

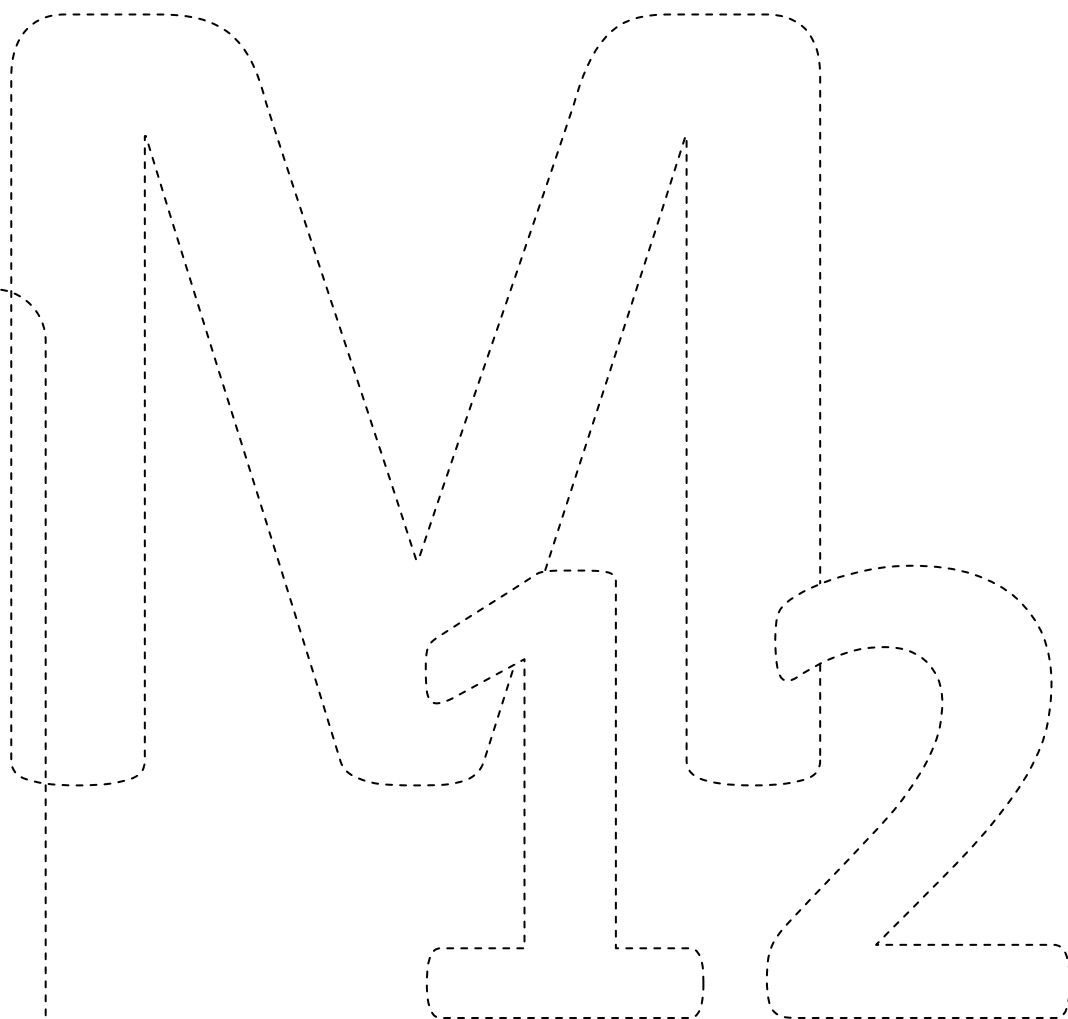
TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

12ª Classe – 2º Ciclo

MATEMÁTICA



Ministério da Educação
Cultura e Formação



ÍNDICE

Tema 1 – Probabilidades	2
▪ Introdução ao Cálculo de Probabilidades	3
▪ Análise Combinatória	13
▪ Distribuição de Frequências Relativas e Distribuição de Probabilidades	21
 Tema 2 – Funções	 29
▪ Funções Exponenciais e Logarítmicas	30
▪ Teoria dos Limites	52
▪ Continuidade de uma Função	68
▪ Cálculo Diferencial	73
 Tema 3 – Trigonometria	 90
▪ Funções Trigonométricas com Funções Reais de Variável Real	91
▪ Números Complexos	109
 Bibliografia	 123

TEMA 1

PROBABILIDADES

INTRODUÇÃO

A incerteza foi, ao longo dos tempos, e continua a ser, a principal razão do estudo das probabilidades. Podem ser conhecidos todos os possíveis resultados de um fenómeno aleatório, mas, antes que esteja concretizado, mantém-se a incerteza quanto ao resultado que ocorrerá.

Essa incerteza é a motivação de muitos jogos, como por exemplo, a lotaria, o totoloto, jogos relacionados com o lançamento de dados ou o girar de roletas. De certa forma, a origem das probabilidades está relacionada com os chamados “jogos de azar”.

Problemas relacionados com o jogo alimentaram, ao longo dos anos, a reflexão e a discussão em torno das probabilidades. Um exemplo disso é a troca de correspondência entre Fermat e Pascal, no século XVII, para discutir um problema colocado por Antoine de Gambard (1610-1685) chamado de “cavaleiro De Méré”.

A partir da correspondência entre Pascal e Fermat, a teoria das probabilidades associada à Matemática, teve um impulso no seu desenvolvimento. Para isso houve vários contributos, como por exemplo, os de Jacob Bernoulli e Laplace.

O problema do cavaleiro De Méré:

Dois jogadores, o cavaleiro e um seu adversário, estão a jogar aos dados. Cada um aposta num determinado número e ganha o primeiro a obter pela terceira vez o número que apostou.

A aposta foi de 64 moedas (32 cada um) e o jogo é interrompido quando o cavaleiro tem 2 sucessos contra 1 do adversário. Como deve ser repartido o valor apostado?

Alguns matemáticos:



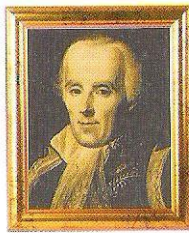
Blaise Pascal
(1623-1662)



Fermat
(1601-1655)



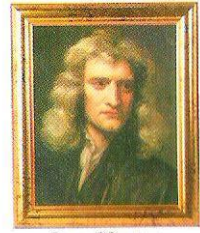
Jacob Bernoulli
(1654-1705)



Laplace
(1749-1827)



Gauss
(1777-1855)



Isaac Newton
(1642-1727)

Legenda de cores utilizada nos exercícios deste tema:

am – amarelo **az** – azul **vd** – verde **vm** – vermelho **l** – laranja **b** – branco **p** – preto

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

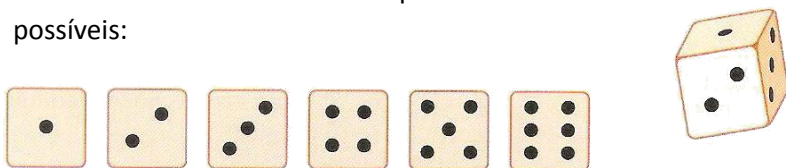
▪ EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA. CONJUNTO DE RESULTADOS. ACONTECIMENTOS

As experiências que realizamos dividem-se em dois tipos: experiências deterministas e experiências aleatórias.

O lançamento de uma pedra a um lago para verificar onde fica a pedra, é um exemplo de experiência determinista porque mesmo antes da realização do lançamento já sabemos que a pedra irá para o fundo do lago.

O lançamento de um dado numerado de 1 a 6 para observar qual o número que fica para cima é um exemplo de uma experiência aleatória pois o resultado apenas é conhecido após a realização do lançamento.

Relativamente a esta última experiência existem seis resultados possíveis:



Assim, os resultados possíveis desta experiência são:

1, 2, 3, 4, 5 e 6

Daqui resulta o conjunto de resultados ou o espaço amostral desta experiência: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Admita que na realização da experiência, há interesse em observar se sai um número ímpar, temos:

$A = \{1, 3, 5\}$

$A \subset S$. A é um acontecimento.



Alguns acontecimentos têm nomes específicos:

- Acontecimento elementar: Se o resultado de uma experiência consta de um só elemento do conjunto de resultados.

Exemplo: B: "Sair o número dois" $B = \{2\}$

- Acontecimento composto: Se o resultado de uma experiência consta de dois ou mais elementos do conjunto de resultados.

Exemplo: C: "Sair um número par" $C = \{2, 4, 6\}$

- Acontecimento certo: Se o resultado de uma experiência consta de todos os elementos do conjunto de resultados.

Exemplo: D: "Sair um número menor que 8" $D = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Acontecimento impossível: Se o resultado de uma experiência não tem qualquer elemento do conjunto de resultados.

Exemplo: E: "Sair um número maior que 7" $E = \{\}$

Para ajudar a determinar o conjunto de resultados pode-se usar diagramas de árvore, tabelas ou outros esquemas.

Experiência aleatória é uma experiência com as seguintes características:

- são conhecidos os resultados possíveis
- não é possível prever (determinar) o resultado de cada uma das experiências
- pode ser repetida em condições idênticas.

Conjunto de resultados ou espaço amostral de uma experiência aleatória é o conjunto de resultados possíveis que lhe está associado a representa-se habitualmente por S , E ou Ω .

Acontecimento de uma experiência aleatória é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exercícios:

1. Das seguintes experiências indique as que são aleatórias e as que são deterministas:

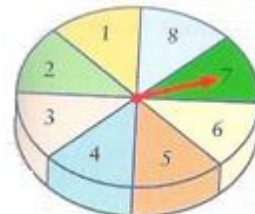
A: Lançar ao ar uma moeda e observar a face que fica voltada para cima.

B: Observar a quantidade de água que é derramada quando se introduz um cubo com 3 cm de aresta dentro de um recipiente cheio de água.

C: Observar, numa localidade, a pluviosidade durante uma semana.

D: Num jogo de cartas, observar o número de ases distribuídos a um dos jogadores.

2. Observe a roleta da sorte representada na figura e considere a experiência de rodar o ponteiro e anotar o número que sai.



2.1. Defina o conjunto de resultados.

2.2. Classifique os acontecimentos:

a) A: "sair múltiplo de 8"

b) B: "sair número par"

c) C: "sair número primo"

d) D: "sair 9"

e) E: "não sair 9"

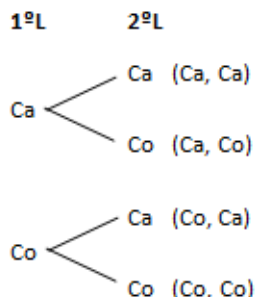
Exemplo 1. O Adamilton lançou duas vezes uma moeda de 1000 dobras e registou, em cada lançamento, a face da moeda que ficou voltada para cima.

Ca – face cala

Co – face coroa



Para obter todos os resultados possíveis, desta experiência, pode recorrer-se a um diagrama de árvore:



O conjunto de resultados possíveis é:

$S = \{ (Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co) \}$

Exemplo 2: Determinemos agora o espaço amostral da experiência aleatória que consiste em lançar dois dados, e observar os resultados.

Para esta experiência a melhor forma de obter todos os resultados é utilizando uma tabela de dupla entrada:

1 ^d \ 2 ^d	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

O espaço amostral é o conjunto formado pelos 36 elementos da tabela.

Exercícios:

3. Na figura estão representadas 6 fichas que foram colocadas num saco.



Indique o espaço de resultados associado a cada uma das seguintes experiências aleatórias:

3.1. Retirar uma ficha e observar a cor.

3.2. Retirar sucessivamente, com reposição, duas fichas e calcular a soma dos números das fichas retiradas

4. Considere a tabela ao lado (**exemplo 2**).

Identifique os acontecimentos:

A: O número de pintas é igual nos dois dados

B: A soma das pintas é 9.

C: O produto do número de pintas é 2.

$S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6) \}$

▪ OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Como os acontecimentos são identificados com conjuntos, a forma de operar com acontecimentos decorre da forma de se operar com conjuntos, com a correspondente adaptação a uma linguagem específica.

Exemplo: Num saco foram colocadas 6 bolas numeradas de 1 a 6.

Consideremos a experiência aleatória que consiste em tirar uma bola e observar o número que saiu. Sejam A e B os acontecimentos:

A: sair um número menor que 4. $A = \{1, 2, 3\}$

B: sair um número par. $B = \{2, 4, 6\}$

O espaço amostral da experiência aleatória é: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A representação dos conjuntos (acontecimentos) num diagrama de Venn, permite uma melhor visualização da distribuição do espaço amostral pelos acontecimentos.

> Reunião de dois acontecimentos: Reunião ou união dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se pelo menos um dos acontecimentos se realizar, A ou B. Representa-se por $A \cup B$ e lê-se (A ou B).

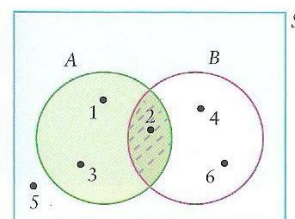
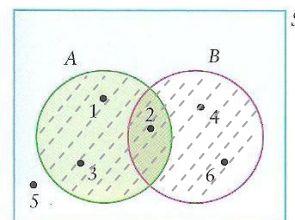
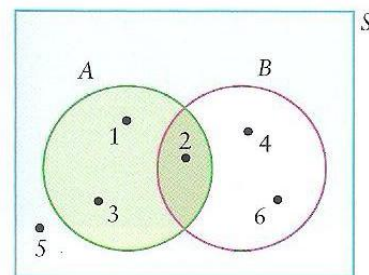
No exemplo: $A \cup B$: Sair um número menor que 4 ou par.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

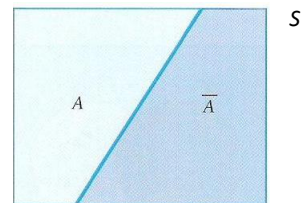
> Intersecção de dois acontecimentos: A intersecção dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A e B se realizarem simultaneamente. Representa-se por $A \cap B$ e lê-se (A e B).

No exemplo: $A \cap B$: Sair um número par menor que 4.

$A \cap B = \{2\}$

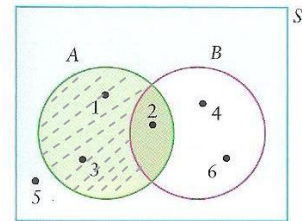


> **Acontecimentos contrários ou complementares:** O acontecimento contrário do acontecimento A representa-se por $\bar{A}$ e é o acontecimento constituído por todos os resultados de S que não pertencem a A.



No exemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ $A \cap \bar{A} = \{\}$
 $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ $A \cup \bar{A} = S$

> **Acontecimento diferença:** Acontecimento diferença entre A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize. Representa-se por $A - B$ ou $A \setminus B$.



No exemplo: $A \setminus B$: Sair um número menor que 4 que não seja par.
 $A \setminus B = \{1, 3\}$

Podemos ainda classificar dois acontecimentos como compatíveis ou incompatíveis:

> **Acontecimentos compatíveis:** Dois acontecimentos A e B são compatíveis se e só se $A \cap B \neq \{\}$.

No exemplo: A e B são compatíveis porque $A \cap B = \{2\}$

> **Acontecimentos incompatíveis:** Dois acontecimentos A e B são incompatíveis se e só se $A \cap B = \{\}$.

No exemplo: Consideremos o acontecimento C: sair o número 1.
B e C são incompatíveis porque $B \cap C = \{\}$

Nota: dado um conjunto finito A, com n elementos, diz-se que o cardinal de A é n e representa-se por $\#A = n$.

6. Relativamente à experiência aleatória de lançar dois dados, de cores diferentes, e observar os números, considere os seguintes acontecimentos:

A: saírem dois números pares.

B: a soma dos números é 10.

C: saírem dois números diferentes.

D: o produto dos números é inferior a 5.

6.1. Represente na forma de conjunto:

a) D b) $A \setminus D$ c) $\bar{C}$ d) $A \cap B$

6.2. Defina um acontecimento:

a) compatível com D. b) incompatível com B.
c) contrário a A.

Exercícios:

5. Numa caixa foram colocadas dez fichas numeradas de 1 a 10.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma ficha e observar o seu número. Considere os acontecimentos:

A: Sair número primo.

B: Sair número par.

C: Sair número divisor de 6.

5.1. Represente os acontecimentos num diagrama de Venn.

5.2. Represente na forma de conjunto:

a) $A \cup B$ b) $B \cap C$ c) $\bar{C}$ d) $A \setminus C$ e) $C \setminus A$

▪ APROXIMAÇÃO FREQUENCISTA DE PROBABILIDADE

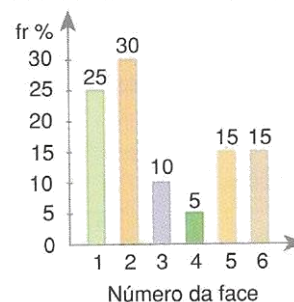
Consideremos a experiência aleatória: lançamento de um dado. Os seguintes gráficos representam a frequência relativa de cada um dos acontecimentos elementares: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$.

Com a ajuda dos gráficos e relembrando os conceitos de frequência absoluta e relativa, estudados na 10ª classe, complete as tabelas.

- Resultados de 100 lançamentos

X_i	1	2	3	4	5	6
n_i	25	30	10	5	15	15
f_i	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{30}{100} = 0,3$	$\frac{10}{100} = 0,1$	0,05	0,15	
$f_i\%$	25%	30%				

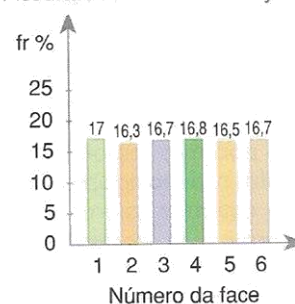
Resultados de 100 lançamentos



- Resultados de 1000 lançamentos

X_i	1	2	3	4	5	6
n_i	170	163	167		165	167
f_i	$\frac{170}{1000} = 0,17$	0,163	0,167		0,165	0,167
$f_i\%$	17%	16,3%	16,7%			

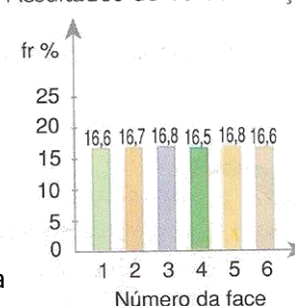
Resultados de 1000 lançamentos



- Resultados de 10 000 lançamentos

X_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1660	1670				
f_i						
$f_i\%$	16,6%	16,7%	16,8%			

Resultados de 10 000 lançamentos



A quantificação da probabilidade de um determinado acontecimento resulta em muitas situações, da observação dos resultados de um grande número de experiências.

No exemplo estudado verifica-se que à medida que o número de experiências aumenta, as frequências relativas de cada acontecimento elementar tendem a estabilizar em torno dos 0,167, assume-se esse valor como sendo a probabilidade dos referidos acontecimentos.

Nota: $fr(A)$ representa a frequência relativa de um acontecimento A e é calculada através do quociente entre o número de vezes que A ocorre e o número de experiências efectuadas.

Probabilidade (frequentista) de um acontecimento A representa-se por $P(A)$ e corresponde ao valor para que tende a estabilizar a frequência relativa da realização desse acontecimento, à medida que aumenta o número de repetições da experiência aleatória.

Nota: quanto maior é o número de vezes que a experiência é repetida, melhor será a estimativa obtida para a probabilidade.

Propriedades da probabilidade

Propriedades das frequências relativas	Propriedades das probabilidades
E – experiência aleatória em que o espaço de resultados é Ω e A e B são dois acontecimentos	
$0 \leq f_r(A) \leq 1$	$0 \leq P(A) \leq 1$
Se $A = \{a, b\}$, então $f_r(A) = f_r(\{a\}) + f_r(\{b\})$	Se $A = \{a, b\}$, então $P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\})$
Se $A = \Omega$, então $f_r(A) = 1$	Se $A = \Omega$, então $P(A) = 1$
Se $A = \{\}$, então $f_r(A) = 0$	Se $A = \{\}$, então $P(A) = 0$
Se $A \cap B = \{\}$, então $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$	Se $A \cap B = \{\}$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$f_r(\bar{A}) = 1 - f_r(A)$	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exercício:

7. Seja A um acontecimento associado a uma experiência aleatória com espaço de resultados S. Quais das seguintes igualdades são necessariamente falsas?

7.1. $fr(A) = -0,2$

7.2. $fr(A) = 1,02$

7.3. $fr(A) = 0,76$

8. Uma nova vacina está em fase de testes. Na tabela seguinte estão os registos do número de sucessos no decorrer dos testes.

Nº de testes	Nº de sucessos
200	165
500	423
1 000	843
2 000	1 682
5 000	4 202
7 500	6 308
10 000	8 403

Faça uma estimativa para a probabilidade de sucesso da aplicação da vacina num novo paciente. Fundamente a sua resposta.

▪ DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE OU DE LAPLACE

A primeira definição que se conhece de probabilidade foi enunciada por Pierre Simon Laplace (1749 – 1827).

Esta definição só pode ser aplicada quando os acontecimentos elementares são igualmente prováveis (equiprováveis).

Assim não podemos calcular a probabilidade de uma carga ficar voltada para cima usando a regra de Laplace. Neste e em muitos outros casos teríamos que recorrer à experiência (noção frequentista de probabilidade).

No entanto, no caso de lançamento de dados e moedas, extração de bolas, fichas e cartas de um baralho e em todas as situações em que os acontecimentos elementares são equiprováveis podemos calcular, com vantagem, a probabilidade usando a definição clássica de probabilidade (regra de Laplace).

Lei de Laplace ou regra de Laplace: Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favoráveis a A}}{\text{nº de casos possíveis}}$$

A regra de Laplace apenas se aplica no caso do conjunto de resultados ser finito.

Exemplo 1: Na figura está representada uma roleta dividida em 8 sectores circulares geometricamente iguais.

1.1. Consideremos a experiência:

I: Rodar a roleta e observar qual o número indicado pela seta.

Qual a probabilidade dos seguintes acontecimentos?

A: sair um número menor que 3. **B:** sair um número par. **C:** sair um número negativo.

Resolução:

Antes de calcular a probabilidade da cada um dos acontecimentos, definamos em extensão cada um deles para podermos ver com certeza quais os casos favoráveis: $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{1, 2\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ $C = \{\}$

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad P(C) = \frac{0}{8} = 0$$

1.2. Consideremos a experiência:

II: Rodar a roleta duas vezes e considerar o produto dos números saídos.

Qual a probabilidade dos seguintes acontecimentos:

D: o produto ser um número ímpar.

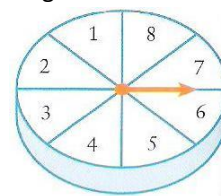
E: o produto ser maior que 5.

Resolução:

Para calcular a probabilidade da cada um dos acontecimento é útil definir o espaço amostral. Nesta experiência vamos usar uma tabela de dupla entrada:

×	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	10	12	14	16
3	3	6	9	12	15	18	21	24
4	4	8	12	16	20	24	28	32
5	5	10	15	20	25	30	35	40
6	6	12	18	24	30	36	42	48
7	7	14	21	28	35	42	49	56
8	8	16	24	32	40	48	56	72

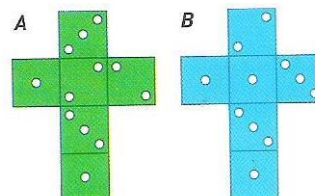
$$P(D) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad P(E) = \frac{54}{64} = \frac{27}{32} = 0,84$$



Exercícios:

9. Na figura estão representadas as planificações de dois dados equilibrados, A e B.

As faces estão pontuadas conforme a figura ilustra.



Indique o espaço de resultados de cada uma das seguintes experiências aleatórias e a probabilidade dos respectivos acontecimentos elementares:

9.1. Lançar o dado A e observar o número de pontos da face que fica voltada para cima.

9.2. Lançar o dado B e observar o número de pontos da face que fica voltada para cima.

10. Um saco contém bolas brancas e bolas pretas. Retira-se ao acaso uma bola.

A probabilidade de ser branca é $\frac{4}{5}$.

10.1. Se existirem 3 bolas pretas, quantas são as bolas brancas?

10.2. Se existirem 40 bolas no total, quantas delas são pretas?

Exemplo 2: Num teste há três afirmações, para as quais cada aluno deve indicar se é verdadeira (V) ou falsa (F). A Joana responde às três questões ao acaso.

Seja C o acontecimento: “A Joana acerta em, pelo menos, uma afirmação”.

Determine a probabilidade do acontecimento C.

Resolução:

Para cada afirmação, a Joana tem duas possibilidades: acertar – A ou errar – E

A contagem dos casos possíveis e dos casos favoráveis fica facilitada com recurso a uma representação em diagrama de árvore.

$S = \{ (A, A, A), (A, A, E), (A, E, A), (E, A, A), (E, A, E), (E, E, A), (E, E, E) \}$

$C = \{ (A, A, A), (A, A, E), (A, E, A), (E, A, A), (E, A, E), (E, E, A) \}$

Conclui-se, então, que há oito casos possíveis igualmente prováveis e sete casos favoráveis.

Por aplicação da lei de Laplace vem: $P(C) = \frac{7}{8}$

Raciocínio alternativo:

C: A Joana acerta em, pelo menos, uma afirmação.

$\bar{C}$: A Joana erra todas as afirmações. $\bar{C} = \{ (E, E, E) \}$

Então: $P(\bar{C}) = \frac{1}{8}$ Como $P(C) = 1 - P(\bar{C})$ tem-se $P(C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Exemplo 3: Na cidade X existem dois jornais com publicação semanal, o “Tira-Teimas” e o “Semanário”. Numa sondagem feita a 200 pessoas da cidade foi obtida a seguinte informação: 70 pessoas assinam o “Tira-Teimas”, 120 pessoas assinam o “Semanário” e 50 não assinam nenhum dos dois.

3.1. Quantas pessoas assinam os dois jornais?

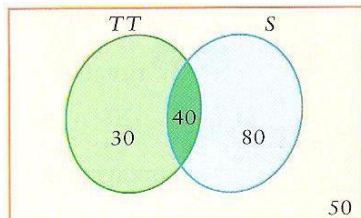
3.2. Escolhendo uma pessoa ao acaso qual a probabilidade de ela assinar apenas o jornal “Semanário”?

Resolução:

3.1. Para facilmente respondermos às questões vamos construir um diagrama de Venn.

$70 + 120 + 50 = 240$

Isso quer dizer que 40 pessoas assinam os dois jornais simultaneamente.



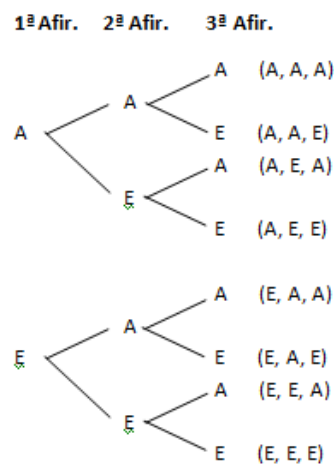
3.2. $P(\text{apenas Semanário}) = \frac{80}{200} = 0,4$

Em problemas anteriores já surgiram situações de experiências que envolviam mais do que uma experiência simples: lançar dois dados, lançar três moedas, tirar de um saco sucessivamente três bolas...

Com o exemplo seguinte vamos aprofundar alguns métodos para a resolução deste tipo de problemas.

Exemplo 4: Temos um saco com 5 fichas com o número 1 e três fichas com o número 2. Retiramos uma ficha do saco e tomamos nota do número, colocamos de novo a ficha no saco e retiramos nova ficha.

Qual a probabilidade das duas fichas terem o número 2?



Exercícios:

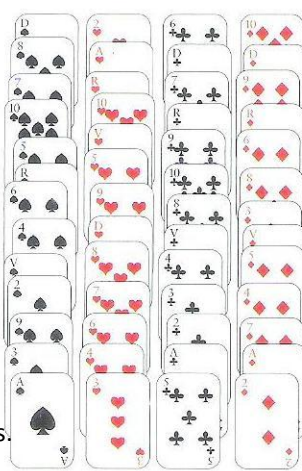
11. De um baralho com 52 cartas é retirada uma ao acaso.

Determine a probabilidade do acontecimento:

11.1. sair uma carta de copas.

11.2. sair uma carta que não seja de paus.

11.3. sair um rei.



12. Numa caixa há 10 bolas indistinguíveis ao tacto, que diferem apenas na cor: 5 vermelhas, 3 amarelas e 2 pretas.

Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola e observar a cor. Dê um exemplo de um acontecimento cuja probabilidade de ocorrer seja:

12.1. 50% **12.2.** $\frac{1}{5}$ **12.3.** 80% **12.4.** 0,7

13. Numa turma de 22 alunos, 10 praticam futebol, 11 praticam basquetebol e 5 praticam os dois desportos referidos.

13.1. De acordo com os dados construa um diagrama de Venn.

13.2. Encontrou-se ao acaso um dos alunos da turma. Qual a probabilidade de ele:

a) praticar natação?

b) praticar apenas futebol?

14. Considere uma caixa com quatro camisolas, uma de cada cor, e uma caixa com quatro saias, com as mesmas cores das camisolas.

