

TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

10ª ou 11ª classe - 2º Ciclo

MATEMÁTICA CSPQ 10ª CLASSE

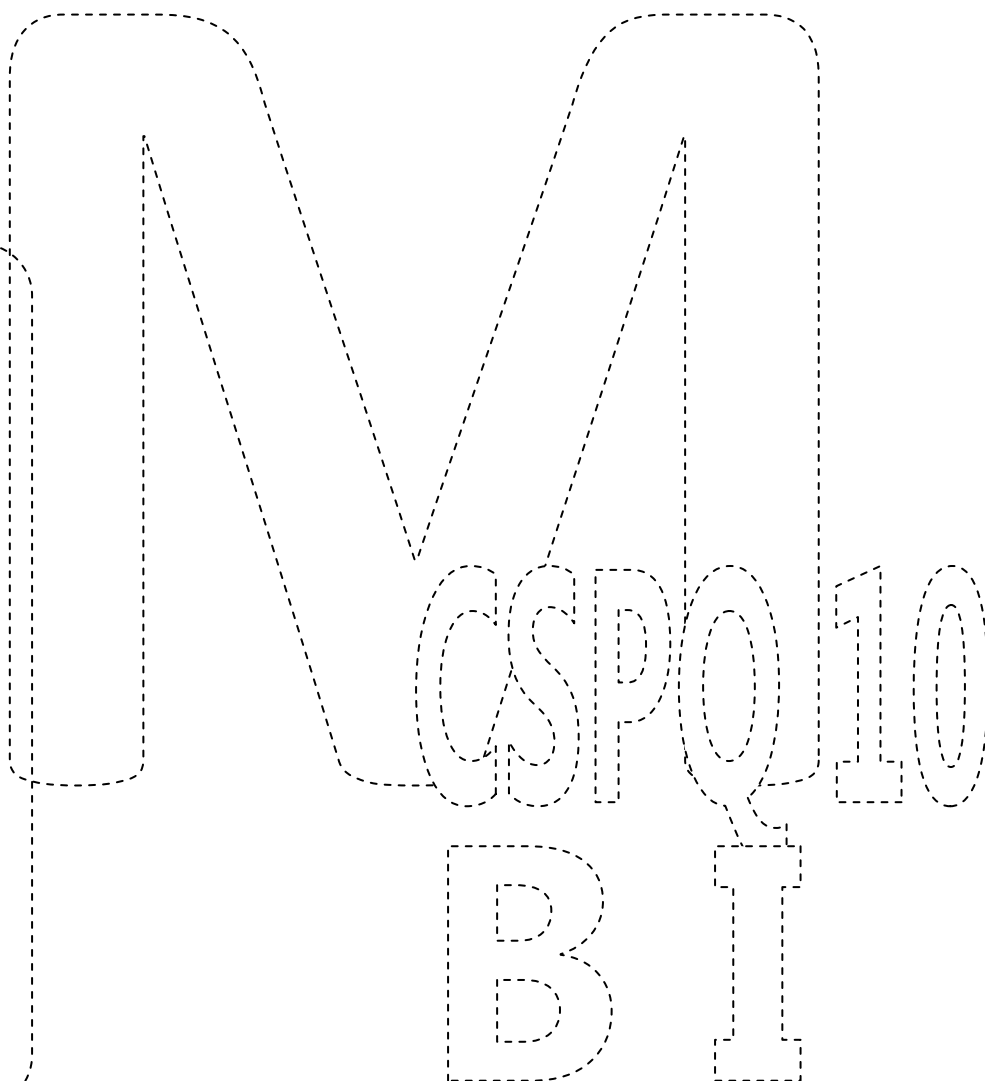
MATEMÁTICA B I



Ministério da Educação
Cultura e Formação

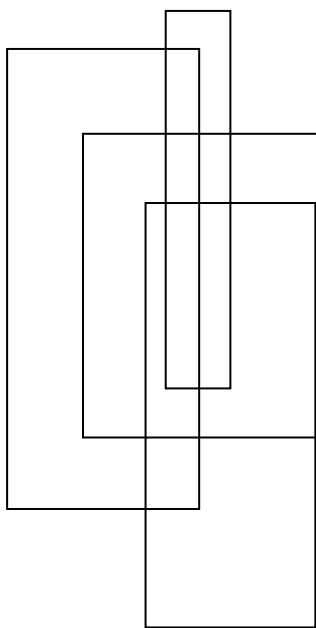


escola+



ÍNDICE

Tema 1 – Geometria	3
▪ Problemas Geométricos no Plano e no Espaço // Secções no Cubo	4
▪ Referenciais e Condições no Plano e no Espaço	10
▪ Equação Reduzida da Recta no Plano // Conjuntos Definidos por Condições	20
 Tema 2 – Funções	 24
▪ Generalidades sobre Funções	25
▪ Função Afim	30
▪ Função Quadrática	31
▪ Transformações simples de Funções	38
▪ Funções Polinomiais. Polinómios	40
 Bibliografia	 46



TEMA 1

GEOMETRIA

INTRODUÇÃO

Um olhar atento sobre aquilo que nos rodeia é suficiente para identificarmos modelos construídos pelo Homem ou pela própria Natureza relacionados com a **geometria do plano** e com a **geometria no espaço**.



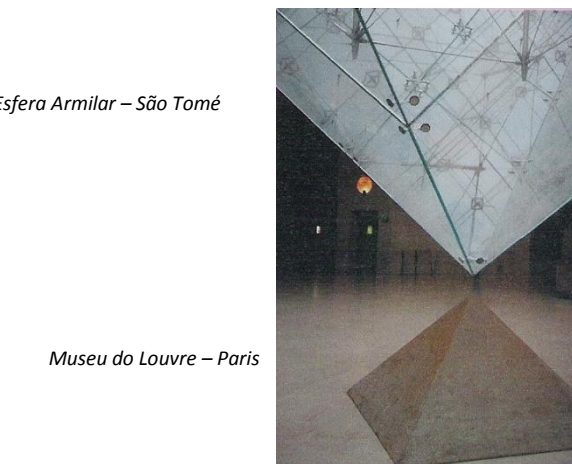
Forte – São Tomé



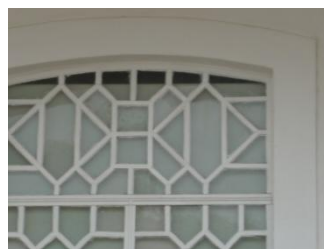
Esfera Armilar – São Tomé



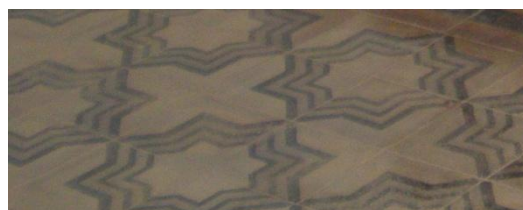
Cubo da Ribeira – Porto



Museu do Louvre – Paris



Banco Central de São Tomé e Príncipe – São Tomé



Roça Sundry - Príncipe

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS NO PLANO E NO ESPAÇO // SECÇÕES NO CUBO

PAVIMENTAÇÕES

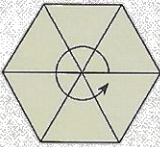
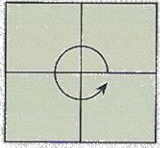
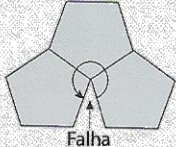
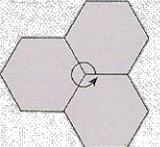
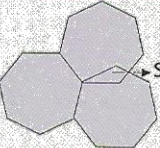
Uma pavimentação do plano é um conjunto de mosaicos que cobre completamente uma superfície, sem sobreposições nem espaços intermédios.

Para pavimentar uma superfície plana, usando figuras geométricas de modo a não existirem falhas e sobreposições, existem condições que têm que ser respeitadas. Em torno de cada vértice (ponto que converge mais de uma figura):

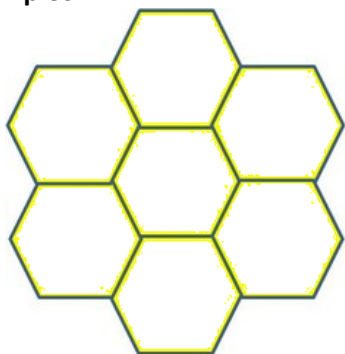
- a soma dos ângulos internos das figuras usadas tem que ser 360° ;
- têm que convergir 3 ou mais figuras geométricas.

Nota:

Polígono regular é uma figura geométrica com ângulos e lados iguais

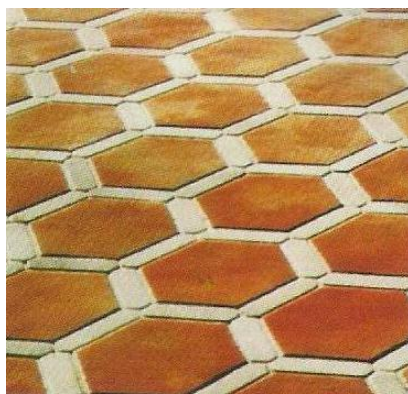
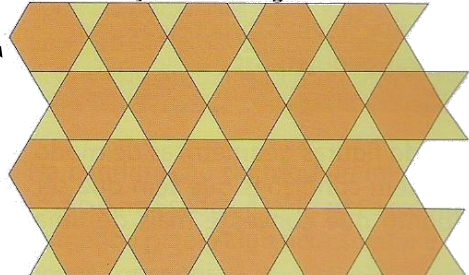
Polígono regular	Soma dos ângulos internos
Triângulo equilátero 	$6 \times 60^\circ = 360^\circ$ É possível
Quadrado 	$4 \times 90^\circ = 360^\circ$ É possível
Pentágono 	$3 \times 108^\circ = 324^\circ$ Não é possível pavimentar, devido à existência de uma falha
Hexágono 	$3 \times 120^\circ = 360^\circ$ É possível
Heptágono 	$> 360^\circ$ Não é possível pavimentar, devido à existência de uma sobreposição

Exemplos:

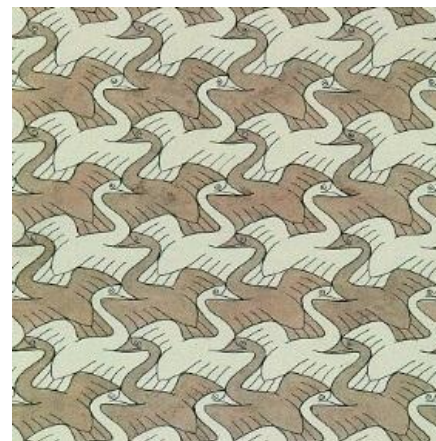


Pavimentação regular

Pavimentação semi-regular



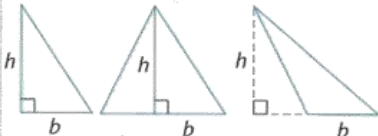
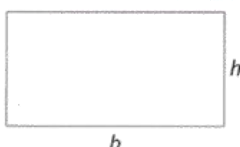
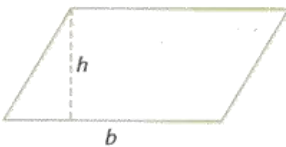
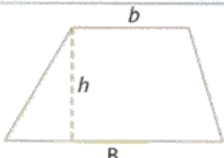
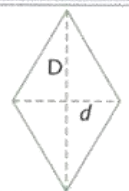
Calçadas



Mauritius C. Escher

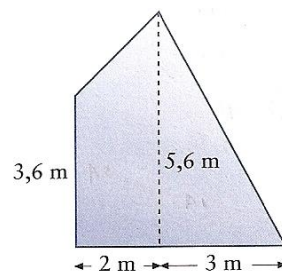


ÁREAS E PERÍMETROS

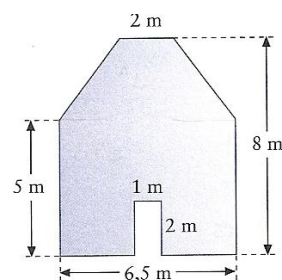
NOME	FIGURA	ÁREA
Triângulo		$A = \frac{b \times h}{2}$
Quadrado		$A = l \times l$
Retângulo		$A = b \times h$
Paralelogramo		$A = b \times h$
Trapézio		$A = \frac{B+b}{2} \times h$
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$
Polígono regular		$A = \frac{P}{2} \times a$ P — Perímetro
Círculo		$A = \pi r^2$

Exercícios:

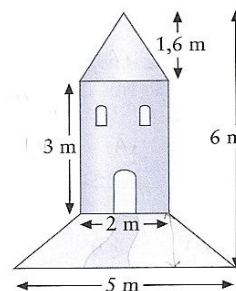
1. Calcule a área das seguintes figuras:



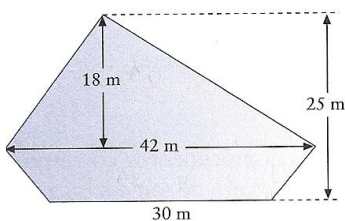
F1



F2

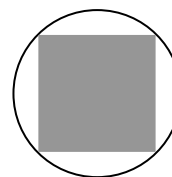


F3

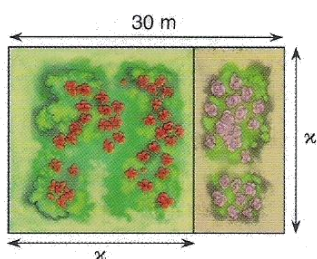


F4

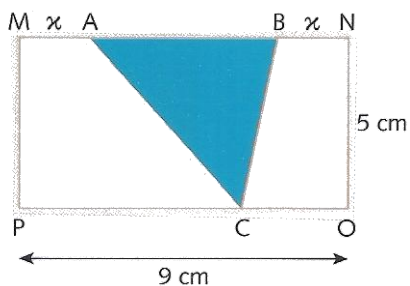
2. Se o círculo da figura tem área 2π , qual a área do quadrado nele inscrito?



3. Um jardim com 450m^2 de área está dividido em duas partes. Qual é a área da parte maior plantada?



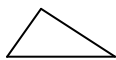
4. Determine o valor de x , sabendo que a área do triângulo é um terço da área do retângulo.



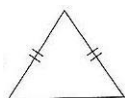
SEMELHANÇAS NO PLANO (FACULTATIVO)

Classificação de triângulos

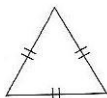
- Quanto aos lados



Escaleno: três lados diferentes

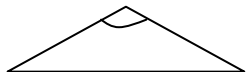


Isósceles: dois lados iguais

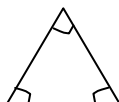


Equilátero: três lados iguais

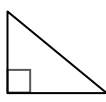
- Quanto aos ângulos



Obtusângulo: com um ângulo obtuso ($>90^\circ$)



Acutângulo: três ângulos agudos ($<90^\circ$)



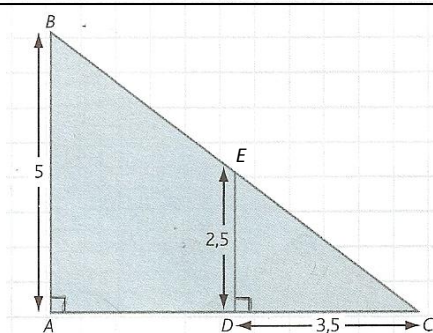
Rectângulo: com um ângulo recto ($=90^\circ$)

Exercícios:

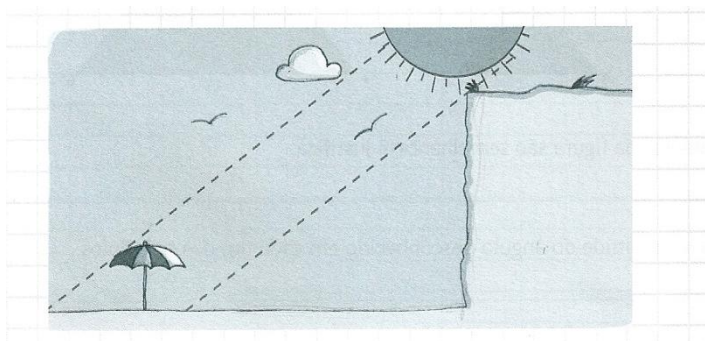
5. Considere a figura seguinte:

5.1. Justifique que os triângulos são semelhantes.

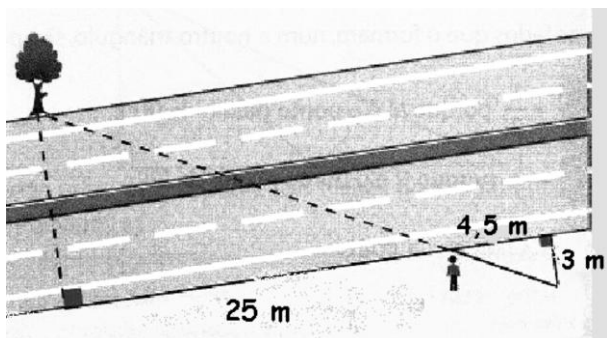
5.2. Determine $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



6. Calcule altura da falésia sabendo que o chapéu-de-sol tem 2 metros de altura, a sua sombra tem 2,6 metros de comprimento e a sombra da falésia tem 26 metros de comprimento.



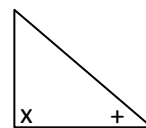
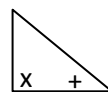
7. Utilizando o seguinte esquema calcule a largura da auto-estrada:



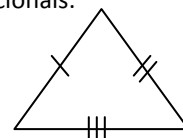
Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se tiverem:

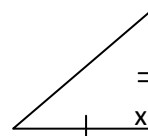
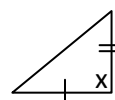
- dois ângulos iguais:



- os três lados proporcionais:



- dois lados proporcionais e o ângulo, formado por eles, igual:



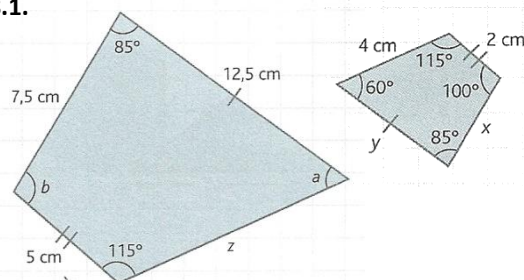
Polígonos semelhantes:

Dois polígonos com o mesmo número de lados dizem-se semelhantes quando têm de um para o outro:

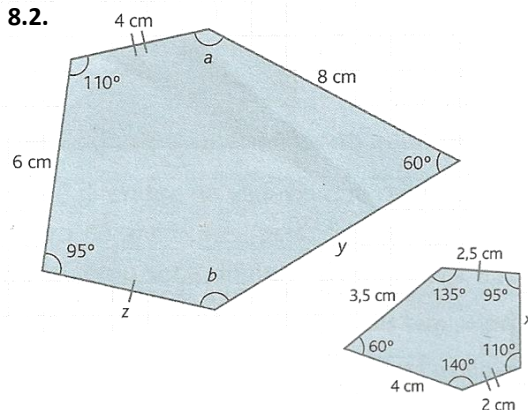
- ângulos geometricamente iguais;
- lados correspondentes proporcionais.

8. Sabendo que os seguintes polígonos são semelhantes, indique as medidas que faltam.

8.1.



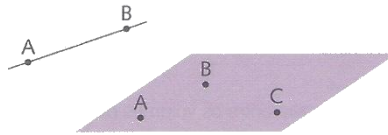
8.2.



▪ POSIÇÃO RELATIVA DE RECTAS E PLANOS

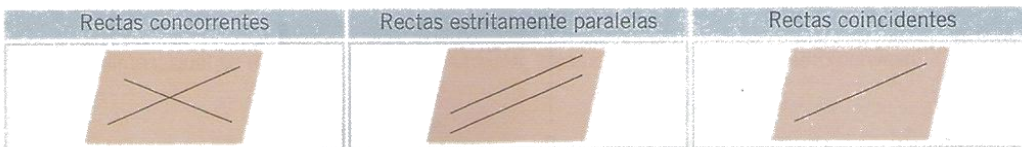
Definição de recta e de plano:

- Dois pontos distintos, A e B, definem a recta AB.
- Três pontos não colineares definem um plano.

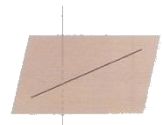


> Posição relativa de rectas:

Rectas complanares



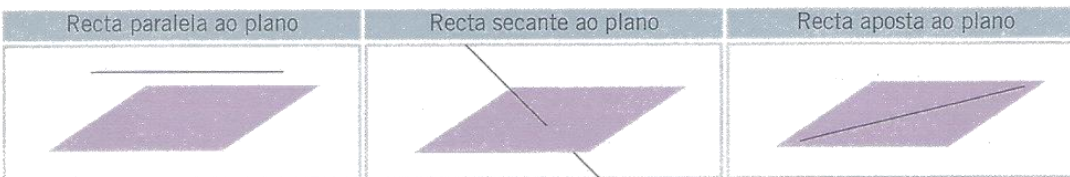
Rectas não complanares



> Posição relativa de planos:

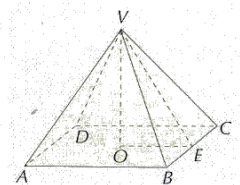


> Posição relativa de rectas e planos:



Exercício:

9. Considere a figura:



Indique duas rectas:

- 9.1. paralelas.
- 9.2. concorrentes.
- 9.3. perpendiculares.

Indique dois planos:

- 9.4. coincidentes.
- 9.5. concorrentes.

Indique uma recta:

- 9.6. perpendicular ao plano ABC.

▪ SÓLIDOS / SÓLIDOS PLATÓNICOS

Não Poliedros	Poliedros
Sólidos geométricos cujas faces não são todas planas. 	Sólidos geométricos cujas faces são figuras planas.

Irregulares	Regulares
Não regulares. 	Poliedros em que as suas faces são geometricamente iguais e nos seus vértices concorrem o mesmo número de faces e arestas.

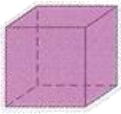
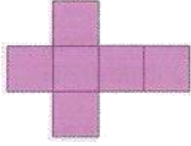
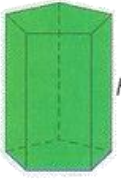
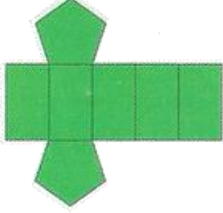
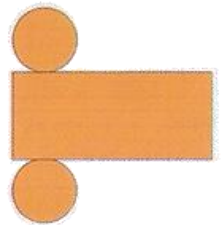
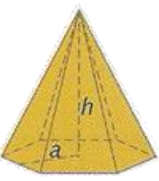
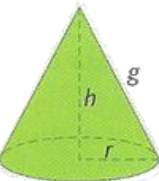
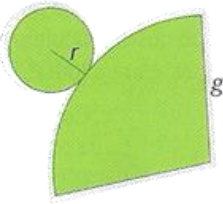
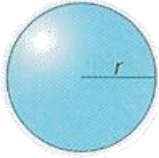
TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
4 faces, triângulos equiláteros	6 faces, quadrados	8 faces, triângulos equiláteros	12 faces, pentágonos regulares	20 faces, triângulos equiláteros

Sólidos Platónicos

Exercício:

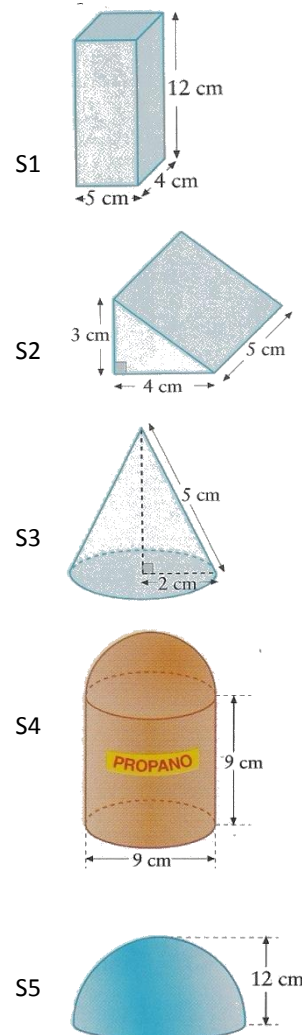
10. Porque é que existem apenas 5 sólidos platónicos?

