíntota



duas assíntotas

Note bem:

- Numa função racional, a decomposição da fração através do algoritmo da divisão facilita-nos a determinação das assíntotas.
- O número máximo de assíntotas horizontais e oblíquas é duas, uma quando $x \rightarrow \infty$, outra quando $x \rightarrow +\infty$.
- O número de assíntotas verticais pode ser qualquer. Há mesmo funções com um número infinito de assíntotas verticais [$y = \tan(x)$, por exemplo].

▪ Limites de funções irracionais

As funções irracionais têm a particularidade de serem definidas com uma expressão que envolve radicais. Vamos dar particular interesse apenas a radicais quadráticos e cúbicos, de acordo com o que foi estudado na 11.ª classe. Como ainda não estudámos uma função com radicais na expressão, impõe-se a questão: *como calcular o limite de uma raiz?*

O limite de uma raiz é igual à raiz do limite do radicando!

Vejamus a aplicação prática com um exemplo.

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[p]{b}$$

$f(x) \geq 0$ e $p \in \mathbb{N}$ e p é par

Tarefa: Considere a função irracional $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$. Determine, caso existam, o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Resolução: Começamos por averiguar onde é que a função está definida, uma vez que o radicando tem de ser maior ou igual a zero. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x+1 \geq 0\}$, ou seja, $D_f = [0; +\infty[$.

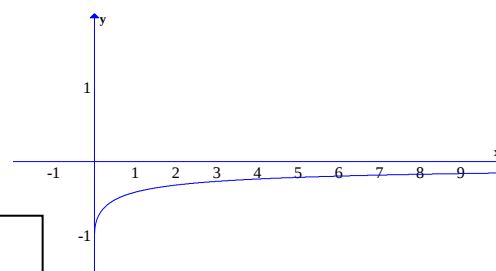
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} - \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1} = +\infty - \infty$$

Obtivemos uma indeterminação do tipo: $+\infty - \infty$. Para **levantar a indeterminação**, utilizamos uma técnica frequente com a soma/ diferença de funções em que pelo menos uma delas é irracional. **Multiplicamos e dividimos pela expressão, mas invertemos o sinal operacional entre as duas funções.** Neste caso procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) \times (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \quad (\text{aplicando a diferença de quadrados: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x+1)}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Por observação gráfica facilmente verificamos que, quando

$x \rightarrow +\infty$, a função tende para 0. Assim: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = 0$



Para resolver:

12. Determine, se existirem os limites das funções quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 5$:

12.1. $f(x) = x - \sqrt{x}$ 12.2. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ 12.3. $h(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}$

13. Considere a função $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$

13.1. Determine o domínio da função f .

13.2. Determine: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$

14. Calcule os limites quando

$x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 5$ das funções:

14.1. $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{x}$

14.2. $g(x) = \sqrt{x+5}$

14.3. $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

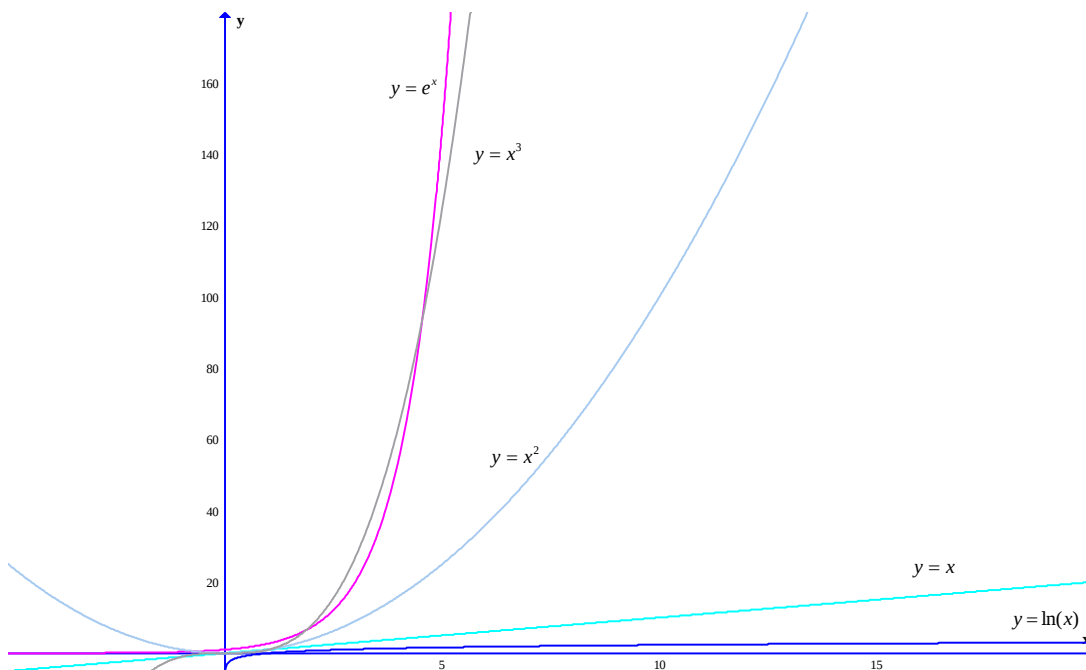
▪ Limites de funções exponenciais e logarítmicas

Classes de funções como a exponencial e a sua inversa, a logarítmica foram também já estudadas. Agora vamos aprofundar um pouco o estudo destas funções comparando o seu (de)crescimento com o comportamento de outras classes de funções.

Limite Notáveis

Existem alguns limites que envolvem funções exponenciais e logarítmicas e que designamos por limites notáveis. São limites que devemos ter como referência.

Observemos o seguinte gráfico com representações gráficas da função exponencial, polinomiais e logarítmica.



Facilmente verificamos que:

- “A exponencial, de base superior a 1, cresce mais depressa do que qualquer potência do seu expoente”

De facto, comparando a função exponencial com qualquer uma das funções do tipo verificamos que a primeira, a partir de determinado valor de x , cresce muito mais rapidamente que qualquer das funções polinomiais.

O crescimento de a^x , com $a > 1$, é tão rápido que se tem: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$, $a > 1, p > 0$, uma vez que o numerador tende para infinito muito mais rapidamente que o denominador.

Como consequência, tem-se que o inverso será um infinitésimo, ou seja: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, $a > 1, p > 0$

- “Uma variável evolui mais depressa que o seu logaritmo.”

Em relação à função logarítmica, qualquer das funções polinomiais crescem mais rapidamente que a primeira.

O crescimento de $\ln(x)$, com $a > 1$, é tão lento que se tem: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$, $a > 1, p > 0$, pois a função tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$, já que o denominador cresce mais rapidamente que o numerador.

Como o inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande, concluímos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log_a x} = +\infty$, $a > 1, p > 0$.

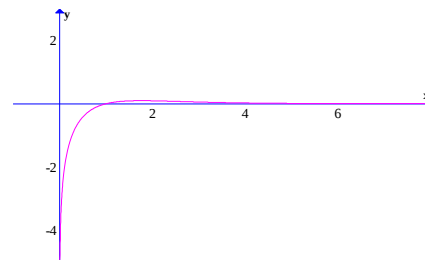
Aqui foram abordados alguns limites notáveis. Existem outros, associados a determinadas funções exponenciais e logarítmicas de base natural que podem ser consultados no final desta secção.

Tarefa: Considere a função $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$. Averigue a existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados no gráfico da função.

Resolução: O domínio da função é $\mathbb{R}^+$.

Para averiguar a existência de assíntotas verticais calculamos $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \frac{1}{1} \times (-\infty) = -\infty.$$



Como os limites no ponto em causa é infinito, concluímos que existe uma assíntota vertical em $x = 0$.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais calculamos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Como o domínio da função é $]0; +\infty[$ não faz sentido determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \frac{1}{+\infty} \times (+\infty) = 0 \times (+\infty) = ?$$

Obtivemos uma indeterminação $[0 \times \infty]$! Vejamos uma técnica para **levantar a indeterminação** e poderemos prosseguir no cálculo do limite: primeiro transformar numa indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e depois **dividir ambos**

os termos da fracção por x (para obtermos expressões de referência para $p=1!$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{e^x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Esta

indeterminação, $0 \times \infty$, surge também associada a funções resultantes de operações entre funções polinomiais, racionais e irracionais. A sua particularidade é poder-se reduzir a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Como o limite no único ramo infinito onde a função está definida é um n.º real, então $y=0$ é uma assíntota horizontal da função.

Para resolver:

15. Determine os seguintes limites:

15.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{5^x}$; 15.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)}$; 15.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{2x}$

16. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 2x \quad \text{e} \quad g(x) = \log_2 x + 3x$$

16.1. Comente a afirmação:

«O gráfico da função f não admite assíntotas verticais»

16.2. Mostre que a recta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de f .

16.3. Determine as equações das assíntotas do gráfico de g .

16.4. Mostre que a equação $g(x) = \pi$ é possível no intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Regras operatórias com limites

Ao longo deste tópico, foi necessário introduzir algumas regras operatórias com limites, bem como algumas técnicas para levantar indeterminações, fruto de dificuldades encontradas no cálculo de limites em determinadas funções. Em síntese:

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = b - c;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = b \times c;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \left(\frac{b}{c} \right), \text{ com } c \neq 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^p] = b^p, \text{ onde } p \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[p]{b}, \quad f(x) \geq 0,$$

$$p \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é par}$$

Para resolver:

17. Considere: $f(x) = x + 1$ e $g(x) = -2x^2 + 3$

Calcule:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(4) $\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right)^3$ (5) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(7) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ (8) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (9) $\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} g(x)}$

Indique:

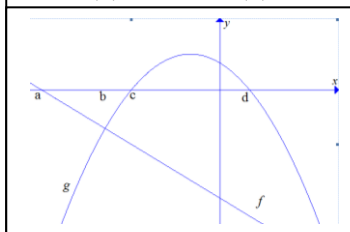
(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} (f - g)(x)$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} (f \times g)(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$ (5) $\lim_{x \rightarrow 1} f^3(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{g(x)}$

18. Observe os gráficos f e g e indique, se existir:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow b} (f - g)(x)$ (3) $\lim_{x \rightarrow c} (f \times g)(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow d} \left(\frac{g}{f} \right)(x)$ (5) $\lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{g}{f} \right)(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g}{f} \right)(x)$



Limite da Soma, da Diferença, do Produto e do Quociente de funções

As regras operatórias podem estender-se, com algumas excepções, aos casos em que pelo menos um dos limites das funções é infinito ou seja, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Existem quadros que sintetizam todos os casos, embora, mais importante que memorizar quadros ou tabelas, seja, pensar em cada caso que surgir. Podem ser consultados no MA5.

▪ Indeterminações

Quando nos deparamos com situações de indeterminações, podemos aplicar determinados artifícios ou técnicas que nos permitem ultrapassar essa situação de bloqueio! Esse procedimento designa-se **levantar a indeterminação**. A observação do gráfico com uma calculadora gráfica poderá ser uma boa opção para intuir a solução. É o processo de levantamento da indeterminação graficamente. Contudo existem processos analíticos que podem ser sintetizados da seguinte forma:

Tipo de indeterminação	$+\infty - \infty$	$\infty \times 0$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
Técnica para levantar indeterminação	Colocar monómio em evidência; Monómio de maior grau (polinomial); Multiplicar e dividir por toda a expressão mas inverter sinal operacional entre as 2 expressões (irracional).	Podem reduzir-se a casos de $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$: Dividir todos os termos pelo monómio de maior grau	Factorizar polinómios; Decompor fracção através de algoritmo da divisão (racional); Colocar monómio em evidência; Dividir todos os termos pelo monómio de maior grau;	Factorizar polinómios; Decompor fracção através de algoritmo da divisão (racional); Colocar monómio em evidência; Dividir todos os termos pelo monómio de maior grau; Quociente do monómio de maior grau do numerador pelo monómio de maior grau do denominador.

Note bem:

- Uma função polinomial tem o mesmo limite, **quando** $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, que o monómio de maior grau.
- Uma função racional tem o mesmo limite, **quando** $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, que o quociente do monómio de maior grau do numerador pelo monómio de maior grau do denominador.