Retirou-se ao acaso, uma camisola e uma saia. Qual a probabilidade de obter uma saia e uma camisola da mesma cor?

Resolução:

Esta experiência é composta por duas experiências simples. Para calcularmos a probabilidade nestas situações procura-se o método mais conveniente para contar os casos favoráveis e os casos possíveis.

Vamos resolver este problema por três métodos diferentes.

1º método: Vamos construir uma tabela de dupla entrada para contarmos os casos favoráveis e os casos possíveis.

1^a	1	1	1	1	1	2	2	2
2^a	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
1	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 2)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)

Para que as duas fichas tenham o número dois, temos 9 casos favoráveis em 64 possíveis.

$$P(\text{pedida}) = \frac{9}{64}$$

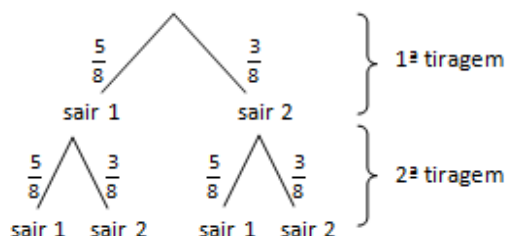
2º método: Regra do produto

Casos possíveis: 1^a tiragem $\times$ 2^a tiragem
 $8 \times 8 = 64$

Casos favoráveis: 1^a tiragem $\times$ 2^a tiragem
 $3 \times 3 = 9$

$$P(\text{pedida}) = \frac{9}{64}$$

3º método: No diagrama seguinte estão representadas as probabilidades correspondentes a cada uma das tiragens



Para determinar a probabilidade de termos dois 2 o raciocínio é:

“Em $\frac{3}{8}$ dos casos a 1^a ficha é 2 e a 2^a ficha é também 2 em $\frac{3}{8}$ dos

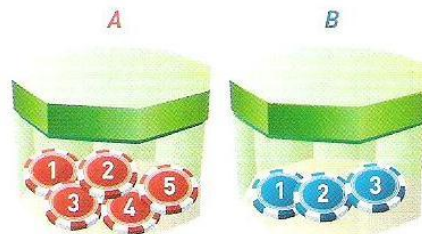
$\frac{3}{8}$ casos.” $P(\text{pedida}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

Notas:

- Dois acontecimentos A e B de uma experiência aleatória dizem-se equiprováveis quando: $P(A) = P(B)$
- Na resolução de um exercício que envolva um acontecimento do tipo “... pelo menos ...” é aconselhável verificar se o recurso ao acontecimento contrário simplifica a sua resolução.

Exercícios:

15. Na figura estão representadas duas caixas.



A caixa A contém cinco fichas numeradas de 1 a 5 e a caixa B contém três fichas numeradas de 1 a 3. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao caso, uma ficha de cada caixa e registar os números das fichas.

Determine a probabilidade de:

15.1. o número da ficha que é retirada da caixa A ser menor que o número da ficha da caixa B.

15.2. a soma dos números das fichas ser um número ímpar.

15.3. as fichas terem o mesmo número.

16. Um inquérito feito a 60 funcionários de uma empresa, relativamente ao transporte público utilizado permitiu concluir que:

- 25 utilizam autocarro;
- 18 utilizam o comboio;
- 20 não utilizam transporte público.

Escolhe-se ao caso, um dos 60 funcionários.

Determine a probabilidade de o funcionário escolhido utilizar:

16.1. o comboio.

16.2. dois transportes públicos.

16.3. apenas um transporte público.

17. Numa caixa há bombons sendo uns de café e outros de licor. Retirando ao acaso, um bombom da caixa, a probabilidade de ser de café é 24%. Quantos são os bombons de licor sabendo que há seis de café?

18. Uma moeda de 500 dobras é lançada três vezes consecutivas.

Determine a probabilidade de ocorrer:

18.1. três vezes a face coroa.

18.2. pelo menos uma vez, a face coroa.

18.3. no máximo uma vez, a face coroa.

19. Sabe-se que os acontecimentos elementares de uma experiência aleatória são equiprováveis e designados por A, B, C e D.

Determine:

19.1. $P(A)$

19.2. $P(\bar{B})$

19.3. $P(A \cup B)$

20. Numa *slot machine* é gerada aleatoriamente uma sequência de quatro algarismos, em cada jogada.



Cada elemento da sequência pode tomar valor de 0 a 9.

- 20.1.** Numa jogada, quantos são os resultados possíveis?
- 20.2.** Qual a probabilidade da sequência ter pelo menos um 1?
- 20.3.** Qual a probabilidade da sequência ser o ano em que nasceu? Apresente o resultado na forma de potência de base 10.
- 21.** Retiram-se duas cartas ao acaso de um baralho de 52, sucessivamente e sem reposição. Determine a probabilidade de:
- 21.1.** ambas serem reis.
- 21.2.** nenhuma ser ás.
- 21.3.** ambas serem de copas.
- 21.4.** ambas serem do mesmo naipe.
- 21.5.** sair um e um só rei.

22. Numa turma de 30 alunos, as suas idades e sexos estão distribuídos como se indica na tabela:

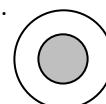
Idade	Rapazes	Raparigas
16	5	6
17	7	8
18	3	1

22.1. Encontrou-se ao acaso um aluno da turma. Qual é a probabilidade de que seja uma rapariga de 17 anos?

22.2. Seleccionaram-se dois alunos da turma ao acaso.

- a)** Determine a probabilidade de serem dois rapazes de idades diferentes.
- b)** Determine a probabilidade de terem mesma idade mas serem de sexos diferentes.

23. Na figura encontra-se representado um alvo circular de raio r , sendo o raio do círculo menor metade do raio do alvo. Admita que se lança um dardo que atinge sempre o alvo e que todos os pontos têm igual probabilidade de serem atingidos.

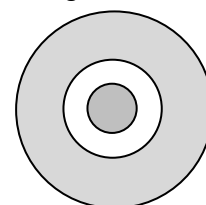


23.1. Mostre que a probabilidade de acertar na coroa circular de cor branca é 75%.

23.2. Admita que se pretende construir um novo alvo, com raio igual ao dobro do raio anterior e com uma nova região como é sugerido na figura.

Justifique a afirmação:

“A probabilidade do dardo acertar na região correspondente ao alvo anterior é 25%.”



▪ DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADES

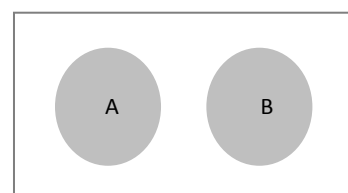
A abordagem intuitiva das probabilidades tornou-se uma preocupação crescente da comunidade matemática, até que nas primeiras décadas do século XX houve uma formalização da teoria das probabilidades, de modo a torná-la logicamente coerente, suportada por um conjunto de afirmações verdadeiras e independentes – os chamados axiomas – a partir dos quais todos os resultados – os teoremas – pudessem ser deduzidos.

Chama-se probabilidade a toda a aplicação P de domínio S e conjunto de chegada $\mathbb{R}$ tal que, a todo o acontecimento A é associado um número real $P(A)$, que se designa por probabilidade do acontecimento A .

Esta aplicação verifica os seguintes axiomas:

- > **Axioma 1 :** $P(A) \geq 0$ A probabilidade de um acontecimento é um número não negativo.
- > **Axioma 2 :** $P(S) = 1$ A probabilidade do acontecimento certo é 1.
- > **Axioma 3 :** Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ A probabilidade da reunião de dois acontecimentos disjuntos é igual à soma das probabilidades desses acontecimentos.

S



Com base nestes três axiomas desmostraremos alguns teoremas.

> **Teorema 1:** $P(\emptyset) = 0$

A probabilidade do acontecimento impossível é zero.

Demonstração: Tem-se: $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$

Pelo axioma 3 temos: $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$ que é equivalente a $P(S) = P(S) + P(\emptyset)$ tendo em conta ($S \cup \emptyset = S$).

Logo, $P(\emptyset) = 0$

> **Teorema 2:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

A probabilidade do acontecimento contrário $\bar{A}$ é igual à diferença entre 1 e a probabilidade de A.

Demonstração: Tem-se: $A \cup \bar{A} = S$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$

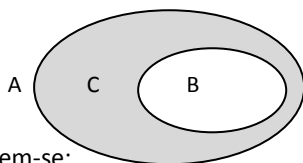
$$P(A \cup \bar{A}) = P(S)$$

$$\text{Então: } P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (\text{Axiomas 2 e 3})$$

$$\text{Logo: } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

> **Teorema 3:** Se A e B são acontecimentos tais que $B \subset A$, então $P(B) \leq P(A)$.

Demonstração: Se $B \subset A$, então existe C tal que $B \cap C = \emptyset$ e $B \cup C = A$.



Por aplicação do axioma 3, tem-se:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = P(A).$$

Pelo axioma 2, sabe-se que $P(C) \geq 0$, então pode-se concluir que $P(B) \leq P(A)$.

> **Teorema 4:** $0 \leq P(A) \leq 1$

A probabilidade de qualquer acontecimento A é um número do intervalo $[0, 1]$.

Demonstração: Pelo axioma 1, sabe-se que $P(A) \geq 0$. (1)
Como $A \subset S$, por aplicação do teorema 3, conclui-se que $P(A) \leq P(S)$

Pelo axioma 2, tem-se $P(S) = 1$. Então $P(A) \leq 1$. (2)

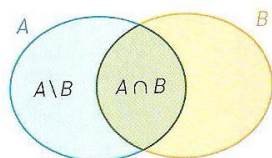
De (1) e (2), conclui-se que $0 \leq P(A) \leq 1$.

> **Teorema 5:** Se A e B são acontecimentos compatíveis, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração:

Os acontecimentos $A \setminus B$ e $A \cap B$ são incompatíveis e $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$



Pelo axioma 3, tem-se:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

Daqui resulta que $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. (3)

Os acontecimentos $A \setminus B$ e B são incompatíveis e $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

Pelo axioma 3, tem-se: $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$

Daqui resulta que $P(A \setminus B) = P(A \cup B) - P(B)$. (4)

Comparando (3) e (4): $P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Ou seja, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Recorde: Leis de Morgan

Vimos na 10ª classe que as leis de Morgan que estudamos para condições também se aplicam a conjuntos. Uma vez que um acontecimento também se pode definir por um conjunto podemos utilizar as seguintes igualdades entre acontecimentos.

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{e} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Exercícios:

24. Sejam A e B dois acontecimentos da mesma experiência aleatória. Sabe-se que $P(A) = 0,5$ e $P(B) = 0,3$. Explique porque não é possível que:

24.1. A e B sejam acontecimentos contrários.

24.2. $P(A \cap B) = 0,4$

24.3. $P(A \cup B) = 0,9$.

25. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que $P(A) = 0,2$ e $P(B) = 0,5$.

Indique, justificando, o intervalo a que pertence $P(A \cup B)$.

26. Sejam A e B dois acontecimentos da mesma experiência aleatória.

Indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

26.1. Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A) = 1 - P(B)$.

26.2. Se A e B são acontecimentos contrários, então: $P(A) + P(B) = 1$.

26.3. Se $P(A) + P(B) = 1$, então A e B são acontecimentos contrários.

27. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos contrários.

- $P(A) \times P(B) = 2/9$

- $P(A) < P(B)$

Determine as probabilidades de A e de B.

28. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Mostre que:

28.1. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

28.2. Se A e B são incompatíveis então

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A}) - P(B)$$

29. A, B e C são os acontecimentos elementares de uma experiência aleatória. Sabe-se que: $P(C) = 0,2$

Determine: $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

▪ PROBABILIDADE CONDICIONADA E PROBABILIDADE DA INTERSECÇÃO DE ACONTECIMENTOS

Consideremos o dominó constituído pelas 28 peças representadas na figura:

Depois de as peças terem sido baralhadas, retira-se uma ao acaso e observa-se a pontuação dessa peça.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos:

A: Sair uma peça com 4 pontos em pelo menos um dos lados.

B: A soma dos pontos da peça é 9.



- Qual a probabilidade de ocorrer o acontecimento A?

Entre os 28 casos possíveis há 7 casos favoráveis. Assim, tem-se: $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

- Qual a probabilidade de ocorrer o acontecimento A, sabendo que ocorreu o acontecimento B?

Saber-se que ocorreu o acontecimento B condiciona o número de casos possíveis que passam a ser dois e nesses casos possíveis existe um favorável.

Neste caso a probabilidade representa-se por: $P(A|B)$



Observe-se que:

$$P(A|B) = \frac{1}{2} = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#S}}{\frac{\#B}{\#S}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercícios:

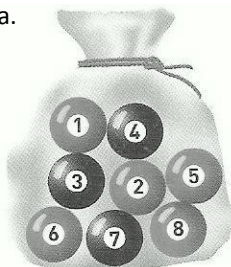
30. Um casal tem três filhos. Se for igualmente provável nascer uma rapariga ou um rapaz, calcule a probabilidade de:

30.1. O filho mais velho ser rapaz;

30.2. O filho mais novo ser rapariga;

30.3. O casal ter exactamente duas raparigas, sabendo que o filho mais novo é do sexo feminino.

31. Num saco há oito bolas numeradas de 1 a 8, sendo cinco cinzentas e três pretas, como é sugerido na figura.



Uma bola é retirada do saco, ao acaso, e observa-se o número e a cor dessa bola.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: Sai bola cinza.

B: Sai bola com um número par.

Determine:

31.1. $P(A|B)$ **31.2.** $P(B|\bar{A})$

31.3. $P(\bar{A}|\bar{B})$ **31.4.** $P(\bar{B}|A)$

31.5. $P(\bar{A}|B)$ **31.6.** $P(B|A)$

No caso geral, sendo A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória e tais que $P(B) \neq 0$, a probabilidade condicionada de A, sabendo B, é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Da igualdade anterior resulta: $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$

32. Considere o lançamento de um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Determine a probabilidade de sair a face com o número 3 se:

32.1. não houver qualquer outra informação.

32.2. souber que saiu número par.

32.3. souber que saiu número ímpar.

33. Numa empresa produzem-se dois tipos de peças, A e B.

Sabe-se que:

- 60% da produção corresponde a peças do tipo A;

- 2% das peças do tipo A têm defeito;

- 4% das peças do tipo B têm defeito.

Escolheu-se, ao acaso, uma peça e verificou-se que não tem defeito. Qual é a probabilidade de ser uma peça do tipo A?

34. A e B são dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória, tais que:

$P(A) = 0,3$ $P(B) = 0,6$ $P(A \cup B) = 0,9$

34.1. Os acontecimentos A e B são incompatíveis? Justifique.

34.2. Determine: **a)** $P(A|B)$ **b)** $P(\bar{A}|\bar{B})$

35. O Ivo desloca-se diariamente para a escola de comboio. Sejam A e B os acontecimentos:

A: Acordar tarde. **B:** Perder o comboio.

Sabe-se que $P(A|B) = 0,8$ e $P(B) = 0,25$

35.1. Defina, em linguagem corrente os acontecimentos $B|A$ e $A|B$.

35.2. Determine $P(A \cap B)$.

▪ ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES

O conceito de independência é um dos mais importantes em probabilidades.

Dois acontecimentos são independentes quando a realização de um deles não interfere na probabilidade do outro.

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se
 $P(A|B) = P(A)$, $P(B) > 0$

Utilizando a definição de probabilidade condicionada podemos ainda concluir:

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dois acontecimentos A e B são independentes se e só se
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

De um modo geral, se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são n acontecimentos independentes, então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

Exercícios:

36. De um baralho com 40 cartas, 10 de cada naipe, foram retiradas três cartas, sucessivamente e com reposição.

Determine a probabilidade de:

36.1. saírem três reis;

36.2. saírem exactamente dois ases;

36.3. saírem espadas;

36.4. não sair qualquer carta de copas.

37. Joga-se um dado duas vezes. Determine a probabilidade de se obter um número par na 1ª jogada e um "5" na 2ª jogada.

38. Em relação a uma experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos independentes.

Sabe-se que $P(A) = 0,2$ e $P(\bar{B}) = 0,7$.

Determine $P(A \cap B)$.

39. Em relação a uma experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos possíveis e independentes.

Mostre que: $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B|A)$

40. Em relação a uma experiência aleatória, os acontecimentos A e B são tais que:

$$P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,5 \text{ e } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,6 .$$

40.1. Verifique se os acontecimentos A e B são independentes.

40.2. Determine a probabilidade de não se verificar A nem B.

41. A Adjamilia e o Edson não sabem que foram convidados para a mesma festa. As probabilidades de a Adjamilia e o Edson irem à festa são, respectivamente, 0,5 e 0,7.

Qual a probabilidade de ambos irem à festa?

Exemplo: Consideremos o duplo lançamento de um dado cúbico numerado de 1 a 6 e os seguintes acontecimentos:

A: Sair o número 4 no primeiro lançamento.

B: A soma dos números que ocorrem nos dois lançamentos é 9.

C: Sair número par no segundo lançamento.

- A e B são acontecimentos dependentes:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(B|A) = \frac{1}{6}$$

Temos que $P(B) \neq P(B|A)$

- A e C são acontecimentos independentes:

$$P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(C|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = P(C)$$

Temos que $P(C) = P(C|A)$

42. Mostre que o acontecimento impossível é independente de qualquer outro acontecimento.

43. Em relação a uma experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos tais que:

$$P(A) = \frac{1}{2} ; P(B) = \frac{2}{5} \text{ e } P(A|\bar{B}) = \frac{7}{12} .$$

43.1. Determine $P(A \cap B)$.

43.2. Os acontecimentos A e B são independentes?

44. Dejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória, tais que:

$$P(A) = \frac{3}{5} ; P(B) = \frac{1}{2} \text{ e } P(A \cup B) = \frac{3}{5}$$

Mostre que A e B não são independentes.

45. Os alunos de duas turmas A e B encontram-se num autocarro para iniciarem, em conjunto, uma viagem de fim de curso. A turma A é constituída por 15 rapazes e 10 raparigas e a turma B por 8 rapazes e 12 raparigas. Escolhe-se, ao acaso, um aluno.

Calcule a probabilidade de:

45.1. Ser um rapaz da turma A.

45.2. Ser da turma B, sabendo que é rapariga.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

No cálculo de probabilidades, muitas vezes, a principal dificuldade reside na contagem no número de casos possíveis e do número de casos favoráveis associados a um determinado acontecimento.

Em muitas situações, há necessidade de fazer contagens sem a possibilidade de as fazer elemento a elemento. Este tipo de necessidades tem características comuns que permitiram desenvolver os chamados modelos combinatórios.

O estudo desses modelos apoia-se em quatro conceitos fundamentais:

- > princípio fundamental de contagem (regra do produto);
- > permutações e arranjos simples (sem repetição);
- > arranjos completos (ou com repetição);
- > combinações.

▪ PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

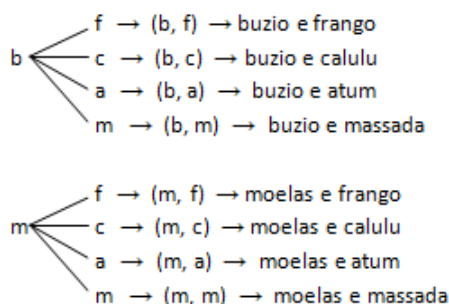
Utilizando um exemplo vamos recordar o princípio fundamental de contagem.

Exemplo 1: Considerando a ementa ao lado, quantas refeições diferentes podemos:

- 1.1. fazer com uma entrada e um prato (sem sobremesa)?
- 1.2. organizar com uma entrada, um prato e uma sobremesa?

Resolução: 1.1. A construção do diagrama de árvore correspondente sugere o processo de contagem e podemos verificar que podemos combinar 8 refeições diferentes.

Este valor aparece da multiplicação do número de entradas com o número de pratos principais: $2 \times 4 = 8$ refeições



Ementa	
Entradas:	
- Buzio	
- Moelas	
Prato principal:	
- Frango assado	
- Calulu	
- Atum grelhado	
- Massada de peixe	
Sobremesas:	
- Ananás	
- Pudim de cocô	
- Doce da casa	

- 1.2. Considerando, agora as sobremesas podemos calcular directamente:
 $2 \text{ entradas} \times 4 \text{ pratos principais} \times 3 \text{ sobremesas} = 24 \text{ refeições diferentes}$

Princípio fundamental de contagem:

Quando é necessário realizar k escolhas sucessivas, em que na primeira há n_1 alternativas, na segunda há n_2 alternativas, ..., e na escolha de ordem k há n_k alternativas, então o número total de alternativas é dado por:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k.$$

Exercícios:

46. Com 3 pares de calças e 2 camisas, de quantas formas diferentes o Adilson se pode vestir?
47. Quantos números pares diferentes e com 3 algarismos existem no sistema decimal?
48. Da ementa de um restaurante escolhido pela Andresa para almoçar constam 2 sopas, 3 pratos de peixe, 3 pratos de carne e 5 sobremesas. Quantas são as escolhas possíveis se a Andresa pretender apenas:
 - 48.1. uma sopa e um prato de peixe?
 - 48.2. um prato de carne e uma sobremesa?
 - 48.3. uma sopa, um prato de peixe e uma sobremesa.

49. O Pedro tem os sacos que estão na figura.



Pretende retirar uma bola de cada saco e escrever o número de três algarismos em que o algarismo das centenas corresponde ao da bola retirada do saco A, o algarismo das dezenas corresponde ao da bola retirada do saco B e o das unidades ao da bola retirada do saco C.

- 49.1. Quantos números distintos podem ser escritos?
- 49.2. Dos números que podem ser escritos, quantos são:
 - a) múltiplos de 5?
 - b) pares?
 - c) capicuas (números que se leem de igual forma da esquerda para a direita e da direita para a esquerda)?

▪ PERMUTAÇÕES E ARRANJOS SIMPLES (SEM REPETIÇÃO)

No estudo que se segue, vamos recorrer frequentemente ao produto dos primeiros n números naturais. Tal produto tem, em Matemática uma notação designada por fatorial.

Dado um número natural n , chama-se fatorial de n (ou n fatorial) ao produto dos n primeiros números naturais e representa-se por $n!$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1$$

Nota: por convenção $0! = 1$

Exercício:

50. Calcule:

50.1. $6!$

50.2. $7! - 5!$

50.3. $\frac{12!}{10!}$

50.4. $\frac{8 \times 10! - 9!}{9}$

Exemplo 2: Cinco amigos vão de férias, fazendo a viagem até à cidade de destino de autocarro. Para irem todos juntos ocupam os 5 lugares que existem no fundo do autocarro.

2.1. De quantas formas diferentes os cinco amigos podem ocupar os cinco lugares?

Resolução: Reparemos que:

- o número de pessoas é igual ao número de lugares disponíveis.
- a ordem interessa, isto é, se se trocar a ordem dos amigos temos uma combinação final diferente.

Para o primeiro lugar temos 5 possibilidades (5 amigos), para o segundo lugar já só temos 4 possibilidades, uma vez que um deles já se sentou, para o terceiro lugar temos 3 possibilidades, para o quarto lugar temos 2 possibilidades e para o quinto lugar (último) resta um dos amigos.

Assim o número total de combinações é: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

Como o número de pessoas é igual ao número de lugares, bastou permutar os lugares entre si. Fez-se a permutação de 5 elementos que se pode representar por $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

Exemplos:

C	D	A	B	E
---	---	---	---	---

A	B	D	E	C
---	---	---	---	---

A	D	B	E	C
---	---	---	---	---

Dado um conjunto com n elementos, dá-se o nome de permutações de n aos grupos que se podem formar tais que:

- todos os grupos têm n elementos
- dois ou mais grupos diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos.

O número de permutações de n é representado por P_n e o valor é dado por:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 2 \times 1, \text{ ou seja, } P_n = n!$$

Exemplo 2: 2.2. Num dos dias os amigos decidiram percorrer a cidade de carruagem, mas cada carruagem só levava três. Tiveram que ocupar, por isso, duas carruagens, a primeira com três amigos e a segunda com dois.

De quantas formas podem ocupar os três lugares da primeira carruagem?

Resolução: Reparemos que:

- o número de pessoas é superior ao número de lugares disponíveis.
- a ordem continua a interessar, isto é, se se trocar a ordem dos amigos temos uma combinação final diferente.

Para o primeiro lugar temos 5 possibilidades (5 amigos), para o segundo lugar já só temos 4 possibilidades e para o terceiro lugar (último) temos 3 possibilidades.

Assim o número total de combinações é: $5 \times 4 \times 3 = 60$

Cada uma das combinações corresponde a uma sequência de três amigos escolhidos de um conjunto de cinco.

Ao número obtido desta forma dá-se o nome de arranjos simples de 5 tomados 3 a 3 e representa-se por 5A_3 .

Observemos que: ${}^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{(5-3)!}$

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjos simples ou arranjos sem repetição de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) aos diferentes grupos que se poder formar com p elementos tais que:

- em cada grupo há p elementos não repetidos;
- dois se diferem em algum elemento ou na ordem de colocação dos mesmos.

O número de arranjos sem repetição de n elementos tomados p a p representa-se por nA_p e o seu valor é dado por:

$${}^nA_p = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times (n-p+1), \text{ ou seja, } {}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exercícios: 51. A Elsa comprou 5 CDs e vai escolher 4 para oferecer um a cada um dos seus sobrinhos. De quantas maneiras diferentes pode apresentar os sobrinhos? 52. Numa turma de 25 alunos vão ser escolhidos 3 alunos. Cada um deverá participar numa reunião. De quantas maneiras se podem escolher os três alunos, sabendo que as reuniões se realizam à mesma hora? 53. Durante o período de férias, às refeições, o Nuno e os seus dois irmãos partilham tarefas. Um põe a mesa, outro levanta-a e o terceiro lava a loiça. De quantas maneiras se pode fazer a distribuição das tarefas?	54. Utilizando todas as letras da palavra “BONITA” quantas palavras diferentes, com ou sem significado, se podem formar? 55. Antes do início de um jogo de futebol 11 jogadores de uma equipa colocaram-se em fila, para tirarem uma fotografia. De quantas formas diferentes se podem dispor os 11 elementos sabendo que: a) o guarda-redes fica no meio. b) o guarda-redes fica num dos cantos. 56. Calcule: a) 6A_2 b) 5A_3 c) ${}^{10}A_4$ 57. Quantos números de quatro algarismos diferentes existem, no sistema de numeração decimal, que não tenham zero? 58. Com as cores vermelha, verde, azul e amarela pretendem-se fazer bandeiras tricolores. Variando as cores ou a ordem. Quantas bandeiras diferentes é possível fazer?
---	--

▪ ARRANJOS COMPLETOS (COM REPETIÇÃO)

Exemplo 3: Considere-se um saco com três fichas como mostra a figura.

Retira-se ao acaso uma ficha do saco, verifica-se o número, introduz-se de novo a ficha no saco e repete-se este processo quantas vezes se queira.



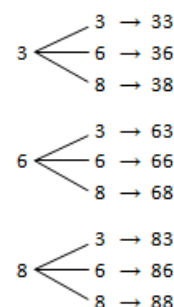
3.1. Quantos números diferentes podemos formar com duas extracções?

3.2. Quantos números diferentes podemos formar com três extracções?

3.3. Quantos números diferentes podemos formar com n extracções?

Resolução: 3.1. Mais uma vez, um diagrama de árvore ajuda a responder à questão, embora a regra da multiplicação permita, desde já, concluir que há $3 \times 3 = 9$ números diferentes.

Na 1ª extracção temos três possibilidades, na 2ª extracção repetem-se as três possibilidades, havendo no total $3 \times 3 = 3^2$



3.2. Por um processo idêntico ao anterior, tem-se em cada uma das extracções três possibilidades: 3, 6 e 8.

No total das extracções o número de possibilidades é: $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

3.3. No caso de n extracções, em cada uma delas continuam a existir três possibilidades, havendo no total:

$$3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^n$$

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjos completos ou arranjos com repetição de n elementos tomados p a p aos diferentes grupos que se poder formar com p elementos tais que:

- em cada grupo há p elementos repetidos ou não;
- dois grupos são diferentes se diferem em algum elemento ou na ordem de colocação dos mesmos.

O número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p representa-se por ${}^nA'_p$ e o seu valor é dado por:

$${}^nA'_p = n^p$$

Exercícios: 59. Com os dígitos 1, 2, 3 e 4 quantos números de três algarismos se podem escrever? 60. Quantos são os resultados possíveis se lançarmos 7 vezes um dado com as faces numeradas de 1 a 6 e registarmos o número da face saída em cada lançamento? 61. Quantos resultados possíveis existem quando se lança uma moeda: 61.1. duas vezes? 61.2. dez vezes?	62. Quatro amigas encontram-se numa pastelaria e cada uma vai escolher um bolo. De quantas maneiras diferentes podem escolher, sabendo que há 9 variedades de bolos. 63. Com os algarismos 0, 2, 3, 5 e 7, quantos números de quatro algarismos e menores que 3000 se podem escrever? 64. O alfabeto Morse utilizava os símbolos • e -. 64.1. Quantas sequências de três símbolos se podiam escrever? 64.2. Qual o número de sequências com o número máximo de três símbolos?
---	---

▪ COMBINAÇÕES SEM REPETIÇÃO

Há problemas de contagem que envolvem a escolha de grupos onde interessam os elementos que constituem o grupo, independentemente da sua ordem.