VOLUMES DE SÓLIDOS

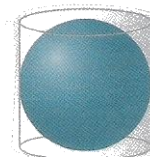
SÓLIDO	PLANIFICAÇÃO	ÁREA LATERAL	ÁREA TOTAL	VOLUME
 Cubo		$A_L = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
 Prisma		$A_L = P_b \times h$ P_b — Perímetro da base	$A_T = A_L + 2A_b$ A_b — Área da base	$V = A_b \times h$
 Cilindro		$A_L = P_b \times g = 2\pi r \times g$ g — Geratriz	$A_T = A_L + 2A_b = 2\pi r g + 2\pi r^2$	$V = A_b \times h = \pi r^2 \times h$
 Pirâmide		$A_L = \frac{P_b}{2} \times ap$ ap — Apótema	$A_T = A_L + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h$
 Cone		$A_L = \pi \times r \times g$	$A_T = A_L + A_b = \pi r g + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$
 Esfera	—	—	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Exercícios:

11. Calcule o volume de cada um dos sólidos representados:



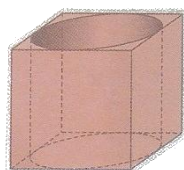
12. Na figura temos uma esfera inscrita num cilindro com altura de 10cm.



12.1. Calcule o volume de cada um dos sólidos.

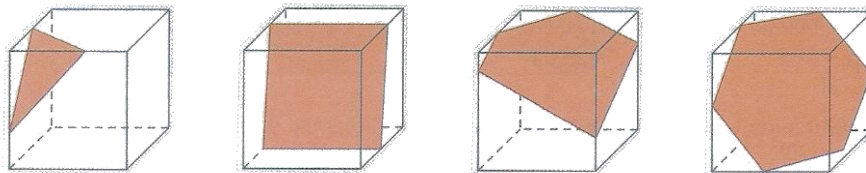
12.2. Qual a razão entre os seus volumes.

13. O sólido da figura é um cubo de aresta 10cm onde foi escavado um cilindro cuja base tem um raio de 5cm. Calcule o valor exacto do volume do sólido.



▪ SECÇÕES NO CUBO

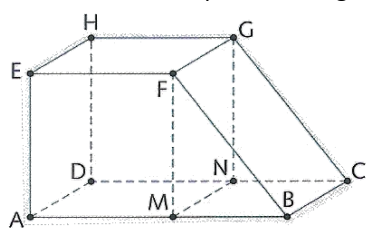
Quando se intersecta um cubo com um plano a secção que se obtém vai depender do número de faces do cubo que o plano intersecta, isto é, se o plano intersecta 3 faces a secção obtida será um triângulo, se intersecta 4 faces a secção obtida será um quadrilátero, se intersecta 5 faces a secção obtida será um pentágono e se intersecta 6 faces a secção obtida será um hexágono.



M.A.(3)

Exercícios:

14. Na figura estão representados um cubo com 8 cm de lado e um prisma triangular.



14.1. Utilizando as letras da figura, indique:

- uma recta perpendicular ao plano EFB.
- duas rectas estritamente paralelas.
- dois planos que se intersectam na recta EF.

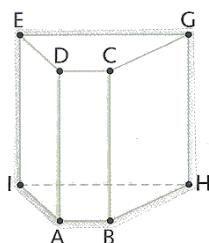
14.2. Sabendo que $\overline{AB} = 14$ cm determine:

- o volume do prisma.
- o volume do sólido.

14.3. Determine a área da secção obtida no cubo pelo plano:

- AFG.
- EGM.

15. A figura representa um prisma recto cujas bases são trapézios.



Indique as posições relativas de:

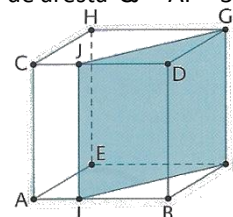
- EG e AB.
- BC e o plano HIE.
- plano AIE e plano ABI.
- plano HIE e plano ABC.

16. Na figura está representado um cubo com 9 cm de aresta $\overline{CJ} = \overline{AI} = 3$ cm.

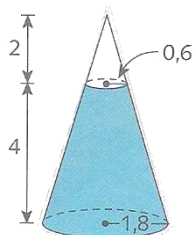
16.1. Calcule o comprimento exacto de [JG].

16.2. Determine o valor exacto do perímetro do quadrilátero [FGIJ].

16.3. O plano IJG divide o cubo em dois sólidos. Calcule a razão entre os seus volumes.

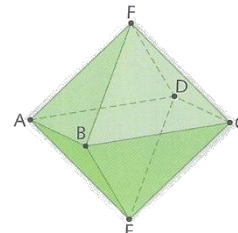


17.

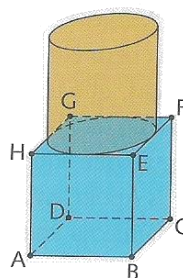


Determine o volume do tronco de cone representado na figura a sombreado. (apresente o resultado final arredondado as centésimas)

18. Determine a área da secção obtida no octaedro regular, com 5 cm de aresta, feita pela intersecção do plano BDE.



19.



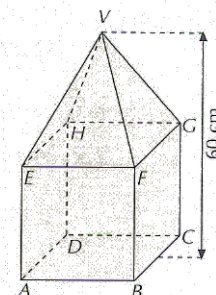
A figura é constituída por um cubo e um cilindro de base inscrita na face superior do cubo. A altura do cilindro é 8 cm e o seu volume é 200π cm³. Determine o volume do cubo.

20. O sólido representado na figura é constituído por um cubo, e por uma pirâmide com altura igual à do cubo.

20.1. Determine o volume do sólido.

20.2. Determine a área da secção produzida no sólido pelo plano:

- AHG.
- AFC.
- CGV.



REFERENCIAIS E CONDIÇÕES NO PLANO E NO ESPAÇO

REFERENCIAL CARTESIANO NO PLANO: COORDENADAS DE PONTOS E SEUS SIMÉTRICOS

O referencial cartesiano, que vamos utilizar no nosso estudo de geometria analítica, é constituído por dois eixos perpendiculares (ortogonais) e monométricos.

Coordenadas

A cada ponto corresponde um par ordenado de números: as coordenadas do ponto. A primeira coordenada diz respeito ao eixo horizontal (eixo Ox) e designa-se por abcissa e a segunda coordenada diz respeito ao eixo vertical (eixo Oy) e designa-se por ordenada.

A (3, 2)

Como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pares ordenados formados por números reais, também chamamos ao plano $\mathbb{R}^2$.

Em geometria algébrica a cada representação geométrica corresponde uma representação algébrica e vice-versa.

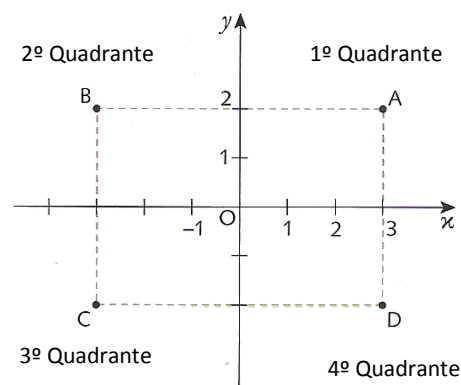
Simetrias

Considerando o ponto A, por exemplo, verifica-se que o seu simétrico:

- relativamente ao eixo Oy é B(-3, 2).
- relativamente ao eixo Ox é D(3, -2).
- relativamente à origem, O, é C(-3, -2).

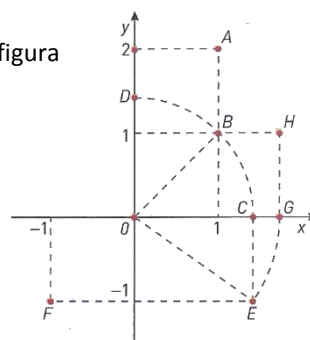
De uma forma geral, sendo P um ponto com coordenadas (a, b) com a e b reais temos:

- O simétrico de P relativamente ao eixo Ox tem como coordenadas (a, -b).
- O simétrico de P relativamente ao eixo Oy tem como coordenadas (-a, b).
- O simétrico de P relativamente à origem tem como coordenadas (-a, -b).



Exercício:

21. Considere a figura



21.1. Identifique as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H.

21.2. Indique as coordenadas do ponto simétrico

- a G relativamente ao eixo Oy .
- a E relativamente à origem do referencial.
- a B relativamente ao eixo Ox .

RECTAS PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS // BISSECTRIZES // SEMIPLANOS

Rectas horizontais	Rectas verticais	Bissectrizes dos quadrantes
A equação de uma recta horizontal é do tipo $y = b$. O eixo Ox tem equação $y = 0$.	A equação de uma recta vertical é do tipo $x = a$. O eixo Oy tem equação $x = 0$.	Bissectriz dos quadrantes ímpares: $y = x$ Bissectriz dos quadrantes pares: $y = -x$

Semiplanos: Uma recta divide o plano em dois semiplanos.

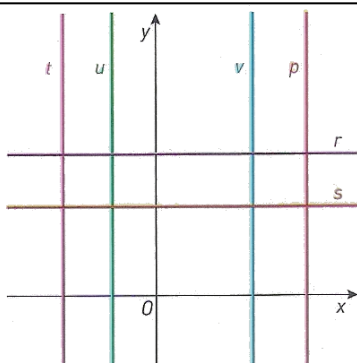
O semiplano sombreado na figura representa-se pela condição: $x \leq 1$	O semiplano sombreado na figura representa-se pela condição: $y > 3$	O semiplano sombreado corresponde ao conjunto de pontos do plano que têm ordenada menor do que abcissa. Pode por isso ser representado pela condição: $y < x$
Trata-se de um semiplano fechado porque a recta-limite também pertence ao semiplano.	Trata-se de um semiplano aberto porque a recta-limite não pertence ao semiplano.	

Exercícios:

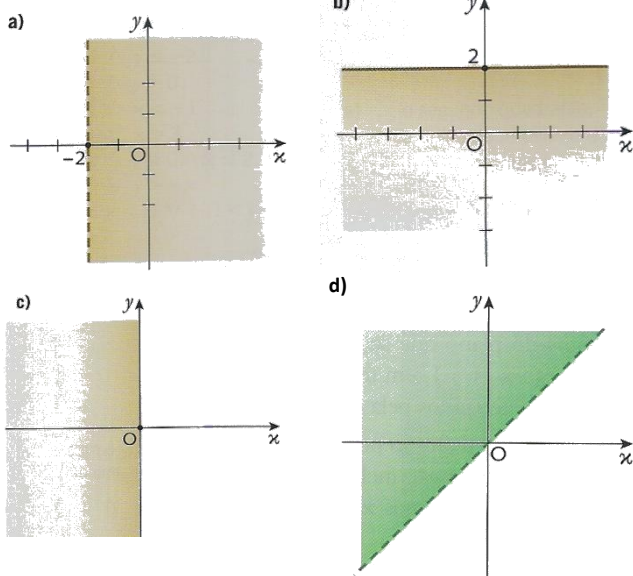
22. Observe a figura.

Corresponda cada uma das rectas a uma equação:

____ : $x = 2$ ____ : $x = \pi$
 ____ : $y = 2$ ____ : $x = -2$
 ____ : $y = 0$ ____ : $x = -1$
 ____ : $y = \pi$ ____ : $x = 0$



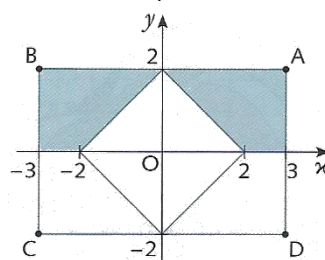
23. Escreva uma condição, em $\mathbb{R}^2$, que defina cada um dos semiplanos seguintes:



24. Considere o ponto $F(-4, 2)$. Escreva uma equação da recta que passa por F e é:

24.1. paralela ao eixo Ox .
24.2. paralela ao eixo Oy .

25. No referencial estão representados um rectângulo e um quadrado.



25.1. Indique as coordenadas dos vértices do rectângulo.

25.2. Qual é o simétrico de C em relação ao eixo das ordenadas?

25.3. Calcule a área sombreada.

26. Quanto ao quadrado [ABCD], sabe-se que o ponto A tem como coordenadas $(-2, 1)$ e que os seus vértices são simétricos, dois a dois, relativamente à origem do referencial. Represente o quadrado [ABCD] num referencial e indique as coordenadas dos outros vértices.

27. Indique o simétrico do ponto A de coordenadas $(-1, 4)$ relativamente à recta de equação:

27.1. $x = 3$ **27.2.** $y = 0$

28. Indique uma equação da recta...

28.1. ...paralela ao eixo das abcissas e que passa por $A(2, 5)$.

28.2. ...que passa por $B(3, -1)$ e é perpendicular à recta de equação $y = 4$.

28.3. ...CD em que $C(3, -2)$ e $D(1, -2)$

29. Represente o conjunto dos pontos do plano definidos por:

29.1. $x > 3$ **29.2.** $y \leq 0$

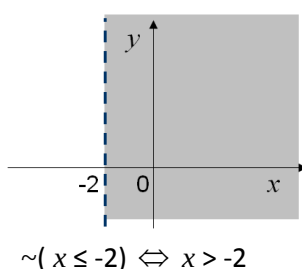
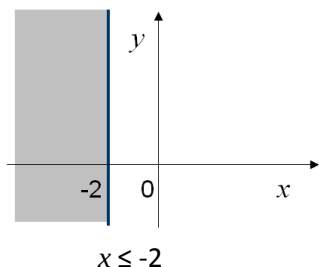
29.3. $y + x < 0$ **29.4.** $x \geq \frac{3}{2}$

▪ NEGAÇÃO, CONJUNÇÃO E DISJUNÇÃO DE CONDIÇÕES

Negação

Consideremos a condição $x \leq -2$.

A negação desta condição ou a condição contrária é $x > -2$.

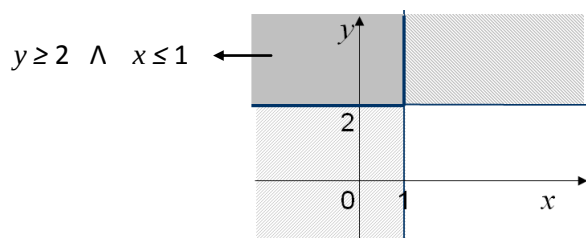


O símbolo “ $\sim$ ” lê-se “*negação de*”, e representa a operação lógica **negação** de uma condição.

Conjunção

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ as condições: $x \leq 1$; $y \geq 2$

A intersecção dos dois semiplanos é definida pela conjunção das condições que os definem.

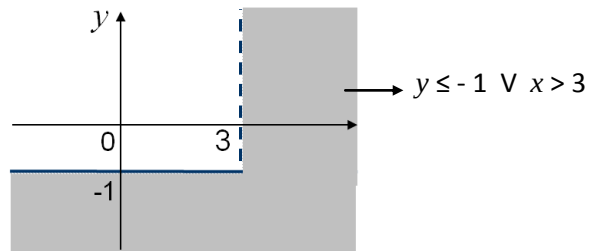


O símbolo “ $\wedge$ ” lê-se “*e*”, e representa a operação lógica **conjunção** de duas condições.

Disjunção

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ as condições: $y \leq -1$; $x > 3$

A reunião dos dois semiplanos é definida pela disjunção das condições que os definem.



O símbolo “ $\vee$ ” lê-se “*ou*”, e representa a operação lógica **disjunção** de duas condições.

Exercícios:

30. Represente o conjunto dos pontos do plano definidos por:

30.1. $\sim(y < -4)$

30.2. $x < 3 \wedge y \leq -2$

30.3. $x > 1 \wedge x < -1$

30.4. $x > 1 \vee x > 3$

30.5. $y \leq x \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 2$

30.6. $x < 0 \vee y > -x$

30.7. $(-1 < x < 1) \vee (-1 < y < 1)$

30.8. $|x| \leq 2$

30.9. $|y| > 3$

31. Escreva uma condição, em $\mathbb{R}^2$, que defina...

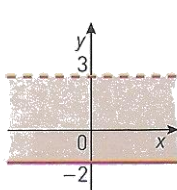
31.1. ...o segundo quadrante.

31.2. ...o quarto quadrante.

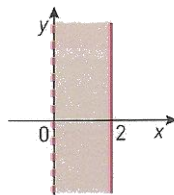
31.3. ...a união do terceiro e do quarto quadrante.

32. Defina através de uma condição o conjunto de pontos assinalados no referencial:

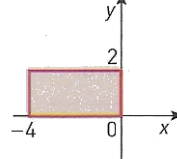
32.1.



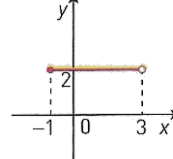
32.2.



32.3.



32.4.



33. Considere o conjunto:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -3 \wedge y \geq 4 \}$$

33.1. Represente o conjunto A num referencial.

33.2. Dê um exemplo de um ponto que:

a) pertença ao conjunto A.

b) não pertença a A.

c) pertença a A e à bissetriz dos quadrantes pares.

d) pertença à bissetriz dos quadrantes pares mas não pertença a A.

e) pertença ao 2º quadrante e a A.

34. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que:

34.1. O ponto $L(a - 1, 6)$ pertença à:

a) recta $x = 3$.

b) bissetriz dos quadrantes ímpares.

34.2. O ponto $M(a, a^2)$ pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

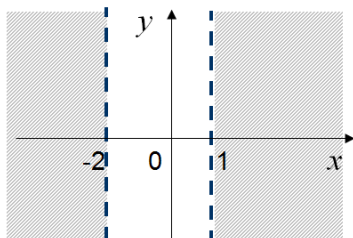
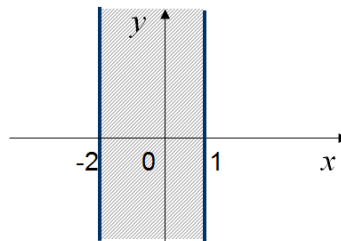
35. Escreva, uma condição em $\mathbb{R}^2$ que defina um quadrado de lado 2 em que dois dos vértices opostos têm como coordenadas $(1, -2)$ e $(3, 0)$.

LEIS DE MORGAN

Considere o domínio plano representado na figura.

Este domínio pode ser definido pela conjunção de duas condições:

$$x \geq -2 \wedge x \leq 1$$



A representação geométrica do conjunto de pontos que não fazem parte do domínio plano dado é a representada na figura ao lado.

Este domínio pode ser definido pela disjunção de duas condições:

$$x < -2 \vee x > 1$$

Comparando as duas situações, conclui-se que:

$$\sim(x \geq -2 \wedge x \leq 1) = x < -2 \vee x > 1$$

$$\sim(x < -2 \vee x > 1) = x \geq -2 \wedge x \leq 1$$

Nota Histórica:

Augustus de Morgan
(1806-1871)



Matemático inglês nascido na Índia onde o pai foi oficial. Foi professor na Universidade de Londres, onde evidenciou grande capacidade de ensino e de investigação. Gostava de enigmas, alguns dos quais reunidos pela viúva Sophia Elizabeth De Morgan no livro *Budget of Paradoxes*, publicado em 1882.

Quadro Resumo:

Num dado universo, são dadas duas condições $a(x)$ e $b(x)$, sendo A e B os respectivos conjuntos solução.

Condição	Conjunto solução
$a(x)$	A
$b(x)$	B
$a(x) \wedge b(x)$ (conjunção)	$A \cap B$
$a(x) \vee b(x)$ (disjunção)	$A \cup B$
$\sim a(x)$	$\bar{A}$ (complementar)
$\sim b(x)$	$\bar{B}$ (complementar)

Leis de De Morgan

$$\sim(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow \sim(a(x)) \vee \sim(b(x))$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\sim(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow \sim(a(x)) \wedge \sim(b(x))$$

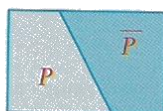
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Nota: $\bar{P}$ é o complementar de P .

$\bar{P}$ é formado por todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que não pertencem a P .

$$P \cap \bar{P} = \emptyset$$

$$P \cup \bar{P} = \mathbb{R}^2$$



Exercícios:

36. Sem utilizar o símbolo $\sim$, escreva as condições equivalentes a:

36.1. $\sim(x \geq 3)$ 36.2. $\sim(y < 1)$

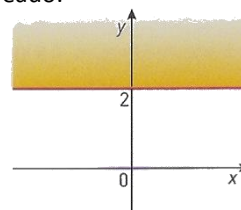
36.3. $\sim(x \leq 3 \wedge x \geq 2)$

36.4. $\sim(x > 7 \vee x \leq 5)$

36.5. $\sim(x \geq 2 \wedge y \leq 5)$

36.6. $\sim(x \geq -1 \wedge y \leq 3)$

37. Considere a região representada a sombreado:



Das seguintes condições, indique a que a define:

(A) $|y| \geq 2$ (B) $|y| > 2$

(C) $\sim(y < 2)$ (D) $\sim(y \leq 2)$

38. O conjunto de pontos definido pela condição

$$\sim(y > x \vee y < 0) \wedge x \leq 2 \text{ é:}$$

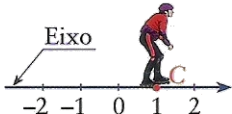
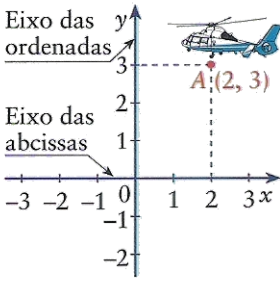
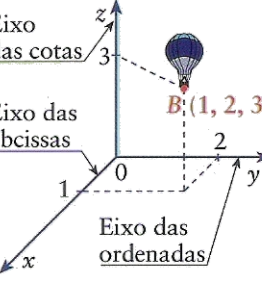
(A) um retângulo.

(B) um quadrado.

(C) um triângulo.

(D) um paralelogramo não retângulo.