Para resolver:

19. Identifique, em cada caso, se existe indeterminação e levante-a.

$$19.1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x \ln x) \quad 19.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \quad 19.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$19.4. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - 2}{2x + 1} \quad 19.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 3}) \quad 19.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3 \ln x}$$

20. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$20.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x}{3} \quad 20.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^5}{x^5 + x} \quad 20.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

$$20.4. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x - 2} \quad 20.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2^x} \quad 20.6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

21. Calcule cada um dos seguintes limites, recorrendo, quando necessário, aos limites notáveis.

$$21.1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x - 1} \quad 21.2. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x - 1} \quad 21.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x - 1}$$

$$21.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \quad 21.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \quad 21.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$$

$$21.7. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad 21.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} \quad 21.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{3x}$$

No final desta secção existe um quadro resumo de todo o tópico sobre cálculo de limites das várias classes de funções analisadas.

22. Para cada uma das seguintes funções determine:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{3x}{x^2 - 1},$$

$$h(x) = \frac{3}{1 - \ln x}, \quad j(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 4}$$

22.1 Domínio;

22.2 As equações das assíntotas verticais dos respectivos gráficos, se as houver;

22.3 As equações das assíntotas não verticais dos respectivos gráficos, se as houver.

23. Prove que a recta de equação $y = 3x - 2$ é assíntota do gráfico da função f definida por $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x - 5}$

23.1 O gráfico da função tem alguma assíntota vertical? Justifica.

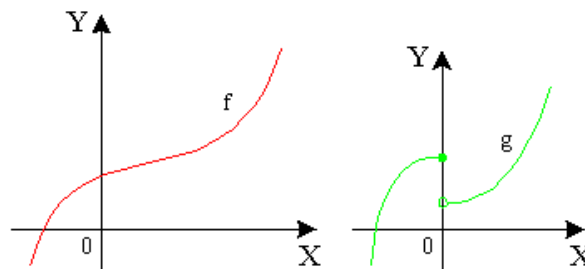
Classe de funções	Particularidades	Linguagem corrente Limite num ponto/Limite no infinito	Simbolicamente Limite num ponto/ Limite no infinito	Regras operatórias $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$	Indeterminações mais frequentes
Polinomial	Constante	O limite de uma função constante, em qualquer ponto do seu domínio, é a própria constante./ O anterior é válido para os ramos infinitos.	Se $f(x) = k$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, para qualquer $a \in D_f$./ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$	Soma, produto, potenciação $\lim_{x \rightarrow a} [(f + g)(x)] = b + c$ $\lim_{x \rightarrow a} [(f - g)(x)] = b - c$ $\lim_{x \rightarrow a} [(f \times g)(x)] = b \times c$ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^p] = b^p$ onde $p \in \mathbb{N}$	$\infty \times 0$, $+\infty - \infty$
	Identidade	O limite da função identidade é igual ao valor da função nesse ponto./ No infinito a identidade tende para o respectivo infinito	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, para qualquer $a \in D_f$./ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$		
	Caso geral	O limite de uma função polinomial, $P(x)$, é igual ao valor da função nesse ponto./ No infinito é o polinómio são o grau e o sinal do coeficiente de maior grau que determinam se o limite é quando $x \rightarrow +\infty$ OU $x \rightarrow -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$, para qualquer $a \in D_f$./ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n$		
Racional		O limite de uma função racional, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ quando $x \rightarrow +\infty$ OU $x \rightarrow -\infty$ é igual ao quociente dos monómios (ou termo) de maior grau quando x tende para esse mesmo valor.	$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ e $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ / $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$	Quociente $\lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \left(\frac{b}{c} \right)$, com $c \neq 0$	$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
Irracional		O limite de uma raiz de índice natural é igual à raiz do mesmo índice do limite do radicando.	$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, $p \in \mathbb{N}$	Radiciação $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[p]{b}$ $f(x) \geq 0$ e $p \in \mathbb{N}$ e é par	$+\infty - \infty$
Exponencial	Logística	$P(t) = \frac{b}{1 + ae^{-bkt}}$, a, b, k , constantes positivas			$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$
	Base natural	$y = \frac{e^x - 1}{x}$ / $y = \frac{e^{kx} - 1}{kx}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ / $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$, $a \neq 0$		
	Caso geral		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$, $a > 1, p > 0$ / $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, $a > 1, p > 0$		
Logarítmica	Base natural (e)	$y = \frac{\ln(x+1)}{x}$ $y = \frac{\ln(x)}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ / $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ / $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	Limites notáveis (de referência)	
	Caso geral		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$ $a > 1, p > 0$ / $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log_a x} = +\infty$, $a > 1, p > 0$		

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

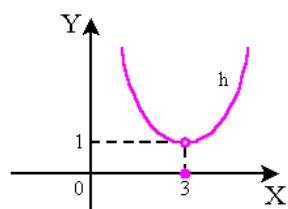
CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Consideremos as funções f e g , reais de variável real, definidas pelos seus gráficos (ao lado).

De um modo intuitivo, somos levados a dizer que a função f é contínua: o seu gráfico pode desenhar-se sem levantar o lápis do papel. No caso da função g , para desenhar o gráfico, temos de dar um salto no ponto correspondente a $x=0$. Somos levados a dizer que a função g não é contínua no ponto $x=0$ ou que 0 é um ponto de descontinuidade da função.



Tarefa: Estuda a continuidade das funções h e m , no ponto indicado. Qual a relação que existe entre a continuidade de uma função num ponto do seu domínio e a existência de limite nesse ponto?



Resolução:

A função h tem domínio $\mathbb{R}$. Intuitivamente, a função h não é contínua no ponto de abscissa $x=3$. Os limites laterais de 3 existem e são iguais a 1, logo existe limite neste ponto e o seu valor é 1, $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 1.$$

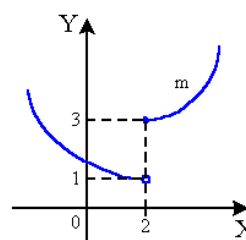
Contudo a imagem da função no ponto de abscissa 3 é 0, ou seja, não coincide com o limite da função neste ponto: $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) \neq h(3)$

Para h ser contínua a imagem de 3 teria que estar no «ponto certo», de modo que o gráfico da função fosse a parábola “completa”, o que corresponderia ao valor da função para $x=3$ ser igual ao limite da função quando x tende para 3. h não é contínua em $x=3$.

Uma função f diz-se contínua no ponto $x=a$, do seu domínio se:

- existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Quando não se verificam estas duas condições dizemos que a função é descontínua no ponto de abscissa a .



A função m tem domínio $\mathbb{R}$. Intuitivamente também a função m não é contínua no ponto de abscissa 2. Vejamos o motivo. Ora em $x=2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} m = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} m = 3$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 2^-} m \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} m$, portanto não existe o limite da função quando x tende para 2.

Por outro lado a imagem da função em $x=2$ é 3, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 2^+} m = 3 = m(2)$, e portanto a função é contínua à direita, mas como $\lim_{x \rightarrow 2^-} m = 1 \neq 3 = m(2)$, a função não é contínua à esquerda.

Logo, m não é contínua em $x=2$

De facto, uma função f diz-se contínua à esquerda no ponto $x=a$, do seu domínio se:

- existir $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

De facto, uma função f diz-se contínua à direita no ponto $x=a$, do seu domínio se:

- existir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Uma função que seja simultaneamente contínua à **esquerda** e à **direita** num ponto é contínua nesse ponto.

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO NUM INTERVALO

Continuando a analisar as funções h e m , o que podemos afirmar quanto à sua continuidade nos restantes pontos que ainda não foram analisados?

Graficamente observamos que ambas as funções são contínuas nos restantes pontos do seu domínio. Poderíamos analisar qualquer ponto uma vez que ambas estão definidas em $\mathbb{R}$. Contudo, embora possamos determinar o limite em pontos de abcissas que não pertencem ao domínio da função, só faz sentido analisar a

continuidade em pontos do domínio. Por exemplo a função definida pela expressão $f(x) = \frac{1}{x-2}$ não está

definida em 2, ou seja, o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, logo a continuidade poderá ser analisada apenas no seu domínio.

Uma função diz-se contínua quando for contínua em todos os pontos do seu domínio.

De uma maneira geral, as funções polinomiais, como é o caso das funções h e m , por resultarem de operações de funções contínuas, bom como as funções racionais são contínuas em todos os valores em que estão definidas.

Se f e g são duas funções contínuas no ponto de abcissa a então também são contínuas nesse ponto as funções: $f + g$; $f - g$; $f \times g$; $f^n, n \in \mathbb{N}$; $\frac{f}{g}, \text{com } g(a) \neq 0$; $\sqrt[n]{f}, n \in \mathbb{N}$

- Uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.
- Uma função (ir)racional é contínua em todo o seu domínio.
- Uma função exponencial ou logarítmica é contínua em todo o seu domínio.

Estas propriedades permitem-nos garantir a continuidade de funções que se expressem como soma, diferença, produto, potenciação, quociente e radiciação de funções polinomiais, (ir)racionais, exponencial e logarítmica, desde que num ponto onde estejam definidas, ou seja, no seu domínio!

No caso das funções serem definidas por ramos temos que analisar a continuidade em cada ramo do domínio e, com especial atenção, nos pontos de transição de um ramo para outro. Vejamos um exemplo.

Tarefa: Sendo
$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$
. Determine a e b para que f represente uma função contínua.

Resolução: No intervalo $]-\infty; 0[$ a função é contínua por ser polinomial de 2.º grau. No intervalo $]0; 1[$ a função é contínua por ser polinomial de grau 1. No intervalo $]1; +\infty[$, a função é contínua por se tratar de uma função constante. Temos que analisar então a continuidade nos pontos $x=0$ e $x=1$. Para que a função f seja contínua nestes pontos, os limites laterais no ponto de abcissa 0 e no ponto de abcissa 1 têm de coincidir. Vejamos:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^2 = 0$. Analisando o limite à direita de 0, vem: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$. Para que os limites laterais de zero sejam iguais, $b=0$. Façamos agora o estudo para o ponto de abcissa 1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$. Por outro lado

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a \times (1) + b = a + b$. Já concluímos que $b=0$, logo $a + b = a + 0 = a$. Para os limites laterais de 1 coincidirem $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 = a = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b$. Portanto $a = 2$. Para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$, $a = 2$ e $b = 0$.

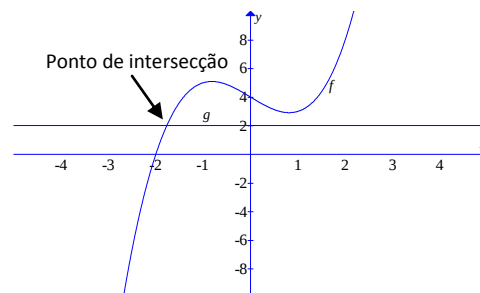
Antes de prosseguir, recomendamos a exploração do MA6.

TEOREMA DE BOLZANO-CAUCHY

Consideremos a análise da altura das marés ao longo de um dia no porto da Baía de Santo António. Marcamos numa estaca a altura da baixa-mar (altura mínima da maré), 0,47m, que foi atingido às 10:25h de dia 30 de

Novembro de 2012. A variação da maré começa agora no sentido inverso, a aumentar de altura e a preia-mar (pico máximo da maré) que lhe seguiu foi de 1,71m às 17:03h do mesmo dia nesse mesmo local. Voltamos a marcar a estaca que se manteve intacta entre os dois registos. Garantidamente que na estaca ficou marcado (molhado) um segmento contínuo entre os dois registos. Porquê? Porque a altura da maré teve de percorrer todos os valores entre 0,78m e 1,71m no intervalo de tempo entre as 10:25h e as 17:03h. Mas claro que tal só foi possível porque a maré não pode ter aumentado de uma altura para outra sem passar por todas as alturas, não houve qualquer pontinho da estaca por menor que fosse a sua dimensão que não tenha sido molhado pela maré.

Esta é a ideia do Teorema de Bolzano. Transpondo para o plano, se uma linha contínua (f) passa de um lado de uma recta (g) para o outro, então tem que intersectar essa recta em algum ponto. Utilizando alguns termos matemáticos podemos afirmar que se uma função é contínua num intervalo não passa de um valor para outro sem passar pelos valores intermédios.



Teorema de Bolzano-Cauchy

Se uma função f é contínua num intervalo $[a,b]$, então, qualquer que seja k compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um ponto c compreendido entre a e b tal que $f(c)=k$.

Note bem: para o Teorema de Bolzano- Cauchy ser aplicável a continuidade não é a única condição a verificar, contudo, no caso dos contextos trabalhados na 12.ª classe, basta garantir que a função esteja definida num (sub)conjunto de números reais. É isso que assumimos, a menos que seja dada alguma informação em contrário.

Tarefa: Sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x > 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$.

O teorema de Bolzano pode ser aplicado no intervalo $]0,2[$? Justifique a resposta.