Exemplo 4: Numa turma de 20 alunos vão ser escolhidos três para representar a turma numa reunião com a Direcção.

4.1. Quantos grupos diferentes podem ser formados?

4.2. Quantos grupos diferentes podem ser formados sabendo que o delegado de turma terá que fazer parte do grupo?

Resolução:

4.1. Na resolução deste problema a ordem não interessa. O grupo ser formado, por exemplo, pelo António, pela Eunice e pelo Emanuel corresponde à mesma situação que ter o grupo constituído pela Eunice, pelo Emanuel e pelo António. Assim o número de grupos que é possível formar corresponde ao número de subconjuntos de 3 elementos que é possível definir num conjunto de 20 elementos.

$$\text{Número de subconjuntos: } \frac{{}^{20}A_3}{3!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

A este número chama-se combinações sem repetição de 20, 3 a 3 e representa-se por: ${}^{20}C_3$

4.2. Uma vez que já sabemos que o delegado terá que fazer parte do grupo, trata-se de escolher dois alunos entre os restantes 19, não interessando novamente a ordem.

$$\text{Temos então: } {}^{19}C_2 = \frac{{}^{19}A_2}{2!} = \frac{19 \times 18}{2} = 171$$

Combinações sem repetição de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) representa-se por nC_p e é o número de subconjuntos com p elementos que se podem obter a partir de um conjunto de n elementos, tais que:

- em cada subconjunto tem p elementos;
- dois grupos são diferentes se diferem em algum elemento não interessando a ordem da sua distribuição.

$${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!} \quad \text{ou} \quad {}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercícios:

65. Considere um baralho de 40 cartas, 10 de cada naipe. De quantas maneiras se pode formar um grupo de seis cartas, sendo duas e só duas de copas?

66. A Marta foi à Feira do Livro e verificou que as suas economias só lhe permitem comprar cinco dos sete livros que lhe interessam. De quantas maneiras pode escolher os cinco livros?

67. Com os vértices de um octógono regular, quantos triângulos se podem definir?

68. Uma empresa vai admitir 6 pessoas.

Apresentaram-se 45 candidatos: 20 homens e 25 mulheres. De quantas maneiras diferentes podem ser preenchidas as vagas se forem escolhidos:

68.1. candidatos do mesmo sexo?

68.2. dois homens e quatro mulheres?

68.3. no máximo dois homens?

68.4. pelo menos uma mulher?

69. Sem recorrer à calculadora, calcule:

a) 5C_2

b) 8C_3

c) ${}^{10}C_9$

Quadro resumo

	Arranjos completos	Arranjos simples	Permutações	Combinações
A ordem influencia?	Sim	Sim	Sim	Não
Pode haver repetição de elementos?	Sim	Não	Não	Não
Cálculo	${}^nA'_p = n^p$	${}^nA_p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$ ${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$P_n = n!$	${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!}$ ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercícios:

70. Oito jovens vão dar um passeio em dois automóveis de cinco lugares cada um. Qualquer um dos jovens pode conduzir. De quantas maneiras os oito jovens se podem repartir pelos dois automóveis?

71. O Olívio comprou um telemóvel e vai introduzir um PIN constituído por uma sequência de quatro dígitos.

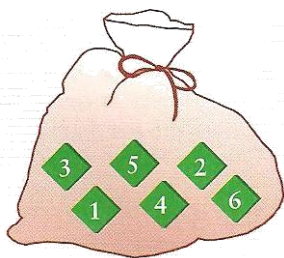
71.1. Qual é o número total de possibilidades distintas que o Olívio dispõe para a escolha do PIN?

71.2. O Olívio não gosta do 0 nem do 9. Quantas são as possibilidades, rejeitando estes dois algarismos?

71.3. Admita que o Olívio quer escolher um PIN envolvendo apenas dígitos que representam números primos. Quantas são as possibilidades?

72. De um saco com seis fichas com os números de 1 a 6, extraem-se sucessivamente e sem reposição três fichas, anotando-se o número da ficha em cada extracção.

Quantos números diferentes é possível obter?



73. De quantas formas diferentes é possível colocar sete bolas todas diferentes em, duas caixas também diferentes se, em cada caixa, tiver que ficar pelo menos uma bola?

74. O Marco está de férias na sua terra natal e tenciona visitar 6 amigos de infância. De quantas maneiras pode organizar as visitas?

75. Os primeiros-ministros de 7 países, incluindo, São Tomé e Príncipe, Portugal, Angola e Moçambique, encontraram-se para uma reunião.

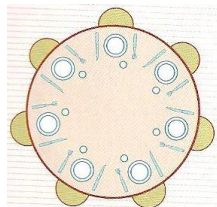
75.1. Todos se cumprimentaram entre si no início da reunião. Quantos cumprimentos foram trocados?

75.2. Sabendo que se sentaram numa mesa em fila:

a) de quantas formas se podem sentar?

b) de quantas formas diferentes se podem sentar se o português e o moçambicano querem ficar juntos e o santomense e o angolano querem ficar nos extremos?

75.3. De quantas formas diferentes se podem sentar os sete à volta de uma mesa redonda?



76. Numa caixa há oito bolas numeradas de 1 a 8. Retiramos uma bola da caixa, registamos o número e colocamos de novo a bola na caixa. Repetimos o procedimento quatro vezes. Quantos resultados diferentes é possível obter?

77. Numa sala há um sofá e cinco almofadas de cores diferentes, sendo uma delas vermelha.

77.1. De quantas formas diferentes, tendo em atenção a cor, as almofadas podem ser colocadas no sofá, lado a lado?

77.2. Admita que as almofadas foram colocadas ao acaso. Determine a probabilidade de a almofada vermelha ficar no meio.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

78. Numa prateleira estão oito livros distintos, lado a lado, sendo três de Matemática, dois de Física e três de Biologia. Determine quantas formas diferentes é possível colocar os oito livros na prateleira lado a lado, de modo que:

78.1. os livros de Física fiquem um em cada extremo;

78.2. os livros de Matemática fiquem juntos;

78.3. os livros de Biologia fiquem juntos num dos extremos

78.4. os livros fiquem agrupados por disciplina.

79. Numa caixa há dez calculadoras, das quais quatro não têm pilhas. Considere a experiência que consiste em retirar aleatoriamente três máquinas da caixa e verificar se têm pilhas ou não.

79.1. Determine a probabilidade de:

a) nenhuma ter pilhas. **b)** apenas uma não ter pilhas.

79.2. Retiram-se da caixa três máquinas, uma a uma.

Sabendo que as duas primeiras têm pilhas, qual a probabilidade de a terceira:

a) não ter pilhas **b)** ter pilhas.

80. Um grupo de 10 amigos, sete rapazes e três raparigas, decidem ir ao cinema, ocupando uma fila de dez lugares. Admitindo que todos os elementos do grupo se sentam de forma aleatória, calcula a probabilidade de:

80.1. as raparigas ficarem juntas;

80.2. as raparigas ficarem juntas e os rapazes também;

80.3. pelo menos um dos extremos ser ocupado por uma rapariga.

81. Numa empresa são atribuídos códigos de acesso a determinadas áreas mais restritas. Sabe-se que os códigos são construídos por uma sequência de quatro algarismos, seguidos de duas letras das 26 do alfabeto.

A sequência 0016-NN é exemplo de um desses códigos.

81.1. Quantos códigos é possível formar com este sistema?

81.2. Escolhido um dos códigos ao acaso, determine a probabilidade de:

a) ter os algarismos diferentes e as letras iguais;

b) ter exactamente dois algarismos iguais a 5 e as letras diferentes;

c) ter, pelo menos, dois algarismos iguais a 8;

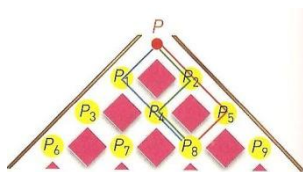
d) as letras não serem ambas vogais.

▪ TRIÂNGULO DE PASCAL

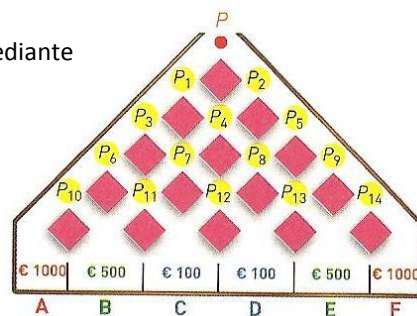
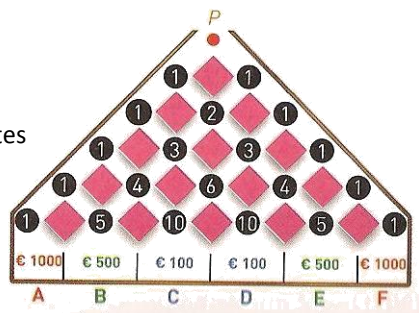
Exemplo 5: Num concurso televisivo, os concorrentes candidatam-se a um prémio mediante a posição atingida por uma bola que é largada na posição P, num aparelho como o representado na figura, e que atinge umas das posições A, B, C, D, E ou F.

Reparemos que:

- de P a P1 há um único percurso;
- de P a P2 há um único percurso;
- de P a P4 há dois percursos;
- de P a P8 há três percursos.



Podemos, então construir um “triângulo numérico” com o número de percursos existentes de P a cada um dos pontos.



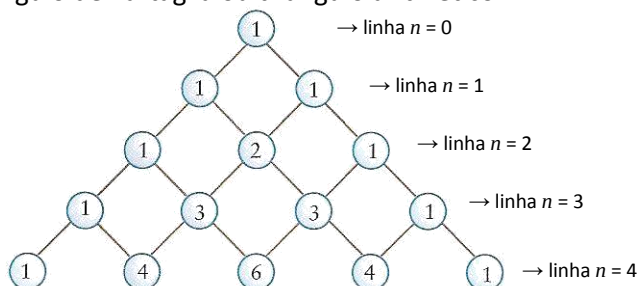
Referência histórica:

Este triângulo numérico foi apresentado por Pascal, matemático francês e por Tartaglia, matemático italiano.



Pascal (1623-1662) Tartaglia (1499-1557)

Ao esquema triangular seguinte chama-se triângulo de Pascal, triângulo de Tartaglia ou triângulo aritmético.

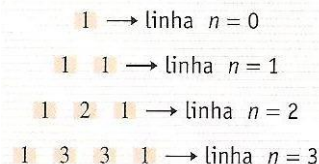


No triângulo de Pascal verifica-se que:

- Os números dos lados oblíquos são sempre iguais a 1.
- Cada termo de uma linha (excepto os extremos) é igual á soma dos que estão em cima.
- Em cada linha, os termos equidistantes dos extremos são iguais.

Exercício:

82. Observe o esquema seguinte:

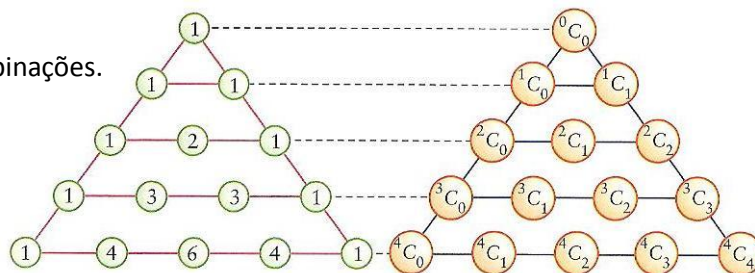


Construa a 7ª linha do triângulo de Pascal ($n=6$) e calcule a soma dos elementos da 8ª linha.

> Propriedades do Triângulo Pascal

O triângulo de pascal pode ser escrito usando combinações.

Podem-se constatar algumas propriedades do Triângulo de Pascal e que resultam das propriedades dos números combinatórios.



Propriedade 1: Todas as linhas começam e acabam com 1.

Demonstração: Efectivamente ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$

Propriedade 2: Em cada linha, os termos equidistantes dos extremos são iguais.

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}, \text{ com } n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } p \leq n$$

Demonstração: Temos que: ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e ${}^nC_{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

$$\text{Logo: } {}^nC_p = {}^nC_{n-p}$$

Propriedade 3: Cada termo de uma linha (excepto os dos extremos) é igual à soma dos que estão acima.

$${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N}_0 \text{ e } p \leq n$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} {}^nC_p + {}^nC_{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} = \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)!p!(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1) + n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \\ &= \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = {}^{n+1}C_{p+1} \end{aligned}$$

Logo: ${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$

Propriedade 4: A soma dos $n+1$ elementos de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual a 2^n , com $n \in \mathbb{N}_0$.

Nota: Na linha n o segundo e penúltimo elemento são iguais a n e existem $n+1$ elementos.

Exemplo 6: A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual a 106.

6.1. Determinemos o terceiro elemento da linha seguinte.

6.2. De que linha estamos a falar?

Resolução:

6.1. Se a soma dos três últimos elementos é 106 então a soma dos três primeiros também é 106 (propriedade 2). Visualizemos no triângulo o que acontece:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & x & \\ 1 & + & x & + & y = 106 \\ 1 & & z & & \end{array}$$

Podemos concluir que $x + y = 105$

e pela propriedade 3 sabemos que $z = x + y$.

Ou seja, z , que representa o 3º termo da linha seguinte é igual a 105.

6.2. Sabe-se que a soma dos últimos termos da linha é 106, escrevendo em linguagem matemática e usando as

combinações vem: ${}^nC_n + {}^nC_{n-1} + {}^nC_{n-2} = 106 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 106 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{(n-1)n}{2} = 106 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 210 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+840}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 14 \vee n = -15$$

Como $n \in \mathbb{N}_0$, conclui-se que $n=14$.

Exercícios:

83. A soma dos dois últimos elementos de uma linha do Triângulo de pascal é 35.

83.1. Quantos elementos tem essa linha?

83.2. Indique os três primeiros elementos da linha anterior.

83.3. Indique os três últimos elementos da linha seguinte.

84. Dois elementos consecutivos de uma linha do Triângulo de Pascal são 120 e 45. Indique um elemento maior que estes dois que pertença à linha seguinte.

85. Indique o(s) valor(e)s de $k \in \mathbb{N}_0$, de modo que:

85.1. ${}^{10}C_3 = {}^{10}C_k$ **84.2.** ${}^{21}C_5 = {}^kC_{16}$

85.3. ${}^{17}C_5 + {}^{17}C_6 = {}^{18}C_k$

85.4. ${}^{12}C_3 + 2{}^{12}C_4 + {}^{12}C_5 = {}^{14}C_k$

86. Uma linha do Triângulo de Pascal tem 11 elementos. Determina o maior número que faz parte dessa linha.

87. Uma linha do Triângulo de Pascal tem 16 elementos. Determina o número de elementos dessa linha que são maiores que 4000.

88. O penúltimo elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é 12. Determine:

88.1. o número de elementos dessa linha.

88.2. a soma dos elementos dessa linha.

89. Considere os números: 256 , 789 , 2048 , 3576 e 4500 No Triângulo de Pascal, calculou-se a soma dos elementos de uma linha e, de seguida, a soma dos elementos de outra linha.

Os valores obtidos são representados por dois dos números dados.

Identifique-os e explique a razão porque rejeita os outros três números.

90. A soma dos elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 512. Para cada elemento da linha há um cartão no qual esse número é escrito. Os cartões foram introduzidos num saco e de seguida retiraram-se, simultaneamente, dois cartões.

Determine a probabilidade de:

90.1. um e um só cartão ter o número 1;

90.2. os dois cartões terem o mesmo número.

▪ BINÓMIO DE NEWTON

Observemos o seguinte padrão:

Observação:

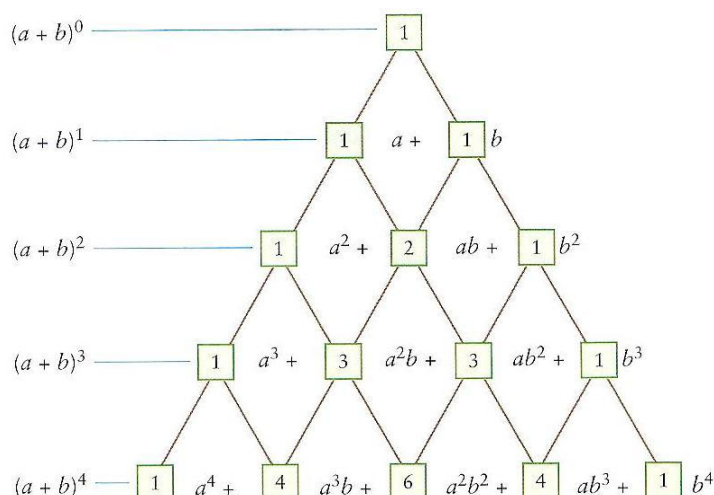
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b)^2$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b) (a+b)^3$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$



Notemos que no desenvolvimento de $(a+b)^n$ se tem:

- o grau do polinómio do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é n .

- os coeficientes são os números do Triângulo de Pascal.

Fórmula do binómio de Newton

De um modo geral tem-se:

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}^nC_{n-1} ab^{n-1} + {}^nC_n b^n, n \in \mathbb{N}_0$$

Ou seja:
$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p a^{n-p} b^p$$

Exemplo 7: Determinemos, sem efectuar o desenvolvimento, o termo em x^5 que aparece no desenvolvimento de $(x+2)^8$.

Resolução:

A partir da expressão
$$(x+2)^8 = \sum_{p=0}^8 {}^8C_p x^{8-p} 2^p$$

verifica-se que o termo em x^5 surge no desenvolvimento quando $8-p=5$ ou seja $p=3$. Substituindo p por 3 na expressão ${}^8C_p x^{8-p} 2^p$, tem-se: ${}^8C_3 x^5 2^3$.

Donde se conclui que o termo em x^5 resultante do desenvolvimento de $(x+2)^8$ é $448x^5$.

No desenvolvimento de $(a+b)^n$, designamos o termo de ordem $p+1$ por T_{p+1} , com $0 \leq p \leq n$, tem-se:

$$T_{p+1} = {}^nC_p a^{n-p} b^p$$

96. Mostre que $1-\sqrt{3}$ é solução da equação $x^4 + 16\sqrt{3} = 28$.

97. Sem efectuar o desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$:

97.1. mostre que não existe qualquer termo do 2º grau no desenvolvimento da expressão.

97.2. determine, caso exista, o termo independente de x .

Exercícios:

91. Recorra ao Triângulo de Pascal e faça o desenvolvimento de:

91.1. $(x+1)^5$

91.2. $(2+x^2)^4$

91.3. $(y-2)^6$

91.4. $(2x-y)^5$

92. Recorra ao Binómio de Newton para desenvolver e representar na forma de polinómio reduzido as expressões:

92.1. $(2+x^2)^5$

92.2. $(3-x)^3$

93. No desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$, determine, caso exista:

93.1. o termo em x^2

93.2. o termo independente de x

93.3. o termo em x^5

94. Determine o termo médio (o que ocupa a posição central) do desenvolvimento de:

94.1. $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^6$

94.2. $(x-3)^8$

95. Considere a expressão: $p(x) = (x-x^2)^6$.

Após se ter representado $p(x)$ na forma de polinómio reduzido, escolheu-se ao acaso um dos monómios que o constituem.

Qual a probabilidade de o monómio escolhido ter coeficiente negativo, sabendo que tem grau superior a 7?

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS RELATIVAS E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

VARIÁVEL ALEATÓRIA: FUNÇÃO MASSA DE PROBABILIDADE

Exemplo 1: Considerando a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda de 1000 dobras duas vezes.

Em diagrama de árvore mostra-se o que pode acontecer:

O conjunto de resultados tem 4 elementos 2^2 e é:

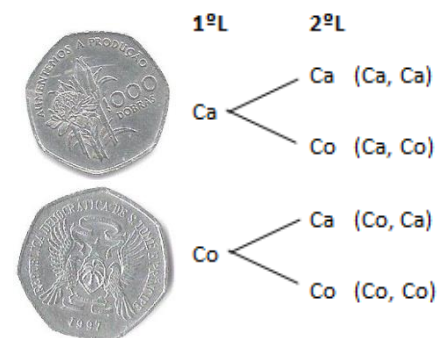
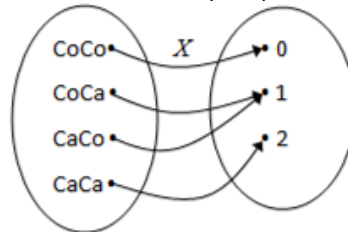
$S = \{ (Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co) \}$

Consideremos agora a função que tem como domínio S e a cada elemento do domínio faz corresponder, por exemplo, o número de vezes que aparece Ca.

A esta função, que representamos por X chama-se variável aleatória.

O contradomínio é: $\{ 0, 1, 2 \}$

A variável aleatória X pode tomar três valores e escreve-se: $X = 0, X = 1, X = 2$



Uma variável aleatória X diz-se aleatória discreta se tomar um número finito ou infinito numerável de valores distintos. Se assumir uma infinidade não numerável de valores distintos diz-se variável aleatória contínua.

Dada uma experiência aleatória à qual corresponde o espaço de resultados S , chama-se variável aleatória X a uma função que a cada elemento do espaço de resultados associa um número real.

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

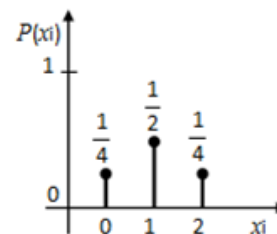
> Função probabilidade de X

À distribuição de probabilidades também se chama função massa de probabilidade, ou modelo de probabilidade.

Relativamente ao **Exemplo 1**, consideremos agora a função que a cada valor de X faz corresponder a probabilidade dos acontecimentos associados a esse valor.

A função referida pode representar-se por uma tabela ou um gráfico:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Esta função chama-se distribuição de probabilidade da variável aleatória X ou função massa de probabilidade da variável X .

Verifica-se que $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

Dada uma variável aleatória discreta X , que toma os valores $x_1, x_2, \dots, x_k$, as probabilidades $p_i = p(X = x_i)$ satisfazem as seguintes condições:

- $0 \leq p_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, k$

- $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ (isto é, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$)

Chama-se função probabilidade de X (ou função massa de probabilidade) à função que a cada valor x_i faz corresponder a respectiva probabilidade p_i . Os pares $(x_i, p_i); i = 1, 2, \dots, k$ constituem a distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta X .

Exercícios:

98. Uma certa variável aleatória discreta admite o seguinte modelo de probabilidade:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,2	m

98.1. Determine m .

98.2. Indique o valor de:

a) $p(X \leq 2)$ b) $p(X > 2)$ c) $p(X \leq 4)$

99. Seja Z a variável aleatória que representa a soma de dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Represente por uma tabela e por um gráfico a distribuição de probabilidade para a variável Z .

> Média e valor médio; desvio-padrão amostral e desvio-padrão populacional

Tal como foi visto no estudo da estatística, no que se refere a medidas de localização e de dispersão, em particular média e desvio-padrão (em relação à amostra), há interesse em conhecer parâmetros correspondentes, ou seja, valor médio e desvio-padrão populacional, para o caso da distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X .

Exemplo 2: Consideremos um dado tetraédrico regular com as faces numeradas de 1 a 4.

2.1. Durante um certo período de tempo foram realizados 1500 lançamentos (registando-se o número que fica para baixo) e obteve-se a seguinte distribuição de frequências:

x_i	1	2	3	4	Total
n_i	359	388	382	371	1500
f_i	0,239	0,259	0,255	0,247	1

Média aritmética

$$\bar{x} = 1 \times 0,239 + 2 \times 0,259 + 3 \times 0,255 + 4 \times 0,247 = 2,51$$

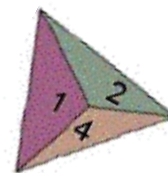
Variância amostral

$$s^2 = (1 - 2,51)^2 \times 0,239 + (2 - 2,51)^2 \times 0,259 + (3 - 2,51)^2 \times 0,255 + (4 - 2,51)^2 \times 0,247 = 1,2219$$

Desvio-padrão amostral

$$s = \sqrt{1,2219} = 1,1054$$

Reparemos que a distribuição de frequências obtém-se a partir de uma amostra (alguns elementos da população), enquanto a distribuição de probabilidades se obtém a partir de toda a população.



2.2. Consideremos a variável aleatória X : “valor numérico num lançamento”

A variável aleatória assume os seguintes valores:

$$1, 2, 3 \text{ e } 4$$

$$p(X=1) = p(X=2) = p(X=3) = p(X=4) = \frac{1}{4}$$

A tabela de distribuição da probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

Valor médio ou esperança

$$\mu = 1 \times 0,25 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,25 = 2,5$$

Variância populacional

$$\sigma^2 = (1 - 2,5)^2 \times 0,25 + (2 - 2,5)^2 \times 0,25 + (3 - 2,5)^2 \times 0,25 + (4 - 2,5)^2 \times 0,25 = 1,25$$

Desvio-padrão populacional

$$\sigma = \sqrt{1,25} = 1,118$$

Em síntese:

Nota:

Atendendo à Lei dos Grandes Números, à medida que o número de experiências aumenta, a frequência relativa tende para a probabilidade.

Exercício:

100. A distribuição de probabilidade de uma certa variável aleatória Y é a seguinte:

y_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Calcula o valor médio e o desvio-padrão da variável Y .

Amostra

Variável estatística X que toma valores
 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$

Média aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times n_i}{N} = \sum_{i=1}^n x_i \times f_i$$

Variância amostral

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \times f_i$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \times n_i}{N} - \bar{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 \times f_i - \bar{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2 \times n_i}{N} =$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \times f_i$$

Desvio-padrão amostral

$$s = \sqrt{s^2}$$

População

Variável aleatória X que toma valores
 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$

Valor médio ou esperança

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i$$

Variância populacional

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \times p_i$$

ou

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \times p_i - \mu^2$$

Desvio-padrão populacional

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Exercícios:

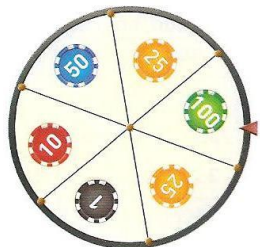
101. Num saco há sete bolas, quatro pretas e três vermelhas. Retiram-se, ao acaso, cinco bolas do saco. Seja X a variável aleatória “Número de bolas vermelhas retiradas”.

101.1. Quais os valores que a variável aleatória X toma?

101.2. Determine a probabilidade de a variável aleatória X ser igual a 2, isto é, $P(X = 2)$.

102. Na figura está uma roleta dividida em seis sectores geometricamente iguais.

Cada jogada custa 25 euros e consiste em rodar a roleta dando no mínimo três voltas, sendo atribuído, em euros o prémio marcado no sector indicado pela seta quando a roleta pára.



Seja X a variável aleatória: “Saldo após uma jogada”

Construa a tabela de distribuição da variável aleatória X

103. A variável aleatória X : “Número do vértice de um dado tetraédrico equilibrado que ocorre quando se lança o dado” tem a seguinte distribuição:

x_i	1	3	x
$P(X = x_i)$	a	0,25	0,25

Com $x \in \mathbb{N}$ e $a \in [0, 1]$.

Sabe-se que o valor médio de X é 2,5.

Como se encontram numerados os vértices do dado?

104. Uma caixa tem quatro bolas numeradas de 0 a 3.

Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas e registam-se os números das bolas retiradas.

Seja X a variável aleatória: “Produto dos números das bolas retiradas”.

104.1. Indique os valores que a variável X pode tomar, organizando a experiência num diagrama de árvore.

104.2. A experiência foi repetida 200 vezes e os resultados foram os seguintes:

x_i	0	2	3	6
n_i	105	35	31	29

Complete:

a) a tabela de frequências relativas:

x_i	0	2	3	6
f_i	...	...	...	...

b) a tabela de distribuição de probabilidades:

x_i	0	2	3	6
$P(X = x_i)$	...	...	...	...

105. A distribuição de probabilidade de uma certa variável aleatória X é a seguinte:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,3	0,1	0,6

Calcule o desvio-padrão da variável X .

MODELO BINOMIAL

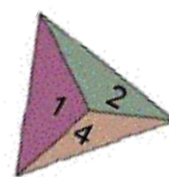
São frequentes as situações de experiências aleatórias em que apenas nos interessa observar a ocorrência de um acontecimento ou a do seu contrário, sendo possível repetir essas experiências sem que a probabilidade desse acontecimento se altere.

Exemplo 2: Considerando, novamente, a experiência aleatória que consiste em lançar um tetraedro regular numerado de 1 a 4 e observar o número que fica para baixo.

Seja A o acontecimento: “Sair face com o número 2.”

$\bar{A}$: “Sair face com número diferente de 2.”