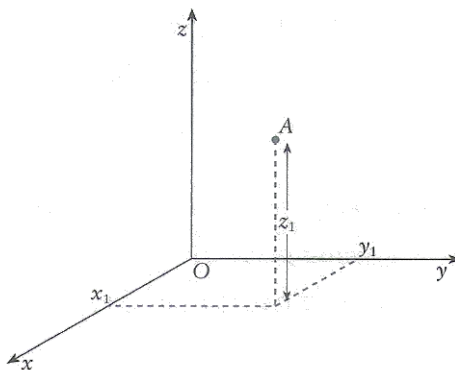
REFERENCIAIS CARTESIANOS NO ESPAÇO. COORDENADAS DE PONTOS

 Eixo	 Eixo das ordenadas Eixo das abscissas	 Eixo das cotas Eixo das abscissas Eixo das ordenadas
Num eixo um ponto fica definido conhecida a sua abscissa. $C \rightarrow 1$	No plano um ponto fica definido conhecidas as suas coordenadas: abscissa e ordenada. $A \rightarrow (2, 3)$	No espaço um ponto fica definido conhecidas as suas coordenadas: abscissa, ordenada e cota. $B \rightarrow (1, 2, 3)$

No espaço, um ponto é representado por três coordenadas.

$A \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 abscissa ordenada cota

Ox – eixo das abscissas
 Oy – eixo das ordenadas
 Oz – eixo das cotas

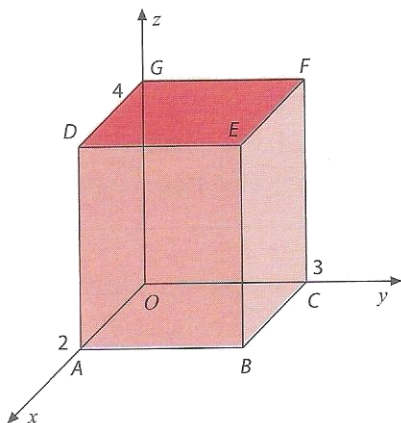


Os três eixos são perpendiculares dois a dois e considera-se a mesma unidade de comprimento para os três.

Existe uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}^3$ (conjunto dos ternos ordenados de elementos em $\mathbb{R}$) e o conjunto dos pontos do espaço.

Exemplo:

Considere o paralelepípedo representado na figura e indique as coordenadas dos vértices.

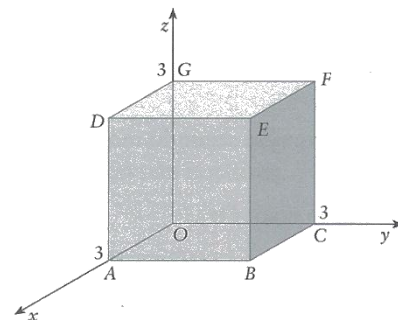


Resolução:

- A (2, 0, 0)
- B (2, 3, 0)
- C (0, 3, 0)
- D (2, 0, 4)
- E (2, 3, 4)
- F (0, 3, 4)
- G (0, 0, 4)

Exercícios:

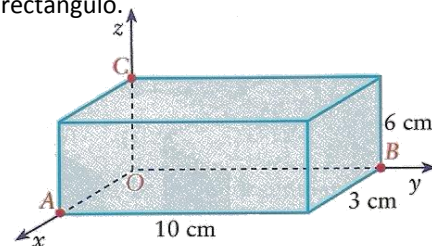
39. Indique as coordenadas dos vértices do cubo representado.



40. Indique o eixo a que pertence o ponto:

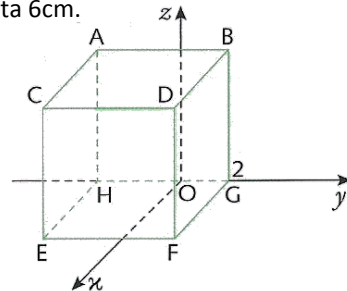
- 40.1. M (0, 3, 0) 40.2. N (0, 0, 5)
- 40.3. R (-3, 0, 0) 40.4. P (0, -10, 0)

41. A figura representa uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo.



Indique as coordenadas dos pontos A, B e C.

42. A figura representada é um cubo de aresta 6cm.



Indique as coordenadas dos vértices.

43. Uma aresta de paralelepípedo tem por extremos os pontos (0, 0, 0) e (3, 0, 0). Outra das arestas tem extremos em (0, 0, 0) e (0, 5, 0) e uma terceira aresta tem (0, 0, 0) e (0, 0, 2) os extremos.

Faça um esboço do sólido e indique as coordenadas dos outros 4 vértices do paralelepípedo.

PLANOS COORDENADOS. PLANOS PERPENDICULARES AOS EIXOS COORDENADOS

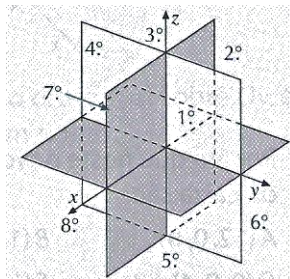
Planos Coordenados

Num referencial $Oxyz$ do espaço, os eixos Ox , Oy , e Oz definem dois a dois três planos.

O plano xOy é formado por todos os pontos de cota nula. É definido pela condição: $z = 0$	O plano xOz é formado por todos os pontos de ordenada nula. É definido pela condição: $y = 0$	O plano yOz é formado por todos os pontos de abscissa nula. É definido pela condição: $x = 0$

Assim, xOy , yOz e xOz são os planos coordenados.

Os planos coordenados dividem os espaço em oito partes chamadas octantes.



Planos Perpendiculares aos Eixos Coordenados

Se um plano α é perpendicular ao eixo Oz , então todos os pontos de α têm a mesma cota.	Se um plano β é perpendicular ao eixo Oy , então todos os pontos de β têm a mesma ordenada.	Se um plano φ é perpendicular ao eixo Ox , então todos os pontos de φ têm a mesma abscissa.
O plano α é definido pela condição: $z = c$, $c \in \mathbb{R}$	O plano β é definido pela condição: $y = b$, $b \in \mathbb{R}$	O plano φ é definido pela condição: $x = a$, $a \in \mathbb{R}$

Exercícios:

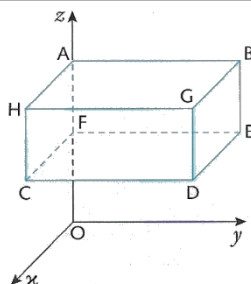
46. Sobre o sólido representado sabe-se que:

$\overline{AB} = 7$; $\overline{DE} = 4$; $\overline{BE} = 3$ e $A(0, 0, 7)$.

46.1. Indique as coordenadas dos outros vértices do prisma.

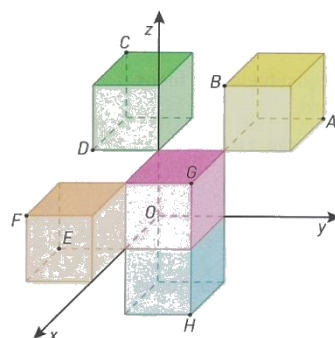
46.2. Escreva uma condição que defina o plano:

a) AHC b) CDE c) GBE d) HGD



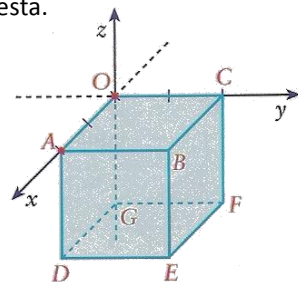
Exercícios:

44. Na figura estão representados 5 cubos de 1cm de aresta.



Indique as coordenadas dos pontos assinalados e o octante a que pertencem.

45. Considere o cubo $[ABCDEFGO]$ com 2cm de aresta.



Indique as coordenadas dos vértices e se pertencem a algum plano coordenado.

▪ OUTROS LUGARES GEOMÉTRICOS NO ESPAÇO

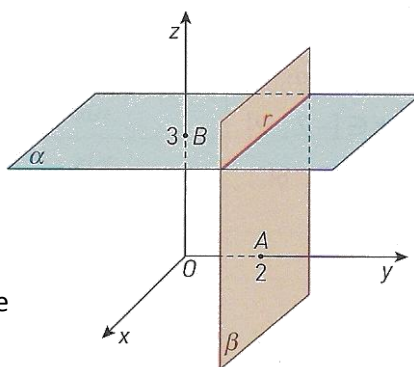
Recta

Na figura, em referencial o.m. $Oxyz$, estão representados dois planos α e β .

O plano α é definido pela condição $z = 3$.

O plano β é definido pela condição $y = 2$.

A recta r é a intersecção dos planos α e β e é definida pela condição $y=2 \wedge z=3$.



Segmento de Recta

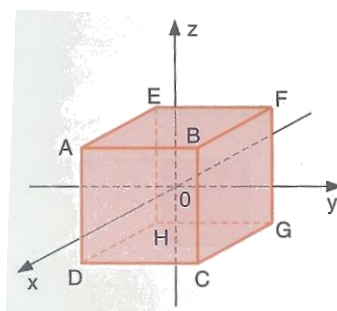
Considere o cubo de 4cm de aresta centrado na origem do referencial.

A recta FG pode ser definida pela condição:

$$x = -2 \wedge y = 2$$

A aresta [FG] está contida na recta quando a cota está compreendida entre -2 e 2.

Podemos então definir a aresta [FG] pela condição: $(x = -2 \wedge y = 2) \wedge -2 \leq z \leq 2$



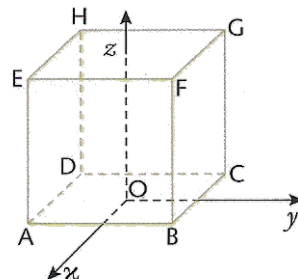
Os pontos do cubo têm abcissa, ordenada e cota compreendidas entre -2 e 2.

Podemos, por isso definir o cubo, neste referencial, pela condição:

$$-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq z \leq 2$$

Exercício:

48. Na figura está representado o cubo [ABCDEFGH] com 8cm de aresta e em que O é o centro da face inferior.



48.1. Indique as coordenadas dos vértices.

48.2. Escreva uma condição que define o plano:

a) ADC b) HDC c) EHD

48.3. Indique uma condição em $\mathbb{R}^3$ que define:

a) a recta FG. b) a aresta [AB].
c) a aresta [HD]. d) a face [HEFG].
e) a face [FGCB]. f) a recta AD.
g) a face [HGCD]. h) o cubo.

▪ SIMETRIAS NO ESPAÇO

As simetrias no espaço podem ser estudadas de modo análogo ao estudo feito para as simetrias no quadro da geometria plana.

Simetrias relativamente aos eixos coordenados, planos coordenados e origem do referencial.

Considere a figura seguinte. O paralelepípedo é simétrico relativamente aos planos coordenados.

O vértice P tem coordenadas (1, 2, 3).

Podemos dizer que:

A(1, -2, -3) é simétrico de P em relação ao eixo Ox .

C(-1, 2, -3) é simétrico de P em relação ao eixo Oy .

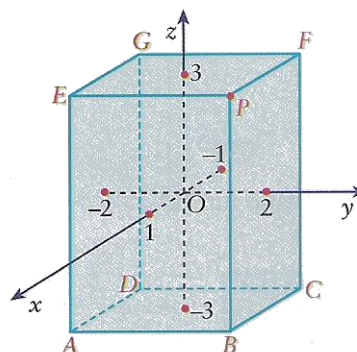
G(-1, -2, 3) é simétrico de P em relação ao eixo Oz .

D(-1, -2, -3) é simétrico de P em relação à origem O .

B(1, 2, -3) é simétrico de P em relação ao plano xOy .

E(1, -2, 3) é simétrico de P em relação ao plano xOz .

F(-1, 2, 3) é simétrico de P em relação ao plano yOz .



Exercícios:

49. Considere o cubo no exercício 45.

Indique as coordenadas do ponto simétrico de B relativamente...

49.1. ...ao plano yOz .

49.2. ...à origem O .

49.3. ...ao eixo Ox .

49.4. ...ao plano xOy .

50. Sendo P um ponto de coordenadas (3, -1, 5) identifique o simétrico de P relativamente...

50.1. ...ao plano yOz .

50.2. ...à origem O .

50.3. ...ao eixo Ox .

50.4. ...ao eixo Oy .

50.5. ...ao eixo Oz .

50.6. ...ao plano xOz .

Exercícios:

51. Na figura está representado num referencial o.m. $Oxyz$ um octaedro regular [ABCDEF].

Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao plano xOz .
- O ponto E tem coordenadas $(2, 2, 0)$.
- O ponto F tem coordenadas $(2, 2, 4)$.

51.1. A equação do plano ABC é:

- (A) $x=2$ (B) $y=2$
(C) $z=2$ (D) $z=1$

51.2. As coordenadas do ponto C são:

- (A) $(2, 4, 2)$ (B) $(4, 2, 2)$ (C) $(2, 2, 4)$ (D) $(4, 4, 2)$

52. Num referencial o.m. $Oxyz$ no espaço, a recta que passa pelos pontos $A(2, 0, 1)$ e $B(2, 3, 1)$ é definida pela condição:

- (A) $z=1$ (B) $y=0 \vee y=3$ (C) $x=2$ (D) $x=2 \wedge z=1$

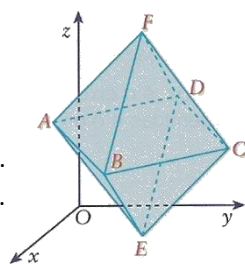
53. Num referencial o.m. $Oxyz$ no espaço o conjunto de pontos definidos pela condição

$$x = 11 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

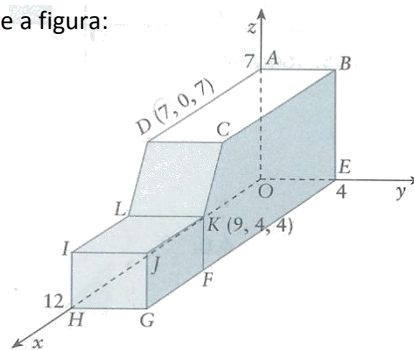
- é: (A) um rectângulo. (B) um paralelepípedo.
(C) um segmento de recta. (D) um ponto.

54. Num referencial o.m. $Oxyz$ no espaço, o simétrico do ponto $P(3, 4, 5)$ relativamente ao eixo Oz é:

- (A) $(3, 4, 5)$ (B) $(-3, -4, -5)$ (C) $(-3, -4, 5)$ (D) $(3, -4, -5)$



55. Observe a figura:



55.1. Indique as coordenadas dos vértices do sólido.

55.2. Escreva uma equação dos planos que contêm as faces:

- a) [IJKL] b) [CBEF] c) [IJGH]

55.3. Diga, de acordo com os dados da figura, qual é a recta de intersecção dos planos α e β de equações:

- a) $\alpha: z=7$ e $\beta: y=0$ b) $\alpha: z=0$ e $\beta: x=0$

56. Faça um esboço e descreva o conjunto de pontos do espaço que satisfaz cada uma das condições:

- 56.1.** $z=2$
56.2. $x=2 \wedge y < -3$
56.3. $x=-3 \wedge z=0$
56.4. $y=0 \wedge x=0$
56.5. $x=4 \wedge y=0$
56.6. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0$
56.7. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z=0$
56.8. $0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1$

▪ DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO E NO ESPAÇO

No plano

Exemplo:

Calcular a distância do ponto A ao ponto C é o mesmo que calcular $\overline{AC}$.

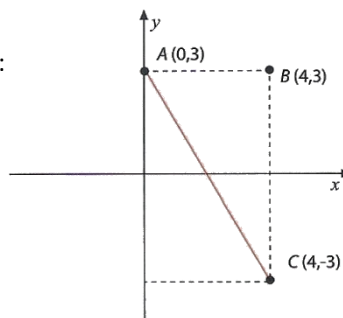
Usando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC}^2 = (4-0)^2 + (3+3)^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-3)^2}$$

$$\begin{matrix} \nearrow & \nwarrow \\ A(0, 3) & C(4, -3) \end{matrix}$$



De uma forma geral:

A distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

No espaço

Exemplo:

Calcular a distância do ponto A ao ponto F é o mesmo que calcular $\overline{AF}$.

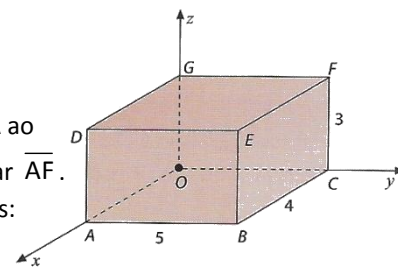
Usando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\overline{AF}^2 = (4-0)^2 + (5-0)^2 + (3-0)^2$$

$$\overline{AF} = \sqrt{(4-0)^2 + (5-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nwarrow \\ A(4, 0, 0) & & F(0, 5, 3) \end{matrix}$$



De uma forma geral:

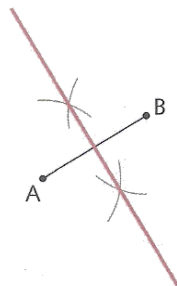
A distância entre dois pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

▪ MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO DE RECTA / PLANO MEDIADOR

Mediatriz

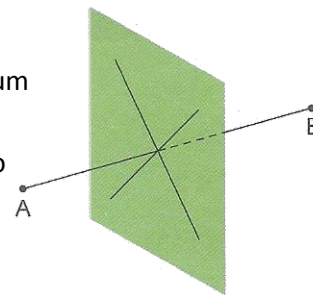
Chama-se mediatriz de um segmento de recta [AB] ao conjunto dos pontos equidistantes de A e B.



$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

Plano Mediador

Chama-se plano mediador de um segmento de recta [AB] ao conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A e B.



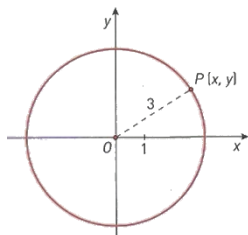
$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2$$

▪ CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO / SUPERFÍCIE ESFÉRICA E ESFERA

Circunferência

Exemplo:

A circunferência é o conjunto de pontos que estão a uma distância de 3 unidades da origem.

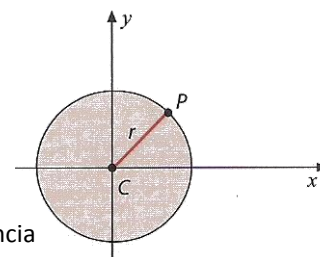


Uma circunferência de centro (a, b) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Círculo

O círculo é o conjunto de pontos que estão a uma distância máxima de r unidades da origem.



Um círculo de centro (a, b) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

Analogamente à circunferência e ao círculo, pode-se definir:

M.A.(4)

Superfície Esférica

Uma superfície esférica de centro (a, b, c) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Esfera

Uma esfera de centro (a, b, c) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2$$

Exercícios:

57. Determine o comprimento do segmento [AB] para:

57.1. A(0, 2) B(3, 2) 57.2. A(-1, 4) B(3, -1)

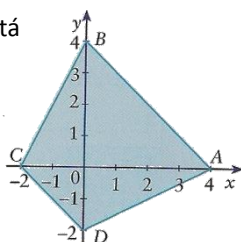
57.3. A(0, -2, 0) B(2, -3, 5)

58. No referencial o. m. Oxy está representado um quadrilátero.

Calcule o valor exacto do perímetro:

58.1. do triângulo [ABD].

58.2. do quadrilátero [ABCD].



59. Classifique, quanto ao comprimento dos lados o triângulo [MAR], sendo:

M(-2, 1) A(5, 1) R(5, 4)

60. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo. O vértice C é também a origem do referencial.

Sabe-se que: $\overline{AB} = 1,5\text{cm}$; $\overline{BC} = 2\text{cm}$; $\overline{CG} = 5\text{cm}$

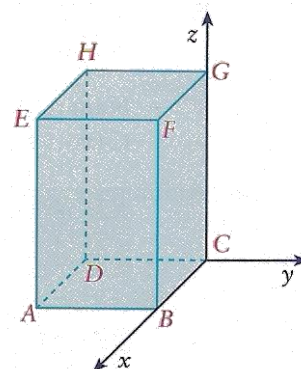
60.1. Indique as coordenadas dos vértices do sólido.

60.2. Usando as coordenadas dos vértices, calcule, apresentando o valor exacto:

a) $\overline{GA}$ b) $\overline{EC}$ c) $\overline{ED}$ d) $\overline{FA}$

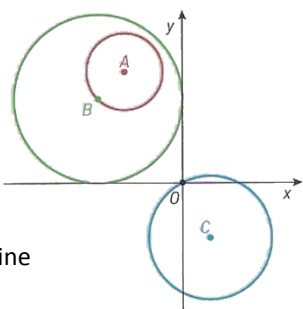
60.3. Escreva a equação para o plano mediador das arestas:

a) [DA] b) [AB] c) [HG]
d) [FA] e) [EG] f) [BE]



Exercícios:

61. No referencial xOy da figura estão representadas três circunferências centradas em $A(-2, 4)$, $B(-3, 3)$ e $C(1, -2)$.



61.1. Determine o raio de cada uma das circunferências.

61.2. Escreva a equação que define cada uma das circunferências.

62. Considere a circunferência definida pela equação:

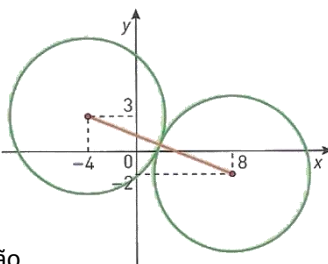
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9 \text{ e os pontos } A(-2, 4); B(-4, -1) \text{ e } C(-5, 0).$$

62.1. Determine a posição de cada um dos pontos relativamente à circunferência.

62.2. Indique uma equação que defina a circunferência de centro C e que passa por A .

62.3. Represente num referencial a circunferência dada.

63. No referencial da figura encontram-se representadas duas circunferências de igual raio, tangentes e centradas nos pontos: $A(-4, 3)$ $B(8, -2)$. Represente cada uma das circunferências por uma equação.



64. Represente, num referencial cartesiano, as seguintes condições:

64.1. $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$ **64.2.** $(x+1)^2 + (y-4)^2 < 9$

64.3. $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq -x$

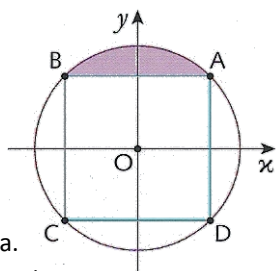
65. No referencial está representado um quadrado com 4cm de lado cujo centro é a origem do referencial.

65.1. Determine a equação da mediatriz de $[OB]$.

65.2. Escreva uma equação da circunferência representada na figura.

65.3. Indique uma condição que defina a região do plano sombreada.

65.4. Calcule a área da zona sombreada.



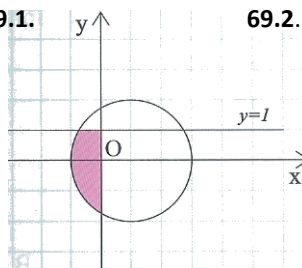
66. Identifique a secção que se obtém intersectando a esfera definida por: $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9$ com o plano $y = 3$.

67. Escreva uma condição que defina a esfera de centro C de coordenadas $(0, 2, 0)$ tangente ao plano $z = 4$.

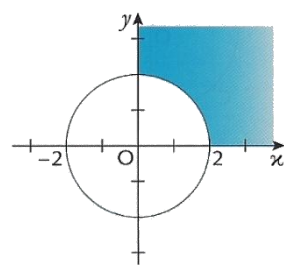
68. Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da superfície esférica de centro $C(-3, 2, 0)$ e raio 5 com o eixo Oy .