Resolução: Para que o Teorema de Bolzano possa ser aplicado num intervalo é condição necessária (não suficiente!) que a função seja continua nesse intervalo. Nos intervalos $]0,1[$ e $]1,2[$, a função é contínua por serem funções polinomiais. Contudo, teremos que confirmar se os limites à esquerda e à direita de 1 coincidem, analisando o limite à direita de 1 no 1.º ramo e o limite à esquerda de 1 no segundo ramo, pelo intervalo onde cada ramo está definido.

Ora $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = (1^-)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = (1^+)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1$, donde a função f não é contínua no ponto de abcissa 1, pelo que, não podemos aplicar o Teorema de Bolzano no intervalo $]0,2[$.

Uma consequência imediata deste teorema é que:

Se uma função f é contínua num intervalo $[a,b]$, e $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrário, então a função tem pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$.

Tarefa: Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^5 - x + 1 = 0$. O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo:

- (A) $] -1,0[$ (B) $]0,1[$ (C) $]1,2[$ (D) $]2,3[$

Resolução: A função g é contínua em $\mathbb{R}$ por ser polinomial e $g(x) - 8$, designemo-la por f , também o é, pelo que estamos em condições de aplicar o Teorema de Bolzano. Ora

$g(x) = 8 \Leftrightarrow x^5 - x + 1 = 8 \Leftrightarrow x^5 - x + 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^5 - x - 7 = 0$. Pela consequência imediata do Teorema de Bolzano temos que se as imagens de $f(x) = x^5 - x - 7$ nos extremos de um determinado intervalos tiverem

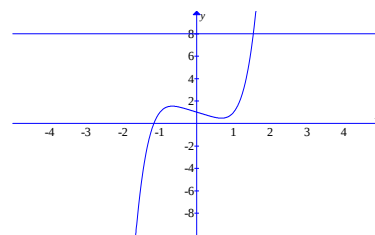
sinais contrários é porque existe um zero nesse intervalo. Determinemos então a imagem desta nova função para -1, 0, 1, 2 e 3, os extremos dos intervalos em causa.

$$f(-1) = (-1)^5 - (-1) - 7 = -1 + 1 - 7 = -7;$$

$$f(0) = (0)^5 - (0) - 7 = -7 = -7;$$

$$f(1) = (1)^5 - 1 - 7 = 1 - 1 - 7 = -7;$$

$$f(2) = (2)^5 - (2) - 7 = 32 - 2 - 7 = 23.$$



Já obtivemos imagens com sinais distintos, pelo que não precisamos continuar. Já podemos afirmar que no intervalo $]1, 2[$ existe pelo menos um zero de f , ou seja, uma solução para a equação $g(x) = 8$. Podemos confirmar por observação gráfica.

Para resolver:

24. Observe a representação gráfica da função f .

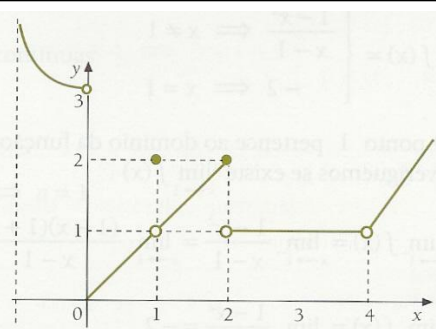
Indique o domínio, contradomínio e pontos de descontinuidade da função.

25. Esboce o gráfico de uma função f que verifique as condições:

25.1 $D_f =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$; contínua no intervalo $] -\infty; 3[$,

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 3; f(10) = -2;$$

25.2 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$; contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$.



26. Estude, quanto à continuidade, cada uma das funções nos pontos indicados:

26.1 $f(x) = 2x^3 - x + 3$; para $x = -2$ e $x = 10$

26.2 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 4}$, para $x = 0$ e $x = 2$

26.3 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 2 \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, para $x = -2$

26.4 $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$, para $x = 0$

26.5 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$, para $x = 1$ e $x = 2$

26.6 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ -1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$, para $x = 1$

26.7 $f(x) = \begin{cases} |x + 6| & \text{se } x \neq -6 \\ -1, & \text{se } x = -6 \end{cases}$, para $x = -6$ e $x = -4$

26.8 $f(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{se } x > 0 \\ xe^x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, para $x = 0$

27. Determine k de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + k & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2 + 5x - k}{x - 3} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

28. Seja h uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$. Qual dos seguintes conjuntos não pode ser o contradomínio de h ?

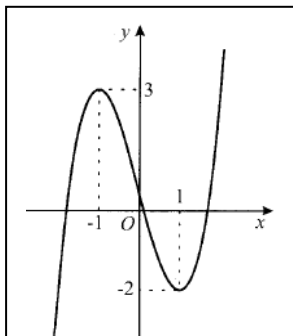
(A) $\mathbb{R}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (C) $\mathbb{R}^-$ (D) $]0, 1[$

29. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g , polinomial do terceiro grau. A função g admite máximo relativo igual a 3 para $x = -1$ e admite mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.

Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem três soluções distintas?

(A)] $-\infty, 3[$ (B)] $-2, +\infty[$

(C)] $-2, 3[$ (D)] $-2, 3]$



30. De uma função f , de domínio $[-4, 5]$ e contínua em todo o seu domínio, sabe-se que:

• $f(-4) = 6$; $f(2) = -1$; $f(5) = 1$

• f é estritamente decrescente no intervalo $[-4, 2]$

• f é estritamente crescente no intervalo $[2, 5]$

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

31. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]1, 4[$, contínua e estritamente crescente.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira relativamente à equação $f(x) = 2$?

(A) Não tem solução

(B) Tem mais de duas soluções

(C) Tem 1 única solução

(D) Tem exactamente 2 soluções

32. Mostre, aplicando o teorema de Bolzano, que a equação $x^4 - 2x - 1 = 0$ tem pelo menos um zero no intervalo $[-1, 0]$.

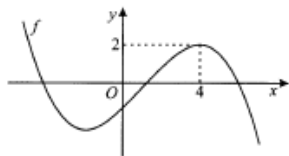
Para resolver:

33. Considere a função real de variável real f definida graficamente (imagem 1).

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$
 (C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = +\infty$
 (D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$

34. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , polinomial do terceiro grau. 2 é um máximo relativo da função f . Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - 2$.



Quanto são os zeros da função g ?

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

35. De uma função f , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 2$, $y = -3$ é a equação da asymptota horizontal (bilateral). Então,

- (A) f tem um, e um só zero (B) f não tem zeros
(C) f tem pelo menos 2 zeros (D) f tem mais de 3 zeros

Sugestão: faz um esboço do gráfico.

36. De uma função g , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

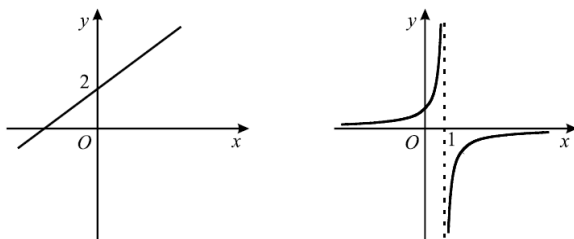
- 1 é zero de g ;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$.

37. De duas funções, f e g , sabe-se que:

- O gráfico de f é uma recta, cuja ordenada na origem é igual a 2;
- O gráfico g é uma hipérbole.

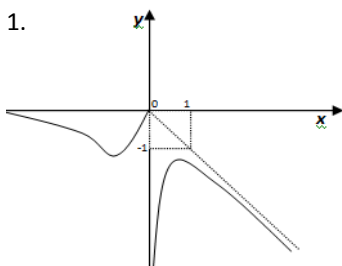
Nas figuras estão representadas parte dessa recta e parte dessa hipérbole. A equação $x = 1$ é asymptota do gráfico g .



Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$:

- (A) 0; (B) 2; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$

1.



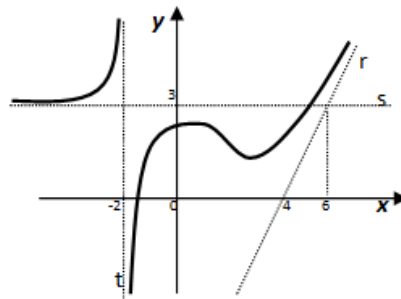
38. Seja $k(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ uma função.

a. Indique o domínio de k .

b. A função tem zeros? Se sim, qual(ais)?

c. Através do cálculo de limites, indique as equações das asymptotas do gráfico da função em causa.

39. No referencial da figura está representada uma função f . As rectas r , s e t são asymptotas do gráfico.



a. Por observação do gráfico, indique o valor dos seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{3}{2}x + 6 \right)$$

b. Determine as coordenadas do ponto de intersecção das rectas r e t .

40. A função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+e) & \text{se } x \geq k \\ e^{-x} & \text{se } x < k \end{cases} \quad \text{é contínua em } x = k \text{ se:}$$

- (A) $k = -e$ (B) $k = 1$ (C) $k = 0$ (D) $k = e$

41. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$

$$\text{definida por: } f(x) = \begin{cases} k + e^{2x} & \text{se } x \leq 1 \\ 2 \ln x + 2e^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para que seja possível aplicar o Teorema de Bolzano em $] -1, 3[$ o valor de k é:

- (A) e^2 (B) $-e^2$ (C) $2e^2$ (D) $-2e^2$

42. Admite que a temperatura, em graus celsius, de um café servido num determinado local t minutos após ter sido colocado na chávena, é dado por:

$$f(t) = 20 + 50e^{-0,04t}, t \in [0, +\infty[\quad (e, \text{ número de Neper})$$

a. Determina a temperatura do café no momento em que foi colocado na chávena.

b. Com o decorrer do tempo, o café tende a igualar a temperatura ambiente. Indica, justificando, a temperatura ambiente.

c. Quanto tempo decorre entre o momento em que o café é colocado na chávena e o instante em que atinge os 65°C ?

CÁLCULO DIFERENCIAL. DERIVADAS

▪ VARIAÇÃO. TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

Exemplo 1: Uma pequena bola é lançada e a distância y , em metros, percorrida em x segundos, é dada, aproximadamente, pela fórmula:

$$y = f(x) = -2x^2 + 20x$$

Na figura ao lado representou-se graficamente a função.

- Qual a variação da altura da bola no 3.º segundo?

$$\text{variação}_{[2,3]} = f(3) - f(2) = 42 - 32 = 10\text{m}$$

Conclui-se que a variação no 3.º segundo corresponde a uma subida de 10m da bola.

- Qual a velocidade média no 1.º segundo?

Sabendo que: velocidade média = $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$

$$\text{Temos: } v_{m[0,1]} = \frac{f(1)}{1} = \frac{18}{1} = 18\text{m/s}$$

Este resultado representa a taxa média de variação da função no intervalo $[0, 1]$

- Qual a velocidade média no 2.º segundo?

$$t.m.v._{[1,2]} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{32 - 18}{1} = 14\text{m/s}$$

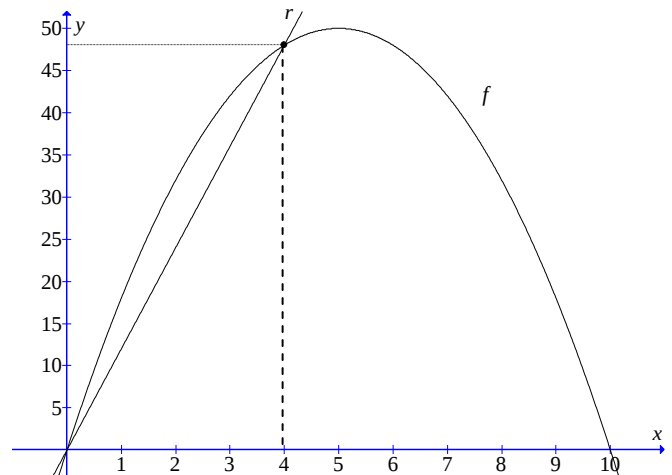
- Qual a velocidade média no 8.º segundo?

$$t.m.v._{[7,8]} = \frac{f(8) - f(7)}{8 - 7} = \frac{32 - 42}{1} = -10\text{m/s}$$

- Qual a velocidade média nos 4 primeiros segundos?

$$t.m.v._{[0,4]} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{48}{4} = 12\text{m/s}$$

Este resultado representa o declive da recta r que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(4, 48)$.



A variação de uma função f no intervalo $[a, b]$ é dada por: $f(b) - f(a)$

A taxa média de variação de uma função f no intervalo $[a, b]$ representa-se por $t.m.v._{[a,b]}$ e é dada por: $t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Da definição de taxa média de variação de uma função f num intervalo $[a, b]$ decorrem os seguintes resultados:

- se f é est. crescente em $[a, b]$, então $t.m.v._{[a,b]} > 0$;
- se f é est. decrescente em $[a, b]$, então $t.m.v._{[a,b]} < 0$;
- se f é constante em $[a, b]$, então $t.m.v._{[a,b]} = 0$.