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$$



Reparemos que, se a experiência for repetida n vezes, tem-se que:

1. em cada experiência apenas se observa se ocorrem os acontecimentos A ou $\bar{A}$.

2. a probabilidade do acontecimento A é constante, isto é, não varia ao repetir-se a experiência.

Obter sucesso ou insucesso numa experiência é independente dos resultados obtidos em experiências anteriores.

Experiências de provas repetidas de Bernoulli:

Considere-se uma experiência aleatória em que apenas interessa observar a ocorrência de um acontecimento A (sucesso) e a do seu contrário $\bar{A}$ (insucesso).

- Estabelece-se o número n de provas a repetir;

- A probabilidade p de sucesso em cada prova é fixa.

A variável aleatória X , que representa o número de sucessos nas provas n , chama-se variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros n e p e representa-se por $B(n; p)$.

Exemplo 2: O Edson decidiu lançar o tetraedro 5 vezes e pretende que nas nestes 5 lançamentos ocorram dois números 2, ou seja duas vezes o acontecimento A (sucesso) e três vezes o acontecimento $\bar{A}$ (insucesso).

Já sabemos que : $P(A) = 0,25$ e $P(\bar{A}) = 0,75$

Uma sequência favorável é, por exemplo: $\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}$.

Neste caso: $P(\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}) = P(A) \times P(\bar{A}) \times P(\bar{A}) \times P(A) \times P(\bar{A})$

$$P(\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}) = 0,25 \times 0,75 \times 0,75 \times 0,25 \times 0,75 = 0,25^2 \times 0,75^3$$

Este raciocínio é válido para qualquer sequência favorável de dois sucessos e três insucessos e a probabilidade é sempre $0,25^2 \times 0,75^3$.

O número total de sequências favoráveis (número de maneiras diferentes de ocorrerem dois sucessos e três insucessos) é dado por 5C_2 .

Sendo X a variável aleatória “Número de 2 em 5 lançamentos.”, a probabilidade pedida é $P(X = 2)$.

Pelo que foi visto conclui-se que:

$$P(X = 2) = {}^5C_2 (P(A))^2 (P(\bar{A}))^3$$

$$\text{ou seja, } P(X = 2) = {}^5C_2 \times 0,25^2 \times 0,75^3 = 0,264$$

Em n provas repetidas de Bernoulli, seja A o acontecimento considerado sucesso.

Em cada prova $P(A) = p$ e $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Seja ainda X a variável aleatória binomial que representa: “Número de sucessos em n provas”

A probabilidade de obter exactamente k sucessos em n provas é dada por:

$$P(X = k) = {}^nC_k p^k q^{n-k} ; 0 \leq k \leq n$$

Numa distribuição binomial de parâmetros n e p , $B(n, p)$, temos:

Valor médio: $\mu = n \times p$

Variância: $\sigma^2 = n \times p \times (1 - p)$

Desvio-padrão: $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$

Referência histórica:

Jacob Bernoulli (1654 – 1705) foi um dos membros da distinta família Bernoulli, com muitos contributos dados na área das ciências. Apresentou vários trabalhos na área da matemática e da astronomia que, na sua maioria, se encontraram na obra intitulada

Ata Eruditorum. Decorridos oito anos após a sua morte, em 1713, foi publicada a sua obra *Ars Conjectandi* (A arte de conjecturar) onde se encontram, os fundamentos da teoria das probabilidades e pela primeira vez uma caracterização da distribuição binominal.



Exercícios:

106. Um exame tem 20 questões de escolha múltipla, cada uma com quatro respostas possíveis. Um aluno respondeu a todas as perguntas ao acaso.

Seja Z a variável aleatória correspondente ao número de respostas em que o aluno acertou. Justifique que Z é uma variável aleatória com distribuição binomial e indique n e p .

107. De um baralho de cartas foram retirados os quatro ases.

As quatro cartas foram baralhadas e retira-se uma ao acaso.

Considere o acontecimento:

A: “A carta retirada é o ás de copas.”

Admita que a experiência é repetida três vezes. Determine a probabilidade de o acontecimento A ocorrer:

107.1. apenas na última experiência.

107.2. exactamente uma vez.

107.3. no máximo duas vezes.

108. No lançamento de uma moeda viciada, a probabilidade de sair face cala é $\frac{1}{3}$.

Em 5 lançamentos, qual a probabilidade de:

108.1. sair face cala exactamente duas vezes?

108.2. sair sempre face coroa?

108.3. sair, pelo menos 4 vezes, a face cala?

109. A distribuição de probabilidades da variável aleatória X é $B(3; 0,2)$.

109.1. Determine $P(X = 2)$.

109.2. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X .

110. Um casal tem 4 filhos.

Comente a afirmação:

“A probabilidade de ter só dois filhos rapazes é 50%”.

Nota: Considere que a probabilidade de nascer rapaz é igual à probabilidade de nascer rapariga.

111. Um jogador de futebol tem sucesso em 70% das vezes que é chamado a marcar um penalti. Qual a probabilidade de, na marcação de 5 penaltis, ser bem-sucedido em 4?

112. A probabilidade de uma peça sair defeituosa de uma determinada máquina é 8%. Determine o número de peças defeituosas esperado num lote de 500 peças.

▪ MODELO NORMAL; HISTOGRAMA VERSUS FUNÇÃO DENSIDADE

Estudámos variáveis aleatórias discretas e as respectivas distribuições de probabilidades. Deu-se particular destaque ao modelo binomial.

Vamos estudar agora variáveis aleatórias contínuas e o modelo normal.

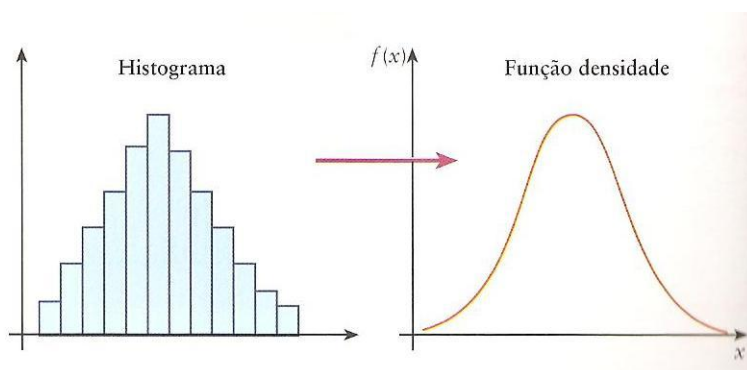
A distribuição normal é das mais importantes distribuições de probabilidade.

Consideremos que estávamos interessados em estudar o peso dos alunos do ensino secundário em São Tomé e Príncipe.

Seja X a variável aleatória que representa o peso de um aluno, escolhido ao acaso, de entre os alunos santomenses do ensino secundário. A variável aleatória X é contínua.

Para estudar a população suponhamos que se recolheu uma amostra e que se representa graficamente os dados por um histograma.

Considerando cada vez mais observações e consequentemente mais classes para o histograma este, no limite, vai aproximar-se de uma área limitada por uma curva representativa da chamada função densidade de probabilidade. A função densidade, que se representa por uma curva com a forma de sino é, para a população, o equivalente ao histograma para a amostra.

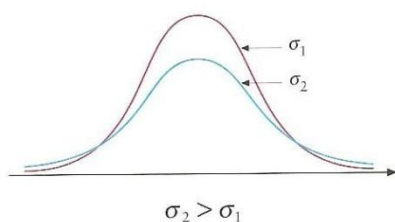
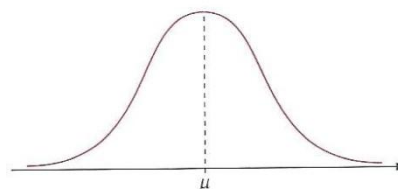


> Modelo Normal

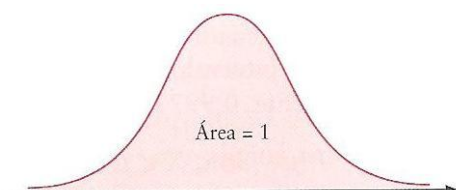
Assim como no caso das variáveis discretas estudámos o modelo binomial, para o caso de variáveis contínuas vamos estudar o modelo normal.

Características da curva normal:

- É simétrica relativamente ao valor médio μ da variável.
- Tem um máximo para $x = \mu$.
- Quanto maior for o desvio-padrão σ , mais achatada é a curva.



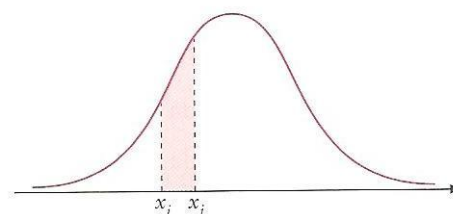
- A área compreendida entre a curva e o eixo dos xx é igual a 1.



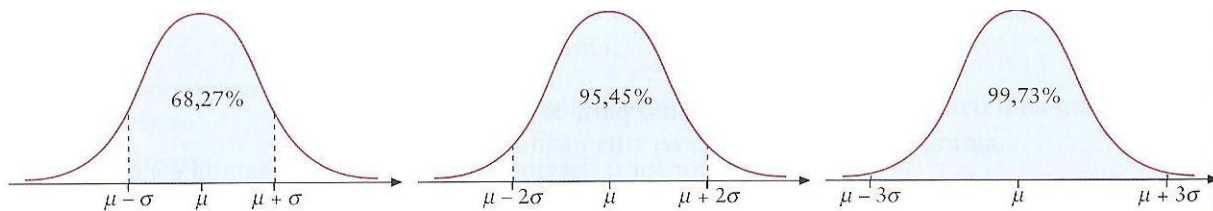
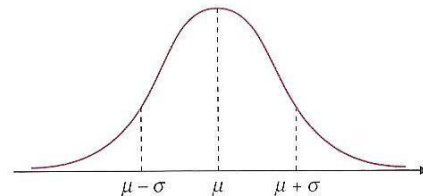
- A probabilidade de que a variável tome valores no intervalo $[x_i, x_j]$ é igual à área definida pelo eixo dos xx , pelo gráfico de função densidade e pelas rectas $x = x_i$ e $x = x_j$.

Observação:

Teoricamente uma variável com distribuição normal assume todos os valores de $\mathbb{R}$.



- A concavidade da curva muda de sentido para $x_1 = \mu - \sigma$ e $x_2 = \mu + \sigma$. (x_1 e x_2 são abscissas dos pontos de inflexão)
- O eixo das abscissas é assíntota da curva.
- A área abaixo da curva distribui-se em intervalos da seguinte forma:



Uma distribuição normal fica totalmente caracterizada se conhecermos o valor médio μ e o desvio-padrão σ .

Se uma variável aleatória contínua segue uma distribuição normal de valor médio μ e desvio-padrão σ , representa-se por $N(\mu, \sigma)$.

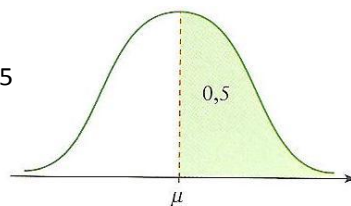
Exemplo 3: A distribuição dos pesos dos soldados de um quartel segue uma distribuição normal com $\mu = 64\text{kg}$ e $\sigma = 10\text{kg}$.

Determine a percentagem de soldados que pesam:

- 3.1. mais do que 64kg.
- 3.2. entre 54kg e 74kg.
- 3.3. menos do que 54kg.

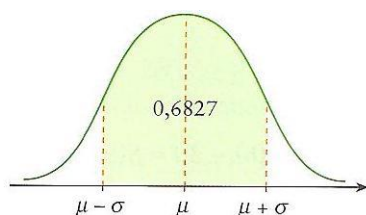
Resolução:

3.1. $P(X > 64) = P(X > \mu) = 0,5$



Logo, 50% dos soldados pesam mais do que 64kg.

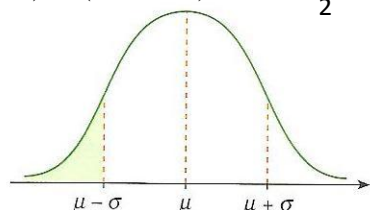
3.2. $\mu - \sigma = 64 - 10 = 54$; $\mu + \sigma = 64 + 10 = 74$
 $P(54 < X < 74) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,6827$



Logo, aproximadamente 68,27% dos soldados têm um peso compreendido entre 54 e 74kg.

3.3. $\mu - \sigma = 54$

$P(X < 54) = P(X < \mu - \sigma) = 0,5 - \frac{0,6827}{2} = 0,1587$



Logo, cerca de 15,87% dos soldados têm um peso inferior a 54kg.

Exercícios:

113. Os pesos dos parafusos produzidos numa fábrica distribuem-se normalmente com

$$\mu = 56\text{g} \text{ e } \sigma = 6\text{g}.$$

Determine a percentagem de parafusos cujo peso:

- 113.1. pertence ao intervalo $[50, 62]$ (em gramas)
- 113.2. é inferior a 56g.
- 113.3. superior a 62g.

114. Os pesos das crianças do sexo masculino de um infantário distribuem-se normalmente com valor médio de 12kg e desvio padrão de 2kg. Qual a probabilidade de uma criança daquele infantário, escolhida ao acaso:

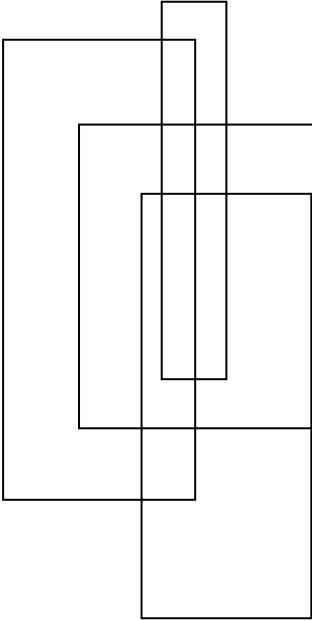
- 114.1. pesar entre 10kg e 14kg?
- 114.2. pesar mais de 14kg?
- 114.3. pesar mais de 16kg?

115. Os diâmetros, em centímetros, de um certo tipo de peças circulares obedecem à distribuição $N(10; 0,2)$. Seja X o diâmetro, em cm, das peças circulares. Determine:

- 115.1. $P(9,8 \leq X \leq 10,2)$
- 115.2. $P(X \leq 9,6)$
- 115.3. $P(X \geq 10,2)$
- 115.4. $P(9,6 \leq X \leq 10)$

116. Uma distribuição das classificações de 500 provas de um exame, na escala de 0 a 20, é representada por uma curva normal $N(11, 3)$.

- 116.1. Qual é a percentagem de provas que foram classificadas com, pelo menos 14 valores?
- 116.2. Escolhida ao acaso uma das provas, qual a probabilidade da classificação:
 - a) estar compreendida entre 8 e 14?
 - b) estar compreendida entre 14 e 17?
 - c) não ser inferior a 5 valores?



TEMA 2

FUNÇÕES

INTRODUÇÃO

O Cálculo Infinitesimal, que engloba os Cálculos Diferencial e Integral, por muitos considerado a mais importante conquista de inteligência humana, desenvolveu-se a partir de alguns problemas originários da Antiguidade.

Como determinar o volume de um sólido, por exemplo, de uma esfera? Como obter a tangente a uma dada curva num ponto? Como saber a área de uma figura plana?

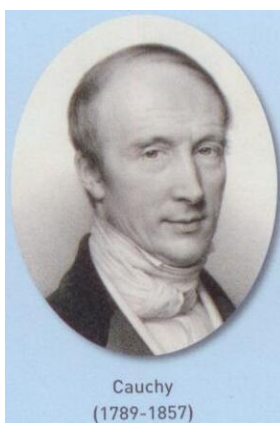
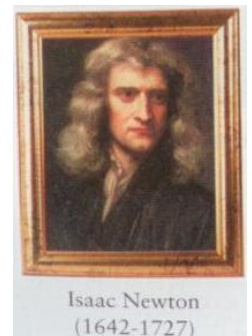
Estes problemas foram abordados pelos Antigos Gregos, que, se bem que fossem muito engenhosos, não conseguiram produzir uma teoria

unificadora que os enquadrasse, o que só veio a suceder no século XVII. Os problemas de áreas e volumes conduziram ao Cálculo Integral, o das tangentes ao Cálculo Diferencial.

O problema da obtenção de tangentes revelou-se intimamente relacionado com o da determinação de áreas.

Esta relação foi compreendida por Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727), que são considerados os “pais” do Cálculo Infinitesimal.

A derivada, que é um conceito básico do Cálculo Diferencial, é hoje apresentada como o limite da variação média ou o declive da recta tangente a uma curva. Mas, para dispor destes conceitos na forma actual, conceptualmente consistentes, foi preciso esperar pelos trabalhos de Cauchy, no século XIX.



FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

A Matemática tem sido uma ferramenta essencial para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. É através da concretização daquilo a que chamamos modelação matemática, modelagem ou matematização que a teoria e as aplicações da matemática se relacionam. Como afirma o matemático Ian Stewart: “Qualquer descrição da matemática do mundo real é um modelo. Manipulando o modelo esperamos compreender algo da realidade”. Claramente os modelos são apenas aproximações (umas vezes mais fiéis do que outras!) da realidade, mas que nos permitem fazer previsões e tomar decisões com pequenas margens de erro. As funções exponenciais e logarítmicas têm um papel privilegiado na compreensão e previsão de fenómenos sociais e físicos, como poderás perceber ao longo deste capítulo.

▪ FUNÇÃO EXPONENCIAL (DE BASE SUPERIOR A 1)

Considera a seguinte situação adaptada de uma lenda do Rei da Pérsia.

Um tabuleiro de Xadrez. Coloca no primeiro quadrado dois grãos de café. No segundo quadrado o dobro dos grãos de café. Continua a repetir o mesmo procedimento. Quantos grãos de café terão que estar na última casa do tabuleiro? Aceitam-se apostas...

Comecemos por organizar a informação numa tabela:

N.º casa	1	2	3	4	...8...	17	...	64
N.º de grãos	2	4	8	16	...256...	131072	...	184467440737096

Como facilmente identificamos pelos valores da 2.ª linha da tabela, o número de grãos de café, estamos perante a sequência de potências de base 2, ou seja, de expressão geral 2^n .

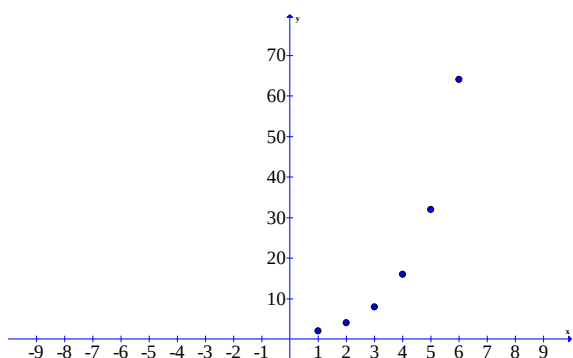
Na realidade o exemplo apresentado é uma progressão geométrica de base 2, já estudada na 11.ª classe. Será que podemos estender o domínio da sucessão de variável natural a uma função de variável real? A resposta é SIM!

Embora nos primeiros passos a crescimento seja pouco acentuado, este crescimento torna-se cada vez mais rápido, à medida que o n aumenta. É o chamado crescimento geométrico ou crescimento exponencial. De facto, embora o raciocínio aqui descrito seja algo passo a passo (discreto), a propriedade em causa, que é o crescimento com razão (divisão) constante entre termos consecutivos, é comum às progressões geométricas, como a dos grãos de café no tabuleiro de xadrez, e à função que iremos estudar agora e que designamos por exponencial. Mas, quão rápido é o crescimento exponencial? Como é que esse crescimento se traduz graficamente?

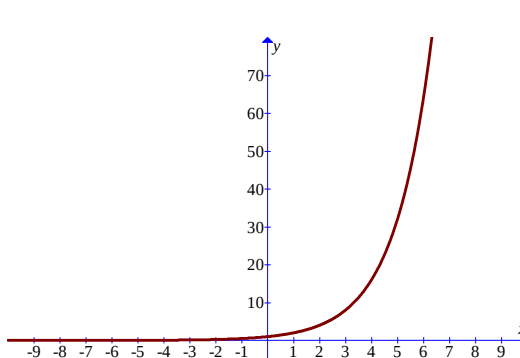
Curiosidade:

Um metro cúbico de café tem cerca de 15 milhões de grãos de café, pelo que, seria preciso cobrir toda a superfície da Terra com uma camada de 25cm de espessura para armazenar os 2^{64} grãos de café!

Quantos algarismos tem o número 2^{64} ? Utiliza uma calculadora...



“Progressão geométrica”: 2^n , n número natural



“Função exponencial”: 2^x , x número real

>Definição de função exponencial

A **função exponencial** é definida pela expressão algébrica $f(x) = a^x$, onde a é um número real positivo, diferente de 1, que constitui a base da função exponencial.

Por exemplo, as funções de expressão: $f(x) = 2^x$; $g(x) = 3^x$; $h(x) = \pi^x$; $j(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$; são funções

exponenciais. Mas, as funções de expressão: $l(x) = (-2)^x$; $m(x) = 0^x$; $n(x) = 1^x$; não são funções exponenciais porque a base da potência não é um número real positivo diferente de 1.

Recordar: A expressão a^x é uma potência onde a é a **base** e x o **expoente**.

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$$

Desafio: A que correspondem as representações gráficas das funções: $m(x) = 0^x$, $n(x) = 1^x$?

Tarefa

Considere as seguintes funções: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ e $h(x) = 10^x$. As três funções estão representadas no mesmo referencial.

1. Completa a tabela seguinte:

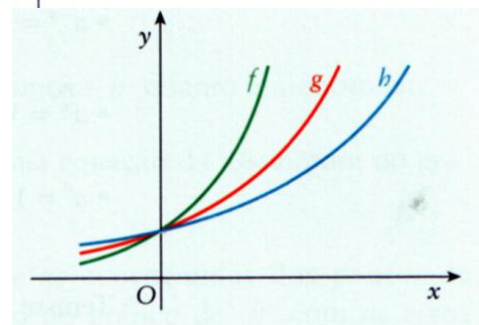
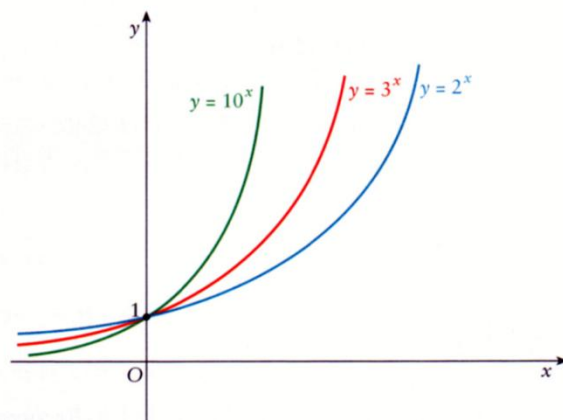
X	2^x	3^x	10^x
-4			
-1			
0			
1			
2			

2. Compare o ritmo de crescimento das referidas funções.

3. Qual a influência da alteração da base (parâmetro a) no gráfico da função do tipo $y = a^x$, $a > 1$?

4. No referencial da figura ao lado estão as representações gráficas das funções f , g e h .

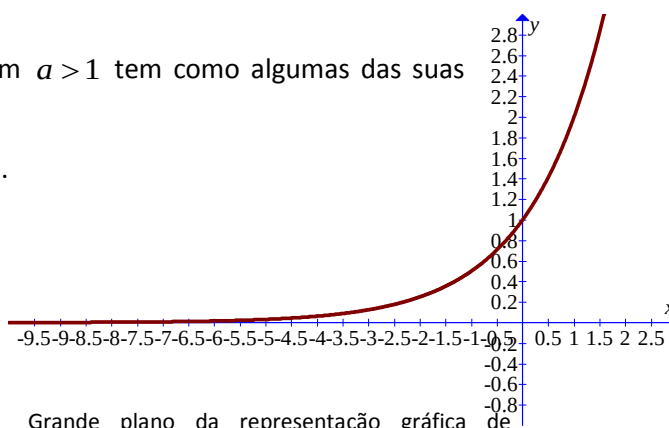
As funções representadas têm as seguintes expressões analíticas, não necessariamente por esta ordem, $y = 3^x$, $y = 1,5^x$ e $y = 4^x$. Associe cada uma das funções f , g e h à sua expressão analítica.



>Propriedades da função exponencial

De uma maneira geral uma função exponencial com $a > 1$ tem como algumas das suas propriedades:

- O domínio de f é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}^+$.
- A função f é estritamente crescente.
- O gráfico da função intersecta o eixo Oy (eixo dos yy) no ponto de coordenadas $(0,1)$.



Grande plano da representação gráfica de $f(x) = 2^x$ no 2.º Q, junto aos eixos coordenados

- A função f não tem zeros.
- A função f é sempre positiva.
- A função f é injectiva.
- Assíntotas: Tem uma horizontal $y = 0$
- Comportamento: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

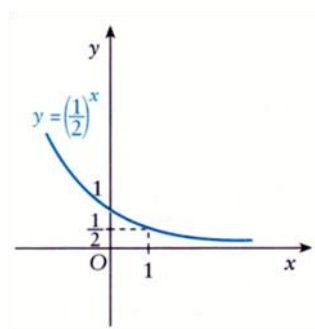
Apesar de não ser alvo de análise exaustiva, repare-se que se $0 < a < 1$ nem todas estas propriedades se verificam.

Por exemplo, $y = (0,5)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Graficamente,

vem:

Veja-se que:

- A função é estritamente decrescente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$



Recordar... Sendo o expoente um número real qualquer poderá em particular, tomar valores negativos e fraccionários, casos em que será fundamental relembrar os casos estudados na 11.ª classe.

Por exemplo:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3; (0,25)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 4^{-4};$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}; 2^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{2^7}; 3^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$$

Tarefa:

1. Averigue a influência do parâmetro k no gráfico da função do tipo $y = a^{kx}$, $a > 1$, $k \in \mathbb{R}$

Sugestão: analise o expoente considerando os casos em que:

1) k é positivo; 2) k é nulo; 3) k expoente é negativo

> Função exponencial de base natural

$$f(x) = e^x$$

Um caso particular de função exponencial com interesse de estudo é a base e , ou seja, $f(x) = e^x$ - *função exponencial natural* - pelas diversas aplicações em modelos matemáticos de áreas tão distintas como as ciências físico-químicas, biológicas, económicas, médicas e sociais. O número e , constante de Euler, número de Neper ou

Napier, é um número irracional $e = 2,7182818284590452353602874...$ e é limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ estudada na 11.ª classe.

▪ CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Existem inúmeras variáveis em situações da realidade que podem ser modeladas por uma função exponencial, ou seja, a função exponencial descreve o comportamento dessas variáveis

Desafio: Quantas vezes precisa de dobrar uma folha de papel para que a espessura seja igual à distância da Terra à lua? 39, 452, 1000, 3000000? E se for para percorrer a distância entre as ilhas de S Tomé e do Príncipe? Registe as diferentes estimativas dos elementos da classe e vamos descobrir quem está mais próximo da verdade! (Poderá precisar de fazer pesquisas algumas distâncias. O seu professor poderá ajudá-lo a encontrá-las.) – Poderá aprofundar o seu conhecimento com o MA1.

com uma aproximação que consideramos ser aceitável. Vejamos alguns exemplos dessas aplicações.

Tarefa: Uma população de bactérias cresce semanalmente 20%. O número inicial de bactérias era 500.

1. Quantas bactérias existem ao fim de uma semana?
2. Quantas bactérias existem um ano depois?
3. Ao fim de quanto tempo existe 1bilhão de bactérias?

Resolução:

1. Ao fim de uma semana, existem o número de bactérias iniciais mais 20% desse valor, ou seja, mais $0,2 \times 500 = 100$ bactérias, o que perfaz um total de $500 + 0,2 \times 500 = 500 \times (1 + 0,2) = 600$ bactérias.

Ao fim de uma semana existiam 600 bactérias.

2. No final da 2.ª semana existem as 600 bactérias mais 20% desse valor, isto é, $600 + 0,2 \times 600 = 600 \times (1 + 0,2) = 500 \times (1 + 0,2) \times (1 + 0,2) = 500 \times (1 + 0,2)^2 = 720$.

Depois de 3 semanas, acrescentamos às 720, mais 20% desse valor:

$$720 + 0,2 \times 720 = 720 \times (1 + 0,2) = \underbrace{500 \times (1 + 0,2)^2}_{\text{720}} \times (1 + 0,2) = 500 \times (1 + 0,2)^3 = 864$$

Nas primeiras três semanas, o número de bactérias cresceu em cada semana aumentou.