69. Represente, utilizando uma condição em $\mathbb{R}^2$, a região a sombreado de cada alínea.

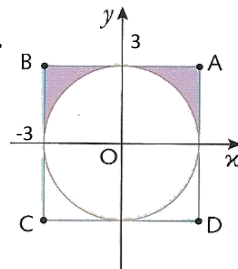
69.1.



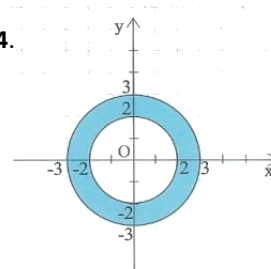
69.2.



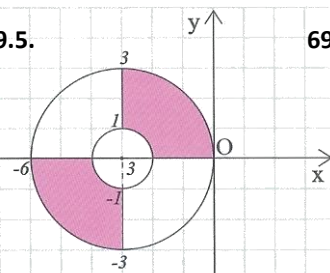
69.3.



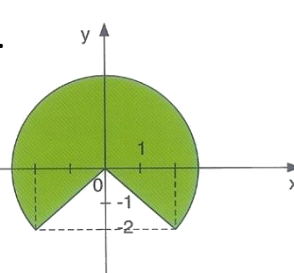
69.4.



69.5.



69.6.



70. Na figura estão representadas duas circunferências.

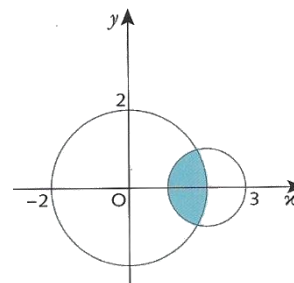
A região sombreada pode ser definida por:

(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge (x+2)^2 + y^2 \leq 1$

(B) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \vee (x-2)^2 + y^2 \leq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 1$



71. Num referencial $Oxyz$, a condição $(x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2 \leq 16$ define uma esfera inscrita num cilindro. Sejam C o centro da esfera e h a altura do cilindro. Então:

(A) $C(-2, 0, 3)$ e $h = 4$

(B) $C(2, 0, -3)$ e $h = 4$

(C) $C(2, 0, -3)$ e $h = 8$

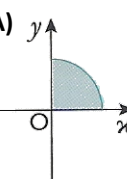
(D) $C(-2, 0, 3)$ e $h = 8$

72. O conjunto de pontos definido pela condição

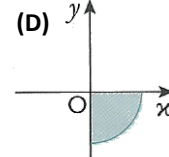
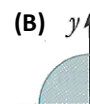
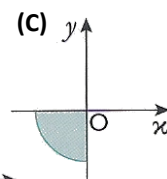
$$x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0$$

pode ser representado num referencial por:

(A)



(C)

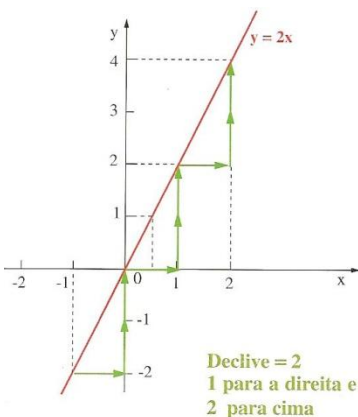


EQUAÇÃO REDUZIDA DA RECTA NO PLANO // CONJUNTOS DEFINIDOS POR CONDIÇÕES

▪ EQUAÇÃO REDUZIDA DA RECTA

Observando a recta r representada na figura, constatamos que a ordenada de cada um dos seus pontos é o dobro da abcissa respectiva, isto é, para qualquer ponto de coordenadas (x, y) , verifica-se que $y = 2x$.

Qual o significado do número 2?

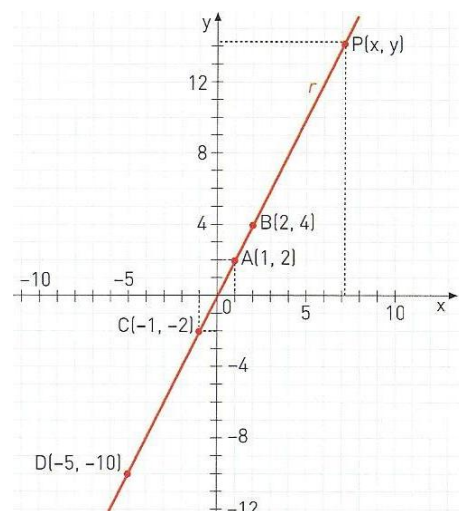


Observando a figura ao lado verificamos que ao avançar uma unidade no eixo xx a sua imagem aumenta 2 unidades.

Calculando o quociente

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Este quociente que não depende dos pontos da recta para o calcular, designa-se por declive da recta r e representa-se por m . O declive informa-nos sobre a inclinação da recta em relação ao eixo das abcissas.



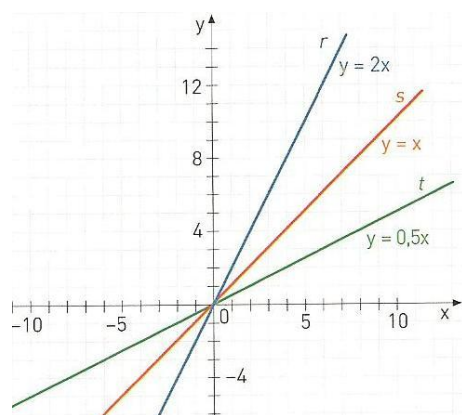
Podemos calcular o declive de uma recta utilizando dois dos seus pontos, por exemplo consideremos o ponto $A(1, 2)$ e $D(-5, -10)$.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 + 10}{1 + 5} = \frac{12}{6} = 2$$

Dados dois quaisquer pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma recta não vertical chama-se declive da recta AB ao quociente:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Qual é o significado geométrico do declive?



Tomando como referência a recta s e o seu declive 1, verificamos que o declive da recta r é maior, sendo também maior a sua inclinação, em relação ao eixo das abcissas.

Quanto à recta t , o seu declive é 0,5, e, portanto, menor que o da recta s , assim como é menor a sua inclinação, em relação ao eixo das abcissas.

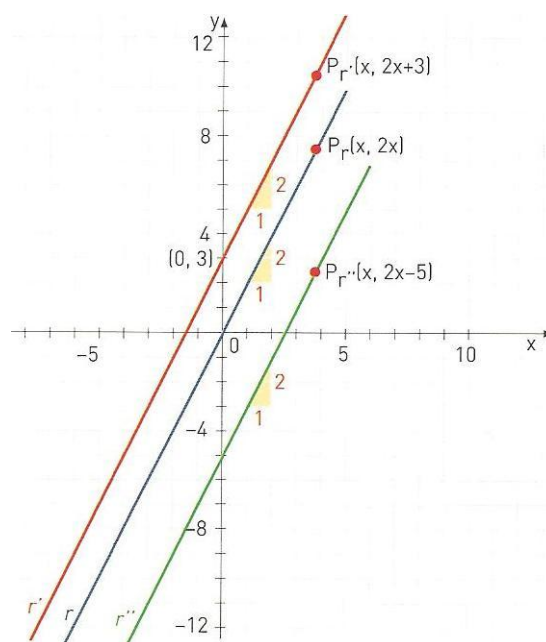
Acrescentemos agora duas rectas ao referencial, r' e r'' :

Como verificamos a inclinação mantém-se para as duas novas rectas, no entanto, existe uma alteração na ordenada na origem (representada por b) que corresponde à deslocação que ocorreu de r para r' (3 unidades para cima) e r para r'' (5 unidades para baixo).

Este valor influencia a equação da recta:

$$r': y = 2x + 3$$

$$r'': y = 2x - 5$$



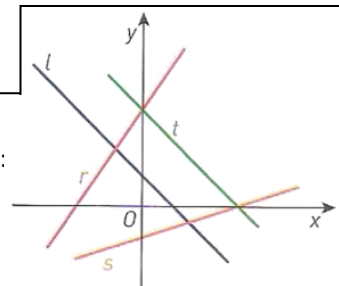
Verifica-se que as equações destas rectas são todas do tipo $y = mx + b$, tal como acontece com todas as rectas não verticais.

m corresponde ao valor do **declive da recta** e o valor de b é a ordenada do ponto de intersecção da recta com o eixo das ordenadas, chamada de **ordenada na origem**.

Chama-se **equação reduzida** de uma recta não vertical, à equação do tipo:

$$y = mx + b$$

onde m é o declive da recta e b é a ordenada na origem.



Exercícios

73. Investigue qual o declive das:

73.1. rectas horizontais.

73.2. rectas verticais.

73.3. bissectrizes dos quadrantes.

74. Considere as rectas representadas.

Faça corresponder a cada recta uma das seguintes opções:

I. $y = -x + 1$

II. $y = -x + 3$

III. $y = \frac{1}{3}x - 1$

IV. $y = \frac{3}{2}x + 3$

75. Considere as rectas r , s e t , cujas equações reduzidas são:

$r: y = 3x - 2$ $s: y = 4x - 2$ $t: y = 3x + 1$

Relativamente a cada uma delas, indique:

75.1. o declive. **75.2.** a ordenada na origem.

76. Em relação a um referencial o. n. xOy considere os pontos $A(2, 2)$, $B(-3, 0)$ e $C(1, 4)$.

76.1. Determine a equação reduzida da recta:

a) AB **b)** AC **c)** BC

76.2. A recta r tem declive -3 e passa no ponto A . Determine a equação da recta r .

76.3. A recta s tem ordenada na origem 4 e passa no ponto B . Determine a equação reduzida da recta s .

77. Determine a equação reduzida da recta...

a) ... de declive 2 e que passa no ponto $(0, -3)$.

c) ... PQ em que $P(2, 4)$ e $Q(1, 2)$.

78. Represente num referencial a recta de equação $y = -x + 3$.

79. Verifique se o ponto $A(-1, 2)$ pertence à recta de equação:

79.1. $y = -3x + 8$

79.2. $y = -3x - 1$

79.3. $y = 2$

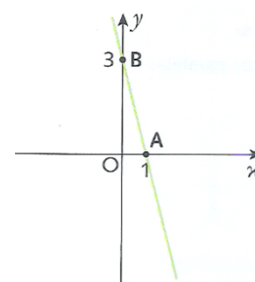
79.4. $x = -1$

80. Num referencial Oxy considere os pontos $A(4, 9)$, $C(7, 3)$, $F(3, 1.5)$ e $H(2, 9)$.

80.1. Qual o declive de AC.

80.2. Escreva as equações reduzidas das rectas AC, FO e HA.

81. Determine a equação reduzida da recta AB representada na figura.



▪ RELAÇÃO DE DECLIVES ENTRE RECTAS PARALELAS E RECTAS CONCORRENTES

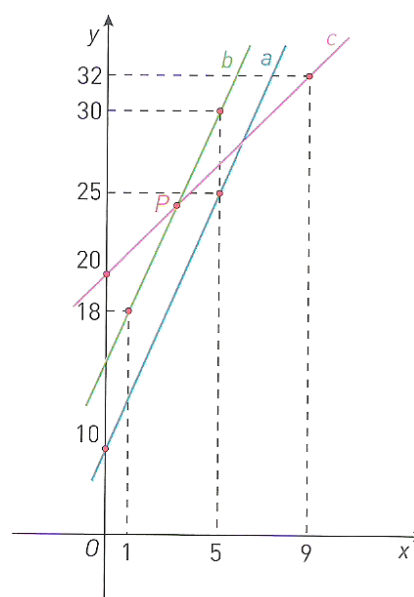
Considere as rectas a , b e c representadas no seguinte referencial:

As rectas a e b são paralelas, logo os seus vectores directores são colineares vejamos o que acontece aos seus declives:

$$m_a = \frac{25-10}{5-0} = \frac{15}{5} = 3 \quad m_b = \frac{30-18}{5-1} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{verificamos que: } m_a = m_b$$

As rectas a e b são paralelas porque têm o mesmo declive.

Não têm nenhum ponto em comum.



As rectas a e c são concorrentes, intersectando-se no ponto P.

$$m_a = 3, \quad m_c = \frac{32-20}{9-0} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \text{verificamos que: } m_a \neq m_c$$

As rectas a e c são concorrentes porque têm declives diferentes.

Têm nenhum ponto em comum.

Como determinar as coordenadas do ponto de intersecção das rectas a e c ?

O ponto em que duas rectas se intersectam é comum a elas. Assim, para determinar as coordenadas do ponto de intersecção, basta igualar as duas equações da recta:

$$a: y = 3x + 10 \quad c: y = \frac{4}{3}x + 20$$

$$\begin{cases} y = 3x + 10 \\ y = \frac{4}{3}x + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ 3x + 10 = \frac{4}{3}x + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ 9x + 30 = 4x + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ 5x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 28 \\ x = 6 \end{cases}$$

Coordenadas do ponto P: (6, 28)

Exercícios:

82. Determine as coordenadas do ponto de intersecção, caso exista, das seguintes rectas:

82.1. $y = 3x - 1$ e $y = -2x + 1$

82.2. $x + y = 2$ e $y = -x + 5$

82.3. $y = 2x - 4$ e $y = 3x - 1$

82.4. $y = x + 2$ e $y = 3x - 1$

Dadas duas rectas no plano, elas podem ser:

Paralelas:

> Estritamente paralelas : têm igual declive e diferentes ordenadas na origem.

> Coincidentes: têm o mesmo declive e iguais ordenadas na origem.

Concorrentes:

têm declives diferentes.

▪ CONJUNTOS DEFINIDOS POR CONDIÇÕES

Podemos, agora, definir por condições em $\mathbb{R}^2$ semiplanos determinados por rectas não paralelas aos eixos coordenados.

Exemplo 1:

O semiplano pintado é limitado pela recta de equação $y = -x + 1$.

Como os seus pontos se encontram a cima da recta e é um semiplano aberto, caracterizamo-lo pela condição:

$$y > -x + 1$$

O semiplano abaixo da recta representa-se pela condição:

$$y < -x + 1$$

Exemplo 2:

A região pintada é limitada pela recta de equação $y = -x + 1$ e pela circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

À semelhança do exemplo anterior, queremos os pontos se encontram a cima da recta:

$$y > -x + 1$$

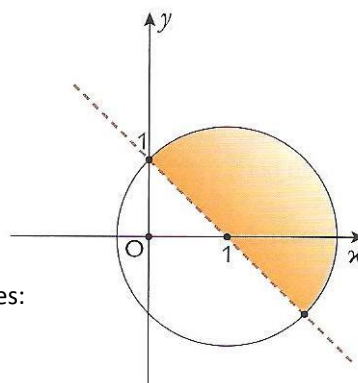
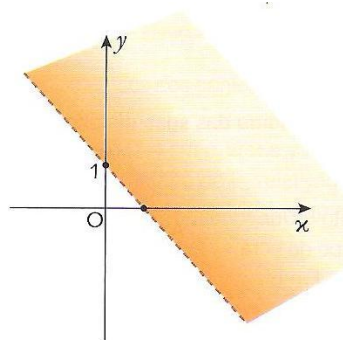
Relativamente à circunferência, interessam-nos os

pontos da circunferência e os que estão no seu interior:

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 2$$

A região sombreada resulta da conjunção destas duas condições:

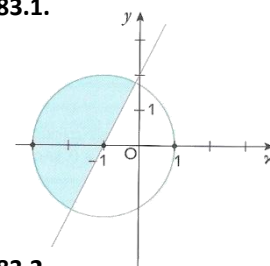
$$y > -x + 1 \quad \wedge \quad (x - 1)^2 + y^2 \leq 2$$



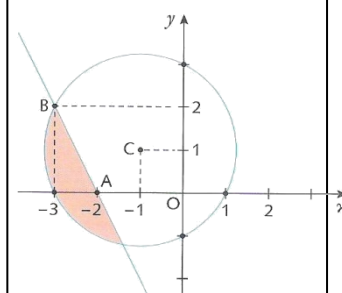
Exercício:

83. Defina analiticamente as regiões do plano representadas nas figuras:

83.1.



83.2.



Exercícios:

84. Escreva uma equação vectorial para cada uma das rectas apresentadas no exercício **105**.

84. Dos seguintes pares de rectas identifica as que são paralelas.

84.1. $r: y = -2x + 3$ $s: y = 2x - 3$

84.2. $r: 3x - y = 5$ $s: 2y = 6x + 1$

85. Considere os triângulos [ABC] e [PQR] representados.

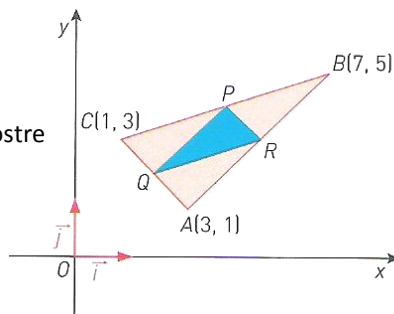
Os vértices do $\Delta[PQR]$ são os pontos médios dos lados do $\Delta[ABC]$.

Recorrendo aos declives, mostre que são paralelas as rectas:

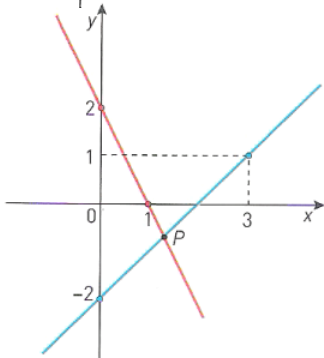
85.1. AB e PQ.

85.2. AC e PR.

85.3. BC e QR.



86. Atendendo aos dados da figura, determine as coordenadas do ponto P



87. Em relação a um referencial o. n. considere os pontos A(-1, 3) e B(2, 0).

87.1. Verifique se a recta AB é paralela à recta de equação $x + y - 2 = 0$

87.2. Determine k de modo que a recta de equação $2y - kx + 5 = 0$ seja paralela à recta AB.

88. Para os seguintes pares de equações da recta, indique as que são paralelas e as coordenadas do ponto de intersecção no caso de serem concorrentes.

88.1. $y = -x + 2$ e $2x + 2y - 3 = 0$

88.2. $2y = x$ e $2y + x = 1$

88.3. $x = 2$ e $x - y = 2$

88.4. $y = x$ e $\pi x - \pi y - 2 = 0$

89. Considere a família de rectas $y = mx + 2$.

Determine m de modo a obter uma recta que seja paralela à recta $2x - y = 1$.

90. Represente o conjunto de pontos do plano definido por:

90.1. $y > 2x + 4 \wedge y > 3$

90.2. $y > 3x \wedge y > 3x + 3$

90.3. $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y = \frac{2}{3}x$

90.4. $y < -x - 3 \wedge x > -5 \wedge y \geq 0$

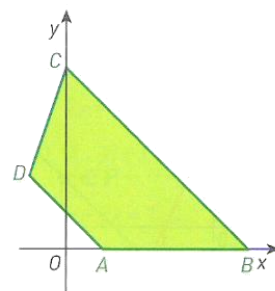
91. Na figura, em referencial o. n. xOy , está representado o trapézio [ABCD]:

Sabe-se que:

- o ponto B tem de coordenadas (5, 0)

- o ponto D tem de coordenadas (-1, 2)

- $y = -x + 1$ é a equação reduzida da recta AD



Determine:

91.1. as coordenadas do ponto A.

91.2. a equação da recta reduzida da recta BC.

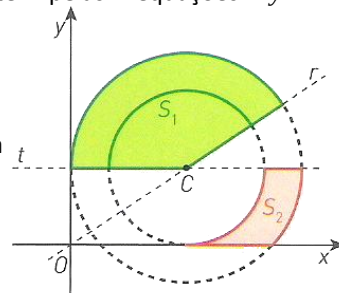
91.3. as coordenadas do ponto G.

91.4. a equação reduzida da recta CD.

91.5. uma condição que defina o conjunto de pontos do trapézio que têm abcissa negativa.

92. No referencial o. n. xOy da figura estão representadas duas circunferências de centro no ponto C, sendo tangente ao eixo Oy e outra tangente ao eixo Ox . as rectas r e t são definidas respectivamente pelas equações $y=2$ e $y = \frac{2}{3}x$.

Defina por uma condição a região sombreada na figura representada por:

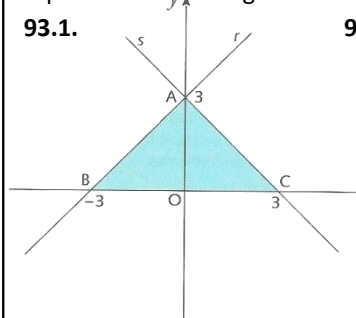


92.1. S_1

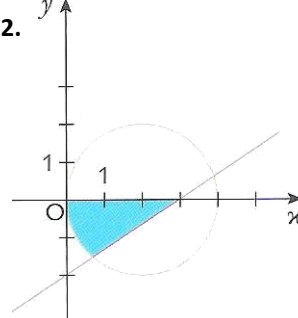
92.2. S_2

93. Defina analiticamente as regiões do plano representadas nas figuras:

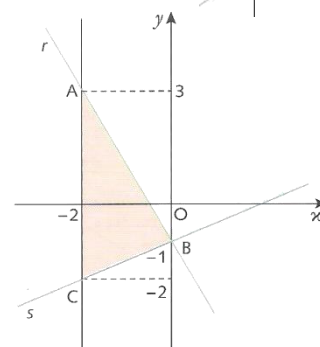
93.1.



93.2.



93.3.



TEMA 2

FUNÇÕES

INTRODUÇÃO

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes em matemática.

Referência Histórica

Desde o tempo dos babilónios (2000 a. C.) que se usam tabelas para representar a dependência entre duas variáveis.

Outras formas de usar funções foram experimentadas por Oresme (1323-1382) que utilizou o gráfico para representar numa direcção o tempo e, na outra direcção, a velocidade de um móvel.

Estas ideias que remontam ao século XIV evidenciam que os matemáticos do Ocidente tinham imaginação e rigor de pensamento; faltava-lhes, no entanto, os símbolos da álgebra, que surgiram com Viète, no final do século XVI.

Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) fizeram evoluir o conceito de função através da geometria analítica.

A utilização da simbologia algébrica veio revolucionar a matemática da época e contribuir de uma forma decisiva para a criação do conceito de função.

Leibniz (1646-1717) terá em 1673 introduzido pela primeira vez o termo “função” e Euler (1707-1783) terá utilizado pela primeira vez a expressão “ $f(x)$ ”.

O simbolismo algébrico foi aperfeiçoado por matemáticos dos séculos XVII e XVIII, entre os quais Descartes, Newton, Leibniz e Euler.



Descartes

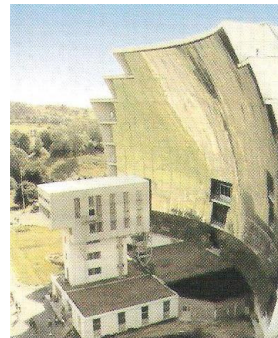


Euler



Leibniz

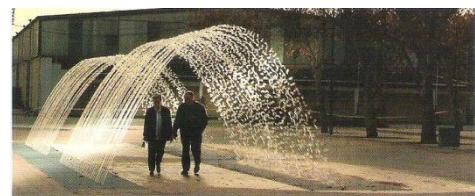
Há várias situações na vida real em que a configuração de arco de parábola, que corresponde ao gráfico da função quadrática, está presente.