A taxa média de variação da função f no intervalo $[a, b]$ representa geometricamente o declive da recta, definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

▪ TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Retomemos ao **exemplo 1**, que relaciona a altura, em metros da bola em função do tempo segundo $f(x) = -2x^2 + 20x$.

Vimos anteriormente como calcular a velocidade média (taxa média de variação) da função num dado intervalo, imaginemos, agora, que pretendemos determinar a velocidade da bola num dado instante, por exemplo quando $x = 3$ segundos.

Para responder à questão vamos procurar determinar a velocidade média quando x varia 3 segundos para $3 + h$ segundos:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{(3+h) - 3} = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Consideremos $h = \pm 0,1$; $\pm 0,01$; $\pm 0,001$

h	- 0,1	- 0,01	- 0,001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,001	0,01	0,1
$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$	8,2	8,02	8,002	$\rightarrow 8 \leftarrow$	7,998	7,98	7,8

Observando os valores da tabela parece razoável concluir que a velocidade para $x = 3$ é 8m/s uma vez que:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} \rightarrow 8 \text{ quando } h \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 8$$

A este limite chamamos taxa de variação instantânea, taxa de variação ou derivada de f no ponto 3.

A derivada da função no ponto 3 pode ser representada

por $f'(3)$ ou $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=3}$.

Então temos: $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

A derivada da função f para $x = 3$ representa geometricamente o valor do declive da recta tangente ao

gráfico de f nesse ponto.

Determinemos a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 3$:

A equação da recta é do tipo $y = mx + b$.

Como foi referido anteriormente $m = f'(3) = 8$.

Precisamos agora de um ponto da recta para determinar b . podemos utilizar o ponto $(3, f(3)) = (3, 42)$, porque é comum à função e à recta.

Vem: $42 = 8 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 18$

Temos a recta: $y = 8x + 18$

A derivada de f em x_0 , ou seja $f'(x_0)$, representa geometricamente o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

Exemplo 2: Seja f a função definida por $f(x) = 2x^2 - 3$. Determine a derivada da função f no ponto de abscissa 2.

Resolução:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 - 3 - (2 \times 2^2 - 3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 8h + 2h^2 - 3 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8 + 2h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 2h) = 8 + 2 \times 0 = 8 \end{aligned}$$

45. Seja $f(x) = x^2$.

45.1. Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o valor obtido

45.2. Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1.

46. Um projectil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admita que a altitude h (em metros), t segundos após o lançamento, é dada pela função: $h(t) = 220t - 5t^2$. Determine a velocidade (em metros por segundo) do projectil, 10 segundos após o lançamento.

47. Em relação a uma função j sabe-se que:

- é par
- $j(1) = 0$ e $j'(1) = 5$
- a recta $y = -x + 2$ é tangente ao seu gráfico no ponto de abscissa 3.

47.1. Determine:

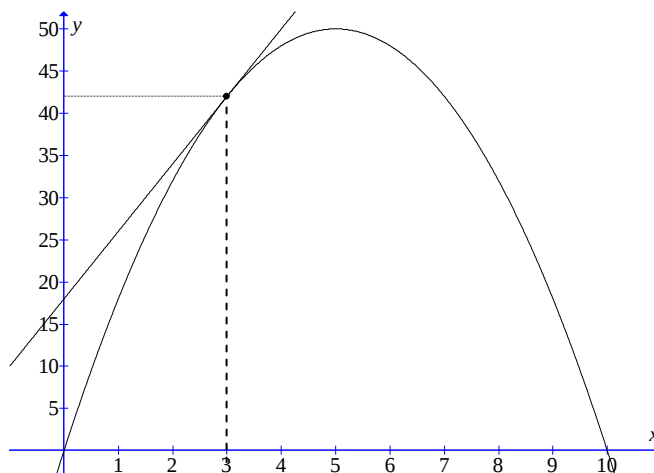
- a) $j(3)$ b) $j'(3)$ c) $j'(-3)$

47.2. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de função j no ponto de abscissa 1.

Seja $y = f(x)$, definida no intervalo $]a, b[$, e seja x_0 um ponto desse intervalo.

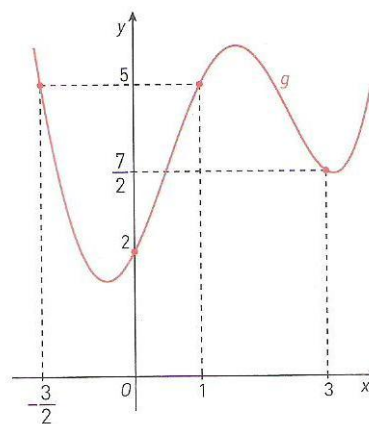
Chama-se derivada ou taxa de variação da função no ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0)$, ao limite, quando existe:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Exercícios:

43. No referencial da figura está representada uma função g de domínio $\mathbb{R}$.



43.1. Calcule a variação da função g no intervalo $[1, 3]$.

43.2. Calcule a t.m.v. da função no intervalo:

- a) $[0, 3]$ b) $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$ c) $[1, 3]$

43.3. Calcule $g(-10)$, sabendo que a variação da função no intervalo $[-10, 0]$ é 6.

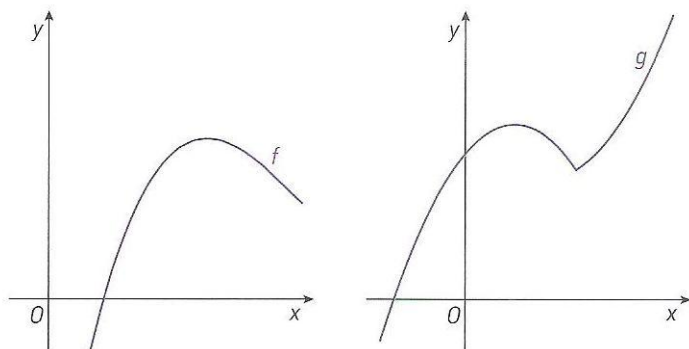
44. Faça uma representação gráfica de uma função f de domínio $[1, 4]$, sabendo que:

- 44.1.** f é monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = 2$
44.2. f não é monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = 2$
44.3. f não é monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = -2$

▪ **DERIVADAS LATERAIS. PONTOS NOS QAIS A FUNÇÃO NÃO É DERIVÁVEL**

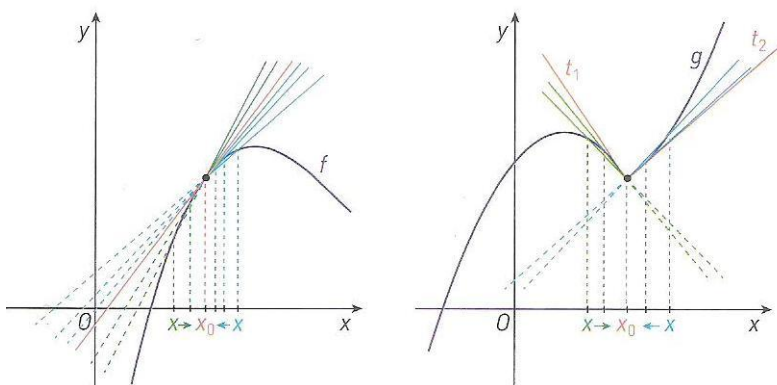
Uma função diz-se derivável num ponto x_0 se tem nesse ponto derivada finita.

Nos referenciais apresentados a seguir estão representadas duas funções f e g .



A seguir, analisa-se, a possibilidade, ou não, de se traçar a recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa designada por x_0 .

No ponto do gráfico da abscissa x_0 , é possível traçar a recta tangente ao gráfico da função nesse ponto?



Esta análise está relacionada com o facto de existir, ou não, derivada em x_0 .

- No caso da função f , existe derivada em x_0 , que coincide com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa x_0 (derivada positiva, atendendo à inclinação da recta tangente). Assim, conclui-se que existe $f'(x_0)$ e é igual a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- No caso da função g , não existe derivada em x_0 .

Como as semitangentes, à esquerda e à direita no ponto de abscissa x_0 , têm declives distintos, conclui-se que não há recta tangente no ponto de abscissa x_0 .

As derivadas laterais são diferentes.

Atendendo às inclinações das semitangentes, conclui-se que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0^-) < 0$$

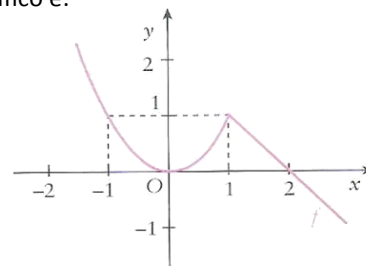
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0^+) > 0$$

Como $g'(x_0^-) \neq g'(x_0^+)$, conclui-se que não existe $g'(x_0)$.

Exemplo: Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Cujo gráfico é:



1. Determine $f'(-2)$ usando a definição de derivada num ponto.

2. Verifique se existe $f'(1)$.

Resolução:

$$\begin{aligned} 1. \quad f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4 \end{aligned}$$

Assim conclui-se que $f'(-2) = -4$.

$$\begin{aligned} 2. \quad f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} (2 + h) = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1+h) + 2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ conclui-se que não existe $f'(1)$.

Exercício:

48. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

48.1. Represente graficamente cada função.

48.2. Determine $f'(3)$ e $g'(0)$ usando a definição de derivada num ponto.

48.3. Estude a existência de $f'(0)$ e $g'(1)$.

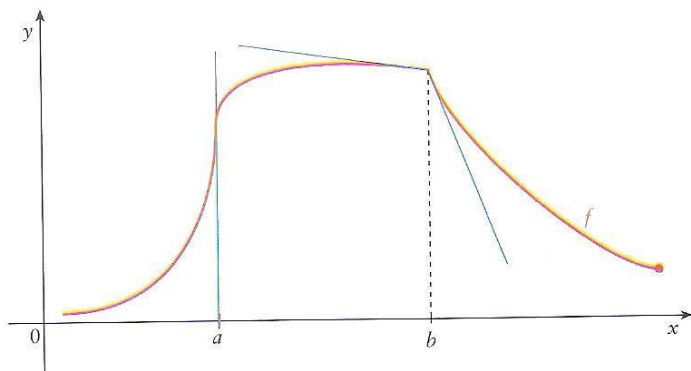
▪ DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

Teorema:

Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

M.A.(7)

No entanto, o recíproco deste teorema nem sempre se verifica. Há funções contínuas num ponto que não têm derivada finita nesse ponto.



f é contínua e não tem derivada finita em a (a tangente à curva em a é $x = a$) nem de b (onde as semitangentes não estão no prolongamento uma da outra).

▪ FUNÇÃO DERIVADA

Aplicando a definição de derivada, pode determinar-se a derivada de uma função num ponto $x = a$.

Exemplo: Seja f uma função real de variável real definida por: $f(x) = 3x^2 - x$.

Calcule $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(a)$.

Resolução:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3h^2 - h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3h - 1) = -1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(1+h)^2 - (1+h)) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 5h + 3h^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 + 3h) = 5$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(a+h)^2 - (a+h)) - (3a^2 - a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h - 3a^2 + a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6ah + 3h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6a + 3h - 1) = 6a - 1$$

Pode concluir-se que: $f'(x) = 6x - 1$

Seja f uma função real de variável real e D o conjunto de todos os pontos do domínio de f que admitem derivada (finita). Chama-se função derivada de f à função de domínio D que a cada valor de x faz corresponder o número real $f'(x)$.

Exercícios:

49. Considere as funções contínuas em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = |x-3| \quad g(x) = \sqrt{|x|} \quad h(x) = \sqrt{x^2}$$

Serão as funções deriváveis em todos os pontos do seu domínio?

50. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = |x| + 1$

Mostre que f é contínua em $x = 0$ e, no entanto, não é derivável neste ponto.

51. Estude a continuidade e a derivabilidade da função f definida, em $\mathbb{R}_0^+$, por:

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad \text{para } x = 0.$$

Exercícios:

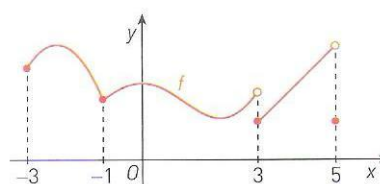
52. Dada a função real de variável real:

$$f(x) = -2x + 3$$

52.1. Calcule $f'(x_0)$, sendo x_0 um número real qualquer.

52.2. Caracterize a função f' derivada de f .

53. No referencial da figura está representada uma função f de domínio $[-3, 5]$.



Por observação do gráfico, indique o domínio da função f' , função derivada de f .