Será que esta tendência continuará a verificar-se? Construíamos uma tabela para analisar tal evolução:

N.º semana	0	1	2	3	4	...10...	...40...	52
N.º aumento	0	100	120	144	172,8	516	1222481	1092053
N.º bactérias	500	600	720	864	1036,8	3095,9	734885,8	6552315,5

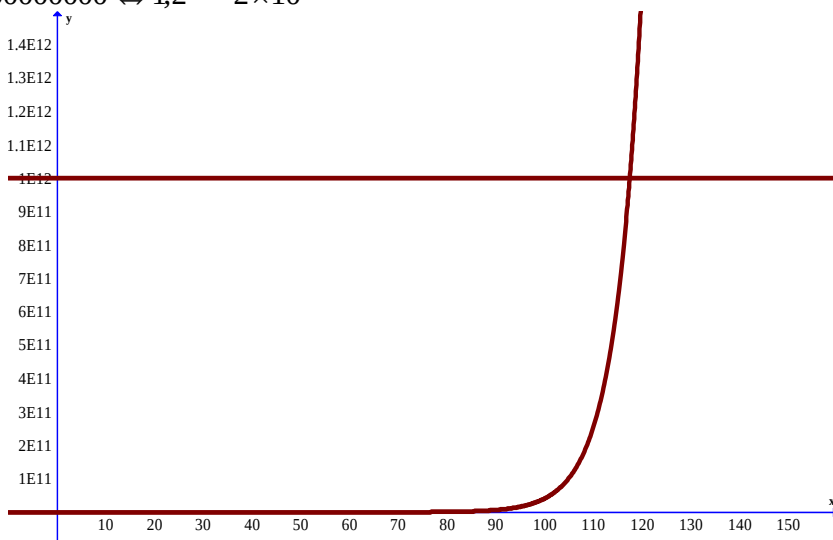
De uma maneira geral, podemos definir o número de bactérias da população utilizando a expressão: $B(x) = 500 \times (1 + 0,2)^x = 500 \times 1,2^x$

O ritmo de crescimento aumentou ao longo do tempo. Tendencialmente continuará a aumentar. Para calcularmos o número de bactérias ao fim de um ano, 52 semanas, podemos substituir o x por 52 na expressão, isto é, $B(52) = 500 \times 1,2^{52} = 6552315,468$. Ao fim de um ano a população de bactérias passa de 500 para 6552315, o que é mesmo muita bactéria!

3. Esta questão consiste em resolver a equação $B(x) = 1000000000000$, ou seja, $500 \times 1,2^x = 1000000000000 \Leftrightarrow 1,2^x = 2000000000 \Leftrightarrow 1,2^x = 2 \times 10^9$

. Como de momento ainda não temos ferramentas para o fazer, por agora poderemos resolvê-la graficamente através da intersecção da função $B(x)$ com a função constante $y = 1000000000000$ (10^{12} ou $1E^{12}$). (Atenção aos valores dos eixos dos yy !)

Por observação gráfica, podemos afirmar que será aproximadamente após 110 semanas (2 anos e 6 semanas) que o número de bactérias atingirá 1 bilhão.



O comportamento da função exponencial caracteriza-se pelo acentuado (de)crescimento ao longo do tempo. Neste caso vamos centrar apenas nos casos de rápido crescimento ($a > 1$).

Este tipo de funções permite descrever fenómenos físicos e das ciências sociais e naturais como exemplo reprodução de bactérias que analisámos. O cálculo de juros e impostos, evolução de populações, desintegração radioactiva são exemplos de outros fenómenos que podem também ser modelados por funções exponenciais.

Para resolver

1. O crescimento de uma população de coelhos, numa dada floresta, é dado pela função: $N(t) = A_0 \times e^{0,2t}$ em que $N(t)$ representa o número de coelhos no ano t e A_0 a população no ano $t = 0$. Sabe-se que $N(1) = 2000$.

1.1. Qual é a população de coelhos para $t = 0$? ; 1.2. Qual é a percentagem de aumento da população por ano?

2. A quantidade, Q , em gramas, de uma substância radioactiva decresce exponencialmente de acordo com a fórmula: $Q(t) = Q_0 \times e^{-0,09t}$, t em anos

Sabe-se que ao fim de 11 anos restavam cerca de 8,51 gramas dessa substância. Qual era a quantidade inicial?

Desafio: Se tiver possibilidade, visualize graficamente as funções dos dois exercícios anteriores. Compare as respectivas propriedades (domínio, contradomínio, monotonia, sinal, existência de zeros) e observando as expressões analíticas de ambas, conjecture a origem de tais diferenças.

Notas:

- O crescimento exponencial é tanto maior quanto maior for a base da potência. No caso de considerarmos o coeficiente de x negativo ($-kx$, $k > 0$), obtemos funções decrescentes.
- Nem todo o tipo de crescimento é exponencial, por exemplos os modelos afins e polinomiais (estudados na 10.ª classe) ou progressões aritméticas (estudadas na 11.ª classe) poderão ser crescentes, mas de uma forma menos acentuada que a exponencial. Um exemplo poderá ser dado pelo crescimento linear. Por exemplo, a relação entre o preço de um pastel e o preço a pagar são grandezas directamente proporcionais. À medida que o número de pastéis aumenta, o preço também aumenta, contudo, aumenta sempre de acordo com a contante que é o preço de 1 pastel que é fixo.

▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

>Regras operatórias das funções exponenciais

Algumas propriedades já estudadas para as potências de expoente racional, são extensíveis às potenciais de expoente real e ser-nos-ão úteis na resolução de equações que envolvam exponenciais - as equações exponenciais!

Para resolver

3. Escreve na forma de potência de base indicada, cada um dos seguintes números.

3.1. $\frac{1}{9}$ (base 3)

3.2. $\frac{1}{32}$ (base 2)

3.3. 0,0001 (base 10)

3.4. 0,008 (base 5)

Recordar:

Transformar número numa potências com determinada base, significa descobrir que expoente para a base dada é que permite obter o número inicial:

Exemplos:

$$0,01(\text{base } 10) = 10^{-2}$$

$$8(\text{base } 2) = 2^3$$

Regras	Exemplos
• $a^x \times a^y = a^{x+y}$	$3^3 \times 3^4 = 3^7$
• $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{5^6}{5^4} = 5^2$
• $a^x \times b^x = (a \times b)^x$	$2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$
• $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 2^3$
• $(a^x)^y = a^{xy}$	$(7^2)^3 = 7^6$
• $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$
• $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z}$	$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$
• $a^0 = 1 \quad (\text{para } a \neq 0)$	$5^0 = 1$
• $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad (\text{para } a > 0)$	$3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

Para resolver

4. Calcula o valor das seguintes expressões:

$$\begin{array}{lll}
 5^3 \times 25^2 = & 2^4 \times \sqrt[3]{2} = & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3^{-3} \div 6^{-4} = \\
 \left(4^3\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \div 2^{\frac{5}{2}} = & 3^{\frac{1}{3}} \times 9 + 4^0 \times 3^{\frac{1}{3}} = & 125^3 \times 5^{-2} - 5^3 \times (-1)^0 =
 \end{array}$$

5. Sabendo que $a^2=9$ e $a^3=27$, determina a^5 e a , recorrendo às regras operatórias das potências.

Escreve na forma de potência de base indicada, cada um dos seguintes números.

>Resolução de equações envolvendo exponenciais

Tarefa: Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

1. $2^{x-3} = \left(\frac{1}{16}\right)$

2. $5^{x+1} = 5^x + 10^x$

3. $3^{2x} = 5 \times 3^x - 6$

Resolução: Na resolução de equações exponenciais, o objectivo é transformarmos **ambos os membros em exponenciais com a mesma base**. Porquê? Porque uma vez que a **função exponencial é injectiva a imagens iguais, correspondem objectos iguais**, logo podemos igualar os expoentes, ou seja, se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$.

$$1. \quad 2^{x-3} = \left(\frac{1}{16}\right) \Leftrightarrow 2^{x-3} = 16^{-1} \Leftrightarrow 2^{x-3} = (2^4)^{-1} \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^{4 \times (-1)} \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^{-4} \Leftrightarrow (\text{pela injectividade da exponencial de base 2})$$

$$\Leftrightarrow x-3 = -4 \Leftrightarrow x = -4+3 \Leftrightarrow x = -1$$

$$C.S. = \{-1\}$$

Nota: Na resolução da equação foram utilizadas: regras operatórias para transformar as bases das potências iguais e a injectividade da função exponencial. É a injectividade que nos permite igualar os expoentes de potências de base igual.

2. Procedemos com o mesmo objectivo de determinar potências com base igual. E quando não é possível, como devemos proceder?

$$5^{x+1} = 5^x + 10^x \Leftrightarrow 5^{x+1} - 10^x = 0 \Leftrightarrow 5^x \times 5^1 - 5^x - (2 \times 5)^x = 0 \Leftrightarrow 5^x \times 5^1 - 5^x - 2^x \times 5^x = 0 \Leftrightarrow (\text{colocar factor } 5^x \text{ em evidência})$$

$$\Leftrightarrow 5^x \times (5^1 - 1 - 2^x) = 0 \Leftrightarrow$$

(aplicar lei do anulamento do produto)

$$\Leftrightarrow 5^x = 0 \vee 5 - 1 - 2^x = 0$$

Já vimos que a função exponencial é sempre positiva, pelo que, a primeira igualdade é falsa para qualquer valor da x . Determinemos agora a solução da segunda equação: $4 - 2^x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee 4 = 2^x \Leftrightarrow x = 1 \vee 2^2 = 2^x \Leftrightarrow x = 1 \vee 2 = x$. $C.S. = \{1, 2\}$. Também na última igualdade foi utilizada a injectividade da função exponencial.

3. Neste caso não só não é possível colocar exponenciais com a mesma base nos dois membros como também não temos qualquer factor para colocar em evidência. Mas $3^{2x} = (3^x)^2$. Façamos uma mudança de variável, considerando $z = 3^x$.

$$3^{2x} = 5 \times 3^x - 6 \Leftrightarrow (\text{fazendo a mudança de variável})$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 5z - 6 \Leftrightarrow z^2 - 5z + 6 = 0 \Leftrightarrow (\text{Equação completa de 2.º grau - aplicar fórmula resolvente } a=1, b=-5, c=6)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{6}{2} = 3 \vee z = \frac{4}{2} = 2$$

As soluções da equação são 2 e 3. (Des)Façamos a mudança de variável $z = 3^x$!

$$3^x = 3 \vee 3^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee 3^x = 2 \text{ (voltaremos a esta última equação no final do capítulo)}$$

Nestes exemplos utilizámos três métodos distintos para resolver condições com exponenciais: **igualdade de expoentes com potência de base igual**; **lei do anulamento do produto** e **mudança de variável**. Os últimos dois constituem artifícios para conseguirmos aplicar o primeiro. Deve utilizar o método mais adequado em cada situação.

Mesmo assim ainda não conseguimos resolver todas as equações exponenciais!

Tarefa: Seja f a função definida por: $f(x) = \frac{1}{8} - 2^{x+1}$.

Determine as coordenadas de intersecção de f com os eixos coordenados.

Para resolver

6. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

6.1 $2^x = 64$

6.2 $4^x = \frac{1}{16}$

6.3 $125 = 5^{2-x}$

6.4 $(x-1) \times 4^x = 0$

6.5 $x \cdot 7^{3x+1} = 49x$

6.6 $0,1^{x-1} - 10^{2x} = 0$

6.7 $e^{x^2-5x+6} = 1$

6.8 $\frac{8}{6^x} = 3^{-x}$

6.9 $4^x = \sqrt{2^{x+1}}$

6.10 $4^{2x} + 5 \times 4^x = 8$

6.11 $2^{x+2} + 2^{-x} = 5$

6.12 $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

Resolução: Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos coordenados:

- Ponto de intersecção com o eixo Ox

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} - 2^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^3} - 2^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2^{-3} - 2^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2^{-3} = 2^{x+1} \Leftrightarrow -3 = x+1 \Leftrightarrow x = -4$$

pela injectividade da função exponencial de base 2

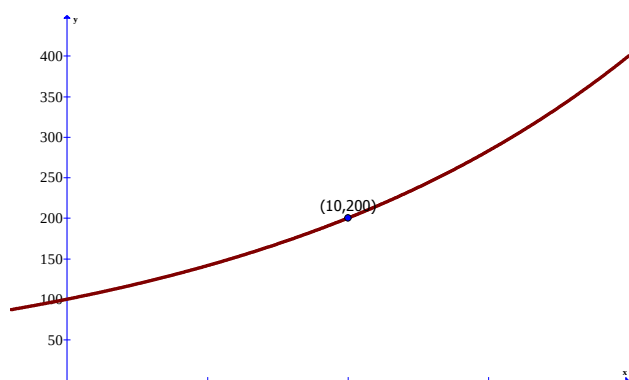
O ponto de intersecção com o eixo Ox tem as coordenadas $(-4, 0)$.

- Ponto de intersecção com o eixo Oy

$$f(0) = \frac{1}{8} - 2^{0+1} = \frac{1}{8} - 2 = \frac{1}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{15}{8}$$

O ponto de intersecção com o eixo Oy tem as coordenadas $(0, -\frac{15}{8})$.

Vejamos agora um exemplo de como determinar um modelo de uma função exponencial a partir de dados do seu gráfico.



Tarefa: Considera que comportamento de um fenómeno, em função do tempo, é dado por funções do tipo $P(t) = P_0 \times 2^{kt}$, onde P_0 é o valor inicial e tem a seguinte representação gráfica ao lado. Determina uma equação deste modelo?

Resolução: Ora, por observação gráfica conhecemos dois pontos: $(0, 100)$ e $(10, 200)$. Sendo P_0 a ordenada na origem, vem $P_0 = 100$, ou algebricamente, substituindo as coordenadas do ponto na expressão geral obtemos:

$$100 = P_0 \times 2^{k \times 0} \Leftrightarrow 100 = P_0 \times 2^0 \Leftrightarrow 100 = P_0 \times 1 \Leftrightarrow 100 = P_0. \text{ Substituindo o ponto de coordenadas } (10, 200) \text{ vem:}$$

$$200 = 100 \times 2^{k \times 10} \Leftrightarrow 2 = 2^{10k} \Leftrightarrow 1 = 10k \Leftrightarrow k = \frac{1}{10} = 0,1. \text{ Logo a expressão será } P(t) = 100 \times 2^{0,1t}.$$

Para resolver

7. O crescimento populacional de um país (em milhões de habitantes) durante um certo período de tempo é dado pela função $P(t) = 10 \times 1,1^{kt}$.

Observe o gráfico da função e indica uma possível expressão para P .

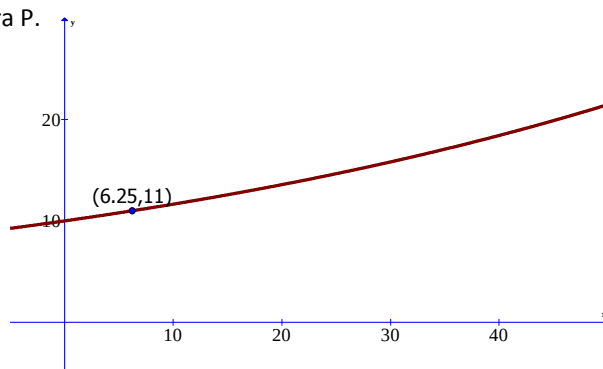
8 A função h é uma função real de variável real definida por:

$$h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} - 1$$

8.1 Determine o domínio e contradomínio de h .

8.2 Determine os zeros da função.

8.3 Resolva a equação $h(x) = \frac{1}{2}$.



Se tiver possibilidade confronte os seus resultados com a representação da função numa calculadora gráfica ou computador.

9 Numa determinada floresta, existe uma árvore de fruto, cujo número de fruto, F , é dado pela lei $F(t) = 820 \times 1,3^t$, com t expressos em anos. Determine:

9.1 Quantos pinheiros havia no início do estudo e ao fim de 10 anos?

9.2 Ao fim de quantos anos duplicará o número inicial de frutos em relação ao valor inicial?

9.3 Quantos anos completos serão necessários para o número de frutos atingir 50mil?

>Resolução de inequações envolvendo exponenciais

Tarefa: Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$$2^x < \sqrt[3]{2} \quad 2^x + 2^{2-x} \leq 5$$

Resolução: $2^x < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 2^x < 2^{\frac{1}{3}}$

Como a função exponencial de base 2 (superior a 1) é estritamente crescente,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ ou seja, o } x$$

poderá tomar valores que verifiquem a desigualdade $x < \frac{1}{3}$, ou seja, no intervalo $]-\infty; \frac{1}{3}[$

$$2^x + 2^{2-x} \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^2 \times 2^{-x} \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{1} + \frac{2^2}{2^{-x}} - \frac{5}{2^{-x}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 4 - 5 \times 2^x \leq 0 \Leftrightarrow \text{Cálculo auxiliar}$$

$$\Leftrightarrow 2^x \geq 1 \quad \wedge \quad 2^x \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x \geq 2^0 \quad \wedge \quad 2^x \leq 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [0; 2]$$

A função exponencial com base a superior a 1 é estritamente crescente. Isso permite concluir:

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1$$

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1$$

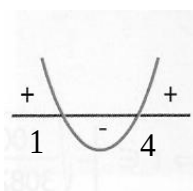
Cálculo auxiliar

Façamos uma mudança de variável :

$$y = 2^x$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \quad \vee \quad y = 1$$



$$y \geq 1 \quad \wedge \quad y \leq 4$$

Nota: Nos casos em que a condição é uma inequação, procedemos da mesma forma do que para as equações, mas atendendo à especificidade da resolução das inequações e na interpretação do resultado.

▪ LOGARITMOS E FUNÇÃO LOGARÍTMICA (DE BASE SUPERIOR A 1)

>Logaritmo de um número

Uma forma diferente de multiplicar!

John Napier, matemático escocês, conseguiu no final do séc XVI, uma forma engenhosa de efectuar multiplicações utilizando a adição, a partir de potências com a mesma base.

Vejamos um caso simples:

16 multiplicado por 32, são potências de base 2, 2^4 e 2^5 , respectivamente, ou seja,

Adicionamos os expoentes ($4+5=9$) e o resultado da multiplicação é dado por $2^9=512$.

$$\text{Simbolicamente, vem: } 16 \times 32 = 2^4 \times 2^5 = 2^{4+5} = 2^9 = 512$$

Em que momento surgem os logaritmos?

Quando os números que queremos multiplicar não são traduzíveis por potências de expoente inteiro. Nestes casos precisamos de descobrir o expoente da potência de um determinado número conhecido.

Por exemplo: $250=10^k$,

Curiosidade:

O desenvolvimento da astronomia e da navegação, pela grandeza dos números que envolvem, trouxe a necessidade de simplificar a multiplicação de números. Devido à escassez de ferramentas de cálculo, muitos matemáticos dedicaram-se a escrever de forma exaustiva listagens com o cálculo de logaritmos nas diferentes bases (2, e, 10,...), as chamadas tábuas de logaritmos.

Neste caso não existe um valor de k , inteiro, que verifique a igualdade, visto que, 250 não é uma potência de base 10. Então designamos k por logaritmo de 250 na base 10 ($\log(250)$).

Simbolicamente: $k = \log(250)$

Voltando ao primeiro exemplo $\log_2(16)=4$ porque $2^4=16$ e $\log_2(32)=5$ porque $2^5=32$.

Nota: $\log_3(27)$ lê-se: logaritmo de 27 na base 3.

Tarefa: 1. Calcula: 1.1. $\log_3(27)$; 1.2. $\log_{\frac{1}{2}}(8)$; 1.3.

$$\log_2\left(\frac{1}{16}\right);$$

Resolução: 1.1. $\log_3(27) = y \Leftrightarrow 3^y = 27 \Leftrightarrow 3^y = 3^3 \Leftrightarrow y = 3$.

Logo, $\log_3(27) = 3$

$$1.2. \quad \log_{\frac{1}{2}}(8) = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow y = -3.$$

Logo, $\log_{\frac{1}{2}}(8) = -3$

$$1.3. \quad \log_2\left(\frac{1}{16}\right) = y \Leftrightarrow 2^y = 2^{-4} \Leftrightarrow y = -4.$$

Logo, $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

Para resolver

11. Calcule o valor de:

$$11.1 \log_2(64) \quad 11.2 \log_5(5)$$

$$11.3 \log_4(1) \quad 11.4 \log_2\left(\frac{1}{32}\right) + \log_{\frac{1}{32}}(2)$$

$$11.5 \log_{\frac{1}{4}}(2) \quad 11.6 \log_3\left(\frac{1}{8}\right)$$

12. Calcule o valor dos números reais:

$$12.1 x = \log_3 27 \quad 12.2 y = \log_5 \frac{1}{125}$$

$$12.3 z = \log_2 \sqrt{8} \quad 12.4 t = \log_{\sqrt{2}} 4$$

$$12.5 u = \log_3 1 \quad 12.6 v = \log_5 5$$

$$12.7 w = \log_7(7^3) \quad 12.8 r = 5^{\log_5 125}$$

Nota:

Como $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, temos:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^x = x$$

Da uma maneira geral, chama-se **logaritmo de um número positivo** x na base a , com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, ao número y , tal que $a^y = x$ e representa-se por $\log_a x$, ou seja,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

>Logaritmos de base natural e base decimal

O símbolo **log** (sem referência a base) designa logaritmos de base **10**, diz-se **logaritmo decimal**. Assim, em vez de $\log_{10} x$ pode-se escrever $\log x$.

O **logaritmo neperiano ou logaritmo natural**, é o logaritmo de base e , e em vez de $\log_e x$ pode-se escrever $\ln x$.

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

Na calculadora existem as teclas **log** e **ln**. A tecla **log** permite calcular logaritmos de base 10 e a tecla **ln** permite calcular logaritmos de base e .

Exemplo:

$$\log 1000 = 3$$

log 1000	3
▶MAT	

$$\log 26 \approx 1,415$$

log 26	1.414973348
▶MAT	

$$\ln e = 0,5$$

ln √(e^1)	0.5
▶MAT	

$$\ln 26 \approx 3,258$$

ln 26	3.258096538
▶MAT	

Para resolver

13. Calcule o valor de:

13.1 $\log(10000)$

13.2 $\ln(e^5)$

13.3 $\log(0,001) + \ln(\sqrt[3]{e^2})$

13.4 $\ln(e^{-7})$

13.5 $\ln(e^{-1}) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) + \log(\sqrt{10})$

13.6 $\ln e + \ln e^2 + \ln e^3$

13.7 $\ln e - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

13.8 $\ln(e\sqrt{2})$

13.9 $\ln e^2 - 2 \ln e$

13.10 $\ln 3 + \ln(27e) - \ln(9e^3)$

>Função logarítmica

A função exponencial de base superior a 1 é injectiva e todas as funções injectivas têm inversa. Em particular, a função inversa da exponencial será uma função que nos permite responder a uma questão do género: “Qual o expoente da potência de base dois, cujo resultado é ...?”, ou simbolicamente: “Qual o valor de A tal que $2^A = \dots$?”

Quais serão as propriedades dessa função inversa? Como é que o crescimento exponencial se traduzirá na função inversa?

Tarefa

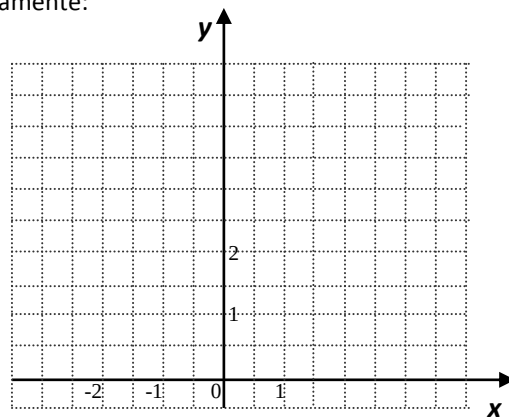
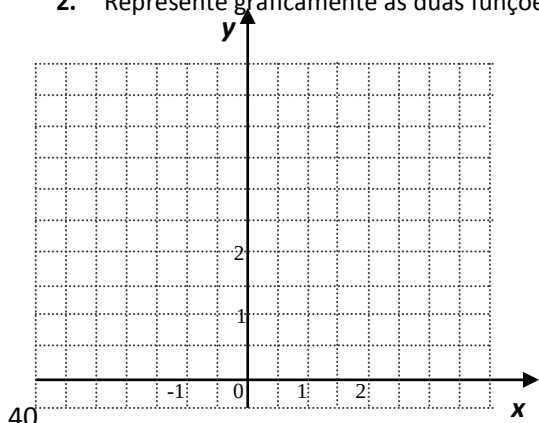
1. Represente na forma tabular as funções de expressão: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

x					
f(x)					

x					
g(x)					

1.1. Compara os valores das tabelas

2. Represente graficamente as duas funções graficamente:



3. Por observação gráfica complete os quadros seguintes:

<i>Função exponencial de base $a > 1$</i>	<i>Função logarítmica de base $a > 1$</i>
Domínio:	Domínio:
Contradomínio:	Contradomínio:
Monotonia:	Monotonia:
Assíntotas ao gráfico da função:	Assíntotas ao gráfico da função:
Intersecção com os eixos coordenados:	Intersecção com os eixos coordenados:
Injetividade:	Injetividade:
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) =$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$

4. Assinale as diferenças e semelhanças das funções estudadas.

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

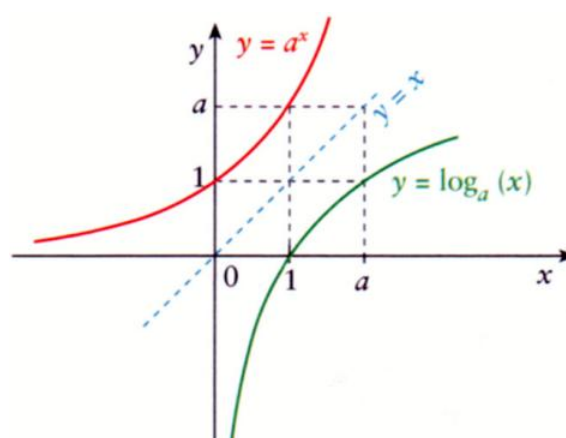
$$y = \log_a x$$

Chama-se **função logarítmica** de base $a > 1$ à função:

As funções exponencial ($y = a^x$) e logarítmica ($y = \log_a x$) são funções inversas.

Os seus gráficos são simétricos relativamente à recta de equação $y = x$.

Para $a > 1$ as suas representações gráficas estão na figura ao lado.

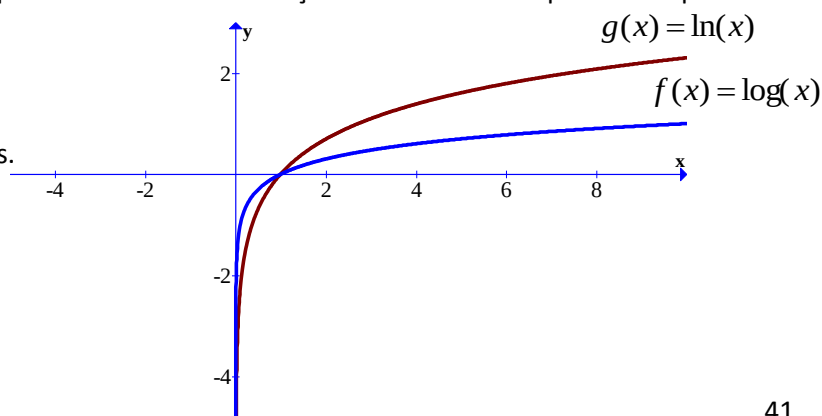


>Propriedades da função logarítmica

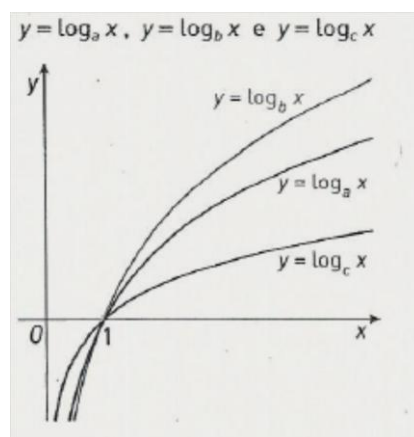
Tarefa:

1. Na figura abaixo estão representadas as funções definidas pelas expressões:
 $f(x) = \log(x)$; $g(x) = \ln(x)$

Compare o valor das bases dos logaritmos das funções representadas.

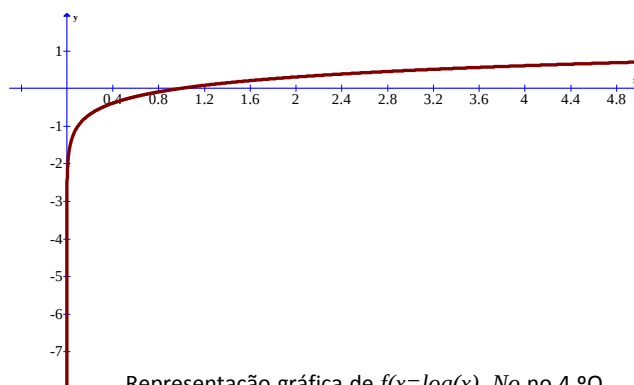


- Aplicando a mesma lógica da alínea anterior, ordene os valores de a , b e c por ordem crescente.
- Qual a influência do valor da base do logaritmo no crescimento da função?