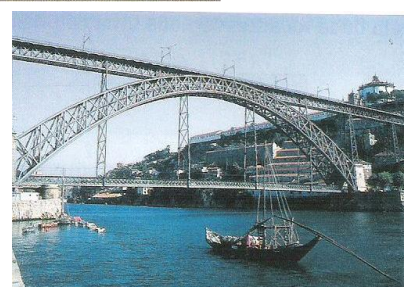
Four Solaire – Font Romeu



TVS – São Tomé



Parque das Nações
Lisboa



Ponte D. Luís - Porto

GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES

CONCEITO DE FUNÇÃO

Exemplo:

Suponhamos que um automóvel se desloca a uma velocidade constante de 60km/h.

Considerando e o espaço percorrido (em km) e t o tempo (em horas),

podemos deduzir a seguinte expressão: $e = 60t$

Atribuindo a t (objecto) valores, obtemos correspondentes valores de e (imagem).

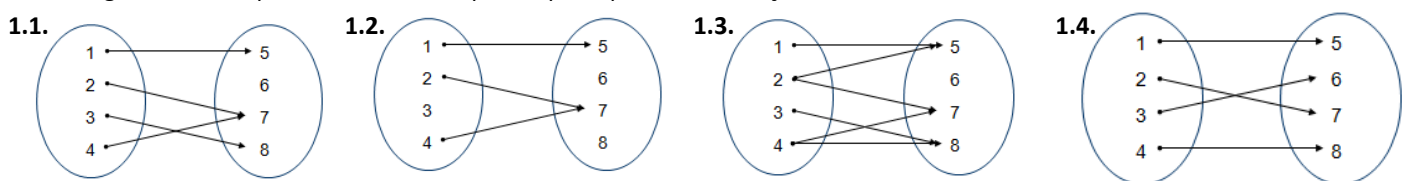
Ao tempo percorrido em viagem corresponde uma e uma só distância.

t	$e = 60t$
0	0
1	60
2	120
3	180

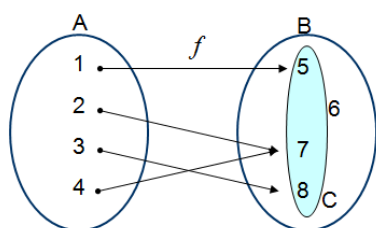
Podemos dizer que temos uma função porque existe uma correspondência unívoca, ou seja, a cada valor do tempo corresponde um e um só valor de espaço percorrido.

Exercício:

1. Das seguintes correspondências identifique as que representam funções.



Considere-se a função definida pelo diagrama seguinte:



À função chamou-se f .

A função f é uma função definida em A com valores em B.

Para além dos conjuntos A e B, existe ainda um conjunto bem definido (contido em B), o conjunto C.

- Ao conjunto A chama-se domínio da função f e representa-se por D_f

$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ O domínio de f é o conjunto dos objectos.

- Ao conjunto B chama-se conjunto de chegada da função.

- Ao conjunto C chama-se contradomínio da função f e representa-se por D'_f

$D'_f = \{5, 7, 8\}$ O contradomínio de f é o conjunto das imagens.

- O objecto 1 tem por imagem 5.

Simbolicamente, escreve-se $f(1) = 5$ (ler: f de um é igual a cinco)

Do mesmo modo, escreve-se:

$f(2) = 7$ $f(3) = 8$ $f(4) = 7$

Função

Uma função f de A com valores em B ($f: A \rightarrow B$) consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B, e uma regra que associa a cada elemento x (objecto) de A um e um só elemento $y = f(x)$ (imagem) de B.

Simbolicamente:

$f: A \rightarrow B$

$x \rightarrow y = f(x)$

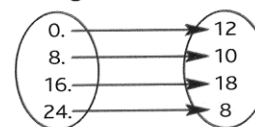
• Uma **expressão analítica**:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x+1$$

Uma função pode ser definida por:

• Um **diagrama**:

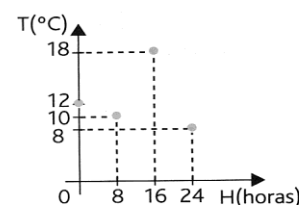


Horas (H) Temperaturas (°C)

• Uma **tabela**:

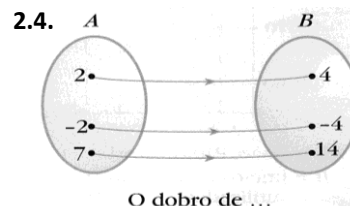
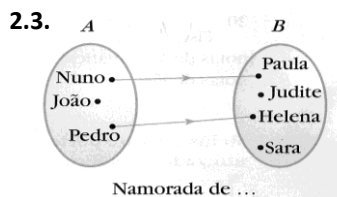
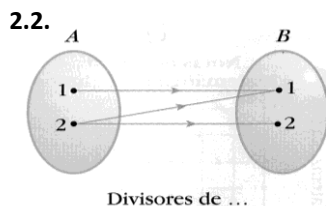
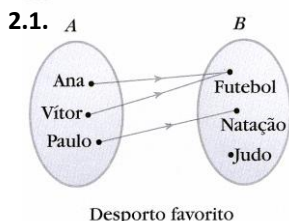
H (horas)	T (°C)
0	12
8	10
16	18
24	8

• Um **gráfico**:



Exercícios:

2. Para cada uma das seguintes correspondências diga se se trata ou não de uma função e em caso afirmativo indique o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada:



3. Considere os conjuntos $A = \{0, 2, \sqrt{3}\}$ e $\mathbb{N}$.

3.1. Dê um exemplo de uma correspondência de A para $\mathbb{N}$ que não seja função.

3.2. Construa uma função f de A em $\mathbb{N}$.

3.3. Construa uma função g de A em $\mathbb{N}$, sabendo-se que $g(0) = 7$ e $g(\sqrt{3}) = 10$.

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES E DOS SEUS GRÁFICOS

> Gráfico de uma função

Se f é uma função com domínio A , então o gráfico de f é o conjunto dos pares ordenados $\{(x, f(x)), x \in A\}$

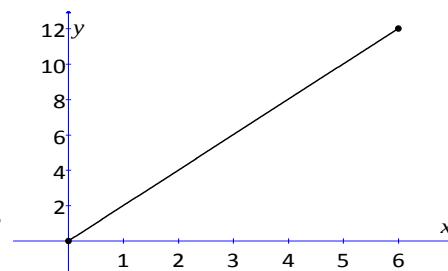
Exemplo:

Consideremos a função:

$$f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 2x$$

Podemos construir o gráfico de f se considerarmos o conjunto de pontos $(x, f(x))$, com $x \in [0, 6]$

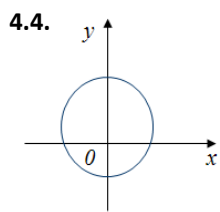
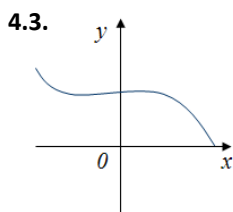
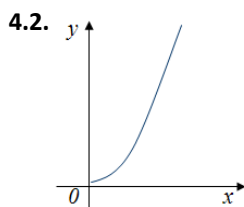
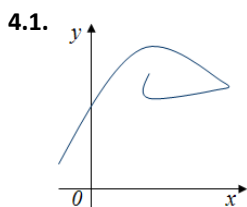


Propriedade: Teste da recta vertical

Uma curva representada num referencial é o gráfico de uma função se e só se qualquer recta vertical intersecta o gráfico, no máximo num ponto.

Exercícios:

4. Com base na propriedade anterior verifique se as seguintes curvas representam funções.



5. Considere a correspondência h definida por:

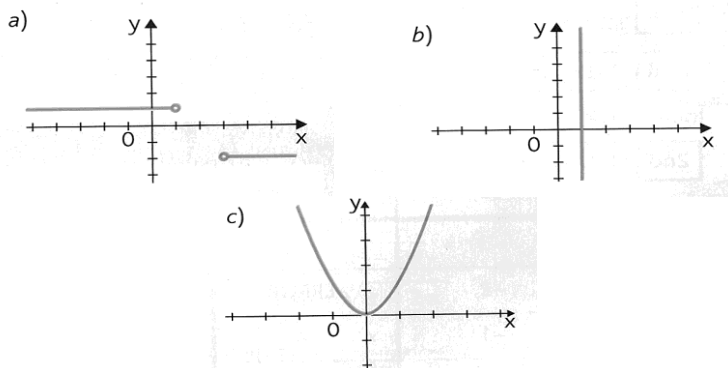
$$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \rightarrow x^2$$

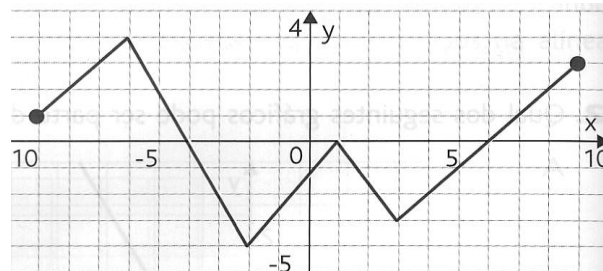
5.1. A correspondência h é uma função? Justifique.

5.2. Defina uma nova correspondência h' que seja uma função.

6. Considere as seguintes representações e indique, justificando, se se tratam de funções:



7. Observe a função j representada graficamente por:



Indique:

7.1. O domínio

7.2. O contradomínio

7.3. Os objectos que têm imagem zero

7.4. A maior imagem

7.5. A menor imagem;

7.6. $j(3)$ e $j(-10)$

> Função Injectiva

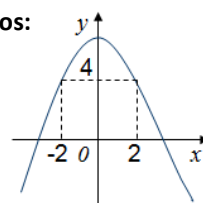
Uma função f de domínio A diz-se injectiva quando, para todos os elementos a e b pertencentes ao domínio, se a é diferente de b então $f(a)$ também é diferente de $f(b)$.

$$\forall a, b \in A, \text{ se } a \neq b \text{ então } f(a) \neq f(b)$$

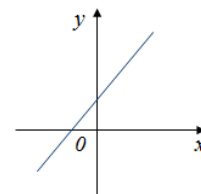
Propriedade: Teste da recta horizontal

Uma curva representada num referencial é o gráfico de uma função injectiva se e só se qualquer recta horizontal intersecta o gráfico, no máximo num ponto.

Exemplos:



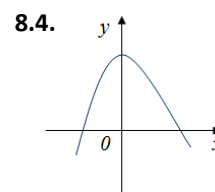
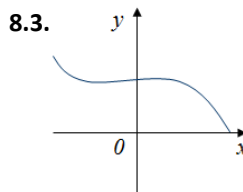
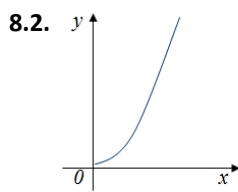
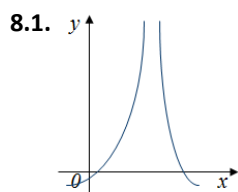
não injectiva



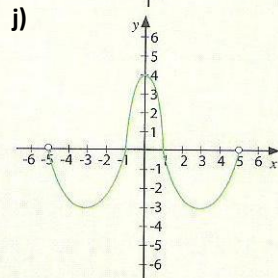
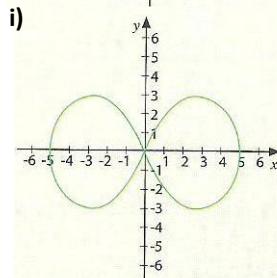
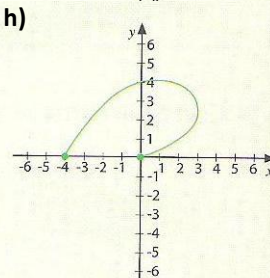
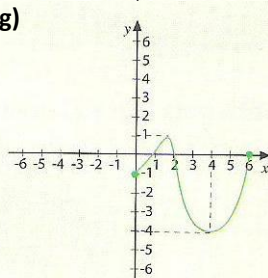
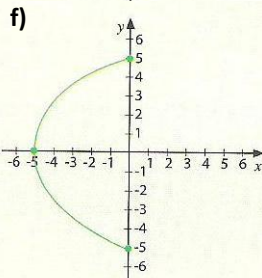
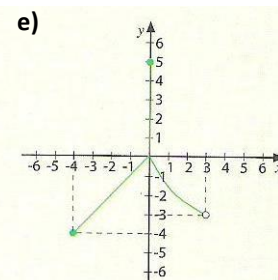
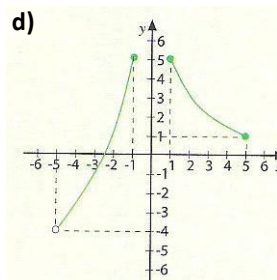
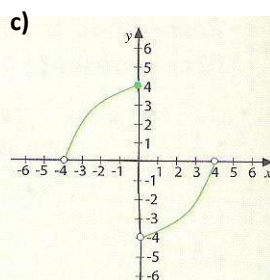
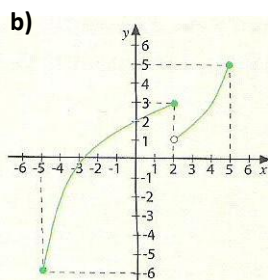
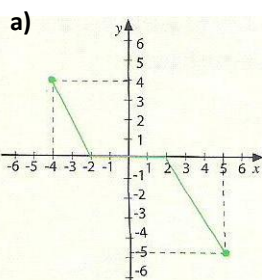
injectiva

Exercício

8. Com base na propriedade anterior verifique se as seguintes funções são injectivas representam funções.



9. Considere os seguintes gráficos.

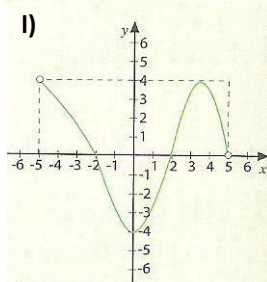
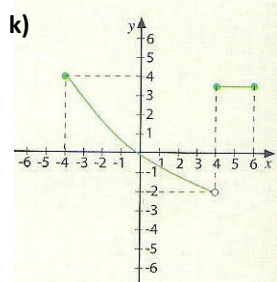


9.1. Indique os que representam funções.

9.2. Para os gráficos que representam funções:

a) indique o domínio e o contradomínio.

b) indique quais são injectivas.



> Extremos de uma função

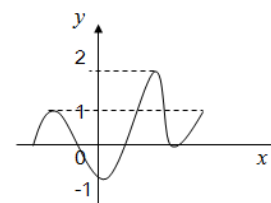
Seja f uma função de domínio D :

- $f(a)$ é o máximo absoluto de f se, para todo o x de D , $f(a) \geq f(x)$
a a dá-se o nome de maximizante

- $f(b)$ é o mínimo absoluto de f se, para todo o x de D , $f(b) \leq f(x)$
a b dá-se o nome de minimizante

Exemplo:

0 é mínimo relativo
-1 é mínimo absoluto
1 é máximo relativo
2 é máximo absoluto



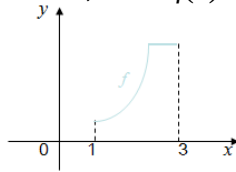
> Monotonia de uma função

Função crescente no sentido lato

Diz-se que f é crescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) \leq f(b)$.

Exemplo:

f é crescente em $[1,3]$

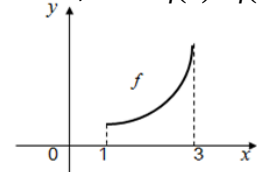


Função estritamente crescente

Diz-se que f é crescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

Exemplo:

f é estritamente crescente em $[1,3]$

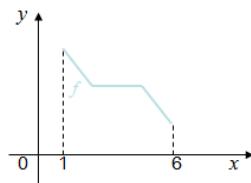


Função decrescente no sentido lato

Diz-se que f é decrescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) \geq f(b)$.

Exemplo:

f é decrescente em $[1,6]$

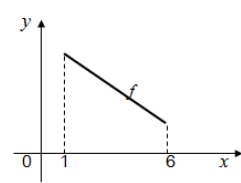


Função estritamente decrescente

Diz-se que f é decrescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) > f(b)$.

Exemplo:

f é estritamente decrescente em $[1,6]$



Uma função é **monótona** num intervalo se for crescente ou decrescente nesse intervalo.

> Sinal de uma função

- Zero de uma função é todo o objecto que tem imagem nula.
- Diz-se que f é positiva em A quando para todos os números reais a de A , se $f(a) > 0$.
- Diz-se que f é negativa em A quando para todos os números reais a de A , se $f(a) < 0$.

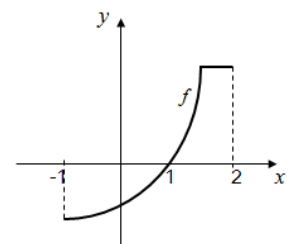
Exemplo:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

1 é zero de f

f é positiva em $]1,2[$

f é negativa em $] -1,1[$



Exemplo:

Estudemos a função f usando o seu gráfico:

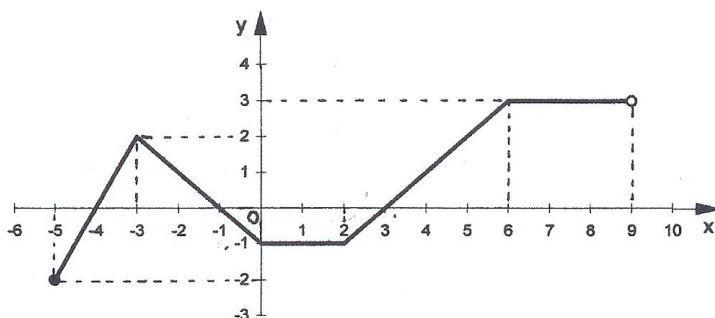


Tabela de variação da monotonia:

x	-5		-3		0		2		6		9
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-1	→	-1	↗	3	→	3

Quadro de estudo do sinal da função:

x	-5		-4		-1		3		9
$f(x)$	-2	-	0	+	0	-	0	+	3

Exercício:

$$D_f = [-5, 9] \quad D'_f = [-2, 3]$$

f é não injectiva

Extremos:

- máximo absoluto: 3
- mínimo absoluto: -2
- máximo relativo: 2
- mínimo relativo: -1

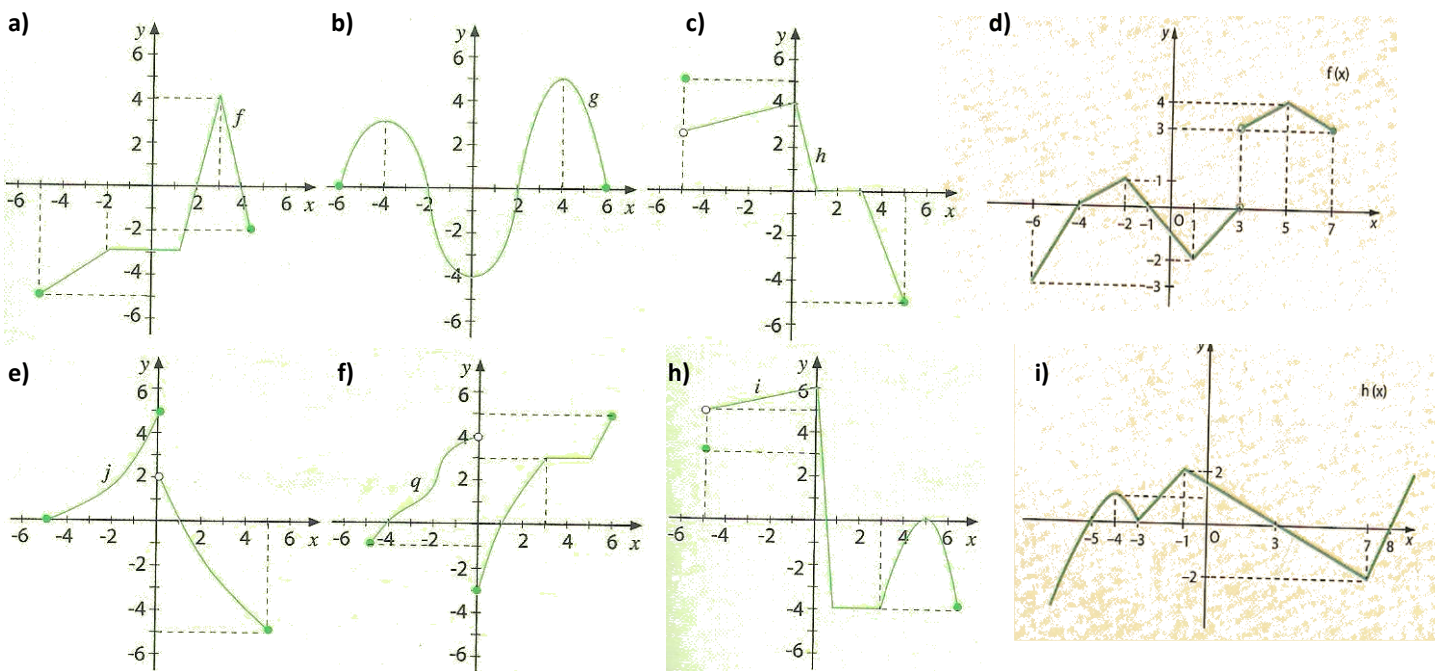
Intervalos de monotonia

- f é estritamente crescente nos intervalos: $[-5, -3]$, $[2, 6]$
- f é estritamente decrescente no intervalo: $[-3, 0]$
- f é constante nos intervalos: $[0, 2]$, $[6, 9]$

Zeros e sinal

- zeros de f : -4, -1, 3
- f é positiva em: $]-4, -1[\cup]3, 9[$
- f é negativa em: $] -5, -4[\cup] -1, 3[$

10. Considere os gráficos das funções seguintes.



Indique para cada uma delas:

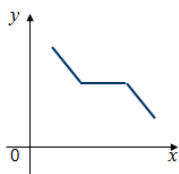
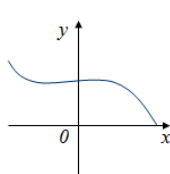
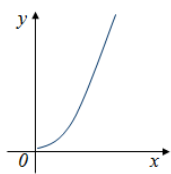
10.1. se existirem, os extremos absolutos e relativos, os maximizantes e minimizantes e o contradomínio.

10.2. os intervalos em que é crescente, decrescente, constante, positiva e negativa.

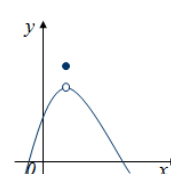
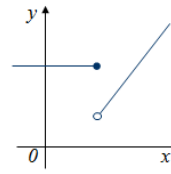
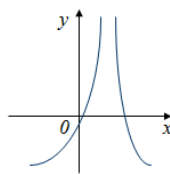
> Continuidade e descontinuidade de uma função

“Uma função f diz-se contínua se for possível traçar o seu gráfico sem levantar o lápis.”