54. Caracterize a função derivada da função f definida por:

$$54.1. f(x) = \frac{1}{x^2} \quad 54.2. f(x) = |2-x|$$

$$54.3. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

▪ DERIVADA DE ALGUMAS FUNÇÕES

> Derivada de uma função constante

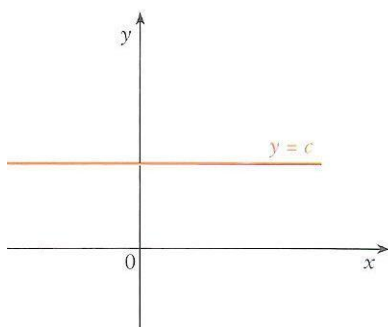
Consideremos a função real de variável real definida por: $f(x) = c$ ($c = \text{constante}$)

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto x_0 , vem:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Geometricamente:



O declive da recta tangente ao gráfico da função em qualquer ponto é igual ao declive da própria recta horizontal $y = c$ e, portanto, é igual a zero.

A derivada de uma função constante é igual a zero.

$$y' = c' \Leftrightarrow y' = 0$$

> Derivada de uma função Afim

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$f(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto x_0 , vem:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a \end{aligned}$$

Então $f(x) = ax + b$ e $f'(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$

A derivada de uma função afim é igual ao declive da recta que representa a função. $y' = (ax + b)' \Leftrightarrow y' = a$

> Derivada de uma função Quadrática

Seja f uma função real de variável real.

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então:

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

Exemplo: Consideremos as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5 \quad ; \quad g(x) = 5x^2$$

Aplicando a definição anterior temos:

$$f'(x) = 2x + 4 \quad ; \quad g'(x) = 10x$$

Exercícios:

55. Para cada uma das funções, reais de variável real, seguintes indique a função derivada:

55.1. $a(x) = -3$

55.2. $b(x) = 4x - 3$

55.3. $c(x) = 2\sqrt{2}$

55.4. $d(x) = \frac{x}{2} + 1$

55.5. $e(x) = 1 - 2x$

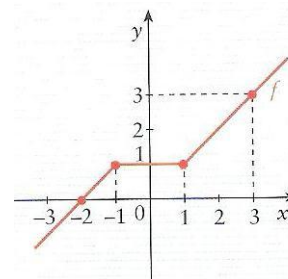
55.6. $f(x) = -x + 3$

55.7. $g(x) = -2x^2 - \sqrt{3}x + 7$

55.8. $h(x) = 8 + \frac{x^2}{2}$

55.9. $i(x) = x - x^2$

56. Considere a função f representada graficamente por:



Represente graficamente a função derivada de f .

57. Seja g a função definida por:

$$g(x) = x^2 + 4x$$

57.1. Utilizando a definição de derivada num ponto prove que $g'(x) = 2x + 4$.

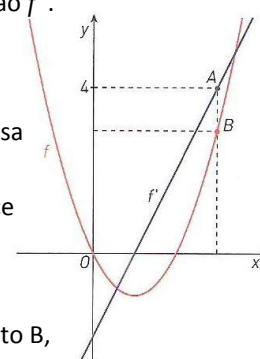
57.2. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g :

a) no ponto de abscissa 1.

b) paralela ao eixo das abscissas.

58. No referencial da figura estão representadas duas funções. A função f e a sua derivada, a função f' .

A ponto A pertence ao gráfico de f' , tem ordenada 4 e a abscissa é igual à abscissa do ponto B que pertence ao gráfico de f .



Determine as coordenadas do ponto B, sabendo que $f(x) = x^2 - 2x$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Será possível determinar a derivada de uma função soma, produto, diferença,..., conhecendo as derivadas das parcelas, factores, ...?

De seguida apresentamos algumas regras de derivação muito uteis na determinação da função derivada.

Sejam f e g duas funções deriváveis num conjunto A e sejam a constante real ($a \in \mathbb{R}$) e n uma constante natural ($n \in \mathbb{N}$).

Derivada de uma constante: Seja $f(x) = a$ então $f'(x) = 0$	Exemplos: Para $f(x) = -\frac{1}{3}$ e $g(x) = \sqrt{5}$ temos $f'(x) = 0 \quad \text{e} \quad g'(x) = 0$
Derivada do produto de uma constante por uma função: A função $y = cf(x)$ é derivável em A e: $[cf(x)]' = cf'(x)$	Exemplo: Seja $f(x) = 4x$ sabemos que $f'(x) = 4$. Consideremos agora a função $g(x) = 5f(x)$. Pela regra de derivação: $g'(x) = [5f(x)]' = 5f'(x) = 5 \times 4 = 20$ Por outro lado: $g(x) = 5f(x) = 5 \times 4x = 20x$ Logo: $g'(x) = (20x)' = 20$
Derivada da soma e diferença de duas funções: A função $f + g$ é derivável em A e: $(f + g)' = f' + g'$ A função $f - g$ é derivável em A e: $(f - g)' = f' - g'$	Exemplo: Sejam $f(x) = 4x$ e $g(x) = x + 1$. Pela regra de derivação: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = (4x)' + (x + 1)' = 4 + 1 = 5$ Por outro lado: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (4x) + (x + 1) = 5x + 1$ Logo: $(f + g)'(x) = (5x + 1)' = 5$
Derivada de um produto de funções: A função $f \times g$ é derivável em A e: $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	Exemplo: Sejam $f(x) = 4x$ e $g(x) = x + 1$. Pela regra de derivação: $(f \times g)'(x) = (4x)' \times (x + 1) + (4x) \times (x + 1)' = 4 \times (x + 1) + (4x) \times 1 = 8x + 4$
Derivada de uma potência natural: A função f^n é derivável em A e: $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$	Exemplo: Sejam $f(x) = 5x^3$ e $g(x) = (2x - 1)^2$. Aplicando as regras de derivação: $(f)'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \times 3 \times x^{3-1} = 15x^2$ $(g)'(x) = [(2x - 1)^2]' = 2 \times (2x - 1)^{2-1} \times (2x - 1)' = 2 \times (2x - 1) \times 2 = 4(2x - 1) = 8x - 4$
Derivada de um quociente de funções: Se g não se anula em A , a função $\frac{f}{g}$ é derivável em A e: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	Exemplo: Sejam $f(x) = 4x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Reparemos que $g(x) \neq 0$ em todo o seu domínio. Aplicando as regras de derivação: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(4x)' \times (x^2 + 1) - (4x) \times (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4 \times (x^2 + 1) - 4x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$

Actividade de investigação/exploração:

Demostre, usando a definição de derivada num ponto, cada uma das regras de derivação indicadas na tabela anterior.

(a) A regra de derivação da potência de expoente natural generaliza-se ao expoente racional:

$$(\sqrt[n]{f})' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

Exercícios:

59. Determine a expressão da função derivada de cada uma das seguintes funções:

59.1. $a(x) = -2x(3x-1)$ 59.2. $b(x) = 4(x^3 - 2x + 1)$

59.3. $c(x) = (1-x^2)(x^3-1)$ 59.4. $d(x) = \frac{x^3}{3}(x^2+2x)$

59.5. $e(x) = x^4$ 59.6. $f(x) = (1-2x)^5$

59.7. $g(x) = (x-2x^2)^3$ 59.8. $h(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3$

59.9. $i(x) = \sqrt{3x-1}$ 59.10. $j(x) = 2x\sqrt{x+1}$

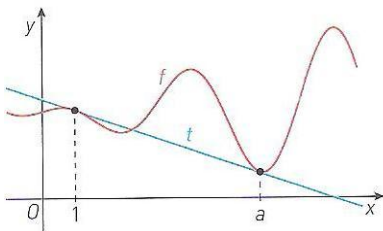
59.11. $k(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ 59.12. $l(x) = \sqrt[5]{2x-3}$

59.13. $m(x) = \frac{3}{x}$ 59.14. $n(x) = -\frac{x}{x-2}$

59.15. $o(x) = \frac{x^2}{x+3}$ 59.16. $p(x) = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$

59.17. $q(x) = -\frac{x}{2\sqrt{x}}$ 59.18. $r(x) = \left(\frac{1-x}{2x}\right)^3$

60. No referencial da figura está parte da representação gráfica de uma função f e a recta t que é tangente ao gráfico de f em dois pontos, um de abscissa 1 e outro de abscissa a .



Sabe-se que: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$ é uma equação da recta t .

Seja g a função definida por: $g(x) = -2x^2 + 3x$

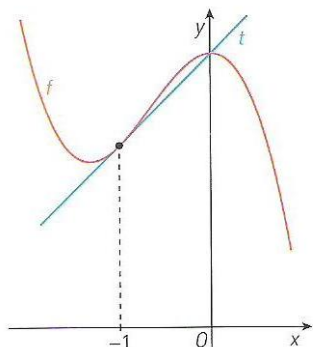
60.1. Determine $(g+f)'(1)$.

60.2. Determine a sabendo que: $(g+f)'(a) = -\frac{87}{5}$.

61. No referencial da figura está a parte da representação gráfica de uma função f e a recta t que é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1.

Sabe-se que $y = x + 3$ é uma equação da recta t .

Determine $(f \times g)'(-1)$ sabendo que $g(x) = -2x^3$.

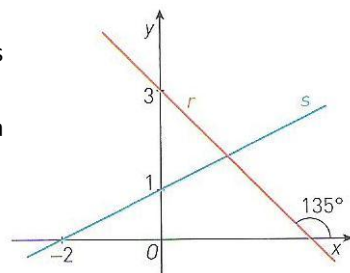


62. No referencial da figura, as rectas são representações gráficas das funções r e s .

62.1. Seja j a função definida por $j(x) = 2r(x)$.

Determine $j'(4)$.

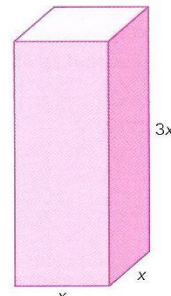
62.2. Determine $(r \times s)'(0)$.



63. Na figura está representado um prisma quadrangular regular.

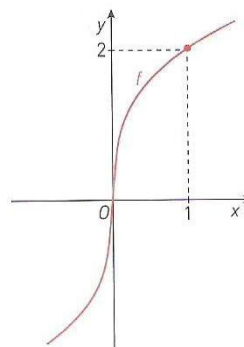
Admita que as dimensões estão expressas em centímetros.

Atendendo à informação dada na figura, determine a taxa de variação do volume para $x = 4$.



64. Relativamente a uma função f , sabe-se que $y = 2x + 5$ é uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3.

Seja g definida por $g(x) = (f(x))^4$. Determine $g'(3)$.



65. Na figura está representada a função f .

Determine $\left(\frac{g}{f}\right)'(1)$,

sabendo que

$$g(x) = -3(2-x)^2 + 3.$$

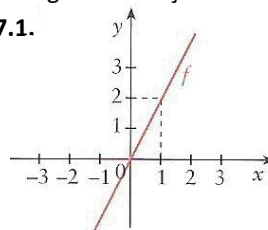
66. Considere a família de funções reais de variável real de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = ax^n, \quad a \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

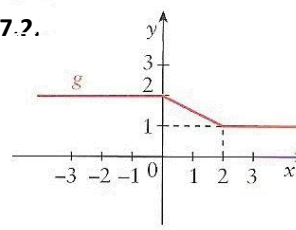
Determine a e n , sabendo que: $f'(1) = 1$ e $f'(3) = 9$

67. Faça um esboço de gráfico de uma função que possa corresponder ao gráfico da função derivada de cada uma das seguintes funções.

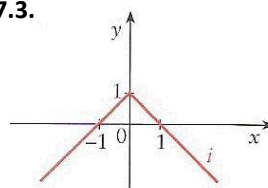
67.1.



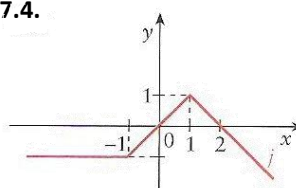
67.2.



67.3.



67.4.



▪ DERIVADA DE MAIS ALGUMAS FUNÇÕES

> Derivada de funções compostas

Função composta (revisão): Dadas duas funções f e g , reais de variável real, em que os domínios são, respectivamente, D_f e D_g , chama-se função composta f após g à função $f \circ g$ tal que:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $(D_{f \circ g}) = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$



Dadas duas funções f e g tais que $x_0 \in D_{g \circ f}$, f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$, então a derivada de $g \circ f$ em x_0 é dada por:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$$

Exemplo: Sejam $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x^4$.