A função logarítmica $f(x) = \log(x)$, $a > 1$, tem as seguintes propriedades:

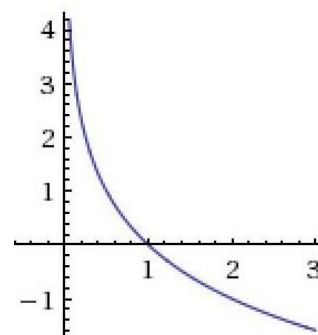
- O domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.
- A função f é estritamente crescente.
- O gráfico da função não intersecta o eixo Oy (eixo dos yy).
- A função f não é zero no ponto de coordenadas $(1,0)$, ou seja, $\log(1) = 0$.
- A função f é injectiva
- Assíntotas: Tem uma vertical $x = 0$
- Comportamento: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Representação gráfica de $f(x) = \log(x)$. No 4.ºQ, a função descreve uma curva próxima ao eixo dos yy , contudo nunca o intersecta.

Apesar de não ser alvo de análise exaustiva, repare-se que se $0 < a < 1$ nem todas estas propriedades se verificam.

Por exemplo, $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$. Graficamente, vem:

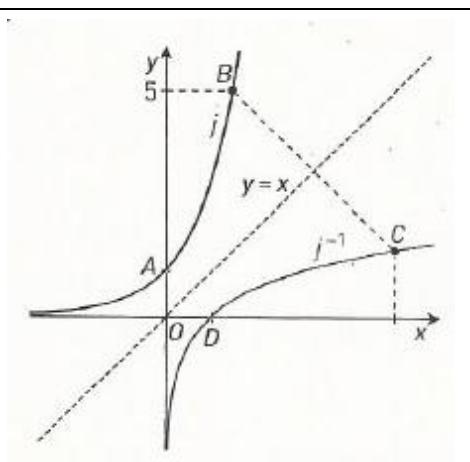


Para resolver

14. *Na figura encontra-se representada graficamente uma função j tal que $j(x) = 3^x$ e a sua função inversa, j^{-1} .

Os pontos A e B pertencem ao gráfico de j e os pontos D e C são as imagens de A e de B, respectivamente, pela reflexão do eixo $y = x$.

Determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D.



Veja-se que:

- A função é estritamente decrescente.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$

>Determinação de domínio da função logarítmica

Como os logaritmos estão definidos apenas para quantidades positivas, nunca nos podemos esquecer das restrições das propriedades da função logarítmica, ou seja, **o argumento do logaritmo tem de ser positivo (>0)**.

Tarefa: Determina o domínio de cada uma das seguintes funções:

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. $y = \log(2 - x^2)$

3. $y = \frac{1}{\ln(x^2 - 4)}$

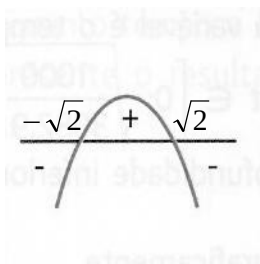
4. $y = \log_3(\sqrt{2-x})$

Resolução: Na resolução deste tipo de exercícios temos de estar atentos que para as funções estarem bem definidas: o denominador não pode ser nulo, o radicando não pode ser negativo e o logaritmo tem de ser positivo. Por vezes isso leva-nos à conjugação de várias condições.

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função exponencial e o seu domínio é $\mathbb{R}$.

2. $D = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x^2 > 0\}; \quad 2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[.$ Logo,
 $D =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

$2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$



3. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 > 0 \wedge \ln(x^2 - 4) \neq 0\};$

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\wedge \ln(x^2 - 4) \neq \ln 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 5$
 $.$

Logo, $D =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}, -2[\cup]2, \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$

4. $D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2-x} > 0 \wedge 2-x > 0\}; \quad \sqrt{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$ Logo, $D =]-\infty, 2[$

Tarefa: Seja f uma função injectiva definida pela expressão

$f(x) = 2 \times 3^{x-2} - 1$

1. Determine, sem recorrer à função inversa, $f^{-1}(5)$

2. Caracterize a função inversa de f .

Resolução:

1. $f^{-1}(5)$ representa um elemento do domínio de f , cuja imagem por f é 5. Queremos determinar x , tal que $f(x) = 5$. Assim $2 \times 3^{x-2} - 1 = 5 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

$f(3) = 5$, então $f^{-1}(5) = 3$

Para resolver

15. Determina domínio das seguintes funções definidas pelas seguintes expressões:

15.1 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

15.2 $g(x) = \ln(x + 3)$

15.3 $h(x) = \log(x^2 - 4)$

15.4 $i(x) = \log_3(9 - x^2)$

15.5 $j(x) = \ln(x^2 + x - 6)$

15.6 $l(x) = \log_2\left(\frac{x-3}{x}\right)$

15.7 $m(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$

$$2.D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2 \times 3^{x-2} - 1 = y \Leftrightarrow 3^{x-2} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = \log_3\left(\frac{y+1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{y+1}{2}\right) + 2$$

$$D_{f^{-1}} = \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{y+1}{2} > 0 \right\} =]-1; +\infty[$$

$$\frac{y+1}{2} > 0 \Leftrightarrow y+1 > 0 \Leftrightarrow y > -1$$

A caracterização da função inversa é:

$$f^{-1} :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = \log_3\left(\frac{y+1}{2}\right) + 2$$

16. Considere a função f definida por: $f(x) = \log_4(x)$.

Sabendo que $4^a = 256$, determine o valor de $f(a)$.

16.1 Calcule o valor exacto de:

a) $f(16)$ b) $f(2)$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

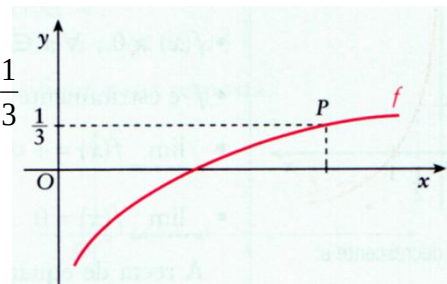
16.2 Determine as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico da função f com a recta de equação $y = 2$.

17 Na figura está parte da representação gráfica da função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \log_8(x)$.

P é um ponto do gráfico

de g que tem ordenada $\frac{1}{3}$

17.1 Determine a abcissa do ponto **P**.



17.2 Caracterize a função inversa de cada uma das funções injectivas, definidas por:

a) $f(x) = 2 - e^{x-5}$

b) $g(x) = \frac{1 - \log_3(1+2x)}{4}$ c) $h(x) = \frac{5}{3} - \ln(2-3x)$

Notas:

- Todas as funções logarítmicas de base maior que 1 e domínio $\mathbb{R}^+$, crescem para $+\infty$, no entanto, o seu crescimento é tão lento, quanto o da função exponencial correspondente é vertiginoso.
- As bases mais utilizadas em cálculo de logaritmos são base 2, 10 e **e**.
- Os logaritmos de base 10 chamam-se decimais e designam-se por $\log(x)$, omitindo-se a base.
- Os logaritmos de base **e** chamam-se Naturais, Neper ou Napier e designam-se por $\ln(x)$.

▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS

>Regras operatórias de exponenciais e logaritmos

Da mesma forma que existem regras que facilitam o cálculo operatório de potências, também existem regras que facilitam o cálculo logarítmico. Como operações inversas, podemos entender as regras para os logaritmos fazendo um paralelismo com as regras existentes para as operações com potências.

Regras operatórias da função exponencial		Regras operatórias dos logaritmos
$a^{\log_a(x)} = x$	identidade	$\log_a(a^x) = x$
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	Multiplicação $\leftrightarrow$ Adição	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^x : a^y = a^{x-y}$	Divisão $\leftrightarrow$ Subtração	$\log_a(x \div y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$(a^x)^p = a^{x \times p}$	Potência $\leftrightarrow$ Multiplicação por valor real	$\log_a(x^p) = p \log_a(x), p \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	Raíz $\leftrightarrow$ Divisão por valor natural	$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{\log_a(x)}{n}$

Desafio:

As propriedades de operações com logaritmos podem ser demonstradas a partir das regras das operações de potências que lhe estão associadas e fazendo as substituições certas, utilizando as igualdades da identidade. Por exemplo para a regra que transforma a adição de logaritmos no logaritmo do produto, experimenta as substituições: $\log_a(x) = u$; $\log_a(y) = v$ (1) $\Rightarrow x = a^u$; $y = a^v$ (2)

Assim, por (2), vem $\log_a(xy) = \log_a(a^u \times a^v)$. Depois de utilizares as propriedades da multiplicação de potências com a mesma base, a identidade ($a^{\log_a(x)} = x$) e (1), certamente que obténs o pretendido. Experimenta fazer a demonstração desta e das outras propriedades. Poderás confirmar os teus resultados consultando um manual de 12.º ano ou alguns de 11.º ano.

Tarefa: Utilizando as propriedades dos logaritmos:

1.1. Simplifica a expressão: $\ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x)$;

1.2. Escreve como um só logaritmo:

$$\log(x^2) + \log x - \log \sqrt{x}.$$

Resolução:

$$1.1 \ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x) = \ln(3 \times x^2 \times x) = \ln(3x^3)$$

1.2 Aplicando as propriedades dos logaritmos temos:

$$\begin{aligned} &\log(x^2) + \log x - \log \sqrt{x} \\ &= 2 \log x + \log x - \frac{\log x}{2} = \left(2 + 1 - \frac{1}{2}\right) \log x = \frac{5}{2} \log x \end{aligned}$$

>Mudança de base

No caso dos logaritmos existe a necessidade de acrescentar uma outra regra (de ouro!) para simplificarmos o cálculo de logaritmos, principalmente utilizando a calculadora. Na verdade, a calculadora só permite efectuar directamente, o cálculo de logaritmos em duas bases: **10** e **e**.

Como determinar por exemplo $\log_5(125)$?

Para responder a esta questão teremos que utilizar o artifício da **mudança de base**. Vejamos:

É possível calcular, por exemplo, $\log_5 125$, usando logaritmos de base **e** e de base **10**.

Seja: $y = \log_5 125 \Leftrightarrow 5^y = 125 \Leftrightarrow 5^y = 5^3 \Leftrightarrow y = 3$. Aplicando $\ln$ (base **e**) aos dois membros em (1), vem:

$$\ln 5^y = \ln 125 \Leftrightarrow y \ln 5 = \ln 125 \Leftrightarrow y = \frac{\ln 125}{\ln 5} \quad (1)$$

Fazendo na calculadora $\frac{\ln 125}{\ln 5} = 3$. Similarmente, aplicando $\log$ (base **10**) aos dois membros em (1), obtemos: $\log_5 125 = \frac{\log 125}{\log 5} = 3$.

Generalizando, vem

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}, \quad b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},$$

fazendo a mudança para a base 10 ou, similarmente,

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad \text{optando pelo logaritmo de base } e.$$

Na calculadora, para calcularmos $\log_3 7$, fazemos

$$\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,771 \quad \text{ou} \quad \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1,771.$$

>Equações envolvendo exponenciais e logaritmos

Tal como é possível transformar a equação numa igualdade entre exponenciais com a mesma base, pela mesma propriedade (injectividade da função) podemos também transformar a equação numa igualdade de logaritmo com a mesma base:

$$\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Tarefa: Resolve cada uma das seguintes equações:

$$1.1 \log(x^2) = \log(2x) \quad 1.2 \log(x+1) - \log x = \log(2x)$$

Resolução: 1.1 Começamos por definir o domínio onde a equação é válida tendo em conta que o argumento do logaritmo só pode tomar valores positivos. Domínio da equação: $x^2 > 0 \wedge 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Logo, $D =]0, +\infty[$.

$$\log(x^2) = \log(2x) \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Como 0 não pertence ao domínio da equação logarítmica, esta equação tem apenas a solução 2. C.S. = $\{2\}$

$$1.2 \text{ Domínio da equação: } x+1 > 0 \wedge x > 0 \wedge 2x > 0. \text{ Logo, } D =]0, +\infty[.$$

$$\log(x+1) - \log x = \log(2x) \Leftrightarrow \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log(2x).$$

Como a função logarítmica decimal ($a > 1$) é injectiva, vem:

$$\frac{x+1}{x} = 2x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 1\right) \wedge x \neq 0$$

Como $-\frac{1}{2}$ não pertence ao domínio da equação só existe uma solução. C.S. = $\{1\}$.

Repare que neste caso foi necessário utilizar uma das propriedades dos logaritmos, nomeadamente $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a(x \div y)$.

Para resolver

18 Calcule, utilizando as propriedades dos logaritmos:

$$18.1 \log_2(64 \times 16)$$

$$18.2 \log_3\left(\frac{81}{27}\right)$$

$$18.3 \log_2(32)^8$$

19 Use as propriedades dos logaritmos para escrever na forma de um único logaritmo:

$$19.1 \ln(x^2) + \ln(x) - \ln(\sqrt{x})$$

$$19.2 2\log(6) - 3\log(3)$$

$$19.3 \ln(x^6) - \ln(x^2) + 2\ln(x)$$

20 Considera $\log(5) \approx 0,7$ e $\log(13) \approx 1,1$ e utilizando as propriedades dos logaritmos determina o valor numérico de:

$$20.1 \log(65) \quad 20.2 \log(0,2)$$

$$20.3 \log\left(\frac{5}{13}\right) \quad 20.4 \log\left(\sqrt{\frac{13}{65}}\right)$$

21 Sabe-se que $\log_2(a) = \frac{1}{5}$. Determine o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$

Recordar:

A solução de equações racionais coincide com soluções que sejam simultaneamente zeros do numerador e em que o denominador **não** se anule.

Para resolver

22 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes condições:

22.1 $\log_5 x = 0$ **22.2** $\log_x 10 = \frac{1}{4}$ **22.3** $\log(x) + \log(40) = 2$ **22.4** $\log(x-3) - \log(2x-9) = 0$
22.5 $\ln(\ln(5x)) = 0$ **22.6** $x = \log_{36} 6$ **22.7** $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 8$ **22.8** $2\ln(x) = \ln(75-10x)$
22.9 $\log_2(x+2) = 0$ **22.10*** $\log_5(25^x + 6) = x+1$

Será que agora já estamos em condições de resolver todas as funções exponenciais?

De facto, aplicando o logaritmo como inverso da exponencial e a mudança de base, vem:

$$3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58(2cd).$$

Tarefa: Resolva a seguinte equação:

1.1 $1 - \log_4(x) = \log_4(5-x)$

Resolução:

1.1 Domínio da equação:

$$x > 0 \wedge 5-x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x < 5 \Leftrightarrow 0 < x < 5.$$

Logo, $D =]0,5[$.

$$1 - \log_4(x) = \log_4(5-x) \Leftrightarrow 1 = \log_4(x) + \log_4(5-x) \Leftrightarrow (\text{aplicando } \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y))$$

$$\Leftrightarrow 1 = \log_4(x(5-x)) \Leftrightarrow (\text{aplicando a equivalência } \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y)$$

$$\Leftrightarrow x(5-x) = 4^1 \Leftrightarrow 5x - x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \times (-1) \times (-4)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

A fórmula resolvente permitiu determinar soluções da equação de 2.º grau,

1 e 4. Como ambas estão entre 0 e 5, ambas são solução da equação inicial.

Nesta equação, foi utilizada a equivalência entre logaritmos e exponencial, bem como uma das propriedades dos logaritmos.

Nota:

Algumas equações envolvendo logaritmos podem ser resolvidas através de uma equação exponencial equivalente e algumas equações com a incógnita em expoente podem ser resolvidas usando logaritmos. Tal equivalência é possível atendendo a que:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$$

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Para resolver

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

23.1 $3^{2x-1} = \sqrt{3}$

23.2 $3^x = 50$

23.3 $e^{3x} - 4 = 6$

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

24.1 $\log(x^2) = \log(2x)$

24.2 $4e^{2x} + 3 = 403$

24.3 $\log_3(x) = 5$

24.4 $2^x = 80$

24.5 $3^{2x-1} = \sqrt{3}$

24.6 $x \log(1,25) + 3x \log(20) = 1$

24.7 $\ln(1-3x) = -1$

24.8 $\ln(x^2 - 4) = \ln(1-4x)$

>Inequações exponenciais e logarítmicas

A função logarítmica com base a superior a 1 é estritamente crescente. Isso permite concluir

$$\log_a(x) < \log_a(y) \Leftrightarrow x < y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a > 1$$

$$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ e } a > 1$$

Tarefa: Resolva a seguinte inequação:

$$\frac{4 - \log_2(x-1)}{1 - 3^{1-x}} > 0$$

Resolução: Começamos por determinar o domínio onde a expressão é válida:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x-1 > 0 \wedge 1-3^{1-x} \neq 0\} =]1; +\infty[$$

$$x > 1 \wedge -3^{1-x} \neq -1 \Leftrightarrow x > 1 \wedge 3^{1-x} \neq 1 \Leftrightarrow x > 1 \wedge 1 -$$

Para resolver a equação racional, utilizaremos um quadro de sinais. Para isso determinamos em antecipado os zeros do numerador e denominador.

$$4 - \log_2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x-1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$x-1 = 4^2 \Leftrightarrow x = 16 + 1 \Leftrightarrow x = 17$$

$$1 - 3^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 3^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Para resolver

25 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

25.1 $4^{3x+1} < (\sqrt{2})^{2x}$

25.2 $2e^{x+2} > 3$

25.3 $\log_2(x+2) \leq 0$

25.4 $\log_7(1-x) > 3$

26 Considere a função $g(x) = 1 + \log_3(2-5x)$

26.1 Determine o domínio e os zeros de g .

26.2 Resolva as condições: $g(x) \leq 3$; $g(x) > 1$

27 Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por:

$$f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2(x)$$

27.1 Mostre que $f(x) = 3 + \log_2(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

27.2 Determine a abscissa do ponto de gráfico de f com a recta de equação $y = 8$.

27.3 Resolva, em $\mathbb{R}$, a condição $f(x) < 2$.

x	$-\infty$	1		17	$+\infty$
$4 - \log_2(x-1)$			+	0	-
$1 - 3^{1-x}$	-	0	+	+	+
$\frac{4 - \log_2(x-1)}{1 - 3^{1-x}}$			+	0	-

Assim, vem:

$$\frac{4 - \log_2(x-1)}{1 - 3^{1-x}} > 0 \Leftrightarrow x \in]1, 17[$$

No estudo analítico de situações de modelação matemática de exponenciais e logaritmos é-nos exigida, além do conhecimento das regras operatórias, a destreza na resolução de (in)equações exponenciais e logarítmicas. Vejamos um exemplo.

Tarefa: Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,98 \ln(t) \quad (\ln \text{ é log de base } e)$$

Uma planta tem 50 cm de altura.

Quantos meses tem a planta?

Resolução: 50 cm = 0,5 m

$$h(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,32 + 0,98 \ln(t) = 0,5 \Leftrightarrow$$

$$0,98 \ln(t) = 0,18 \Leftrightarrow \ln(t) = \frac{0,18}{0,98} \Leftrightarrow$$

$$\ln(t) = 0,202 \Leftrightarrow t = e^{0,202} \Leftrightarrow t \approx 1,2$$

$$(\ln(t) = y \Leftrightarrow t = e^y)$$

Logo, a planta tem, aproximadamente, 1,2 meses, ou seja, 1 mês e 6 dias.

Para resolver

28 Um paciente sujeito a um certo tratamento médico mantém, t horas após a aplicação, uma quantidade, M , em miligramas do medicamento administrado, dada pela relação: $M(t) = 250^{1-0,1t}$

28.1 Qual a quantidade de medicamento aplicada ao doente?

28.2 Sabe-se que a substância foi aplicada às 10 horas.

28.3 A que horas se reduzirá a metade a quantidade ainda existente no corpo do paciente?

28.4 Para fazer efeito, a quantidade de medicamento não deverá ser inferior a 50 mg. A que horas deverá ser administrada nova dose? Apresenta o resultado em horas e minutos arredondados às unidades.

29 Segundo a escala de Richter a magnitude M de um tremor de terra, com epicentro a 100 km do sismógrafo e a amplitude A , em milímetros, registada pela máquina estão relacionadas pela equação: $M = 3 + \log_{10} A$.

29.1 Qual a magnitude de um tremor de terra com amplitude de 2 milímetros? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

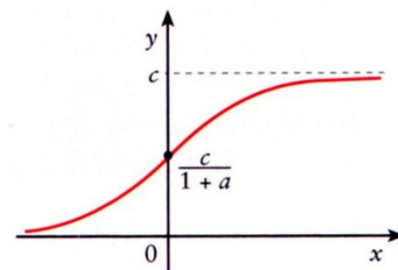
29.2 Uma determinada ponte foi concebida para resistir a um tremor de terra cuja magnitude seja o dobro da magnitude de um tremor de terra de 2 milímetros de amplitude. Qual será a amplitude de tal tremor de terra?

▪ COMPLEMENTO SOBRE MODELO LOGÍSTICO: CRESCIMENTO POPULACIONAL¹

O modelo de crescimento logístico admite que, no início, a população cresce quase exponencialmente, mas a partir de certa altura, tende a estabilizar, existindo, por isso, limites para o crescimento.

O modelo logístico traduz-se por uma expressão do tipo:

$$f(x) = \frac{c}{1 + a e^{-bx}}, \text{ em que } a, b \text{ e } c \text{ são constantes positivas.}$$



>Propriedades das funções logísticas

- A função só toma valores positivos, logo $f(x) > 0$, qualquer que seja o valor de x .
- O ponto de intersecção de gráfico de f com o eixo Oy tem as coordenadas $\left(0, \frac{c}{1+a}\right)$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$
- O gráfico da função admite duas assíntotas horizontais que são as retas de equações $y = 0$ e $y = c$.

¹ Este tópico está integrado neste texto de apoio como tema facultativo.

Tarefa: No mesmo ecossistema existem pombos e garças. A população de pombos é modelada pela função $p(t) = \frac{6}{1 + 0,6e^{-t}}$ e a população de garças por $g(t) = \frac{5}{1 + 0,25e^{-t}}$. O número de pombos e gaivotas está expresso em centenas e o tempo, t , em anos.

1. No instante inicial, qual das populações tem um maior número de indivíduos? Justifique apresentando os cálculos.
2. Depois de um ano e meio a mesma relação verifica-se?
3. Quantos meses são necessários para que o número de pombos atinja 500?
4. Para que valores tende a aproximar-se a população de cada espécie?

Resolução:

1. No instante inicial $t=0$, pelo que, o n.º de garças é dado pela expressão $g(0) = \frac{5}{1 + 0,25e^{-0}} = \frac{5}{1,25} = 4$

Enquanto o número de pombos é dado por $p(0) = \frac{6}{1 + 0,6e^{-0}} = \frac{6}{1,6} = 3,75$

Ora, como $g(0) > p(0)$, a população inicial de garças é superior à população de pombos.

2. O tempo é 1,5 anos. Substituamos o valor de t em ambas as expressões, por este valor:

$$g(1,5) = \frac{5}{1 + 0,25e^{-1,5}} \approx 4,74 \quad ; \quad p(1,5) = \frac{6}{1 + 0,6e^{-1,5}} \approx 5,29$$

Como $g(1,5) < p(1,5)$, a relação não se mantém.

3. Para responder a esta questão, igualamos a expressão do n.º de pombos a 5 (centenas).

$$\frac{6}{1 + 0,6e^{-t}} = 5 \Leftrightarrow 6 = 5 \times (1 + 0,6e^{-t}) \Leftrightarrow 6 = 5 + 3e^{-t} \Leftrightarrow 1 = 3e^{-t} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t \approx 1,09$$

Em meses, 1,09 anos corresponde a: $12 + 0,09 \times 12 = 13,08$. São necessários 14 meses.

4. O limite quando x tende para infinito é o parâmetro c , pelo que, o número de garças tende a aproximar-se de 5 centenas e o número de pombos de 6 centenas.

No MA2 e MA3 tem outras aplicações destas funções a modelos de fenómenos sociais e físicos. Neles desafiamo-lo a aprofundar o seu conhecimento em relação à Evolução da População Mundial e escala de Richter.

Para resolver:

30.0 O comprimento médio, em centímetros, de dois pequenos animais A e B , x dias após o nascimento, é dado por:

$$a(x) = \frac{20}{1 + 4e^{-0,07x}} \quad \text{e} \quad b(x) = \frac{30}{1 + 9e^{-0,03x}},$$

respetivamente.

30.1 Qual é o comprimento de cada um dos animais na altura do nascimento?

30.2 Dois animais um A e outro B nasceram no mesmo dia. Quanto é a diferença de comprimento desses animais 2 meses após o nascimento?

30.3 O que se pode afirmar do comprimento médio dos animais A e B quando adultos?

Para resolver

31 A expressão $a^{3-2\log_a 3}$ com $a > 1$ é equivalente a :

- (A) $-a^2$ (B) $9a^3$ (C) $\frac{a^3}{9}$ (D) $-9a^3$

32 Sejam a , b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$. Qual o valor de $\log_a\left(\frac{a}{b}\right)$?

- (A) $a - c$ (B) $\left(\frac{a}{c}\right)$ (C) $a + \left(\frac{b}{c}\right)$ (D) $1 - c$

33 Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{x+a}$, onde a designa um certo número real.

O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.

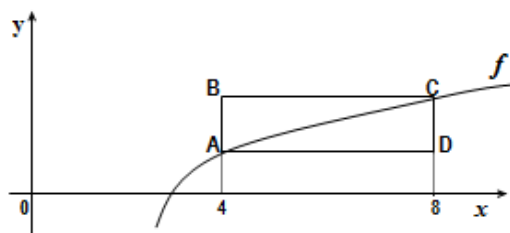
Indique o valor de a . (A) $\ln 2$ (B) 2 (C) e^2 (D) $e + \ln 2$

34 Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e). Os pontos A e C, que pertencem ao gráfico da função f , são vértices de um rectângulo [ABCD], de lados paralelos aos eixos do referencial.

As abscissas de A e de C são 4 e 8, respectivamente.

Qual é a área do rectângulo [ABCD]?

- (A) $\ln 64$ (B) $\ln 72$ (C) $\ln 81$ (D) $\ln 16$



35 Mostra que:

35.1 $2^{5+\log_2(3x)} = 96x$, $x > 0$

35.2 $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} a + \log_b\left(\frac{1}{b}\right) = -2$, $(a > 0 \wedge a \neq 1)$ e $(b > 0 \wedge b \neq 1)$

35.3 $\log_{a^2}(x) = \frac{1}{2} \log_a(x)$, com $a > 0 \wedge a \neq 1$

36 Considere as seguintes funções, reais de variável real: $f(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$ e $h(x) = -2e^{x-3}$

36.1 Mostre que $f(x) = 3 + \log_3 x$ para $x \in \mathbb{R}^+$.

36.2 Determine o valor exacto da abscissa do ponto de intersecção do gráfico de f com a recta $y = 4$.

36.3 Resolva a inequação: $f(x) \leq \log_3(x-4) + 3$.

36.4 Resolva a equação $h(x) = h(4)$.

37 O nível N , em decibéis, de um som audível pode ser dado por $N = 170 + 10 \log I$, onde I é o valor da intensidade, em certa unidade, do som emitido.

37.1 Determina o nível de um som de intensidade 0.001.

37.2 Sabe-se que um som de nível superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde. Conclui daí, a partir de que intensidade devem ser utilizados meios de protecção auditiva.

38 Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por $A(p) = -0,52 + 0,55 \ln(p)$, ($\ln$ designa logaritmo de base e). Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

38.1 O Jamilson tem 1,4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Jamilson estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso? Apresenta o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

38.2 Verifica que, para qualquer valor de p , a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determina um valor aproximado dessa constante (com duas casa decimais) e interprete esse valor na situação descrita.

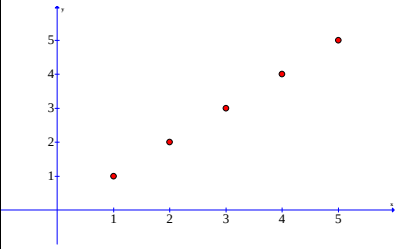
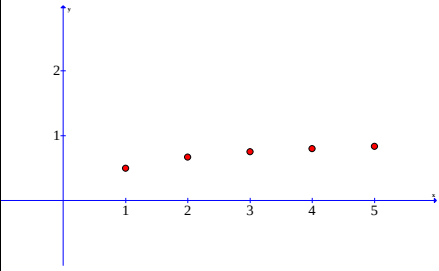
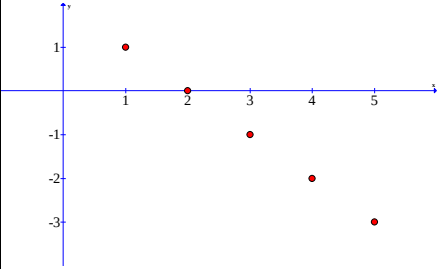
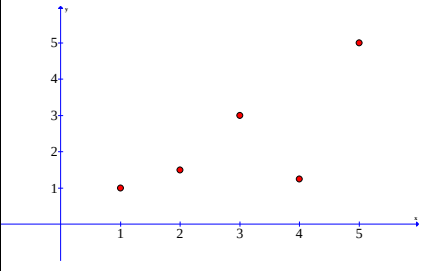
TEORIA DOS LIMITES

NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Imagine que está a fazer um percurso por um trilho na floresta. Ao longe consegue vislumbrar um obstáculo sobre o qual nada conhece. À medida que se aproxima desse obstáculo consegue ver melhor os seus contornos. Aproxima-se cada vez mais e mais, e consegue avaliar se pode continuar a avançar na sua direcção, quanto mais se aproxima mais pormenores consegue observar, dá mais um passo e outro a seguir, cada vez passos mais pequenos para continuar em segurança. Prossegue e aproxima-se do obstáculo tanto quanto queira, mas existe sempre uma infinidade de possibilidades para o atingir, continua até chegar ao seu limite!