Exemplos:



funções contínuas



funções descontínuas

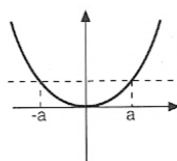
> Paridade de uma função

Função Par

Diz-se que uma função de variável real f é par se e só se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

Graficamente:

f , par:
 $f(-a) = f(a)$
Gráfico simétrico em relação ao eixo vertical

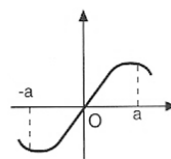


Função Ímpar

Diz-se que uma função de variável real f é ímpar se e só se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

Graficamente:

f , ímpar:
 $f(-a) = -f(a)$
Gráfico simétrico em relação a O.



Exemplo: Calcule a paridade de cada uma das seguintes funções:

1. $f(x) = -x^3 - 3x$

$f(-x) = -(-x)^3 - 3(-x) = x^3 + 3x = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$ a função é ímpar.

2. $g(x) = -3x^2 - 2x + 1$

$g(-x) = -3(-x)^2 - 2(-x) + 1 = -3x^2 + 2x + 1$

$g(-x) \neq g(x) \wedge g(-x) \neq -g(x) \quad \forall x \in D_f$ a função não é par nem é ímpar.

Exercícios

11. Analisando os gráficos das funções do exercício 10, indique quais são contínuas.

12. Estude a paridade das seguintes funções: a) $f(x) = x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 5$ c) $h(x) = x^4 + x^2$ d) $j(x) = -2x^3 + x$

FUNÇÃO AFIM

Estudamos em geometria que, uma equação do tipo $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$ representa uma recta não vertical, onde m é o declive da recta e b é a ordenada na origem.

Dizemos que uma função real de variável real, é uma função afim, se é definida por uma expressão do tipo:

$$f(x) = mx + b, \text{ com } m, b \in \mathbb{R}$$

De um modo geral:

► declive da recta

dados dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ de uma recta, definimos **declive da recta** PQ por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

► domínio: $\mathbb{R}$

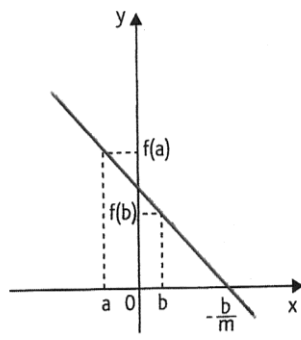
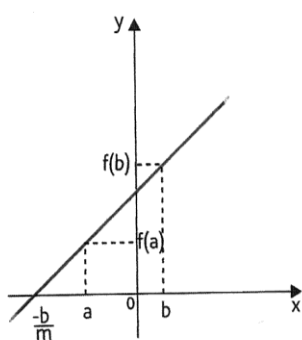
► contradomínio: $\mathbb{R}$

► zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$

► monotonia e sinal:

$m > 0$ Crescente

$m < 0$ Decrescente



Quaisquer que sejam, a e b e D_f ,

se $a < b$ então $f(a) < f(b)$

se $a < b$ então $f(a) > f(b)$

Quadro de sinal

x	$-\infty$	$-b/m$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Quadro de sinal

x	$-\infty$	$-b/m$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Exercícios

13. Estude as seguintes funções quanto à monotonia e sinal, indicando os respectivos pontos de intersecção dos seus gráficos com os eixos coordenados:

13.1. $f(x) = -\frac{1}{5}x + 4$

13.2. $g(x) = 0,4x - 10$

13.3. $h(x) = -2x$

13.4. $j(x) = -\frac{\sqrt{2}}{5}x - 8$

14. O gráfico de uma função afim f contém os pontos de coordenadas $(2,4)$ e $(5,7)$.

14.1. Escreva a expressão que define a função f .

14.2. Faça o esboço gráfico da função.

14.3. Indique a monotonia e sinal da função.

15. Considere a família de funções: $f(x) = \frac{k}{2}x + 3$, $k \in \mathbb{R}$.

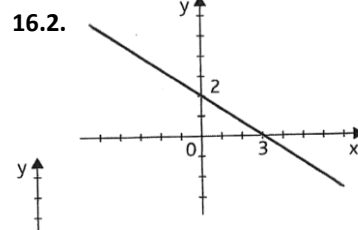
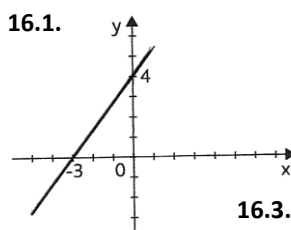
Indique um valor de k de modo que:

15.1. f seja crescente;

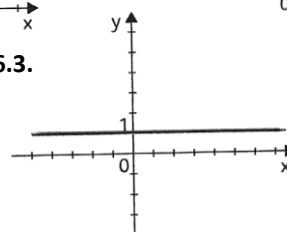
15.2. a função tenha um zero no ponto de abcissa 6;

15.3. o gráfico da função seja uma recta horizontal.

16. Calcule a expressão analítica de cada uma das funções afim representadas graficamente por



16.3.

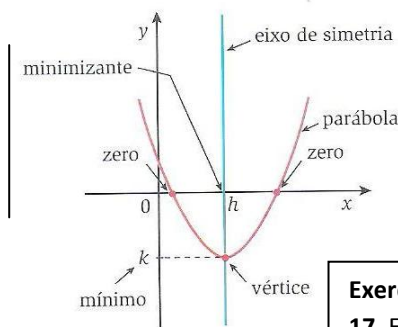


FUNÇÃO QUADRÁTICA

Função quadrática é toda a função do tipo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$



O seu gráfico

é uma parábola.

ZEROS E CONCAVIDADE

Os zeros da função quadrática $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$,

são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Muitas vezes tem interesse saber se uma função quadrática tem ou não zeros, independentemente de se conhecer o seu valor.

Calculando-se o sinal do binómio $b^2 - 4ac$ que se representa por Δ , tem-se:

- Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ a função não tem zeros reais
- Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ a função tem um zero real
- Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ a função tem dois zeros reais

Ao binómio Δ chama-se **binómio discriminante**, pois é pelo conhecimento do seu sinal que se pode discriminar quantas soluções tem a equação.

Exemplos:

Calculemos os zeros de cada uma das seguintes funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:

1. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Calculemos o valor de Δ .

$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$; como $\Delta > 0$, a função tem dois zeros.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 2 \quad \text{Os zeros da função são 2 e 3.}$$

2. $h(x) = x^2 + x + 2$

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a função h não tem zeros.

3. $m(x) = x^2 - 6x + 9$

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a função tem um zero,

$$x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Exercícios:

17. Estude a paridade e calcule os zeros de cada uma das seguintes funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:

17.1. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ 17.2. $g(x) = 4x^2 + 3$

17.3. $h(x) = -5x^2 + 10x$

17.4. $i(x) = x^2 - x - 2$

17.5. $j(x) = 4x^2 - 12x + 9$

18. Sem os calcular, determine o número de zeros de cada uma das seguintes funções:

18.1. $x \mapsto 2x^2 - 7x + 6$

18.2. $x \mapsto -3x^2 + 2x - 1$

18.3. $x \mapsto x^2 + 4x + 4$

19. Determine m de modo que a expressão $mx^2 - 4x + 2$ defina uma função quadrática com:

19.1. dois zeros

19.2. um zero

19.3. nenhum zero

O que define o sentido da concavidade da parábola do gráfico de uma função quadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$ é o sinal do valor de a :

- a parábola é voltada para cima se $a > 0$
- a parábola é voltada para baixo se $a < 0$

O quadro ao lado relaciona o sentido da concavidade com o número de zeros da função:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

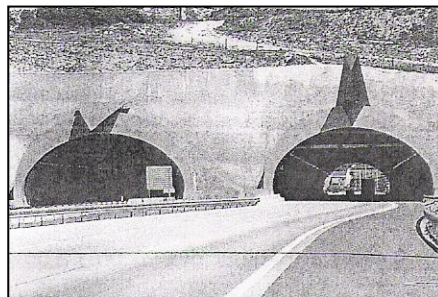
▪ VÉRTICE E EIXO DE SIMETRIA

Observe a figura ao lado.

A entrada do túnel tem a forma aproximada de parte de uma parábola que podemos considerar definida pela expressão:

$$m(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 6a)$$

1. Qual a largura da estrada?
2. Qual a altura máxima do túnel?



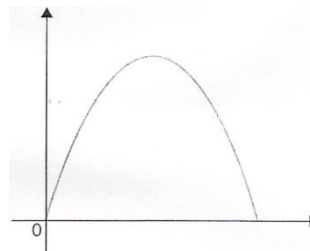
Resolução:

1. Consideremos a parábola desenhada num referencial cartesiano:

A largura da estrada corresponde à distância entre os zeros da função.

$$-\frac{1}{2}(a^2 - 6a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a(a - 6) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 6$$

A largura da estrada é 6 m.

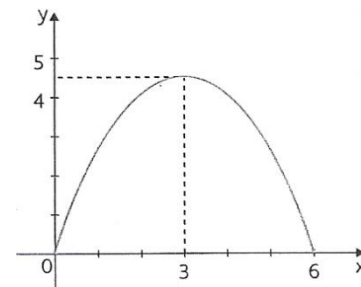


2. Como podemos observar, o eixo de simetria contém o vértice da parábola, logo a equação do eixo é $x = 3$.

Então, a abcissa do vértice é 3. Vamos calcular a sua ordenada.

$$m(3) = -\frac{1}{2}(3^2 - 6 \times 3) = 4,5$$

A altura máxima é 4,5 m. O maximizante da função é a média dos zeros da função (a concavidade da parábola está voltada para baixo).



De um modo geral, a representação gráfica de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma parábola de vértice no ponto:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad \text{onde, } \Delta = b^2 - 4ac. \text{ O eixo de simetria da parábola é a recta } x = -\frac{b}{2a}.$$

Exemplo: Seja a função $j(t) = t^2 - 2t - 3$

1. Indique os zeros da função.
2. Determine as coordenadas do vértice e o eixo de simetria.
3. Esboce o gráfico da função.
4. Indique o contradomínio.
5. Estude a função quanto à monotonia.

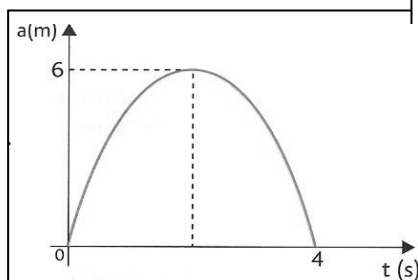
Resolução

$$1. b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2-4}{2} \vee x = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$2. V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{2}, -\frac{16}{4}\right)$$

$V(1, -4)$. O eixo de simetria é $x = 1$.



Exercícios:

$$20. \text{ Seja } f(x) = x^2 - 4x - 5$$

- 20.1. Indique os zeros da função.
- 20.2. Determine as coordenadas do vértice.
- 20.3. Escreva a equação do eixo de simetria.
- 20.4. Esboce o gráfico da função.
- 20.5. Indique o contradomínio.
- 20.6. Estude a função quanto à monotonia.

21. O gráfico ao lado representa a altura (em metros) em função do tempo (em segundos), de uma bola lançada de baixo para cima e na vertical, com uma determinada velocidade inicial.

21.1. Depois de lançada, quanto tempo demorou a bola a chegar ao chão?

21.2. Qual a altura máxima atingida pela bola? Em que instante?

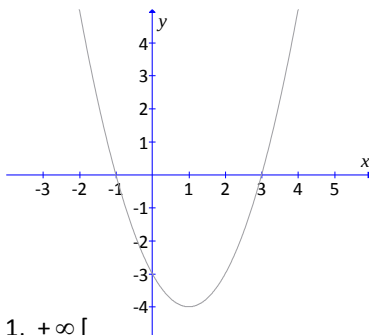
CONTRADOMÍNIO E MONOTONIA

Resolução (continuação):

3. Para esboçar o gráfico da função, já temos o valor dos zeros, e do vértice, calculemos o valor da ordenada na origem:

$$j(0) = 0^2 - 4 \times 0 - 3 = -3$$

Com o valor dos zeros, do vértice e da ordenada na origem podemos traçar o esboço do gráfico.



4. Através da observação do gráfico concluímos que:

$$D'f = [-4, +\infty[$$

5. A função é monótona crescente: $[1, +\infty[$

A função é monótona decrescente: $] -\infty, 1]$

Exercícios:

22. Considere a função $i(r) = -r^2 + 4r - 5$

22.1. Indique os zeros da função.

22.2. Determine as coordenadas do vértice.

22.3. Escreva a equação do eixo de simetria.

22.4. Esboce o gráfico da função.

22.5. Indique o contradomínio.

22.6. Estude a função quanto à monotonia.

23. Determine, por via algébrica, os zeros e o mínimo da função h definida por $h(x) = x^2 - 3x$ e esboce o seu gráfico num referencial.

VARIAÇÃO DO SINAL

Exemplo:

Observemos os gráficos das funções definidas por:

$$f(x) = x^2 + x - 2;$$

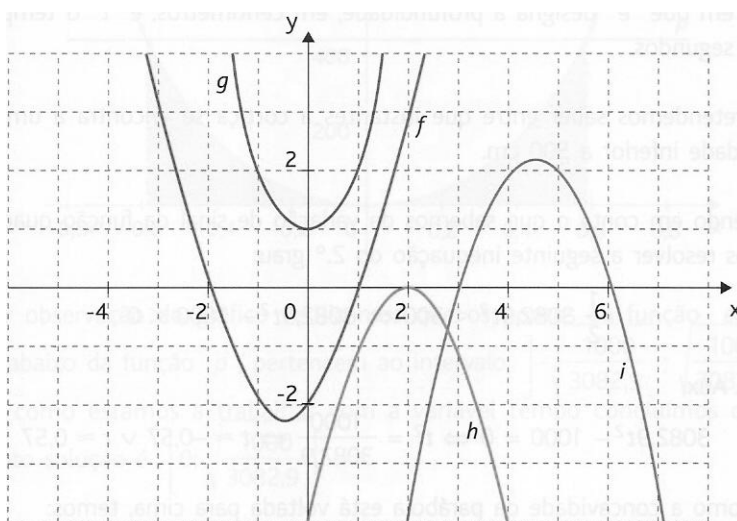
$$g(x) = x^2 + 1;$$

$$h(x) = -(x-2)^2;$$

$$i(x) = -x^2 + 9x - 18$$

Podemos concluir:

- f tem dois zeros e $a > 0$; é positiva no intervalo $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$, sendo negativa em $]-2, 1[$;
- g não tem zeros e $a > 0$; é positiva em $\mathbb{R}$;
- h tem um zero e $a < 0$; é negativa em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- i tem dois zeros e $a < 0$; é positiva no intervalo $]3, 6[$ e negativa em $]-\infty, 3[\cup]6, +\infty[$.



Exercício:

24. Tendo em conta os valores de a e de Δ , em cada caso, determine a variação de sinal de cada uma das seguintes funções:

24.1. $f(x) = -x^2 + 6x$

24.2. $g(x) = 2x^2 + 5x - 7$

24.3. $h(x) = -2x^2 + 3x - 1$

24.4. $i(x) = -(x-1)^2$

24.5. $j(x) = x^2 + 6x + 13$

Estudar a variação de sinal da função é determinar os intervalos onde a função é positiva e os intervalos onde é negativa.

INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

Para iluminar uma operação de salvamento lança-se um foguete luminoso cuja altura h em relação ao nível do mar é dada aproximadamente pela lei:

$$h = 10 + 5t - t^2 \quad (h \text{ em metros, } t \text{ em segundos}).$$

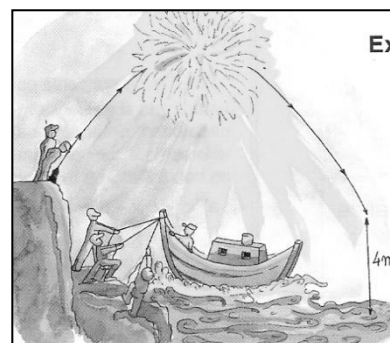
A luz só é útil desde que o foguete esteja a 4 m ou mais acima do mar.

Quanto tempo dura a luz útil de cada foguete?

Resolução: Queremos os valores de t para os quais $h \geq 4$, ou seja, $10 + 5t - t^2 \geq 4$.

Esta condição é uma inequação do 2º grau.

1º passo: colocar todos os termos no 1º membro: $10 + 5t - t^2 \geq 4 \Leftrightarrow -t^2 + 5t + 6 \geq 0$



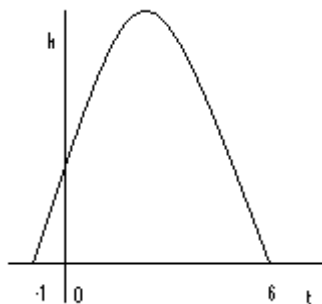
2º passo: estudar o sinal da função quadrática do 1º membro: $h(t) = -t^2 + 5t - 6$

Como $a = -1$, a concavidade é voltada para baixo.

$\Delta = 25 + 24 = 49$, logo a função tem dois zeros.

$$\text{Zeros: } t = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 6$$

Analisando o esboço do gráfico concluímos que a função é positiva no intervalo $] -1, 6[$



3º passo: analisar os dados obtidos no contexto do problema e dar resposta:

Mas neste problema só interessa $t > 0$, pelo que a luz é útil de zero a 6 segundos.

Resposta: A luz útil do foguete dura 6 segundos.

Mais Exemplos:

1. Resolva a seguinte inequação: $x^2 - 4x + 3 > 0$.

$$a > 0 \quad e \quad \Delta = 16 - 12 = 4$$

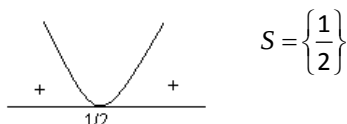
Há dois zeros que são: $x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$



2. Resolva a inequação $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

$$a > 0 \quad e \quad \Delta = 16 - 16 = 0$$

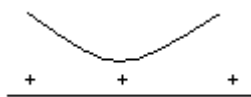
Existe um zero, $x = \frac{1}{2}$, a inequação tem uma só solução:



3. Resolva a inequação $x^2 - 3x + 6 > 0$.

$$a > 0 \quad e \quad \Delta = 9 - 24 = -15$$

A inequação é uma **condição universal**, ou seja, todos os números reais são solução da inequação. $S = \mathbb{R}$



4. Resolva a inequação $-4x^2 + x - 3 > 0$.

$$a < 0 \quad e \quad \Delta = 1 - 48 = -47$$

Exercícios:

25. Determine o domínio das seguintes funções:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

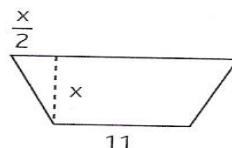
26. Resolva em $\mathbb{R}$:

$$26.1. x^2 - 3x - 4 < 0 \quad 26.2. 3 < 5x + 2x^2 \quad 26.3. x - 2 \leq \frac{(4x-3)(4x+3)}{6}$$

$$26.4. 3(x-1) > x^2 + 2$$

$$26.5. \frac{2x(x-1)}{3} < \frac{x^2 + 4}{2}$$

$$26.6. (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 1$$



27. A figura representa um jardim com a forma de um trapézio isósceles.

Atendendo aos dados:

27.1. Mostre que a área do trapézio é dada por $A(x) = 11x + \frac{x^2}{2}$

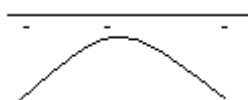
27.2. Entre que valores pode variar a altura do trapézio de modo que a área seja inferior a 120 m^2 ?

28. Um foguete é lançado. A altura, em metros, que atinge ao fim do tempo t , em segundos, é dada por $A(t) = -t^2 + 10t + 7$

28.1. A que altura está o foguete ao fim de 5 minutos?

28.2. Em que instante o foguete atinge o solo?

28.3. Durante quanto tempo se encontra o foguete a uma altura superior a 23 metros?



A inequação é **impossível**.

$$S = \{ \}$$

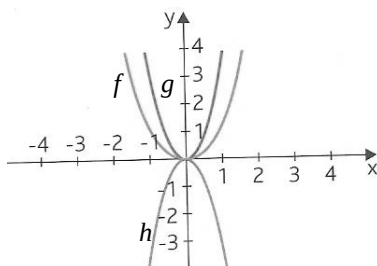
FAMÍLIAS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

> Funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = 4x^2$$

$$h(x) = -3x^2$$



M.A.(5)

Da análise feita aos casos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- o sinal do coeficiente a influencia o sentido da concavidade.
- o valor absoluto de a influencia a abertura da parábola. Quanto maior é o valor absoluto de a , menor é a abertura da parábola.
- qualquer uma das parábolas tem vértice no ponto $(0, 0)$ e o eixo de simetria é a recta $x = 0$, donde se conclui que são independentes de a .

	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	$x = 0$	$x = 0$
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Monotonia	Crescente em $\mathbb{R}^+$ Decrescente em $\mathbb{R}^-$	Crescente em $\mathbb{R}^-$ Decrescente em $\mathbb{R}^+$
Extremos	Mínimo absoluto em $(0, 0)$	Máximo absoluto em $(0, 0)$
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo

Exercício:

29. Corresponda cada uma das funções ao seu respectivo gráfico:

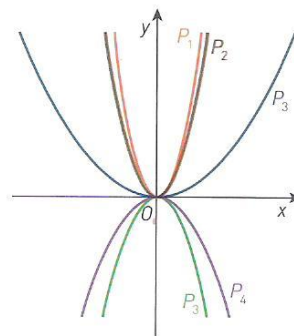
$$I : y = 2x^2$$

$$II : y = -0,5x^2$$

$$III : y = \sqrt{3}x^2$$

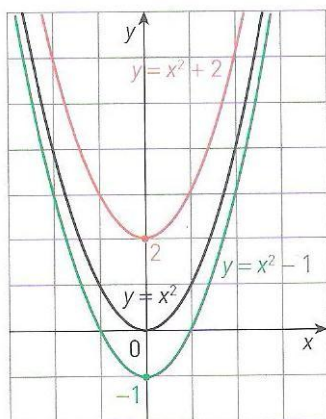
$$IV : y = -x^2$$

$$V : y = 0,2x^2$$



> Funções do tipo $y = ax^2 + k$ e $y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$

Considere as funções reais de variável real $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 1$ e os seus respectivos gráficos:



Da análise feita aos casos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- O gráfico de $y = x^2 + 2$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se duas unidades para cima. ($k > 0$, deslocação para cima)

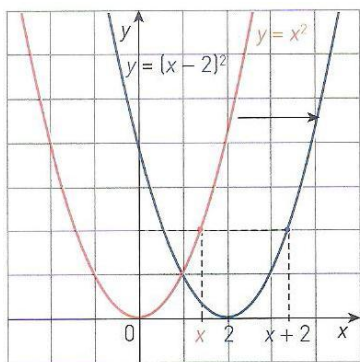
- O gráfico de $y = x^2 - 1$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se uma unidade para baixo. ($k < 0$, deslocação para baixo)

- Os efeitos das mudanças de k , nos gráficos das funções da família $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ fazem-se sentir na localização do vértice da parábola sobre o eixo das ordenadas.