Consideremos agora a função $h = (g \circ f)$.

Qual é o valor de $h'(-1)$?

- Pela regra de derivação anterior: $h'(-1) = g'[f(-1)] \times f'(-1)$

$$f'(x) = 2x - 2 \text{ então } f'(-1) = -2 - 2 = -4.$$

$$g'(x) = 4x^3 \text{ então } g'(f(-1)) = g'(3) = 4 \times 3^3 = 108.$$

$$\text{Assim: } h'(-1) = g'[f(-1)] \times f'(-1) = 108 \times (-4) = -432$$

- Por outro lado: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x)^4$

Aplicando a regra da derivada de uma potência:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[(x^2 - 2x)^4 \right]' = 4 \times (x^2 - 2x)^3 \times (x^2 - 2x)' = \\ &= 4 \times (x^2 - 2x)^3 \times (2x - 2) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} h'(-1) &= 4 \times ((-1)^2 - 2 \times (-1))^3 \times (2 \times (-1) - 2) = \\ &= 4 \times 27 \times (-4) = -432 \end{aligned}$$

NOTA

A regra $(f^n)' = n f^{n-1} f'$ é um caso particular de aplicação da regra da derivada da função composta.

(1) De $f'(x) = 4x^3$ conclui-se que $f'[g(x)] = 4[g(x)]^3$.

Exercícios:

68. Considere as funções h, f e g , tais que:

$$h(x) = \frac{1}{x-1} ; \quad f(x) = x^2 - 9 ; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Caracterize as funções:

68.1. $g \circ f$ 68.2. $h \circ f$ 68.3. $f \circ h$

69. Indique duas funções, f e g , de modo que $h = f \circ g$, sendo:

69.1. $h(x) = (x+1)^2$ 69.2. $h(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

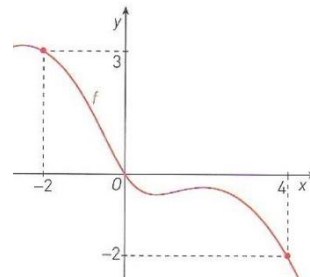
70. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R}$.

Seja g a função definida por $\log_2 x$.

Determine:

70.1. $(f \circ f)(4)$

70.2. $(f \circ g)(0,25)$



71. Determine $(h \circ j)'(x)$, sendo:

71.1. $h(x) = x^5$ e $j(x) = -2x + 1$.

71.2. $h(x) = \frac{x^2}{x+6}$ e $j(x) = x - 3$.

71.3. $h(x) = \sqrt[3]{-x+2}$ e $j(x) = x^3$.

71.4. $h(x) = x^3$ e $j(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

71.5. $h(x) = \frac{x+1}{x}$ e $j(x) = \sqrt{x}$.

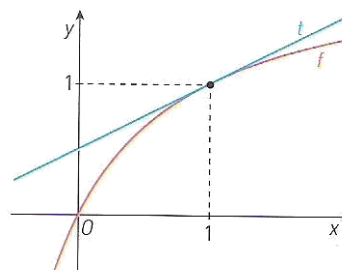
72. Aplique a regra de derivação da função composta para determinar $f'(x)$, sendo:

72.1. $f(x) = (3x-1)^2$

72.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

73. Na figura estão representadas uma função f e uma recta t tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Sabe-se que $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ é uma equação da recta t .



Sendo g a função definida por $g(x) = \sqrt{x}$, determine $(g \circ f)'(1)$.

> Derivada de funções exponenciais

Consideremos a função real de variável real definida por: $f(x) = e^x$ (e = número de Neper)

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto vem:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \times 1 = e^x$$

Então $f'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ou seja $(e^x)' = e^x$

Vejam agora mais duas funções exponenciais:

• Seja $g(x) = e^{2x-3}$, calculemos $g'(x)$.

$g'(x) = (e^{2x-3})'$ Recorrendo à derivada da função composta:

$h(x) = e^x$ e $u = 2x - 3$. Sabe-se que $h'(x) = e^x$ e $u' = 2$

Então:

$$g'(x) = (e^{2x-3})' = (h(u))' = h'(u) \times u' = e^{2x-3} \times 2$$

• Seja $h(x) = 3^x$, calculemos $h'(x)$.

Sabemos que 3^x pode ser escrito na forma de exponencial de base e :

$$3^x = e^{\ln(3^x)} = e^{x \ln 3}$$

Assim, $(3^x)' = (e^{x \ln 3})' = (x \ln 3) \times e^{x \ln 3} = \ln 3 \times e^{x \ln 3} = \ln 3 \times 3^x$

Resumidamente temos:

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x & (e^u)' &= u' e^u \\ (a^x)' &= a^x \times \ln a & (a^u)' &= u' \times a^u \times \ln a \end{aligned}$$

> Derivada de funções logarítmicas

Consideremos a função real de variável real definida por: $f(x) = \ln x$

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x \frac{h}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{h}{x} + 1\right)}{\frac{h}{x}}$$

Fazendo $y = \frac{h}{x}$, $h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x} \quad \text{Logo, } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Aplicando a regra da derivada da função composta e as propriedades dos logaritmos conseguimos encontrar as restantes regras.

Resumidamente temos:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \times \ln a} & (\log_a u)' &= \frac{u'}{u \times \ln a} \end{aligned}$$

O número e (número de Neper) pode ser definido como a base de uma função exponencial cuja derivada é a própria função.

$$(e^x)' = e^x$$

→ Na 11ª classe, o número irracional e foi definido como o limite da

$$\text{sucessão } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercícios:

74. Determine a expressão da função derivada de cada uma das seguintes funções:

74.1. $a(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ 74.2. $b(x) = e^{-x + \frac{1}{3}}$

74.3. $c(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ 74.4. $d(x) = 2^{-x^2}$

74.5. $f(x) = x^3 e^{-x}$ 74.6.

$g(x) = \frac{x\pi^{-x} - 1}{\pi}$

74.7. $h(x) = 2^{x \ln 3}$ 74.8. $i(x) = \ln(3x)$

74.9. $j(x) = \ln(x - x^2)$ 74.10. $k(x) = x \ln x$

74.11. $l(x) = \log_2(\sqrt{x})$

74.12. $m(x) = \log_3(x^2 - 3)$

74.13. $n(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{-3}{x^2 - 1}\right)$

74.14. $o(x) = e^x \ln^2 x$

74.15. $p(x) = \sqrt{\ln x^2}$

75. Caracterize a função derivada da função f , sendo:

75.1. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ -e^x + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

75.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x} & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 + \frac{x}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

75.3. $f(x) = 1 + |\ln x|$

76. Considere a função f definida por $f(x) = x \ln(x) - x$.

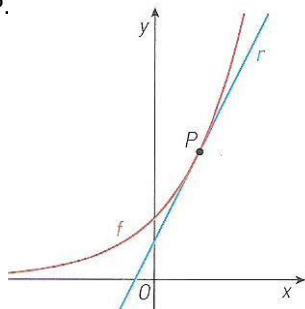
76.1. Resolva a equação $f(x) = 0$.

76.2. Mostre que $f'(x) = \ln(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercícios:

77. Seja r a recta paralela à recta $y = 2x$ e tangente ao gráfico da função f no ponto P .

Determine as coordenadas de P , sabendo que $f(x) = e^x$

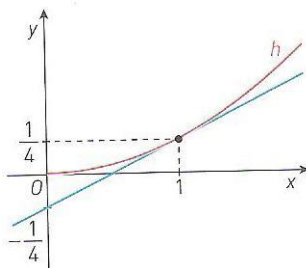


78. Na figura encontra-se parte de uma representação gráfica da função h e a recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa 1.

Seja j a função tal que

$$j(x) = 3^{\sqrt{h(x)}}$$

Determine $j'(1)$.

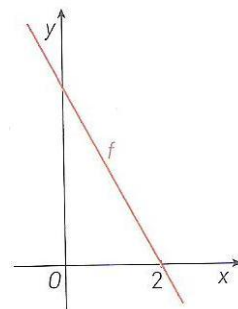


79. A recta que se encontra representada, no referencial da figura, é uma representação gráfica da função f .

Seja g a função definida por $g(x) = \log_{\pi}(f(x))$.

79.1. Qual o domínio de g ?

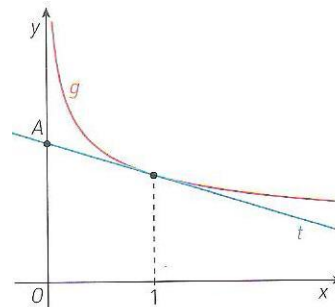
79.2. Mostre que $g'(1) \in \mathbb{R}^+$.



80. No referencial da figura está parte da representação gráfica da função g definida por:

$$g(x) = \frac{2^{\ln x}}{x}$$

A recta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 intersecta o eixo das ordenadas no ponto A .



Mostre que a ordenada do ponto A é $\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)$.

MONOTONIA E EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO // SINAL DA SUA DERIVADA

A função derivada de uma função é uma ferramenta útil para a determinação dos intervalos em que a função é monótona e para localizar eventuais extremos (máximos e mínimos) relativos ou absolutos.

De um modo geral, sendo $]a, b[$ um intervalo contido no domínio da uma função f :

Se uma função tem derivada positiva em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$, então a função é estritamente crescente nesse intervalo.	Se uma função tem derivada negativa em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$, então a função é estritamente decrescente nesse intervalo.	Se uma função tem derivada nula em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$, então a função é constante nesse intervalo.

Exemplo 1: Consideremos a função f real de variável real tal que $f(x) = (x-1)^2 + 2$:

1.1. Estudemos a monotonia e a existência de extremos da função.

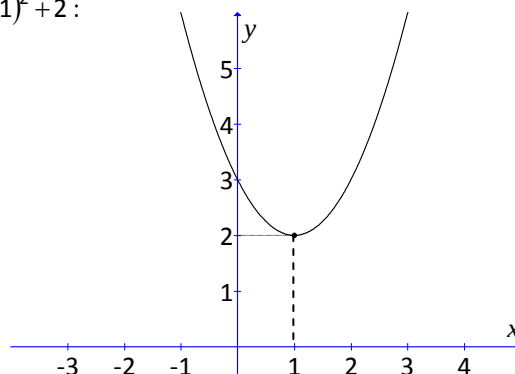
Resolução: A função f é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, com vértice em $(1, 2)$ e ordenada na origem 3 ($f(0) = (0-1)^2 + 2 = 3$).

Da análise do esboço do gráfico podemos concluir que:

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$,

f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$,

f é tem um mínimo absoluto para $x = 1$ que é 2.



1.2. Estudemos, agora, a monotonia e a existência de extremos da função, utilizando apenas a sua derivada.

Resolução: $f(x) = (x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x + 3$ então: $f'(x) = 2x - 2$

Como vimos anteriormente existe uma relação entre a monotonia da função e o sinal da sua derivada, estudemos então o sinal da derivada.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Trata-se de uma função afim com declive positivo ($m = 2$) e por isso crescente e com zero em $x = 1$.

Coloquemos essa informação numa tabela:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f		mínimo	

Como f é uma função contínua derivável em todo o seu domínio podemos concluir que no intervalo em que a derivada é negativa a função é decrescente, no intervalo em que a derivada é positiva a função é crescente e que no zero da derivada a função tem um mínimo (para $x = 1$).

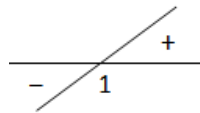
Da tabela resulta:

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$,

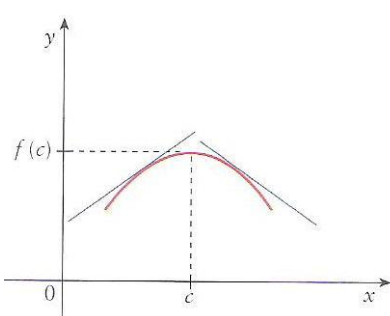
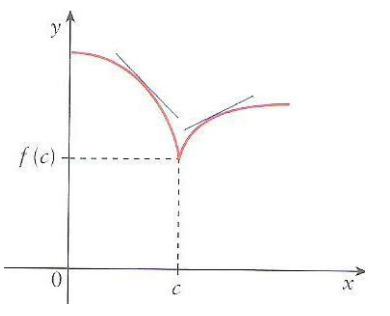
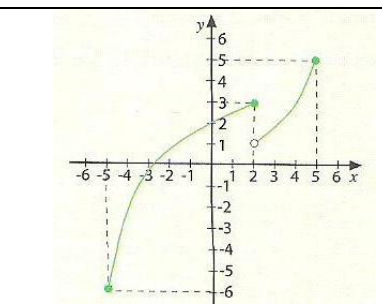
f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$,

f tem um mínimo absoluto para $x = 1$ que é 2

$$(f(1) = (1-1)^2 + 2 = 2).$$



Seja D o domínio de uma função f real de variável real e $c \in D$:

Se f é contínua em c e f' muda de sinal em c , então $f(c)$ é um extremo:		Se f é descontínua em c é necessário fazer o estudo caso a caso, atendendo à definição de extremos.
		