A utilização da palavra limite tem, na vida corrente o significado de algo de que nos aproximamos mas que nunca alcançamos. Em Matemática o conceito de limite tornou possível conhecer melhor o comportamento de uma função mesmo nos seus pontos mais inacessíveis. Com o conceito de limite damos um passo em frente, saímos da zona de conforto dos números reais e entramos no chamado Cálculo Infinitesimal, que é a base do estudo da continuidade e da derivada (cálculo diferencial) que serão abordados ao longo deste tema.

Na 11.ª classe já foi abordado o conceito de limite de uma sucessão. Vejamos alguns exemplos:

Sucessões numéricas	Representação gráfica		Dizemos que:
$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$		Os termos tornam-se cada vez maiores, sem atingir um limite	$n \rightarrow +\infty$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}$		Os números aproximam-se cada vez mais de 1, sem nunca atingir esse valor	$n \rightarrow 1$
$1, 0, -1, -2, -3, \dots, -n+2$		Os termos tornam-se cada vez menor, sem atingir um limite	$n \rightarrow -\infty$
$1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \dots$ $\begin{cases} n, \text{ se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n+1}{n}, \text{ se } n \text{ par} \end{cases}$		Os termos oscilam sem tender para um limite	

Agora vamos estender a noção de limite a funções de variável real (f.r.v.r.), ou seja, a funções que não assumem apenas valores discretos no seu domínio.

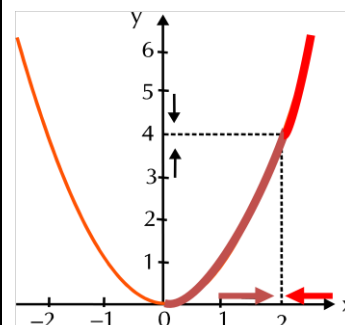
Tarefa: Consideremos a função de expressão algébrica $f(x) = x^2$. De que valores de y se aproxima a função, quando os valores da abscissa se aproximam de 2?

Resolução: Façamos uma tabela com seqüências que se aproximem de 2. Uma seqüência por valores superiores a 2 e outra por valores inferiores a 2. A cada um deles associamos o respectivo valor da função para a seqüência de pontos.

Por observação da tabela concluímos que as imagens da seqüência por f tendem para 4. Para outros valores que escolhessemos, as imagens continuariam a tender para 4.

	x	$f(x)$
Aproximação de 2 por valores inferiores a 2	1,900	3,610
	1,990	3,960
	1,999	3,996
	2,000	4,000
Aproximação de 2 por valores superiores a 2	2,001	4,004
	2,010	4,040
	2,100	4,410

Graficamente obtemos



Assim, dizemos que o limite da função $f(x)$ no ponto de abscissa 2 é 4 e representa-se por: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

A observação do gráfico confirma-nos exactamente que o limite da função no ponto 2 que coincide com o valor da função nesse ponto, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(2) = 2^2 = 4.$$

DEFINIÇÃO DE LIMITE DE FUNÇÃO SEGUNDO HEINE

Antes de prosseguirmos, recomendamos a exploração do MA4.

Existem diferentes definições de limite. Para as compreendermos melhor é necessário ter conhecimento de algumas noções topológicas, nomeadamente de ponto de acumulação e ponto isolado. Por **ponto isolado** entenda-se um valor discreto, que numa determinada proximidade é o único valor que a função assume. Como um termo de uma sucessão. Por sua vez, um **ponto de acumulação** de uma função é um ponto que, qualquer que seja o intervalo que eu escolha na sua proximidade, por mais pequeno que ele seja, conseguimos sempre identificar outros pontos do domínio da função.

Neste caso estudaremos apenas uma das definições de limite, segundo Heine.

Definição de Limite (segundo Heine)

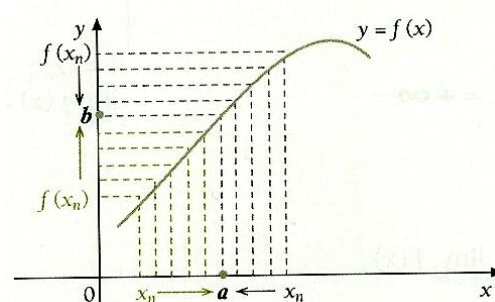
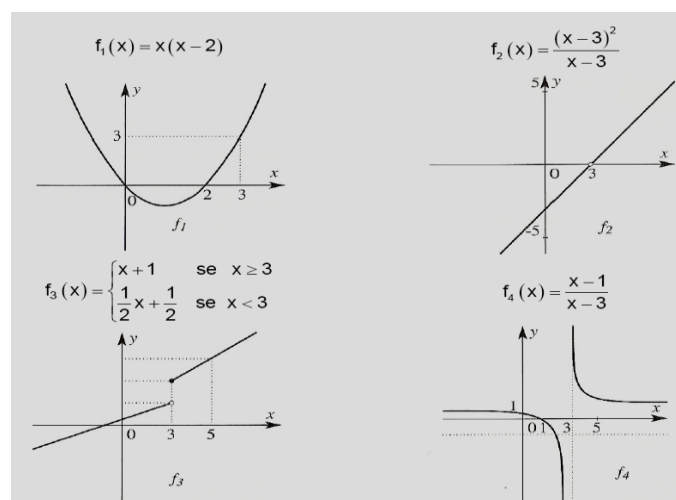
Diz-se que f tende para b , quando x tende para a se, para qualquer sucessão de valores do domínio de f convergente para a , por valores diferentes de a , a correspondente sucessão de imagens $f(x_n)$ convergente para b .

Escreve-se: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Para resolver:

1. Observe os seguintes gráficos:

De acordo com o conceito intuitivo que tem de limite indique, para cada função, se existe ou não, limite quando x tende para 3.



Segundo esta definição de limite, não existe limite para pontos isolados de uma função. Contudo, é possível que o limite de um ponto seja um valor que não coincida com a imagem da função nessa abscissa.

▪ Limite de uma função num ponto

Tarefa: Consideremos a função definida por $f(x) = \frac{1000}{x}$, de domínio $R \setminus \{0\}$. Qual o $\lim_{x \rightarrow -20} f(x)$? E o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Resolução: Sobre a função $f(x) = \frac{1000}{x}$, sabemos ser uma função racional, cuja representação gráfica é uma hipérbole com duas assíntotas. Uma assíntota vertical em $x=0$ e uma assíntota horizontal em $y=0$. Assim sendo, a função não tem zeros nem intersecta o eixo das ordenadas em qualquer ponto do seu domínio. Tal como o domínio, o contradomínio da função é $R \setminus \{0\}$. Depois de termos uma visão global da função, que nos permite fazer um esboço da mesma, iremos proceder então à determinação do limite da função nos pontos solicitados para conhecermos mais características.

Para calcularmos o limite de f no ponto de abscissa -20 considera-se uma sucessão x_n de valores do domínio da função, convergente para -20 por valores diferentes de -20 .

Seja $x_n = -20 + \frac{1}{n}$. Associemos a cada sucessão a imagem por f .

Graficamente podemos observar a representação da função $f(x)$ e da sucessão x_n

Ora $f(x_n) = \frac{1000}{x_n} = \frac{1000}{-20 + \frac{1}{n}}$, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{-20 + \frac{1}{n}} = \frac{1000}{-20 + 0} = \frac{1000}{-20} = -50, \text{ ou seja, } \lim_{x \rightarrow -20} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -50$$

Prova-se que, quando existe limite de uma função num ponto ele é único.

Continuemos agora o exemplo determinando o limite da função em causa no ponto de abscissa 0. Como sabemos, 0 não é um elemento do domínio da função, pelo que começemos por estudar o comportamento da função na proximidade do ponto de abscissa 0. Iremos adoptar o mesmo procedimento já utilizado num exemplo anterior: considerar sequências de valores convergentes para 0, uma por valores superiores a zero e outra por valores inferiores a zero.

Para resolver:

2. Seja g uma função real de variável real definida por:
 $g(x) = \frac{4x+3}{x+2}$.

Considere as sucessões: $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $u_n = -2 + \frac{1}{n}$

a. Represente graficamente a função g .

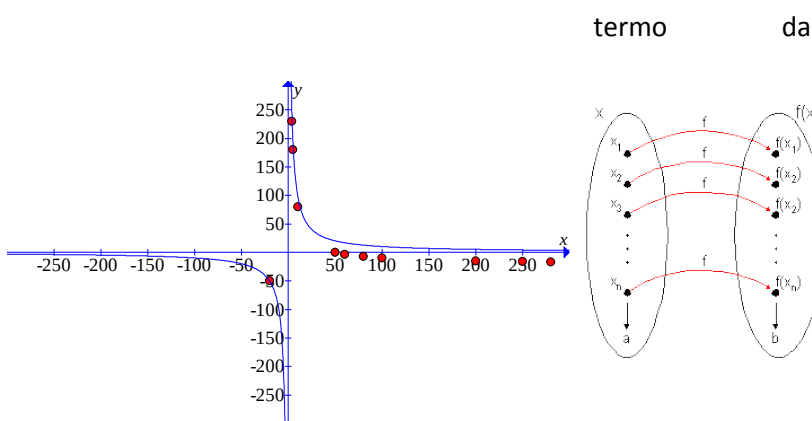
b. Mostre que $v_n \rightarrow 1$ e $u_n \rightarrow -2$

c. O que pode concluir, pela definição de limite segundo Heine, quanto ao: $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(v_n)$? ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$?

3. Considere as seguintes funções reais de variável real.
 $g(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} 2-\sqrt{x} & \text{se } x > 1 \\ -1+x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

a. Tendo em conta a definição de limite de uma função segundo Heine, complete:

- | | |
|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ |



O limite de uma função no ponto, quando existe, é único.

Seja $x_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ que sabemos ser um infinitésimo que se aproxima de zero por valores positivos, superiores a 0 ($x_n \rightarrow 0^+$), e $y_n = -\left(\frac{1}{10}\right)^n$ que é, igualmente, um infinitésimo mas que tende para zero por valores negativos, inferiores a 0 ($y_n \rightarrow 0^-$).

Vejamos o comportamento das imagens, por f , destas sucessões numa tabela.

x_n	$f(x_n)$	y_n	$f(y_n)$
$\left(\frac{1}{10}\right)^1 = 0,1$	10000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^1 = -0,1$	-10000
$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0,01$	100000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^2 = -0,01$	-100000
$\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0,001$	1000000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^3 = -0,001$	-1000000
$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$	10000000	$-\left(\frac{1}{10}\right)^4 = -0,0001$	-10000000
...	...	...	...

Neste caso a função não tem limite em 0, pois as imagens das sucessões por f têm limites distintos, pois $f(x_n) \rightarrow +\infty$ e $f(y_n) \rightarrow -\infty$.

▪ Limites Laterais

A partir do exemplo anterior, consideremos, separadamente, o limite no ponto de abcissa zero, primeiro por valores superiores a 0, ou seja, à direita de 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{\left(\frac{1}{10}\right)^n} = \frac{1000}{0^+} = +\infty$$

Isto é, o limite à direita de f em 0 é $+\infty$, pois as imagens dos termos das sucessões aproximam-se de zero, pela direita, por valores maiores que zero.

Analogamente, como $y_n \rightarrow 0^-$ vem:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{-\left(\frac{1}{10}\right)^n} = \frac{1000}{0^-} = -\infty$$

Ou seja, o limite à esquerda de f em 0 é $-\infty$, visto que as imagens das sucessões, à esquerda de zero, se aproximam por valores menores que zero.

Os limites laterais são diferentes, logo a função não tem limite em zero.

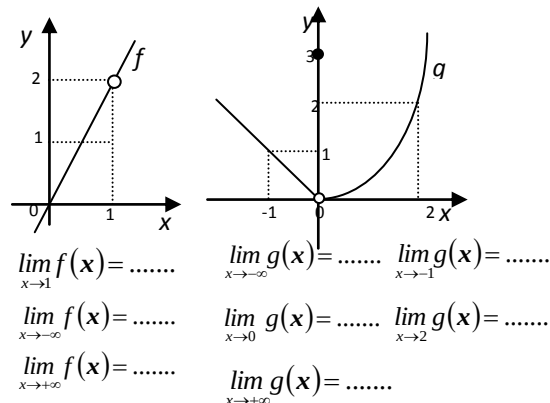
Como já foi referido a recta de equação $x=0$ constitui uma assíntota vertical do gráfico da função f . Assim sendo, o cálculo dos limites laterais em pontos que não pertencem ao domínio da função que sejam infinitos permitem-nos identificar se o gráfico tem assíntotas verticais, independentemente de existir ou não limite nesse ponto.

Para resolver:

4. Verdadeiro ou Falso? Justifique as verdadeiras e corrija as afirmações falsas.

- Pode existir o limite de uma função num ponto que não pertença ao domínio da função.
- Se uma função está definida num ponto, podemos afirmar que existe limite da função nesse ponto.
- Se existem limites laterais num ponto, podemos afirmar que existe limite nesse ponto.

5. Observe os gráficos e complete as expressões:

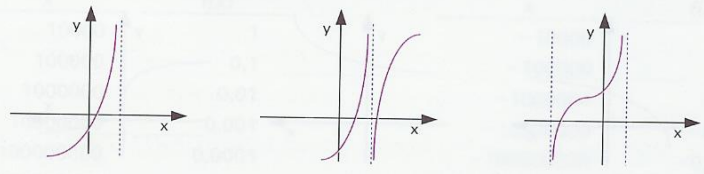


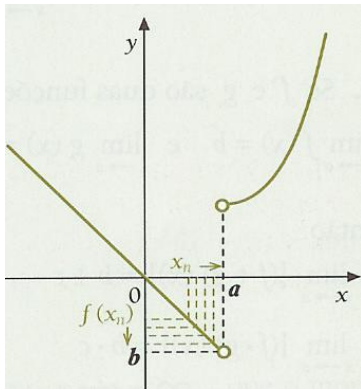
Assíntotas paralelas ao eixo das ordenadas (Verticais)

A recta r de equação $x=a$, $a \in \mathbb{R}$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f se e só se:

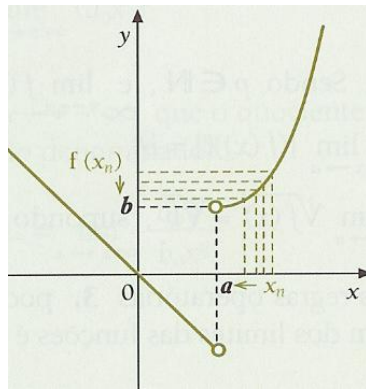
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Nota - Em geral, a existência de assíntotas verticais está relacionada com os pontos que não pertencem ao domínio.





Diz-se que o limite lateral à esquerda de a é b e escreve-se: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$



Diz-se que o limite lateral à direita de a é b e escreve-se: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

Limites no infinito

Estudar o comportamento da função pode fazer-se para um determinado número real ou nos ramos infinitos, ou seja, averiguar o comportamento da função quando x converge (ou tende) para $+\infty$ ou $-\infty$.

Tarefa: Continuamos a considerar $f(x) = \frac{1000}{x}$. Determina $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

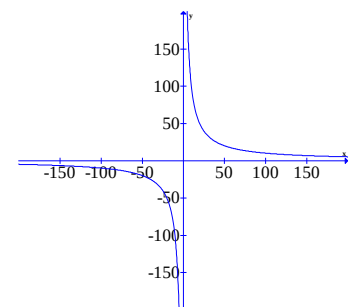
Resolução: Consideremos agora uma sucessão de valores do domínio da função que seja um infinitamente grande positivo, por exemplo $x_n = n^3$ (poderia ser outra qualquer).

Ora, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1000}{x_n} = \frac{1000}{+\infty} = 0$, isto é, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Consideremos agora uma sucessão, y_n que seja um infinitamente grande

negativo. $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1000}{y_n} = \frac{1000}{-\infty} = 0$, isto é, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Por observação do gráfico, facilmente observamos que para grandes valores de x, quer no sentido positivo, quer no sentido negativo a função aproxima-se, por valores maiores e menores que zero, respectivamente, da recta de equação $y=0$, que já vimos ser uma assíntota horizontal. Assim, o cálculo de limites no infinito permite verificar se o gráfico tem ou não assíntotas horizontais.



Propriedades

- O limite da função num ponto existe se e só se os limites laterais são iguais, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

$\downarrow$
 limite lateral
à esquerda

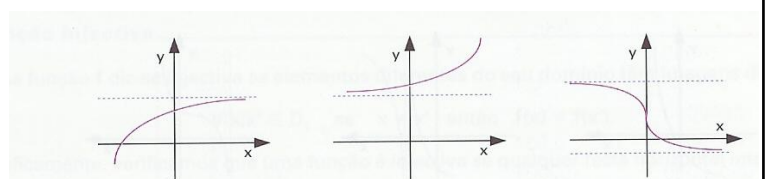
$\downarrow$
 limite lateral
à direita
- Se f só está definida à esquerda de a, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- Se f só está definida à direita de a, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Assíntotas paralelas ao eixo das abcissas (Horizontais)

A recta de equação $y=b$, com $b \in \mathbb{R}$, é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se e só se:

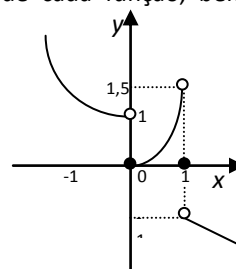
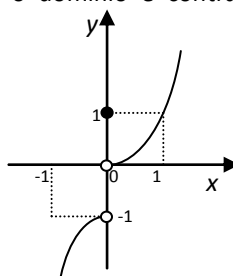
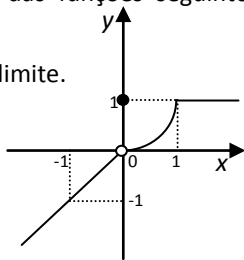
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Nota – Uma assíntota não vertical pode ser intersectada pelo gráfico da função.



Para resolver:

7. Observe os gráficos das funções seguintes e indique o domínio e contradomínio de cada função, bem como os respectivos pontos do domínio onde existe limite.



CÁLCULO DE LIMITES DE FUNÇÕES

Os limites, como já vimos estão associados ao conceito de função. Ao longo do seu percurso escolar já estudou diferentes famílias de funções, entre elas funções polinomiais, racionais, irracionais. Vamos agora calcular limites para exemplos concretos de funções. À medida que os exemplos forem apresentados, definiremos mais alguns conceitos e propriedades da teoria dos limites que nos permitirão avançar no estudo das funções e obter conclusões a partir das suas expressões analíticas.

▪ Limites de funções polinomiais

Tarefa: Considere a função $f(x) = 2x + 1$.

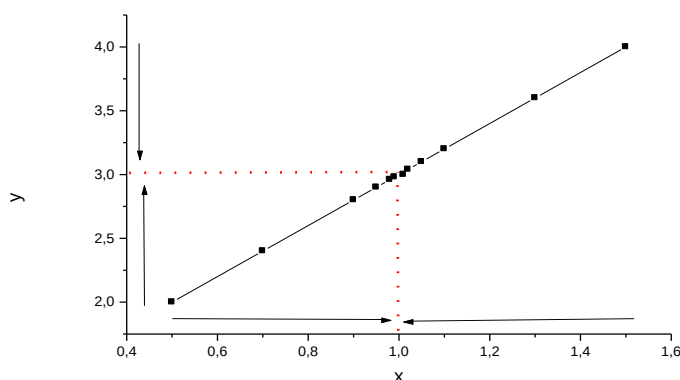
Qual o comportamento da função na vizinhança, que é como quem diz, na proximidade, do ponto de abscissa 1? Obtenha a resposta por processos tabulares, gráficos e analíticos.

Resolução: A representação gráfica desta função sabemos ser uma recta com um declive positivo, ou seja, tem monotonia crescente e intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).

Podemos aproximarmo-nos por valores à esquerda ou à direita de um. Registamos esses valores numa tabela:

Aproximação por valores à direita de 1		Aproximação por valores à esquerda de 1	
x	y	x	y
1,5	4	0,5	2
1,3	3,6	0,7	2,4
1,1	3,2	0,9	2,8
1,05	3,1	0,95	2,9
1,02	3,04	0,98	2,96
1,01	3,02	0,99	2,98
O valor de y decresce aproximando-se de 3		O valor de y é crescente com tendência a atingir o valor 3.	

Graficamente obtemos:



Nota-se que quando x aproxima-se de (tende para) 1, pelos dois lados, ao mesmo tempo, y tende para 3, ou seja, $x \rightarrow 1$ implica que $y \rightarrow 3$. Escrevemos: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.

Neste caso o limite é igual ao valor da função no ponto de abscissa 1, isto é, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3$.

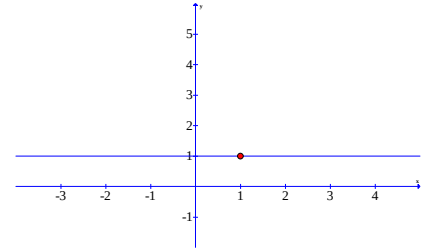
Intuitivamente e por análise tabular e gráfica o comportamento de $f(x)$ na vizinhança de 1 é tender para valores de ordenada 3.

Vamos agora recorrer a processos analíticos. Esta função polinomial é constituída pela soma de outras duas funções: a função linear $g(x)=2x$ e a função constante $h(x)=1$.

Qual o limite de cada uma destas funções quando $x \rightarrow 1$?

Começemos pela função constante.

A representação gráfica é uma recta horizontal, pelo que, ao aproximarmo-nos de qualquer valor, o resultado obtido é sempre o mesmo, neste caso o 1!



$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$$

O limite de uma função constante em qualquer ponto do seu domínio é sempre a própria constante.

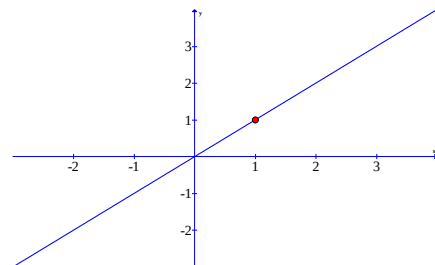
Limite da função constante:

Se $g(x) = k$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$
para qualquer $a \in D_g$.

Vejamos agora a função $g(x)$. Esta função ainda pode ser considerada como o produto de duas funções: $j(x)=2$, uma função constante e a função identidade $i(x)=x$.

Ora, já vimos que o limite de uma função constante é sempre a própria constante, pelo que: $\lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2$.

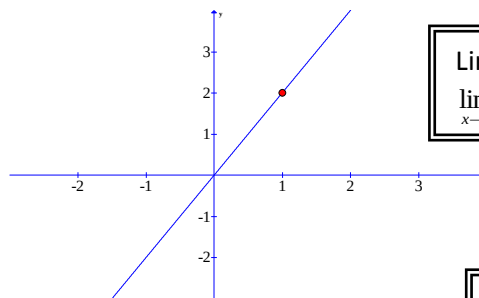
A representação gráfica da função identidade é uma recta que a cada abscissa faz corresponder a mesma ordenada. Observemos o gráfico.



$$\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

O limite da função identidade em qualquer ponto do seu domínio coincide com a sua imagem.

O limite no ponto 1 de $g(x)$ é o produto do limite das funções $j(x)$ e $i(x)$:



Limite da função identidade, $i(x)$:

$\lim_{x \rightarrow a} i(x) = i(a) = a$, para qualquer $a \in D_f$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \times \lim_{x \rightarrow 1} x = 2 \times 1 = 2$$

Assim sendo, o limite do produto é igual ao produto dos limites.

Voltando à função inicial $f(x)=2x+1$, será que o limite da função no ponto de abscissa 1, é também a soma dos limites das funções $g(x)$ e $h(x)$? A resposta é afirmativa!

Ora, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$, logo $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 + 1 = 3$.

Analiticamente obter o comportamento de uma função num ponto é calcular o limite da função nesse ponto. Em termos práticos tal corresponde a substituir x na expressão pelo valor para o qual a variável converge, obtendo, neste caso, a imagem da função no ponto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

Tarefa: Considere a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Qual o $\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 3x + 1)$? Qual o $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1)$?

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$,
então: $\lim_{x \rightarrow a} [f \times g](x) = b \times c$;

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$,
então: $\lim_{x \rightarrow a} [f + g](x) = b + c$

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, então:
 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^p] = b^p$ onde $p \in \mathbb{N}$

Resolução: O polinómio $x^2 - 3x + 1$ pode ser associado a uma função de 2.º grau. Graficamente é representado por uma parábola que, pelo coeficiente de x^2 ser positivo, tem a concavidade voltada para cima.

Ora uma função polinomial é a soma de vários monómios do tipo kx^p onde $p \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{R}$.

Portanto, para calcularmos o limite da função em qualquer ponto, basta aplicar a propriedade da soma de limites. Ficamos com:

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 7} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 7} (-3x) + \lim_{x \rightarrow 7} (1) = 7^2 - 3 \times 7 + 1 = 29$$

Como o limite da função do tipo $f(x) = kx^p$ é igual à imagem da função no ponto em causa, podemos calcular o limite directamente, sem aplicar a propriedade da soma de limites, fazendo:

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 3x + 1) = 7^2 - 3 \times 7 + 1 = 29$$

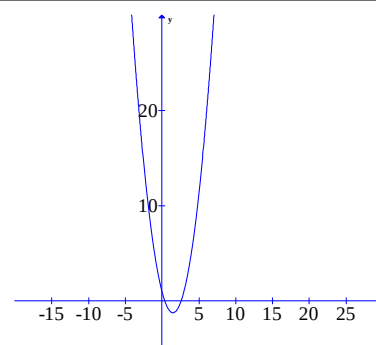
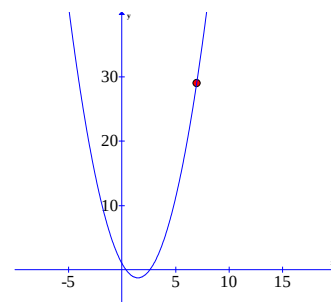
Concluimos que o limite é o valor do polinómio no ponto de abcissa 7.

Determinemos agora o limite da função quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty - 3 \times \infty + 1 = +\infty - \infty = ? \cdot \boxed{+\infty - \infty} \text{ é uma indeterminação,}$$

isto é, é uma situação que não conseguimos identificar qual o limite da função. Nestes casos aplicamos algumas técnicas para conseguirmos prosseguir, ou seja, **levantamos a indeterminação**.

Por observação gráfica facilmente verificamos que, quando $x \rightarrow +\infty$, a função tende para $+\infty$. Assim: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$



Já levantámos a indeterminação por processo gráfico, mas também existem processos analíticos para os fazer.

1.º processo

Se colocarmos x^2 (porque é o **termo de maior grau do polinómio**) em evidência, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \times (1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\text{Isto é: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$$

Atenção: Esta técnica pode ser usada quando x tende para um n.º real ou para infinito!

2.º processo:

Numa função polinomial, quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, o limite do polinómio $P(x)$ é igual ao limite do monómio de maior grau de $P(x)$.

$$\text{Isto é: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

Atenção: só se pode aplicar quando x tende para infinito!

Limite da função polinomial: O limite de uma função polinomial, $P(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ é igual ao monómio (ou termo) de maior grau quando x tende para esse mesmo valor.

$$\text{Se } P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n$$

Para resolver: 8. Determine, se existirem, os limites das seguintes funções quando $x \rightarrow -1$; $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$

$$8.1. e(x) = 3 \quad 8.2. f(x) = 0,5x^2 \quad 8.3. g(x) = 2x^2 + 3x \quad 8.4. h(x) = -5x^2 - 3x + 2$$

$$8.5. i(x) = x + 1 \quad 8.6. j(x) = x^2 + 1 \quad 8.7. l(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad 8.8. n(x) = -x^3 + 1$$

$$8.9. p(x) = 2x(3x - 1) \quad 8.10. q(x) = (x + 2)^{23} \quad 8.11. r(x) = 5(x - 3)(1 - x)$$

Note bem:

$\pm \infty \times (\pm)(\mp) \infty$ não é uma indeterminação.