Vértice: $(0, k)$

Eixo de simetria: $x = 0$

Considere as funções reais de variável real $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$ e $y = (x + 3)^2$ e os seus respectivos gráficos:



Da análise feita aos casos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- O gráfico de $y = (x - 2)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se duas unidades para a direita. ($h > 0$, deslocação para a direita)

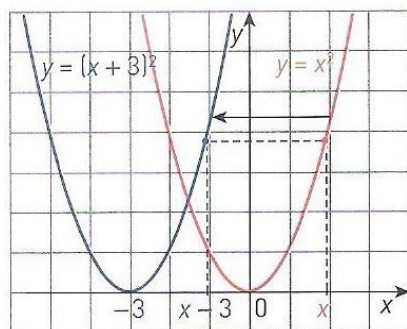
- O gráfico de $y = (x + 3)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se três unidades para a esquerda. ($h < 0$, deslocação para a esquerda)

- Os efeitos das mudanças do parâmetro h , nos gráficos das funções da família

$y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$ fazem-se sentir na localização do vértice da parábola sobre o eixo das abcissas.

Vértice: $(h, 0)$

Eixo de simetria: $x = h$



31. Represente, a partir da função definida por $f(x) = x^2$, as seguintes funções, indicando as coordenadas do vértice:

31.1 $g(x) = 2(x - 3)^2$

31.2 $h(x) = -x^2 + 2$

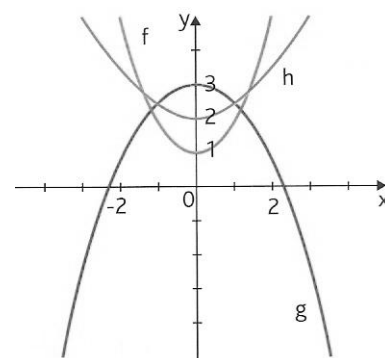
Exercícios:

30. Estabeleça a correspondência entre os gráficos dados e as seguintes funções:

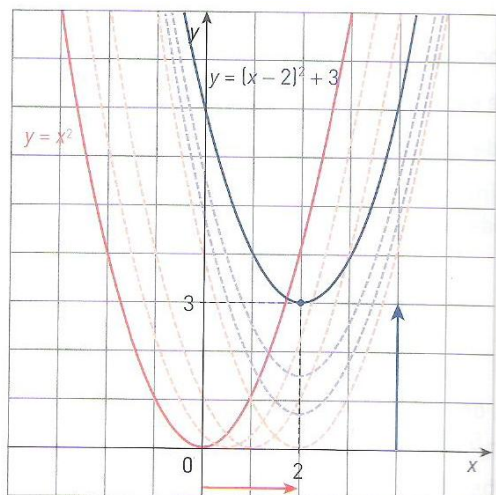
$$I : y = \frac{1}{3}x^2 + 2$$

$$II : y = x^2 + 1$$

$$III : y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$



> Funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$



Considere as funções reais de variável real $y = x^2$ e $y = (x-2)^2 + 3$ e os seus respectivos gráficos:

Da análise feita aos gráficos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- O gráfico de $y = (x-2)^2 + 3$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se duas unidades para a direita ($h = 2$) e três unidades para cima ($k = 3$).

- $y = (x-2)^2 + 3$ tem concavidade voltada para cima;

Vértice: (2, 3)

Eixo de simetria: $x = 2$

- O gráfico de uma função do tipo $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$ é uma parábola com as seguintes características:

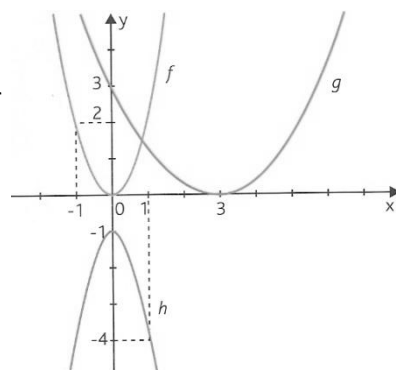
Vértice: (h, k)

Eixo de simetria: $x = h$

	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Monotonia	Crescente: $[h, +\infty[$ Decrescente: $]-\infty, h]$	Crescente: $]-\infty, h]$ Decrescente: $[h, +\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto em (h, k)	Máximo absoluto em (h, k)
Vértice	(h, k)	(h, k)
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo
Eixo de simetria	$x = h$	$x = h$

Exercício:

32. As representações gráficas seguintes foram obtidas a partir de $y = x^2$. Escreva a expressão analítica das funções quadráticas representadas.



Exemplo:

Seja a função f definida por $f(x) = 5x^2 - 10x - 1$

1. Escreva a expressão da função na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

2. Identifique as coordenadas do vértice e o eixo de simetria da parábola que é o gráfico de f .

Resolução:

1. Vamos calcular as coordenadas do vértice a partir da fórmula $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

$$\Delta = 100 - 4 \times 5(-1) = 120; \quad -\frac{b}{2a} = -\frac{(-10)}{2 \times 5} = 1; \quad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{120}{4 \times 5} = -6$$

Então $h = 1$; $k = -6$ e $a = 5$

Substituindo na expressão vem: $f(x) = 5(x - 1)^2 - 6$

2. $V(1, -6)$. A recta de equação $x = 1$ é o eixo de simetria da parábola.

Toda a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, pode escrever-se na forma $y = a(x - h)^2 + k$ e tem por gráfico uma parábola de vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ou $V(h, k)$. O eixo de simetria da parábola é a abcissa do vértice.

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exercícios:

33. Considere a função definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

33.1. Determine os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que a representa.

33.2. Escreva a expressão da função na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

33.3. Represente graficamente a função.

33.4. Estude a monotonia da função.

33.5. Resolva $f(x) \leq 1$

34. A parábola representativa de uma função quadrática f tem vértice no ponto de coordenadas (1, -4) e intersecta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas (-1,0) e (3,0). Escreva a expressão que define a função na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

35. Considere a função definida por $h(x) = -2x^2 - 4x + 3$

35.1 Estude a paridade da função.

35.2 Faça o estudo analítico da função indicando os zeros, o vértice, o eixo de simetria, o sinal, a monotonia, o contradomínio e os extremos.

35.3 Esboce o gráfico da função.

RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE PROBLEMAS DE 2º GRAU

Exemplos:

1. Do alto de um farol lança-se, de baixo para cima, um projectil cuja altura h , em relação à base do farol, é dada por $h = 20 + 20t - 5t^2$ (h em metros e t em segundos).

1.1. Esboce o gráfico da função para $t \geq 0$.

1.2. Ao fim de quanto tempo o projectil passa pela base?

1.3. Ao fim de quanto tempo cai no mar?

1.4. Qual a altura máxima atingida pelo projectil?

Resolução:

1.1.

$$h(0) = 20$$

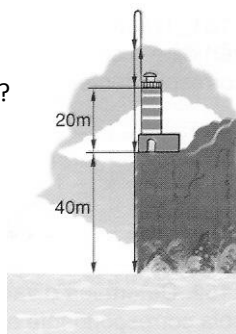
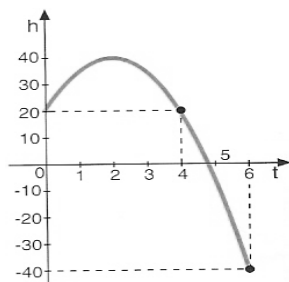
$$V(2, 40)$$

Zeros:

$$t \approx -0,8 \vee t \approx 4,8$$

$$h(4) = 20$$

$$h(6) = -40$$



1.2. Ao fim de aproximadamente 4,8 s que corresponde ao zero positivo da função.

1.3. O nível do mar está 40 m abaixo da base do farol o que na função corresponde a $h(6) = -40$. Ao fim de 6 segundos.

1.4. A altura máxima corresponde à ordenada do vértice (k) da parábola. A altura máxima é 40 m.

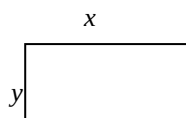
2. Um rectângulo tem de perímetro 20m.

2.1. Exprima a área A do rectângulo em função do comprimento x de um dos seus lados.

2.2. Represente graficamente a função A de x .

2.3. Entre que valores pode variar x ?

2.4. Para que valores de x a área é máxima?

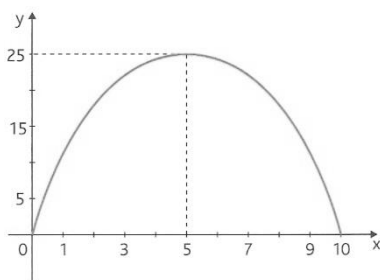


Resolução:

$$2.1. P = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

$$A = xy \Leftrightarrow A = x(10 - x) \Leftrightarrow A = 10x - x^2$$

2.2.



2.3. Os valores de x têm de estar compreendidos entre 0 e 10, pois se uma das dimensões for 0 ou 10 não existe rectângulo

2.4. Observando o gráfico verificamos que o máximo da função é a ordenada do vértice da parábola, donde se conclui que a área é máxima quando $x = 5$.

Exercícios:

36. Uma bola atirada de baixo para cima, na vertical, atinge a altura h , em metros, dada por $h = 14,7t - 4,9t^2$ ao fim de t segundos.

36.1. Ao fim de quantos segundos atinge a bola a altura máxima?

36.2. Qual é essa altura máxima?

37. Um rectângulo de área A tem menos 4 cm de largura do que de comprimento (C).

37.1. Exprima A em função de C .

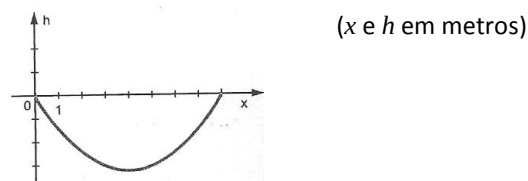
37.2. Sabendo que a área não pode exceder os 21 cm^2 qual o maior valor que C pode tomar?

38. Um dos catetos de um triângulo rectângulo tem mais 1 m do que o outro.

38.1. Exprima a área em função do cateto menor e determine o valor deste cateto para o qual a área é superior a 10 m^2 .

38.2. Determine o cateto menor sabendo que a hipotenusa tem mais 9 m que ele.

39. A secção transversal de uma piscina tem a forma de uma parábola sendo a equação dessa parábola definida por: $h = 0,2x(x - 8)$.



(x e h em metros)

39.1. Calcule a largura e a profundidade máximas da piscina.

39.2. Para que valores de $x \in [0, 8]$ se tem $h \geq -1,4$?

40. Da varanda de uma casa, a 5m do solo, foi lançada, na vertical, uma bola para o ar. Após t segundos, a distância em metros, da bola ao solo é dada por $d(t) = 5 + 40t - 16t^2$

40.1. Calcule $d(0)$ e indique o significado destes valores.

40.2. Resolva a equação $d(t) = 5$. Qual é o significado da solução obtida?

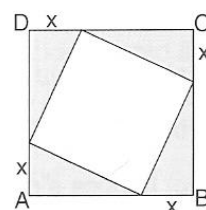
40.3. Qual será a altura máxima atingida pela bola? E em que momento é atingida essa altura?

41. Calcule as medidas dos catetos de um triângulo rectângulo de perímetro 24 cm e cuja hipotenusa mede 10 cm.

42. Considere a figura ao lado. O quadrado maior tem 100 m^2 de área.

42.1. Exprima em função de x a área de cada triângulo a sombreado.

42.2. Calcule os catetos desses triângulos se o quadrado menor tiver 90 m^2 .



Exercícios:

43. Num jogo de Basquetebol, um jogador converte um lançamento de três pontos. Tendo em conta que a altura (em metros) a que a bola se encontrava do solo em função do tempo que decorreu (em segundos) entre o instante em que a bola foi lançada e o instante em que atingiu o cesto é dada pela função f definida por $f(t) = -0,93t^2 + 2,32t + 2,1$ com $t \in [0, 2]$

43.1. Determine a altura a que a bola se encontrava do solo no momento do lançamento.

43.2. Determine a altura a que se encontra o cesto.

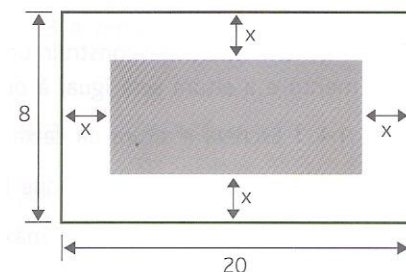
43.3. Qual foi a altura máxima atingida pela bola e em que instante a bola atingiu essa altura?

43.4. Se o jogador não tivesse acertado no cesto nem na tabela e a bola não tivesse sido interceptada, ao fim de quanto tempo a bola chegava ao solo?

44. Num terreno de 20×8 , pretende-se construir uma piscina com um passeio em seu redor de largura constante.

44.1. Escreva a expressão da área da piscina em função da largura do passeio.

44.2. Determine a largura do passeio de modo que a piscina, tenha um comprimento triplo da largura.



TRANSFORMAÇÕES SIMPLES DE FUNÇÕES

No estudo da função quadrática, foram feitas algumas referências a transformações de funções e respectivos deslocamentos em termos gráficos.

A seguir, são sintetizados e generalizados algumas situações tendo por base exemplos intuitivos.

▪ $y = f(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$ (TRANSLAÇÃO VERTICAL)

Exemplo:

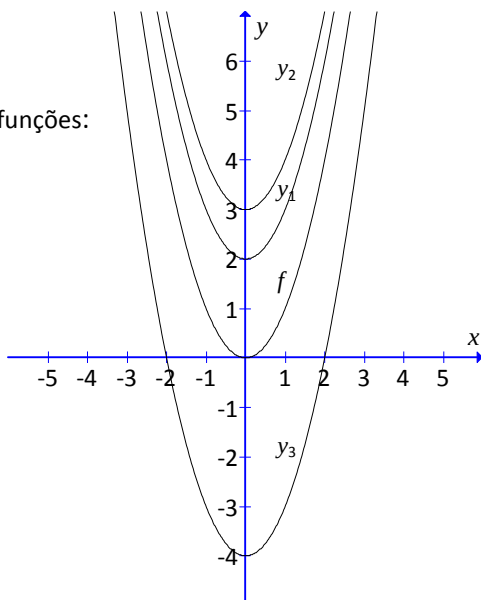
Seja f tal que $f(x) = x^2$.

Como obter os gráficos das funções:

$$y_1 = f(x) + 2 = x^2 + 2$$

$$y_2 = f(x) + 3 = x^2 + 3$$

$$y_3 = f(x) - 2 = x^2 - 4$$



Qualquer um dos gráficos das funções dadas pode ser obtido a partir do gráfico de f , efectuado um deslocamento na vertical – translação associada ao vector $(0, a)$.

▪ $y = f(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$ (TRANSLAÇÃO HORIZONTAL)

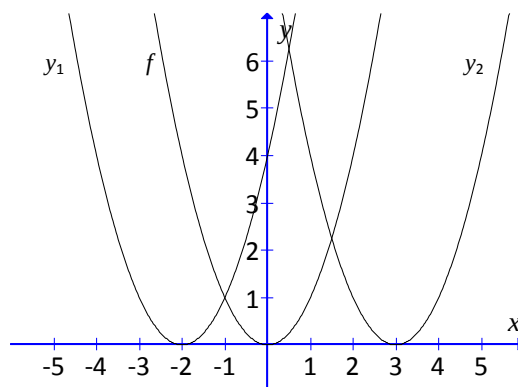
Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2$.

Como obter os gráficos das funções:

$$y_1 = f(x+2) = (x+2)^2$$

$$y_2 = f(x-3) = (x-3)^2$$



Qualquer um dos gráficos das funções dadas pode ser obtido a partir do gráfico de f , efectuado um deslocamento na horizontal – translação associada ao vector $(a, 0)$.

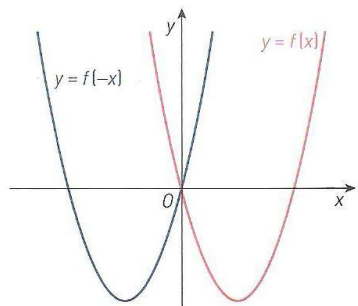
▪ $y = f(-x)$ (SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO DAS ORDENADAS)

Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 4x$. Graficamente:

Se na expressão substituirmos x pelo seu simétrico, ou seja, $-x$, obtém-se a expressão $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 \times (-x) = x^2 + 4x$$



Os gráficos das funções $f(x)$ e $f(-x)$ são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Conhecido o gráfico de f , para obter o gráfico de $y = f(-x)$ basta construir o gráfico simétrico de f em relação ao eixo Oy .

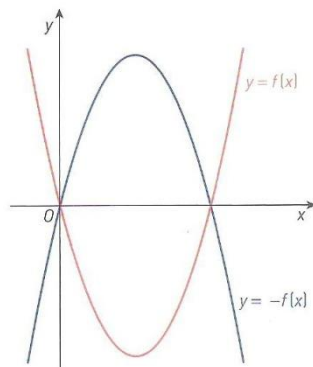
▪ $y = -f(x)$ (SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO DAS ABCISSAS)

Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 4x$.

Como obter o gráfico de

$$y = -f(x) = -(x^2 - 4x) = -x^2 + 4x$$



Os gráficos das funções $f(x)$ e $-f(x)$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas. Conhecido o gráfico de f , para obter o gráfico de $y = -f(x)$ basta construir o gráfico simétrico de f em relação ao eixo Ox .

▪ $y = af(x)$, $a \in \mathbb{R}$ (DILATAÇÃO/COMPRESSÃO NA VERTICAL)

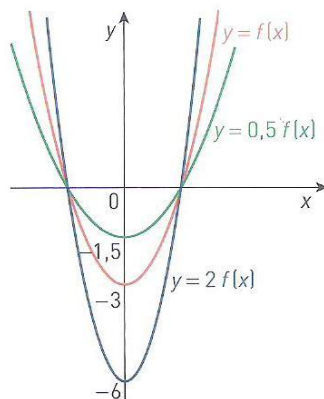
Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 3$.

Como obter os gráficos das funções:

$$y = 2f(x) = 2x^2 - 6$$

$$y = 0,5f(x) = 0,5x^2 - 1,5$$



- Se $|a| > 1$, diz-se que há uma dilatação vertical.
- Se $|a| < 1$, diz-se que há uma compressão vertical.

▪ $y = f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$ (DILATAÇÃO/COMPRESSÃO NA HORIZONTAL)

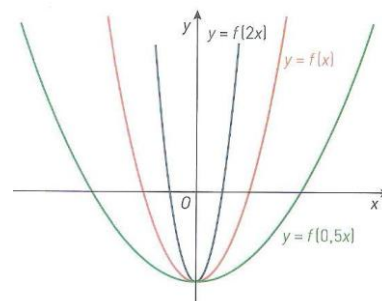
Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 3$

Como obter os gráficos das funções:

$$y = f(2x) = 4x^2 - 3$$

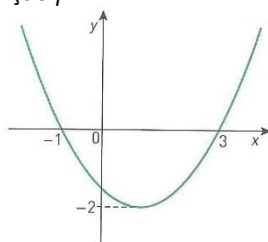
$$y = f(0,5x) = 0,25x^2 - 3$$



- Se $|a| > 1$, diz-se que há uma compressão horizontal.
- Se $|a| < 1$, diz-se que há uma dilatação horizontal.

Exercícios:

45. Uma representação gráfica da função f encontra-se na figura seguinte:



45.1. Indique o contradomínio da função h , sendo $h(x) = f(x) - 1$.

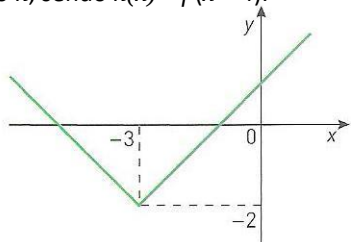
45.2. Determine $p \in \mathbb{R}$, de modo que $g(x) = f(x) + p$ não tenha zeros.

46. Considere a função f , definida por $f(x) = |x| - 2$.

46.1. Indique os zeros da função g sendo $g(x) = f(x + 1)$.

46.2. Estude o sinal da função h , sendo $h(x) = f(x - 4)$.

46.3. A função j tem a seguinte representação gráfica:



Indique o valor de k , sabendo que $j(x) = f(x + k)$

47. Considere a função f representada graficamente.

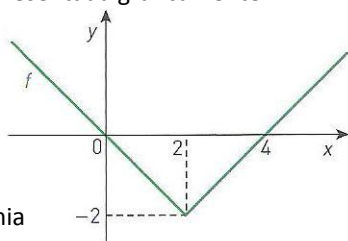
Em relação à função $y = f(-x)$, indique:

47.1. zeros.

47.2. extremos.

47.3. sinal.

47.4. intervalos de monotonia



48. Na figura encontra-se

representada a função h . Esboce o gráfico da função:

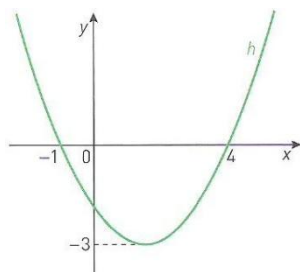
48.1. $h(x - 2)$

48.2. $h(x) + 3$

48.3. $|h(x)|$

48.4. $-h(x)$

48.5. $0,5 h(x)$



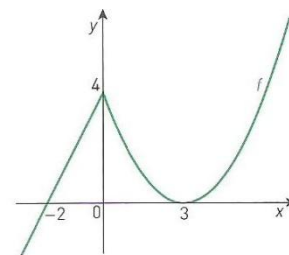
49. Observe a figura onde se encontra representada graficamente a função f e considere as funções definidas por:

$$g(x) = f(-x)$$

$$h(x) = f(x - 3)$$

$$i(x) = -f(x)$$

$$t(x) = |f(x)|$$



Indique:

49.1. os zeros de g .

49.2. o conjunto solução $h(x) < 0$.

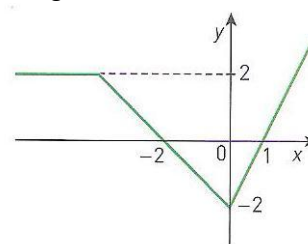
49.3. os intervalos de monotonia da função i .

49.4. os extremos de t .

50. Considere a função f representada graficamente e

$$g(x) = f(3x)$$

$$h(x) = 3f(x)$$



50.1. Indique os zeros e o contradomínio de g e h .

50.2. Quantas soluções têm as seguintes equações:

a) $g(x) = -3$ b) $h(x) = -3$ c) $h(x) = 6$

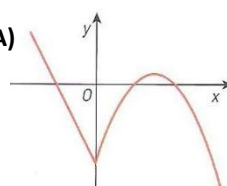
51. Considere os gráficos A, B e C e as funções tais que:

$$y = f(x)$$

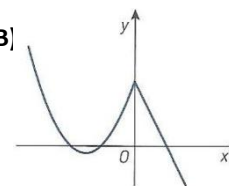
$$y = -f(x)$$

$$y = f(-x)$$

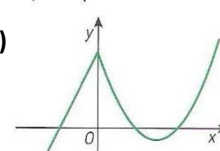
(A)



(B)



(C)



Faça a corresponder a cada gráfico a sua respectiva função.