$f(c)$, é máximo se f' , passa de positiva a negativa.	$f(c)$, é mínimo se f' , passa de negativa a positiva.	

Exemplo 2: Estudemos a monotonia e os extremos da função f definida por: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+1}$:

Resolução: O domínio da função $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{x+1} \right)' = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$$

Zeros da função derivada: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \wedge x \neq -1$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3} \vee x = -1 - \sqrt{3}$$

Zeros de f' : $-1 + \sqrt{3} \vee -1 - \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{3}$		-1		$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
f'	+	0	+	s. s.	-	0	+
f		Max.		s. s.		mín.	

Intervalos de monotonia:

- f é crescente nos intervalos $]-\infty, -1 - \sqrt{3}]$ e $[-1 + \sqrt{3}, +\infty[$;
- f é decrescente nos intervalos $[-1 - \sqrt{3}, -1[$ e $]-1, -1 + \sqrt{3}]$.

Extremos:

• $f(-1 - \sqrt{3}) \approx -7,5$ é máximo relativo.

Não é máximo absoluto porque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x+1} = +\infty$$

• $f(-1 + \sqrt{3}) \approx -0,5$ é mínimo relativo.

Não é mínimo absoluto porque:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x+1} = -\infty$$

Exercícios:

81. Na figura está representada graficamente uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

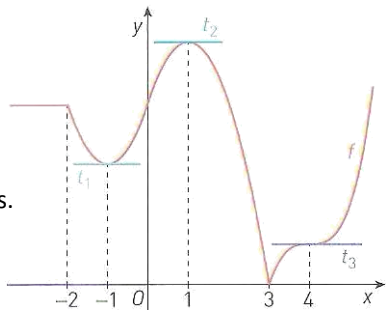
As rectas t_1 , t_2 e t_3 são tangentes ao gráfico e paralelas a Ox .

Indique o conjunto solução das seguintes condições.

81.1. $f'(x) = 0$

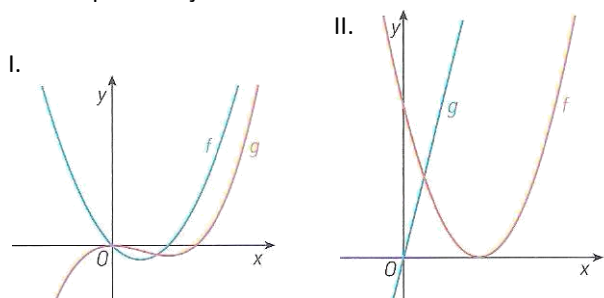
81.2. $f'(x) < 0$

81.3. $f'(x) \times f(2) > 0$



82. Nas figuras seguintes, apenas num dos referenciais se encontram representadas duas funções em que uma é a derivada da outra.

Indique em qual dos referenciais isso acontece e identifique a função e a derivada.



83. Seja f a função definida por: $f(x) = x|x|$

83.1. Caracterize a função derivada de f .

83.2. Mostre, por processos analíticos, que a função f é crescente em todo o seu domínio.

84. Em relação a uma função f , indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

I. Se $f'(a) = 0$, então f é contínua em $x = a$.

II. Se $f'(a) = 0$, então existe um extremo em $x = a$.

III. Se em $x = a$ existe um extremo, então $f'(a) = 0$.

IV. Se em $x = a$ existe um extremo e $f'(a) \in \mathbb{R}$ então $f'(a) = 0$

85. Estude a função g quanto aos intervalos de monotonia e extremos, sendo:

85.1. $g(x) = -x^2 + 3x + 1$

85.2. $g(x) = x^2 e^{-2x}$

85.3. $g(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 2$

85.4. $g(x) = \frac{e^x}{x}$

85.5. $g(x) = x \ln x$

85.6. $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

86. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $g(x) = \frac{2x}{e^x - x}$

Estude a função g quanto a intervalos de monotonia e a extremos.

87. Considere a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{se } x < 0 \\ e^{1-x} + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Estude a função g quanto aos intervalos de monotonia e extremos.

88. Considere a função f tal que: $f(x) = e^{2x-x^2}$

88.1. Estude os intervalos de monotonia e os extremos de f .

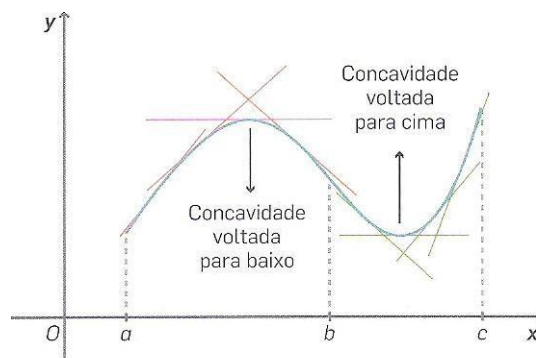
88.2. Mostre, que a recta $x = 1$ é um eixo de simetria de gráfico da função f .

▪ CONCAVIDADE E SEGUNDA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

As expressões “concavidade voltada para cima” e “concavidade voltada para baixo” já fazem parte do vocabulário utilizado para caracterizar gráficos de funções, nomeadamente quando nos referimos aos gráficos de funções quadráticas. Mas, como vamos ver, estas expressões podem ser aplicadas aos gráficos de outras funções.

Sendo f uma função contínua e derivável:

- Diz-se que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima num intervalo se, nesse intervalo, o gráfico se encontra acima de qualquer uma das rectas tangentes em pontos desse intervalo.
- Diz-se que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo num intervalo se, nesse intervalo, o gráfico se encontra abaixo de qualquer uma das rectas tangentes em pontos desse intervalo.
- Diz-se que f tem um ponto de inflexão para $x = b$ ($b \in Df$) se o gráfico muda o sentido da concavidade no ponto $(b, f(b))$.



Analisando o gráfico concluímos que:

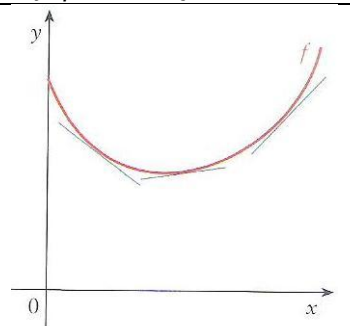
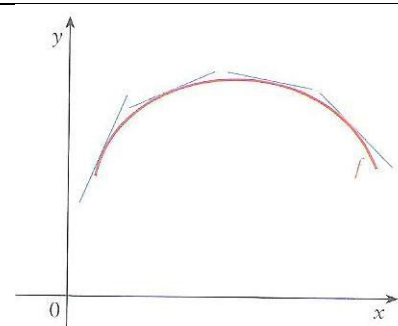
- tem concavidade voltada para cima no intervalo $]a, b[$;
- tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]b, c[$;
- a função tem um ponto de inflexão em $x = b$.

Vamos, agora estudar como determinar o sentido da concavidade e os pontos de inflexão usando a segunda derivada.

A monotonia de uma função f , num intervalo em que f é derivável, está relacionada com o sinal de f' nesse intervalo e a monotonia de f' está relacionada com o sinal de f'' .

Seja f uma função contínua. Os pontos de inflexão de f ocorrem:

- nos zeros de segunda derivada onde haja uma mudança de sinal;
- nos pontos onde não exista segunda derivada, se numa vizinhança à direita desses pontos existir segunda derivada e assumir valores de sinal diferente.

Seja f uma função derivável duas vezes:	
	
f tem concavidade voltada para cima f' é crescente f'' é positiva	f tem concavidade voltada para baixo f' é decrescente f'' é negativa

Exemplos: Estudemos a concavidade e a existência de pontos de inflexão dos gráficos das seguintes funções:

$$f(x) = 2 - x^3$$

Resolução:

f é contínua.

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{3-1} = -\frac{1}{3}x^2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{3} \times 2x = -\frac{2}{3}x$$

$$f''(x) = 0 \text{ é impossível e } Df'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	S. S.	+
f		P. I.	

O gráfico de f :

- tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$;
- tem concavidade voltada para cima em $[0, +\infty[$.
- tem ponto de inflexão em $(0, 2)$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$$

g é contínua.

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ -2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g''	+	S. S.	-
g		P. I.	

O gráfico de g :

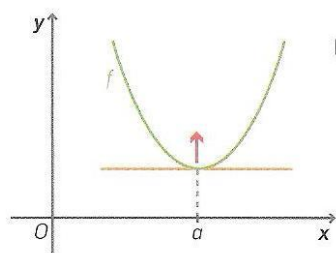
- tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1]$;
- tem concavidade voltada para baixo em $[1, +\infty[$.
- tem ponto de inflexão em $(1, 1)$.

> O Sinal da segunda derivada e os extremos da função

Seja f uma função duas vezes derivável numa vizinhança de a .

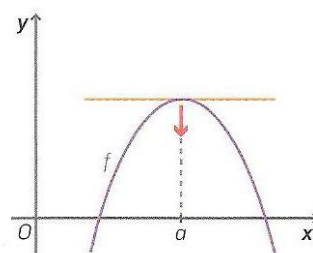
Se no ponto a se tem $f''(a) = 0$ e $f'''(a) > 0$, a função tem um mínimo para $x = a$.

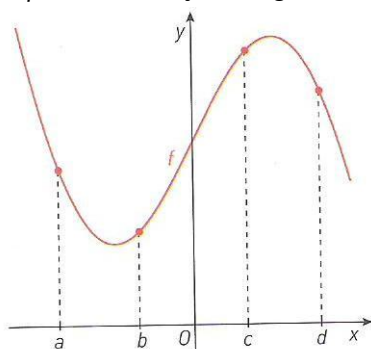
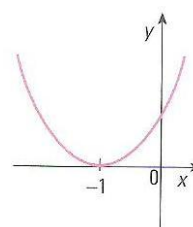
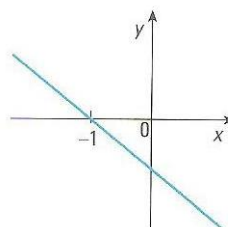
Se no ponto a se tem $f''(a) = 0$ e $f'''(a) < 0$, a função tem um máximo para $x = a$.



No ponto de abscissa a a reta tangente é horizontal ($f'(a) = 0$) e a concavidade está voltada para cima ($f''(a) > 0$).

No ponto de abscissa a a reta tangente é horizontal ($f'(a) = 0$) e a concavidade está voltada para baixo ($f''(a) < 0$).



Exercícios:**89.** Determine $f''(x)$, sendo: **89.1.** $f(x) = \ln^2 x$ **89.2.** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ **89.3.** $f(x) = x + 2^{-x}$ **90.** Um corpo é lançado na vertical, de baixo para cima, sendo a altura h , em metros, a que se encontra o corpo decorridos t segundos após o lançamento, dada pela expressão: $h(t) = -t^2 + 7t + 1$ **90.1.** Qual a velocidade do corpo no instante $t = 2$?**90.2.** Determine a aceleração em:**a)** $t = 2$ **b)** $t = 5$ **91.** Na figura está representada uma função f . Estão assinalados alguns pontos que pertencem ao gráfico de f . Por observação da figura, indique o sinal de:**91.1.** $f'(a) \times f''(a)$ **91.2.** $f''(b) \times f'(c)$ **91.3.** $f'(b) \times f''(c)$ **91.4.** $f''(c) + f''(d)$ **92.** Estude o sentido das concavidades e os pontos de inflexão do gráfico de f , sendo:**92.1.** $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$ **92.2.** $f(x) = (x-1)e^x$ **92.3.** $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ **92.4.** $f(x) = e^x(x^2 - x)$ **93.** De uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a sua derivada f' é definida por: $f'(x) = \frac{1 + \ln x}{2x}$ Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.**94.** Seja f uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abscissa -1.Qual dos seguintes gráficos pode ser o da segunda derivada de f ?

Justifique a resposta.

95. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = xe^{1-x^2}$ **95.1.** Mostre que $f''(x) = (4x^3 - 6x)e^{1-x^2}$.**95.2.** Estude o sentido da concavidade e a existência de pontos de inflexão do gráfico de f .**96.** Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 2x^2 - e^{-\frac{x}{2}}$$

Determine a abscissa do único ponto de inflexão do gráfico de f .**▪ ESTUDO ANALÍTICO DE FUNÇÕES**

Com os conceitos de cálculo diferencial estudados neste tema, é possível, neste momento, por via analítica, ampliar o estudo das funções.

Entre outras características, o estudo de limites, da continuidade, da existência de assíntotas, da derivabilidade e da paridade permite um conhecimento mais pormenorizado da função ou de uma sua restrição que, em muitos casos e como já foi visto, modelam situações reais.

Nota:

A tecnologia gráfica hoje ao nosso dispor constitui uma ajuda preciosa nesta matéria.

A representação gráfica das funções nas calculadoras gráficas deve servir de apoio ao estudo da função.

Estudo de uma função:

- Determinar o domínio;
- Estudar a continuidade da função;
- Determinar as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da função com os eixos coordenados;
- Estudar a paridade;
- Determinar os extremos e estudar a monotonia da função (estudo do sinal da primeira derivada);
- Estudar o sentido da concavidade e existência de pontos de inflexão do gráfico da função (estudo do sinal da segunda derivada);
- Determinar equações da assíntotas do gráfico da função;
- Determinar o contradomínio;
- Representação gráfica.

Exemplo: Estudemos a função real de variável real:

$$f(x) = xe^x$$

Resolução:

- Domínio: $\mathbb{R}$
- Continuidade: a função é contínua em $\mathbb{R}$
- Intersecção com eixos:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Intersecção do gráfico com o eixo Ox: (0, 0)

$$f(0) = 0 \times e^0 = 0$$

Intersecção do gráfico com o eixo Oy: (0, 0)

- Paridade:

$$f(-x) = (-x)e^{(-x)} = -xe^{-x}$$

A função não é par nem é ímpar.

- Intervalos de monotonia e extremos:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	-	0	+
f		min	

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}. \text{ O mínimo da função é } -\frac{1}{e}.$$

- Concavidades. Pontos de inflexão:

$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2+x) = 0 \Leftrightarrow 2+x = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	-	0	+
f		p.i.	

O ponto P $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ é o ponto de inflexão do gráfico.

- Assíntotas:

O gráfico da função não tem assíntotas verticais.

Não verticais: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Seja $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Seja $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Se $m = 0$ vem:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) \stackrel{(a)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

$$(a) \quad y = -x \Leftrightarrow x = -y \quad x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

A recta $y = 0$ é assíntota horizontal quando: $x \rightarrow -\infty$

Exercícios:

97. Estude e represente graficamente a função definida por:

$$97.1. \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$97.2. \quad f(x) = \frac{x^2 - x}{2 - x}$$

$$97.3. \quad f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2}$$

$$97.4. \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$$

$$97.5. \quad f(x) = x + \ln \frac{1}{x}$$

$$97.6. \quad f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$97.7. \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$97.8. \quad f(x) = xe^x - e^x$$

98. Relativamente à função f sabe-se que:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

• satisfaz a tabela:

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f		3		-2	

98.1. Complete a tabela.

98.2. f é contínua? Justifique.

98.3. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1.

98.4. Esboce um possível gráfico de f .

98.5. Qual o contradomínio de f ?

99. Esboce um possível gráfico da função f , sabendo que:

99.1.

- tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- é ímpar
- $x = 0$ é uma assíntota
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$
- $f''(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

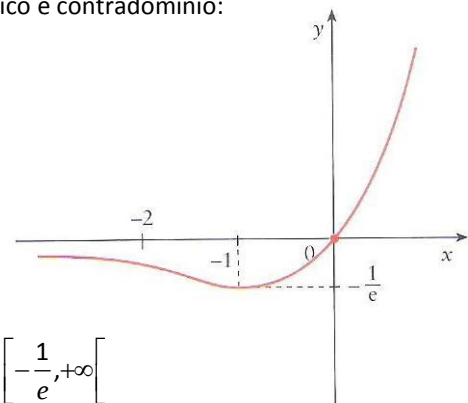
99.2.

- tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $x = 1$ é assíntota
- $f'(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$
- $f'(3) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

99.3.

- tem domínio $\mathbb{R}$
- $x = 2$ é assíntota vertical
- $f'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Gráfico e contradomínio:



$$D'_f = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right[$$

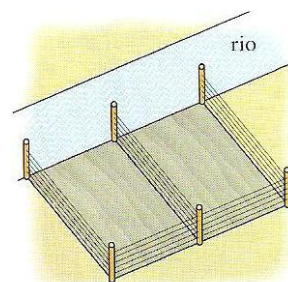
▪ MODELAÇÃO E OPTIMIZAÇÃO

Muitos fenómenos de Física, Economia, Sociologia e muitas outras ciências têm como modelo matemático uma função. Estes modelos matemáticos permitem resolver alguns problemas, fazer projecções a curto ou a médio prazo e/ou determinação de valores óptimos.

Exemplo 1: Um agricultor tem 8100 mil dobras para gastar na vedação de duas cercas contínuas, rectangulares e iguais, junto a um rio, como se mostra na figura.

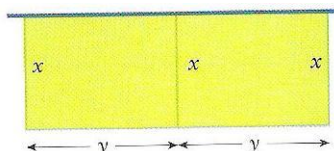
A vedação dos três lados perpendicular ao rio custa 90 mil dobras o metro, enquanto que vedar o lado paralelo ao rio custa 80 mil dobras o metro.

Quais devem ser as dimensões das cercas de modo a que a área destas seja máxima?



Resolução: Pretende-se otimizar a área das cercas.

Começemos por fazer um desenho e identificar as variáveis Independentes.



Seja: x = comprimento de um lado perpendicular ao rio;

y = comp. de um lado, de uma cerca, paralelo ao rio.

Estamos condicionados pelo custo da vedação e pelo dinheiro disponível.

$$3x \times 90 + 2y \times 80 = 8100 \Leftrightarrow y = \frac{810 - 27x}{16}$$

Custo da vedação
dos lados
perpendiculares ao rio.

Custo da vedação
do lado paralelo
ao rio.

A área A é dada por $A = 2xy$; escrevendo a área em função de x , vem:

$$A(x) = 2x \times \frac{810 - 27x}{16} \quad \text{ou} \quad A(x) = \frac{810x - 27x^2}{8}$$

Calculando $A'(x)$, vem:

$$A'(x) = \frac{810 - 54x}{8} ; \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

Estudemos a variação da função área A .

x	0		15	
A'		+	0	-
A			Máx	

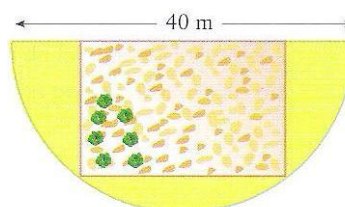
$$x = 15 ; y = \frac{810 - 27 \times 15}{16} = 25,3125$$

Verificação: $3 \times 15 \times 90 + 2 \times 25,3125 \times 80 = 8100$

Logo as dimensões da cerca que conduzem à área máxima são $x = 15$ m e $y = 25,3125$ m.

Exercícios:

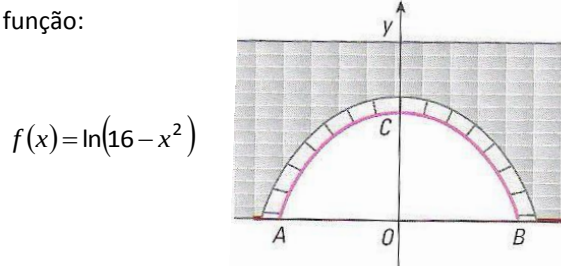
100. Um terreno tem a forma de um semicírculo de raio 20m. Pretende-se fazer um jardim com a forma de um rectângulo, em que um dos lados está sobre o diâmetro do semicírculo e os vértices do lado oposto pertencem à circunferência.



100.1. Determine as dimensões do jardim de modo que a sua área seja máxima.

100.2. Qual é a área máxima do jardim?

101. O modelo matemático encontrado para descrever o arco de entrada num túnel, representado no referencial o.n. xOy , é dado pela função:



101.1. Resolva a equação $f'(x) = 0$ e interprete o valor encontrado no contexto do problema.

101.2. Determine a distância do segmento $[A, B]$ (a largura da entrada no túnel)

102. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de q centenas de peças, expresso em milhares de dobras, é dado por

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000.$$

102. 1. Determine a função $C'(q)$, custo marginal, e calcule o seu valor para 6 centenas de peças.

102.2. Estude a variação do custo total, no intervalo $]0, 8[$. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo.

Exemplo 2: A pilha de Volta foi o primeiro gerador estático de energia eléctrica. O criador, o físico italiano Alessandro Volta, viveu entre 1745 e 1827.



A potência fornecida por uma pilha de Volta é dada, em determinada unidade, por: $p = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$

sendo $E \neq 0$ uma força electromotriz constante.

r é uma resistência interna e R é uma resistência externa, $r > 0, R > 0$.

2.1. Mostre que a potência é máxima quando $R = r$.

2.2. Determine a maior potência que é possível obter.

Resolução:

2.1. Tem-se: (a) vamos derivar em ordem a R .

$$\begin{aligned} p'(R) &= \left(\frac{E^2 R}{(r + R)^2} \right)' = \frac{(E^2 R)' \times (r + R)^2 - E^2 R ((r + R)^2)'}{(r + R)^4} = \\ &= \frac{E^2 (r + R)^2 - 2(r + R)E^2 R}{(r + R)^4} = \frac{E^2 (r + R)(r + R - 2R)}{(r + R)^4} = \\ &= \frac{E^2 (r - R)}{(r + R)^3} \end{aligned}$$

Atendendo a que $E \neq 0$,

$$p'(R) = 0 \Leftrightarrow E^2 (r - R) = 0 \Leftrightarrow r - R = 0 \Leftrightarrow r = R$$

Se $R < r$ tem-se $r - R > 0$ e, portanto, $p'(R) > 0$.

Se $R > r$ tem-se $r - R < 0$ e, portanto, $p'(R) < 0$.

Portanto p toma o valor máximo quando $R = r$.

2.2. O maior que a maior potência pode tomar é $p(r)$:

$$p(r) = \frac{E^2 r}{(r + r)^2} = \frac{E^2 r}{4r^2} = \frac{E^2}{4r}$$

106. Admite que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por:

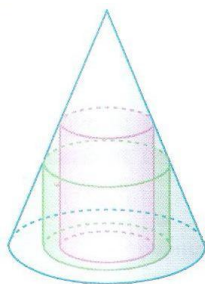
$$C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}, \text{ com } t \geq 0$$

106.1. Mostra que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi de 13 gramas por litro. (se utilizar a calculadora para eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos use três casas decimais)

106.2. Determina o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

107. Os cilindros e o cone têm a base assente no mesmo plano e as respectivas alturas contidas na mesma recta. O cone tem de altura 60 cm e raio da base 10 cm.

Determine o volume máximo do cilindro que se pode inscrever o cone.



Exercícios:

103. Admita que a altura do nível da água, em metros, num reservatório é dada, durante 15 minutos e a partir de um certo instante, pela expressão:

$$h(t) = \frac{4t - 60}{t - 30} \text{ com } t \text{ em minutos.}$$

103.1. Mostre, por processos analíticos, que durante os 15 minutos o reservatório está a esvaziar.

103.2. Qual a taxa de variação da altura do nível da água no instante $t = 10$?

104. Admite que um forno eléctrico foi ligado às 11 horas de um determinado dia. Passado algum tempo após ter sido ligado, houve uma falha de energia.

A temperatura dentro do forno, C , em graus centígrados, é dada por

$$C(t) = 20 + 150t \times e^{-0,3t}, \quad t \geq 0,$$

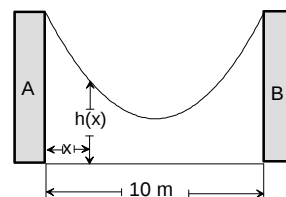
em que t é o tempo, em horas, a partir do instante em que o forno foi ligado.

104.1. Qual foi a temperatura a que o forno se encontrava no momento de ser ligado.

104.2. Determina a hora em que ocorreu a falha de energia (nota que a temperatura cresceu até um determinado valor e aquando da falha de energia começou a decrescer).

Apresenta o resultado em horas e minutos.

105. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considera a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11).$$

Admite que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

105.1. Determina a altura da parede A. Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

105.2. Estuda a função h quanto à monotonia e conclui daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.