FUNÇÕES POLINOMIAIS. POLINÓMIOS

■ POLINÓMIOS

Exemplos:

A(x) = $4x^2 + 2x - 20$ (polinómio do 2º grau completo)

B(x) = $4x + 10$ (binómio do 2º grau completo)

C(x) = $-6x^5$ (monómio do 5º grau)

D(x) = $x^3 + 3x^2 - 10x$ (polinómio do 3º grau incompleto, uma vez que lhe falta o termo independente)

E(x) = $5x^2 - 3x + 4$ e F(x) = $4 + 5x^2 - 3x$ são polinómios idênticos

E(x) = $5x^2 - 3x + 4$ e H(x) = $-5x^2 + 3x - 4$ são polinómios simétricos

C(x) = $-6x^5$ e J(x) = x^5 são monómios semelhantes porque têm a mesma parte literal (x^5).

Um polinómio de grau n , na variável real x , é toda a expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_0$

Um polinómio com dois termos diz-se binómio.

Se o polinómio tem um só termo, diz-se monómio.

Um polinómio que apresenta todos os coeficientes iguais a zero diz-se polinómio nulo.

Um polinómio diz-se completo se e só se contiver todas as potências de x , desde x^n até ao termo independente.

Exercícios:

52. Calcule o valor de:

52.1. $t^2 - 6t + 10$, para $t = 2$ 52.2. $x^2 - 5x - 9$, para $x = -3$ 52.3. $m^3 - 9m$, para $m = -1$ e $m = 1$

53. Escreva por ordem decrescente das potências de x e indique o grau e os coeficientes dos vários termos:

53.1. $1 + 6x + 9x^2 - 8x^3$ 53.2. $3 - 9x^2 + 24x^4$ 53.3. $x^5 - 5x^3 - 6x^6 - 7x$

OPERAÇÕES COM POLINÓMIOS

> Adição

Basta reduzir os termos semelhantes (somar os monómios com igual parte literal).

Exemplo: Adicionemos os polinómios $A(x) = 5x^2 + 4x + 3$ e $B(x) = -2x^2 + 4x^3 - x - 5$

$$A(x) + B(x) = 5x^2 + 4x + 3 + (-2x^2 + 4x^3 - x - 5) = 4x^3 + 3x^2 + 3x - 2$$

> Subtração

Para subtrair dois polinómios, adiciona-se ao polinómio aditivo o simétrico do polinómio subtrativo e, em seguida, reduzem-se os termos semelhantes.

Exemplo: Calculemos a diferença entre os polinómios $A(x)$ e $B(x)$ do exemplo anterior.

$$A(x) - B(x) = A(x) + (-B(x)) = (5x^2 + 4x + 3) + (2x^2 - 4x^3 + x + 5) = -4x^3 + 7x^2 + 5x + 8$$

> Multiplicação

Para multiplicar dois polinómios multiplica-se cada termo do primeiro polinómio pelo segundo polinómio e adicionam-se os produtos obtidos.

Exemplo: Efectuemos a multiplicação dos polinómios $A(x) = 2x^2 + 1$ e $B(x) = 3x^2 + 2x + 3$

$$A(x) \times B(x) = (2x^2 - 1)(3x^2 + 2x + 3) = 6x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x^2 - 2x - 3 = 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

O grau do produto de dois polinómios é a soma dos graus desses polinómios.

No exemplo $2 + 2 = 4$

Recorde:

Casos notáveis da multiplicação

Quadrado do binómio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1.º 2.º

Quadrado do 2.º

Dobro do produto
do 1.º pelo 2.º

Quadrado do 1.º

Diferença de quadrados

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

1.º 2.º 1.º 2.º

Quadrado do 2.º

Quadrado do 1.º

> Divisão inteira de polinómios

No conjunto $\mathbb{N}$, efectuar a divisão inteira de um número **A** por um número **B** é encontrar um número natural **Q** (quociente) e um número natural **R** (resto), tais que

$$A = B \times Q + R, \text{ com } r < 0.$$

No conjunto dos polinómios tudo se passa de modo idêntico:

A divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$ consiste em determinar dois polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que:

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

sendo o grau de $R(x)$ menor que o grau de $B(x)$, ou $R(x) = 0$.

Quando $R(x) = 0$ diz-se que a divisão é exacta.

Exercícios:

54. Calcule e escreva o resultado na forma do polinómio reduzido e ordenado:

54.1. $(x^2 - 4x + 3) + (x - 2x^3 + 5x^2)$

54.2. $(x^2 - 4x + 3) - (x - 2x^3 + 5x^2)$

55. Efectue as operações indicadas e escreva o resultado na forma de polinómio ordenado e reduzido:

55.1. $(x+1)(x+3)$

55.2. $(2x-3)(x^2-5x)$

55.3. $(3x-1)(x^2+x+1)$

56. Indique o grau do polinómio produto de:

56.1. $x^3 - 5x^2 + 1$ por $x^2 - x - 3$

56.2. $x - 1$ por um polinómio do 5º grau.

56.3. um polinómio do 3º grau por um polinómio do 2º grau.

57. Sendo $A(x) = (x+2)(x+4)$ e

$B(x) = 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ determine o

polinómio $C(x)$ tal que:

57.1. $A(x) + C(x) = 2x - 1$

57.2. $B(x) = C(x) \times (x - 3)$

57.3. $A(x) = C(x) \times (x + 2)$

Nota:

Em $\mathbb{N}$: $38475 : 42 =$

$$\begin{array}{r} 38475 \quad | \quad 42 \\ -378 \quad \quad \quad 914 \\ \hline 0067 \\ -42 \quad \quad \quad \\ \hline 255 \\ -248 \quad \quad \quad \\ \hline 007 \end{array}$$

$$38475 = 42 \times 914 + 7$$

Dividendo = divisor $\times$
quociente + resto

Algoritmo da divisão inteira

Exemplo:

Calculemos o quociente e o resto da divisão inteira do polinómio $A(x) = -3x^2 + 5x^4 + x - 1$ pelo polinómio $B(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r}
 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 -5x^4 - 10x^3 \quad | \quad 5x^3 \\
 \hline
 -10x^3 - 3x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 -10x^3 - 20x^2 \quad | \quad 5x^3 - 10x^2 + 17x - 33 \\
 \hline
 10x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 10x^2 + 20x \quad | \quad 5x^3 - 10x^2 + 17x - 33 \\
 \hline
 -17x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 -17x - 34 \quad | \quad 5x^3 - 10x^2 + 17x - 33 \\
 \hline
 33x + 66 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 65
 \end{array}$$

1º) Ordenam-se os polinómios dividendo e divisor segundo as potências decrescentes de x , escrevendo também os termos nulos quando o dividendo não é um polinómio completo.

2º) Divide-se o termo de maior grau do polinómio dividendo pelo termo de maior grau do polinómio divisor. Obtemos o termo de maior grau do polinómio quociente.
 $5x^4 : x = 5x^3$

3º) Multiplica-se esse termo do quociente por cada um dos termos do polinómio divisor e escreve-se o simétrico do produto por baixo do monómio do mesmo grau que se encontra no dividendo.

$$2(5x^3) = 10x^3 \quad \text{simétrico } -10x^3$$

$$x(5x^3) = 5x^4 \quad \text{simétrico } -5x^4$$

Em seguida adicionam-se os monómios do mesmo grau e obtém-se o primeiro resto parcial.

4º) Divide-se o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do polinómio divisor para obtermos o segundo termo do quociente.

$$-10x^3 : x = -10x^2 \quad \text{simétrico } 10x^2$$

O processo repete-se até que o polinómio resto tenha um grau inferior ao do polinómio divisor.

Portanto, $Q(x) = 5x^3 - 10x^2 + 17x - 33$ e $R(x) = 65$.

O grau do quociente é igual à diferença entre os graus do dividendo e do divisor.

O quociente é de grau 3: grau 4 (do dividendo) – grau 1 (do divisor).

Exercícios:

58. Calcule e escreva o resultado na forma do polinómio reduzido e ordenado:

58.1. $(x+1)^2 - 3x(-x+1)$

58.2. $(x^2+4) - (2-x)(2+x)$

58.3.

$$-(x-3)^2 - (x-1)(x+3)$$

59. Determine o quociente e o resto da divisão inteira de:

59.1. $3x^4 - 4x^3 - 5x + 10$ por $3x + 2$

59.2. $x^4 - 8$ por $x^2 + 2$

59.3. $x^4 - 8$ por $x^2 + x$

60. Determine o polinómio que:

60.1. dividido por

$x^2 + 3x - 1$ tem como quociente $3x - 2$ e resto $5x + 4$.

60.2. dividido por $x^3 - 1$

tem como quociente $x^2 - 1$ e resto $x - 1$.

60.3. dividido por $x - 1$ tem como quociente $x^2 + x + 1$ e resto zero.

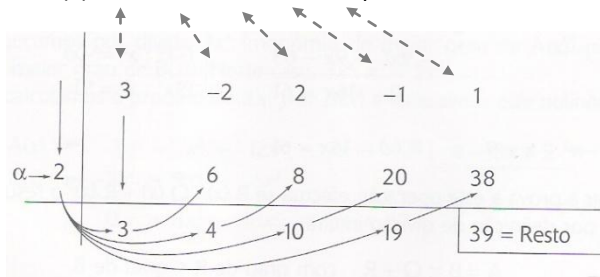
M.A.(6)

Regra de Ruffini

Quando, na divisão inteira de polinómios, o divisor é um polinómio de grau 1, em particular do tipo $x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, o procedimento exposto através do algoritmo da divisão dá lugar a um método simples denominado por Regra de Ruffini, que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente e resto da divisão (grau zero).

Exemplo 1:

Dividir $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $x - 2$



$$Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 10x + 19$$

Sendo $A(x)$ um polinómio do 4º grau, o quociente da divisão por $x - 2$ é um polinómio do 3º grau.

Exercício:

61. Use a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto de cada uma das divisões:

61.1. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ por $x - 1$

61.2. $4x^4 - 5x^2 + 8$ por $x + 0,5$

61.3. $x^3 - 5x + 4$ por $x - 3$

61.4. $x^4 - 5x^2 + 4$ por $x + \sqrt{2}$

61.5. $3x^4 - 2x^2 + 1$ por $x + \frac{2}{3}$

Exemplo 2:

Use a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 - x^2 + 2x + 6$ por $2x + 4$

Repare que $2x + 4 = 2(x + 2)$.

Então, se $P(x) = (x + 2) \times Q(x) + R$, será $P(x) = 2(x + 2) \times \frac{Q(x)}{2} + R$.

Ou seja, o quociente da divisão de $P(x)$ por $2x + 4$ é metade do quociente da divisão de $P(x)$ por $x + 2$; o resto é o mesmo

	1	-1	2	6
-2	↓	-2	6	-16
	1	-3	8	-10

$$Q(x) = \frac{x^2 - 3x + 8}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 ; R(x) = -10$$

Em geral, para dividir $P(x)$ por $ax + b$, e tendo em atenção que

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right), \text{ divide-se } P(x) \text{ por}$$

$x + \frac{b}{a}$, depois divide-se o quociente

obtido por a e o resto não se altera.

Exercício:

62. Use a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto de cada uma das divisões:

62.1. $x^3 - 3x^2 + x - 2$ por $2x - 6$ **62.2.** $x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 15$ por $3x - 1$

TEOREMA DO RESTO

Calculemos $P(2)$ para o exemplo 1 e $P(-2)$ para o exemplo 2:

Exemplo 1: $P(2) = 3 \times 2^4 - 2 \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 + 1 = 39$

Exemplo 2: $P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 2 \times (-2) + 6 = -10$

Verificamos que o valor do resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $P(a)$.

Teorema do resto:

O resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por $x - \alpha$ é o valor numérico do polinómio $P(x)$ para $x = \alpha$ e designa-se por $P(\alpha)$.

Outras conclusões:

- Um número α diz-se raiz ou zero de um polinómio se $P(\alpha) = 0$
- Dizer que α é raiz de um polinómio equivale a dizer que esse polinómio é divisível por $x - \alpha$.

Exercícios:

63. Calcule sem efectuar a divisão o resto da divisão de $x^3 - 3x^2 - 4x + 6$ por:

63.1. $x - 3$

63.2. $x + 2$ **63.3.** $x - \sqrt{2}$

63.4. $2x - 4$ **63.5.** $x - \frac{1}{3}$

64. Sem efectuar a divisão determine para que valor de m :

64.1. $y^3 - my^2 + y + 6$ é divisível por $y + 2$.

64.2. $-6 - 2t + mt^2 + 5t^4$ dividido por $t - 1$ dá resto 4.

65. Sem efectuar as divisões:

65.1. Investigue se $2x^4 - 3x - 26$ é divisível por $x - 2$.

65.2. Determine o valor de k para o qual o polinómio $P(x) = x^3 - kx^2 - 2x - 4$ é divisível por $x + 2$.

65.3. Indique quais dos números $-2, 0, 1, 2$ e 3 são raízes do polinómio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

ZEROS E FACTORIZAÇÃO DE UM POLINÓMIO

O resultado anterior revela-se muito útil quando queremos decompor um polinómio em factores de primeiro grau. Estudemos alguns exemplos.

Exemplo 1: Decompor em factores o polinómio $P(x) = 3x^2 - x - 4$:

Como o polinómio é do 2º grau utilizemos a fórmula resolvente para calcular as suas raízes.

$$3x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -1$$

Como $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = \frac{4}{3}$, $P(x)$ é divisível por $x + 1$ e por $x - \frac{4}{3}$.

Então: $P(x) = 3(x + 1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$

Exemplo 2: Decompor o polinómio $A(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ sabendo que é divisível por $x+1$.

Se o polinómio é divisível por $x+1$, -1 é uma raiz do polinómio. Calculemos o quociente de $A(x)$ por $x+1$ aplicando a regra de Ruffini:

-1	2	-7	-14	-5
	2	-9	-5	0

$$Q(x) = 2x^2 - 9x - 5$$

Podemos portanto escrever $A(x) = (x+1)(2x^2 - 9x - 5)$. Mas como o segundo factor é um polinómio de grau 2, utilizamos a fórmula resolvente para determinar, se existirem, as raízes deste factor.

$$2x^2 - 9x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 11}{4} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Temos assim as raízes $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ e $\alpha_3 = 5$; $a_0 = 2$

$$A(x) = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-5)$$

Exemplo 3: Decompor em factores o polinómio $B(x) = 3x^4 - 9x^2 + 6$ sabendo que -1 e 1 são raízes do polinómio.

Calculemos o quociente de $3x^4 - 9x^2 + 6$ por $x+1$ e por $x-1$ utilizando a regra de Ruffini.

-1	3	0	-9	0	6
	3	-3	3	6	-6
1	3	-3	-6	6	0
	3	0	-6	0	0

$$Q(x) = 3x^2 - 6$$

Podemos portanto escrever $B(x) = (x+1)(x-1)(3x^2 - 6)$

Vamos agora determinar, se existirem, as raízes de $3x^2 - 6$

$$3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

O polinómio tem 4 raízes: $-\sqrt{2}$, -1 , 1 , $\sqrt{2}$ e $a_0 = 3$. Então: $B(x) = 3(x+\sqrt{2})(x+1)(x-1)(x-\sqrt{2})$

▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DE GRAU SUPERIOR A 2

Não dispondo de fórmulas resolventes, a resolução de equações e inequações do 3º e do 4º grau far-se-á pela lei do anulamento do produto, nos casos em que é fácil encontrar uma ou duas raízes algébricas, ou graficamente.

Exemplo 1: Sendo $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, resolver a equação $P(x) = 0$

É necessário “descobrir” uma raiz do polinómio. Como o termo independente é 2, é possível que o polinómio $P(x)$ seja divisível por $x-2$. Vamos verificar utilizando a regra de Ruffini.

2	1	-2	-1	2
	1	0	-1	0

$Q(x) = x^2 - 1$ As raízes de $x^2 - 1$ são -1 e 1 .

Então $P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$. Agora que o polinómio está decomposto em factores, podemos resolver a equação $P(x) = 0$ através da lei do anulamento do produto.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2) = 0 \vee (x+1) = 0 \vee (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$S = \{-1, 1, 2\}$$

Exercícios:

66. Decompõe em factores os polinómios seguintes:

66.1. $x^2 - 5x + 6$

66.2. $6x^2 - 19x + 10$

66.3. $66 + 5x - x^2$

66.4. $x^3 + 2x^2 + 5x$

66.5. $x^3 - 49x$

66.6. $x^3 + 2x^2 - x + 6$, sendo -3 uma das raízes.

66.7. $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$, sabendo que admite as raízes 1 e -1 .

66.8. $-x^3 + x^2 + x + 95$, sabendo que é divisível por $x-5$

67. De um polinómio $P(x)$ de terceiro grau, sabemos que:

* -2 , 2 e 3 são os seus zeros

* $P(-1) = 1$

Determine $P(x)$.

68. Determine o polinómio $A(x)$ de quarto grau, sabendo que 2 e 1 são zeros de multiplicidade 2 e o resto da divisão de $A(x)$ por $x+1$ é 3 .

Um polinómio tiver grau n poderá ter no máximo n raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$.

A sua decomposição será:

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Em que a_0 é o coeficiente do termo de mais alto grau

Exemplo 2: Resolver a equação $2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$ sabendo que uma das raízes é -2 .

Vamos dividir $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ por $x + 2$

-2	2	9	12	4
	2	5	2	0

$$Q(x) = 2x^2 + 5x + 2$$

As raízes de $2x^2 + 5x + 2$ são -2 e $-\frac{1}{2}$

$$P(x) = 2(x+2)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Agora que o 1º membro da equação está decomposto num produto de factores podemos resolver a equação através da lei do anulamento do produto. Repara que o polinómio tem duas raízes -2 , ou seja, -2 é raiz dupla.

A raiz $-\frac{1}{2}$ é raiz simples.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \vee x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$$

Exemplo 3: Considere $P(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4$ e determine o conjunto de valores de x para os quais:

a) $P(x) = 0$ (equação biquadrada)

b) $P(x) > 0$ (inequação)

Resolução:

a) A equação $4x^4 - 15x^2 - 4 = 0$ é do 4º grau e tem nulos os termos do 3º grau e do 1º grau.

A esta equação chama-se equação biquadrada.

Para resolvermos uma equação biquadrada, fazemos uma

mudança de variável de modo a obter uma equação do 2º grau.

Se na equação $4x^4 - 15x^2 - 4 = 0$ substituirmos x^2 por y , vem

$$4y^2 - 15y - 4 = 0.$$

Calculemos as raízes desta nova equação.

$$y = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4 \times 4 \times (-4)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow y = \frac{15 \pm 17}{8} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = -\frac{1}{4}$$

Como $x^2 = y$, vem

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \quad \text{e} \quad x^2 = -\frac{1}{4} \text{ é impossível}$$

$$\text{Então } P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$S = \{-2, 2\}$$

b) Trata-se de resolver a inequação $P(x) > 0$

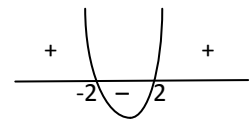
Decompondo o 1º membro em factores, vem

$$4\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) > 0$$

Visto que $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, temos que estudar

$$\left(x^2 - 4\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$



O conjunto das soluções é $S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Exemplo 4: Determine quais os números reais cujo cubo é menor que o próprio número.

Resolução:

$$x^3 < x \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) < 0$$

Neste caso qualquer dos factores pode ser positivo ou negativo, pelo que é conveniente organizar um quadro onde se registam os sinais de cada um dos factores.

O factor x anula-se para $x = 0$, e é do 1º grau; o factor $x^2 - 1$ anula-se para $x = \pm 1$, é do 2º grau e é positivo fora do intervalo das raízes.

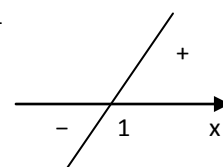
Marcam-se num eixo os valores que anulam cada um dos factores, por ordem crescente, e sob ele constrói-se o quadro de sinais.

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
1.º factor: x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
2.º factor: $x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
Produto: $x(x^2 - 1)$	$-$	0	$+$	0	$+$

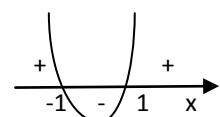
O produto é negativo para $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Os números reais que satisfazem esta condição são os desta reunião de intervalos.

Se a condição fosse $x^3 \leq x$, o conjunto das soluções seria $S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$x - 1$



$x^2 - 1$



Exercícios:

69. Resolva as equações:

69.1. $p^4 - 13p^2 + 36 = 0$

69.2. $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

69.3. $16x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

69.4. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, sabendo que tem as raízes 2 e 3. 69.5. $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$, sabendo que tem a raiz 1

70. Resolva cada uma das equações depois de descobrir uma das raízes:

70.1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

70.2. $m^3 + 3m^2 - 4m - 12 = 0$

71. O polinómio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$ admite raízes que são divisores inteiros do termo independente.

71.1. Decomponha $P(x)$ em factores.

71.2. Resolva a equação $P(x) = 0$

72. Resolva as inequações:

72.1. $x^3 - 6x^2 + 8x \leq 0$

72.2. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$

72.3. $(x-2)^2 \times (x-1)^3 \geq 0$

72.4. $(x^2 - 9)(x+2) < 0$

72.5. $m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 8m - 4 \leq 0$

72.6. $(3-x)(x^2 - 100) \leq 0$

73. Considere o polinómio $P(x) = 3x^4 - ax^2 + 1$ com $a \in \mathbb{R}$.

73.1. Determine a de modo que o polinómio seja divisível por $x + 1$.

73.2. Considere $a = 2$ e, resolva a condição $P(x) \geq 0$

74. Determine os números reais tais que o seu quadrado é maior que o dobro do seu cubo.

Bibliografia utilizada na compilação:

COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda, **Espaço 10A, Matemática 10º Ano**, Edições Asa 2007

COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda, **Novo Espaço, Matemática A 10º Ano**, Porto Editora 2010

DUARTE, Teresa Olga e FILIPE, Jaime Pinheiro, **Matemática Dez, Matemática 10º Ano**, Lisboa Editora, 2010

FERREIRA NEVES, Maria Augusta; GUERREIRO, Luís; LEITE, António e SILVA, Jorge Nuno, **Matemática A 10º Ano**, Porto Editora, 2010

FERREIRA NEVES, Maria Augusta e GUERREIRO, Luís, **Exercícios de Matemática A 10º Ano**, Porto Editora

FERREIRA NEVES, Maria Augusta e GUERREIRO, Luís, **Matemática - 8º Ano**, Porto Editora

NEGRA, Cristina e MARTINHO, Emanuel, **Sem Limites, Matemática A 10º Ano**, Santillana Constância, 2007

PASSOS SOUSA, Ana Paula e TORRÃO COUTINHO, Maria de Piedade, **Matemática A 10º Ano – Exercícios**, Lisboa Editora, 2007

RIBEIRO, Jorge Tavares e SANTOS, Jorge, **Matemática 10, Matemática A 10º Ano**, Edições Asa 2007

SOVERAL, Ana Arede e SILVA, Carmen Viegas, **Matemática B, Matemática 10º Ano**, Texto Editores, 2005