$\pm \infty \times (\pm) \infty = +\infty$ e

$\pm \infty \times (\mp) \infty = -\infty$,

aplicando as regras da multiplicação de sinais iguais ou sinais

■ Limites de funções racionais

As funções racionais foram estudadas detalhadamente na 11.ª classe, inclusive a análise do seu comportamento nos ramos infinitos. Uma função racional é definida por uma expressão do tipo

$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$ onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios

e $d(x)$ é diferente do polinómio nulo.

Tarefa: Considere a função $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

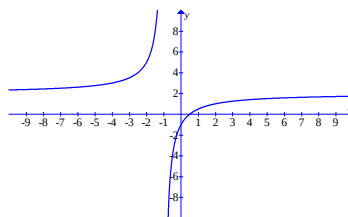
Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$,
então: $\lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \left(\frac{b}{c} \right)$, com $c \neq 0$

Qual o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Qual o $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$? Qual o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Resolução: Neste caso, função racional, precisaremos do limite do quociente. O limite do quociente de duas funções num ponto é igual ao quociente dos limites de cada uma das funções nesse ponto, desde que o limite do denominador não seja zero.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2x-1}{\lim_{x \rightarrow 2} x+1} = \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (-1) - 1}{-1 + 1} = \frac{-3}{0} = ?$$



E no caso do denominador ser zero? Nestes casos calculamos os limites laterais no ponto -1, por ser o que anula o denominador.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (-1^+) - 1}{-1^+ + 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (-1^-) - 1}{-1^- + 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

x	x+1	x	x+1
-1,1	-0,1	-0,9	0,1
-1,2	-0,2	-0,8	0,2
-1,3	-0,3	-0,7	0,3

valor

A construção de uma tabela pode ajudar a averiguar o comportamento do denominador da expressão na vizinhança de -1. De facto, a aproximação à direita de -1 os valores tendem para 0 por valores superiores a este e para valores menores que 0 por aproximação à esquerda de -1.

Destes cálculos podemos retirar duas conclusões: 1.ª a função não tem limite no ponto de abcissa -1 porque os limites laterais são distintos; 2.ª a recta $x = -1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \times (+\infty) - 1}{+\infty + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = ?$. Obtivemos uma **indeterminação**, neste caso $\frac{\infty}{\infty}$. Para **levantar a**

indeterminação um dos processos é proceder à decomposição da fracção $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ efectuando o **algoritmo**

da divisão de onde obtemos: $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$. Assim facilmente identificamos algumas

características desta função, nomeadamente:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x = -1$ é a assíntota vertical e $y = 2$ é a assíntota horizontal.

$$\begin{array}{r} 2x-1 \quad | \quad x+1 \\ -2x-2 \\ \hline -3 \end{array}$$

Esta técnica permite também determinar os limites da função pela expressão: $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$, evitando as

indeterminações. Vejamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 2 - \frac{3}{x+1} = 2 - \frac{3}{2+1} = 2 - \frac{3}{3} = 2 - 1 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{x+1} = 2 - \frac{3}{+\infty + 1} = 2 - \frac{3}{+\infty} = 2 - 0 = 2.$$

Limite da função racional, $P(x)$,
 $Q(x)$: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

Para resolver:

9. Simplifique, quando necessário, as fracções algébricas e, em seguida, calcule o limite.

9.1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+1}$

9.2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16}$

9.3. $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2}$

9.4. $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^3 - b^2}{3b - b^2}$

9.5. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 - 1}{t + 1}$

9.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Por vezes a **decomposição de factores** é suficiente para contornar a indeterminação. Para tal, é necessário recordar os casos notáveis da multiplicação.

Um exemplo poderá ser: $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-2)}{(x+2)}$. Na expressão inicial determinar o

limite no ponto de abcissa 2 conduz-nos a uma **indeterminação** do tipo $\frac{0}{0}$, no entanto, depois de factorizada a

expressão já nos permite obter o valor do limite. Neste caso $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$.

Tarefa: Considere a função $f(x) = \frac{3-x^2}{x+1}$. Determina o domínio e os zeros da função. O gráfico desta função tem assíntotas? Quais?

Resolução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Calculamos os zeros fazendo:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-x^2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3-x^2 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow -x^2 = -3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x^2 = 3 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x^2 = \pm\sqrt{3} \wedge x \neq -1$. Os zeros da função são $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

- Assíntotas verticais

O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Como -1 é um zero do denominador, calculamos os limites laterais no ponto de abcissa -1 para averiguar se a recta de equação $x = -1$ é assíntota vertical do gráfico de f . Por observação do gráfico nas imagens 1 e 2 da tabela, observamos que a recta é de facto uma assíntota do gráfico de f . Confirmemos tal informação por processos analíticos:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3-x^2}{x+1} = \frac{3-(-1)^2}{-1^++1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3-x^2}{x+1} = \frac{3-(-1)^2}{-1^-+1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$. Como os limites laterais no ponto de abcissa -1 são infinitos, confirma-se a existência de assíntota vertical em $x = -1$.

- Assíntotas horizontais

O gráfico representado na primeira imagem da tabela mostra que não existem assíntotas horizontais. Para o provarmos analiticamente determinamos os limites da funções para os ramos infinitos.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \frac{-\infty}{\infty}$. É uma **indeterminação**. À semelhança da função polinomial, **quando** $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$

também nas funções racionais o **limite de uma função coincide com o quociente dos monómios de maior grau**.

Assim vem: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$.

Utilizando o mesmo procedimento $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = -(-\infty) = +\infty$. Os limites são infinitos, logo o gráfico da função não tem assíntotas horizontais.

Limite da função racional: O limite de uma função racional, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ é igual ao quociente dos monómios (ou termo) de maior grau quando x tende para esse mesmo valor.

Se $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ e $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$

- Assíntotas oblíquas

Por observação da imagem 3 da tabela, percebemos que o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua, pelo que a equação da recta será do tipo $y = mx + b$.

Ao fazer a divisão dos polinómios da expressão analítica obtemos: $f(x) = -x + 1 + \frac{2}{x+1}$.

Analisando a expressão, verifica-se que quando $x \rightarrow +\infty$, a função f tende para $-x + 1$.

Vejamos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 1 + \frac{2}{x+1} - (-x + 1) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$. Pelo que a recta $y = -x + 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f .

De facto, analisar a expressão resultante da divisão da fracção permite-nos verificar que a recta $y = -x + 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f , de acordo com os conhecimentos sobre funções racionais.

Relembre que é possível transformar algumas expressões de funções racionais em expressões do tipo $y = mx + a + \frac{b}{cx+d}$, onde: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Assíntota vertical: $x = -\frac{d}{c}$; Assíntota oblíqua: $y = mx + a$ ou Assíntota horizontal: $y = a$, se $m=0$.

Outra forma de determinar uma assíntota oblíqua é, ao calcularmos os limites no infinito ($x \rightarrow +\infty(-\infty)$), a equação dessa recta se confundir com o gráfico da função, ou seja: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$. Resolvendo a expressão em ordem a m e a b , obtemos:

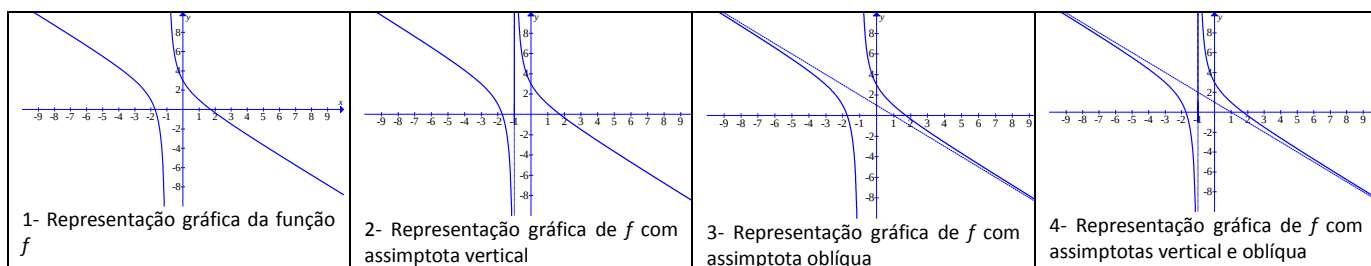
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \left(\text{repare que } -\frac{b}{m} \rightarrow 0 \right). \text{ Neste caso } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx). \text{ Neste caso } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3-x^2}{x+1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^2+x^2+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ (em ambos os limites levantámos a indeterminação } \frac{\infty}{\infty} \text{)}$$

aplicando o método do quociente dos termos de maior grau dos polinómios em numerador e denominador.)

Confirma-se que $y = -x + 1$ é a equação da assíntota oblíqua do gráfico da função f .

Portanto o gráfico da função f tem duas assíntotas, uma vertical e outra oblíqua, como podemos confirmar na imagem 4 da tabela abaixo.



Para resolver: 10. Dê exemplos de funções polinomiais f e g tais que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

11. Considere a função f definida por: $\frac{x-3}{x+3}$

11.1. Indique o domínio de f .

11.2. Calcule, se existirem, os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

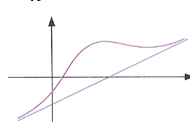
11.3. Escreva as equações das assíntotas do gráfico da função f .

Assíntotas Oblíquas

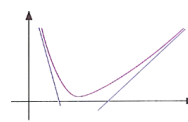
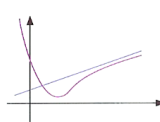
Uma recta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de uma função f se, quando x tende para $\pm \infty$, o gráfico da função se confunde com essa recta. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

O declive m e a ordenada na origem b , da equação da assíntota, podem ser determinados da seguinte forma:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$



uma assíntota



duas assíntotas

Note bem:

- Numa função racional, a decomposição da fração através do algoritmo da divisão facilita-nos a determinação das assíntotas.
- O número máximo de assíntotas horizontais e oblíquas é duas, uma quando $x \rightarrow \infty$, outra quando $x \rightarrow +\infty$.
- O número de assíntotas verticais pode ser qualquer. Há mesmo funções com um número infinito de assíntotas verticais [$y = \tan(x)$, por exemplo].

▪ Limites de funções irracionais

As funções irracionais têm a particularidade de serem definidas com uma expressão que envolve radicais. Vamos dar particular interesse apenas a radicais quadráticos e cúbicos, de acordo com o que foi estudado na 11.ª classe. Como ainda não estudámos uma função com radicais na expressão, impõe-se a questão: *como calcular o limite de uma raiz?*

O limite de uma raiz é igual à raiz do limite do radicando!

Vejamus a aplicação prática com um exemplo.

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[p]{b}$$

$f(x) \geq 0$ e $p \in \mathbb{N}$ e p é par

Tarefa: Considere a função irracional $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$. Determine, caso existam, o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Resolução: Começamos por averiguar onde é que a função está definida, uma vez que o radicando tem de ser maior ou igual a zero. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x+1 \geq 0\}$, ou seja, $D_f = [0; +\infty[$.

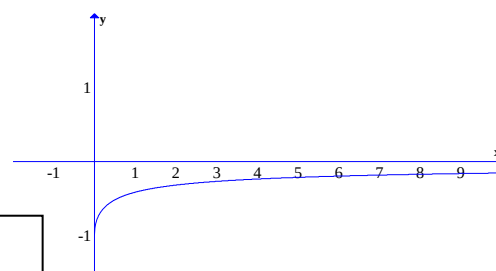
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} - \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1} = +\infty - \infty$$

Obtivemos uma indeterminação do tipo: $+\infty - \infty$. Para **levantar a indeterminação**, utilizamos uma técnica frequente com a soma/ diferença de funções em que pelo menos uma delas é irracional. **Multiplicamos e dividimos pela expressão, mas invertemos o sinal operacional entre as duas funções.** Neste caso procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) \times (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \quad (\text{aplicando a diferença de quadrados: } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x+1)}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Por observação gráfica facilmente verificamos que, quando

$x \rightarrow +\infty$, a função tende para 0. Assim: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = 0$



Para resolver:

12. Determine, se existirem os limites das funções quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 5$:

12.1. $f(x) = x - \sqrt{x}$ 12.2. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ 12.3. $h(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-5}$

13. Considere a função $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$

13.1. Determine o domínio da função f .

13.2. Determine: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$

14. Calcule os limites quando

$x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 5$ das funções:

14.1. $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{x}$

14.2. $g(x) = \sqrt{x+5}$

14.3. $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

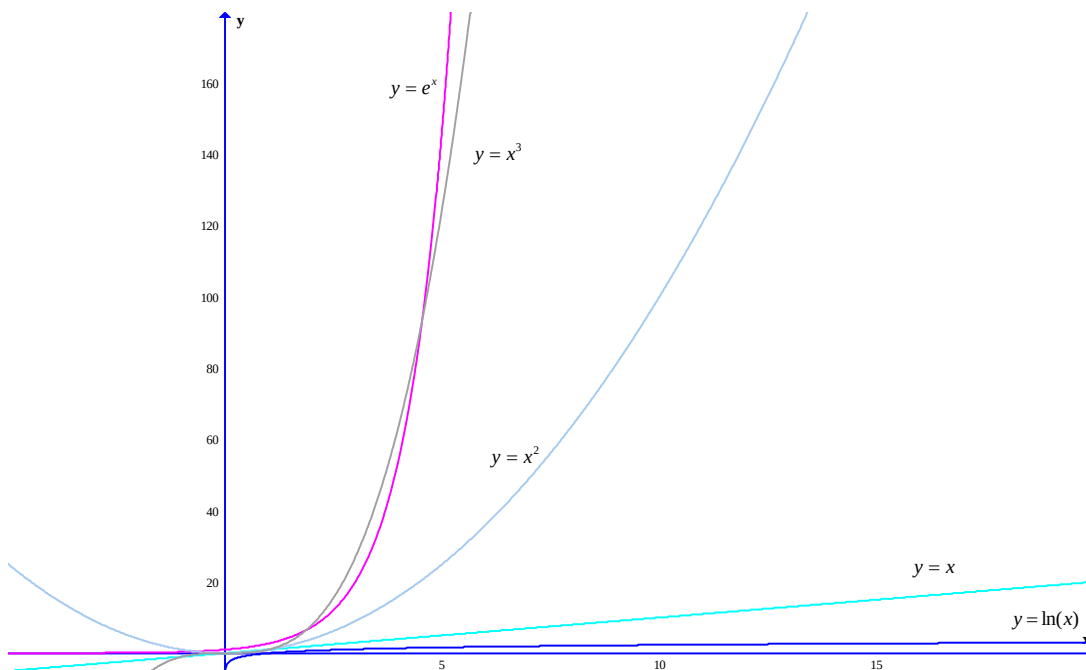
▪ Limites de funções exponenciais e logarítmicas

Classes de funções como a exponencial e a sua inversa, a logarítmica foram também já estudadas. Agora vamos aprofundar um pouco o estudo destas funções comparando o seu (de)crescimento com o comportamento de outras classes de funções.

Limite Notáveis

Existem alguns limites que envolvem funções exponenciais e logarítmicas e que designamos por limites notáveis. São limites que devemos ter como referência.

Observemos o seguinte gráfico com representações gráficas da função exponencial, polinomiais e logarítmica.



Facilmente verificamos que:

- “A exponencial, de base superior a 1, cresce mais depressa do que qualquer potência do seu expoente”

De facto, comparando a função exponencial com qualquer uma das funções do tipo verificamos que a primeira, a partir de determinado valor de x , cresce muito mais rapidamente que qualquer das funções polinomiais.

O crescimento de a^x , com $a > 1$, é tão rápido que se tem: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$, $a > 1, p > 0$, uma vez que o numerador tende para infinito muito mais rapidamente que o denominador.

Como consequência, tem-se que o inverso será um infinitésimo, ou seja: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, $a > 1, p > 0$

- “Uma variável evolui mais depressa que o seu logaritmo.”

Em relação à função logarítmica, qualquer das funções polinomiais crescem mais rapidamente que a primeira.

O crescimento de $\ln(x)$, com $a > 1$, é tão lento que se tem: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$, $a > 1, p > 0$, pois a função tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$, já que o denominador cresce mais rapidamente que o numerador.

Como o inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande, concluímos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log_a x} = +\infty$, $a > 1, p > 0$.

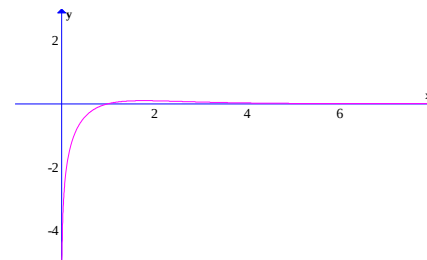
Aqui foram abordados alguns limites notáveis. Existem outros, associados a determinadas funções exponenciais e logarítmicas de base natural que podem ser consultados no final desta secção.

Tarefa: Considere a função $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$. Averigue a existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados no gráfico da função.

Resolução: O domínio da função é $\mathbb{R}^+$.

Para averiguar a existência de assíntotas verticais calculamos $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \frac{1}{1} \times (-\infty) = -\infty.$$



Como os limites no ponto em causa é infinito, concluímos que existe uma assíntota vertical em $x = 0$.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais calculamos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Como o domínio da função é $]0; +\infty[$ não faz sentido determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \frac{1}{+\infty} \times (+\infty) = 0 \times (+\infty) = ?$$

Obtivemos uma indeterminação $[0 \times \infty]$! Vejamos uma técnica para **levantar a indeterminação** e podermos prosseguir no cálculo do limite: primeiro transformar numa indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e depois **dividir ambos**

os termos da fracção por x (para obtermos expressões de referência para $p=1!$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{e^x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Esta

indeterminação, $0 \times \infty$, surge também associada a funções resultantes de operações entre funções polinomiais, racionais e irracionais. A sua particularidade é poder-se reduzir a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Como o limite no único ramo infinito onde a função está definida é um n.º real, então $y=0$ é uma assíntota horizontal da função.

Para resolver:

15. Determine os seguintes limites:

15.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{5^x}$; 15.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)}$; 15.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{2x}$

16. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 2x \quad \text{e} \quad g(x) = \log_2 x + 3x$$

16.1. Comente a afirmação:

«O gráfico da função f não admite assíntotas verticais»

16.2. Mostre que a recta de equação $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico de f .

16.3. Determine as equações das assíntotas do gráfico de g .

16.4. Mostre que a equação $g(x) = \pi$ é possível no intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Regras operatórias com limites

Ao longo deste tópico, foi necessário introduzir algumas regras operatórias com limites, bem como algumas técnicas para levantar indeterminações, fruto de dificuldades encontradas no cálculo de limites em determinadas funções. Em síntese:

Seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f + g](x) = b + c;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f - g](x) = b - c;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f \times g](x) = b \times c;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \left(\frac{b}{c} \right), \text{ com } c \neq 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^p] = b^p, \text{ onde } p \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[p]{b}, \quad f(x) \geq 0,$$

$$p \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é par}$$

Para resolver:

17. Considere: $f(x) = x + 1$ e $g(x) = -2x^2 + 3$
Calcule:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(4) $\left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right)^3$ (5) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(7) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ (8) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (9) $\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} g(x)}$

Indique:

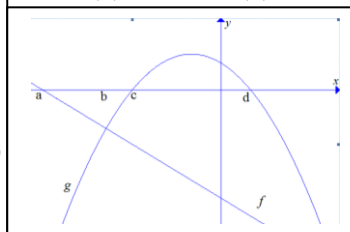
(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} (f - g)(x)$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} (f \times g)(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$ (5) $\lim_{x \rightarrow 1} f^3(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{g(x)}$

18. Observe os gráficos f e g e indique, se existir:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow b} (f - g)(x)$ (3) $\lim_{x \rightarrow c} (f \times g)(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow d} \left(\frac{g}{f} \right)(x)$ (5) $\lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{g}{f} \right)(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g}{f} \right)(x)$



Limite da Soma, da Diferença, do Produto e do Quociente de funções

As regras operatórias podem estender-se, com algumas excepções, aos casos em que pelo menos um dos limites das funções é infinito ou seja, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

Existem quadros que sintetizam todos os casos, embora, mais importante que memorizar quadros ou tabelas, seja, pensar em cada caso que surgir. Podem ser consultados no MA5.

Indeterminações

Quando nos deparamos com situações de indeterminações, podemos aplicar determinados artifícios ou técnicas que nos permitem ultrapassar essa situação de bloqueio! Esse procedimento designa-se **levantar a indeterminação**. A observação do gráfico com uma calculadora gráfica poderá ser uma boa opção para intuir a solução. É o processo de levantamento da indeterminação graficamente. Contudo existem processos analíticos que podem ser sintetizados da seguinte forma:

Tipo de indeterminação	$+\infty - \infty$	$\infty \times 0$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
Técnica para levantar indeterminação	Colocar monómio em evidência; Monómio de maior grau (polinomial); Multiplicar e dividir por toda a expressão mas inverter sinal operacional entre as 2 expressões (irracional).	Podem reduzir-se a casos de $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$: Dividir todos os termos pelo monómio de maior grau	Factorizar polinómios; Decompor fracção através de algoritmo da divisão (racional); Colocar monómio em evidência; Dividir todos os termos pelo monómio de maior grau;	Factorizar polinómios; Decompor fracção através de algoritmo da divisão (racional); Colocar monómio em evidência; Dividir todos os termos pelo monómio de maior grau; Quociente do monómio de maior grau do numerador pelo monómio de maior grau do denominador.

Note bem:

- Uma função polinomial tem o mesmo limite, **quando** $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, que o monómio de maior grau.
- Uma função racional tem o mesmo limite, **quando** $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, que o quociente do monómio de maior grau do numerador pelo monómio de maior grau do denominador.

Para resolver:

19. Identifique, em cada caso, se existe indeterminação e levante-a.

$$19.1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x \ln x) \quad 19.2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \quad 19.3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

$$19.4. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - 2}{2x + 1} \quad 19.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 3}) \quad 19.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3 \ln x}$$

20. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$20.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x}{3} \quad 20.2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^5}{x^5 + x} \quad 20.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

$$20.4. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x - 2} \quad 20.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2^x} \quad 20.6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

21. Calcule cada um dos seguintes limites, recorrendo, quando necessário, aos limites notáveis.

$$21.1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x - 1} \quad 21.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{x - 1} \quad 21.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x - 1}$$

$$21.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \quad 21.5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \quad 21.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$$

$$21.7. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad 21.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} \quad 21.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{3x}$$

No final desta secção existe um quadro resumo de todo o tópico sobre cálculo de limites das várias classes de funções analisadas.

22. Para cada uma das seguintes funções determine:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{3x}{x^2 - 1},$$

$$h(x) = \frac{3}{1 - \ln x}, \quad j(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 4}$$

22.1 Domínio;

22.2 As equações das assíptotas verticais dos respectivos gráficos, se as houver;

22.3 As equações das assíptotas não verticais dos respectivos gráficos, se as houver.

23. Prove que a recta de equação $y = 3x - 2$ é assíptota do gráfico da função f definida por $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x - 5}$

23.1 O gráfico da função tem alguma assíptota vertical? Justifica.

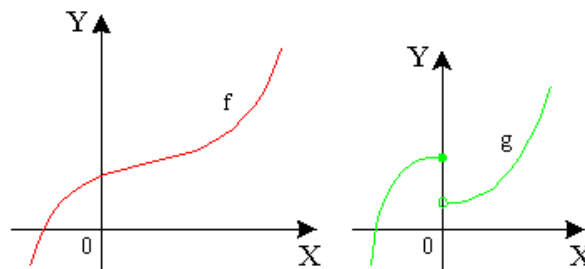
Classe de funções	Particularidades	Linguagem corrente Limite num ponto/Limite no infinito	Simbolicamente Limite num ponto/ Limite no infinito	Regras operatórias $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$	Indeterminações mais frequentes
Polinomial	Constante	O limite de uma função constante, em qualquer ponto do seu domínio, é a própria constante./ O anterior é válido para os ramos infinitos.	Se $f(x) = k$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, para qualquer $a \in D_f$./ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$	Soma, produto, potenciação $\lim_{x \rightarrow a} [f + g](x) = b + c$ $\lim_{x \rightarrow a} [f - g](x) = b - c$ $\lim_{x \rightarrow a} [f \times g](x) = b \times c$ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^p] = b^p$ onde $p \in \mathbb{N}$	$\infty \times 0$, $+\infty - \infty$
	Identidade	O limite da função identidade é igual ao valor da função nesse ponto./ No infinito a identidade tende para o respectivo infinito	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, para qualquer $a \in D_f$./ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$		
	Caso geral	O limite de uma função polinomial, $P(x)$, é igual ao valor da função nesse ponto./ No infinito é o polinómio são o grau e o sinal do coeficiente de maior grau que determinam se o limite é quando $x \rightarrow +\infty$ OU $x \rightarrow -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$, para qualquer $a \in D_f$./ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n$		
Racional		O limite de uma função racional, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ quando $x \rightarrow +\infty$ OU $x \rightarrow -\infty$ é igual ao quociente dos monómios (ou termo) de maior grau quando x tende para esse mesmo valor.	$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ e $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ / $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$	Quociente $\lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \left(\frac{b}{c} \right)$, com $c \neq 0$	$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
Irracional		O limite de uma raiz de índice natural é igual à raiz do mesmo índice do limite do radicando.	$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, $p \in \mathbb{N}$	Radiciação $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[p]{b}$ $f(x) \geq 0$ e $p \in \mathbb{N}$ e é par	$+\infty - \infty$
Exponencial	Logística	$P(t) = \frac{b}{1 + ae^{-bkt}}$, a, b, k , constantes positivas			$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$
	Base natural	$y = \frac{e^x - 1}{x}$ / $y = \frac{e^{kx} - 1}{kx}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ / $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$, $a \neq 0$		
	Caso geral		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$, $a > 1, p > 0$ / $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$, $a > 1, p > 0$		
Logarítmica	Base natural (e)	$y = \frac{\ln(x+1)}{x}$ $y = \frac{\ln(x)}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ / $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ / $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	Limites notáveis (de referência)	
	Caso geral		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0$ $a > 1, p > 0$ / $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log_a x} = +\infty$, $a > 1, p > 0$		

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

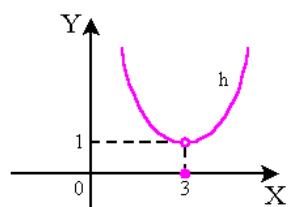
CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Consideremos as funções f e g , reais de variável real, definidas pelos seus gráficos (ao lado).

De um modo intuitivo, somos levados a dizer que a função f é contínua: o seu gráfico pode desenhar-se sem levantar o lápis do papel. No caso da função g , para desenhar o gráfico, temos de dar um salto no ponto correspondente a $x=0$. Somos levados a dizer que a função g não é contínua no ponto $x=0$ ou que 0 é um ponto de descontinuidade da função.



Tarefa: Estuda a continuidade das funções h e m , no ponto indicado. Qual a relação que existe entre a continuidade de uma função num ponto do seu domínio e a existência de limite nesse ponto?



Resolução:

A função h tem domínio $\mathbb{R}$. Intuitivamente, a função h não é contínua no ponto de abscissa $x=3$. Os limites laterais de 3 existem e são iguais a 1, logo existe limite neste ponto e o seu valor é 1, $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 1.$$

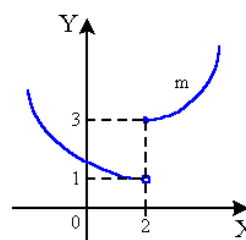
Contudo a imagem da função no ponto de abscissa 3 é 0, ou seja, não coincide com o limite da função neste ponto: $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) \neq h(3)$

Para h ser contínua a imagem de 3 teria que estar no «ponto certo», de modo que o gráfico da função fosse a parábola “completa”, o que corresponderia ao valor da função para $x=3$ ser igual ao limite da função quando x tende para 3. h não é contínua em $x=3$.

Uma função f diz-se contínua no ponto $x=a$, do seu domínio se:

- existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Quando não se verificam estas duas condições dizemos que a função é descontínua no ponto de abscissa a .



A função m tem domínio $\mathbb{R}$. Intuitivamente também a função m não é contínua no ponto de abscissa 2. Vejamos o motivo. Ora em $x=2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} m = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} m = 3$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 2^-} m \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} m$, portanto não existe o limite da função quando x tende para 2.

Por outro lado a imagem da função em $x=2$ é 3, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 2^+} m = 3 = m(2)$, e portanto a função é contínua à direita, mas como $\lim_{x \rightarrow 2^-} m = 1 \neq 3 = m(2)$, a função não é contínua à esquerda.

Logo, m não é contínua em $x=2$

De facto, uma função f diz-se contínua à esquerda no ponto $x=a$, do seu domínio se:

- existir $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

De facto, uma função f diz-se contínua à direita no ponto $x=a$, do seu domínio se:

- existir $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Uma função que seja simultaneamente contínua à **esquerda** e à **direita** num ponto é contínua nesse ponto.

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO NUM INTERVALO

Continuando a analisar as funções h e m , o que podemos afirmar quanto à sua continuidade nos restantes pontos que ainda não foram analisados?

Graficamente observamos que ambas as funções são contínuas nos restantes pontos do seu domínio. Poderíamos analisar qualquer ponto uma vez que ambas estão definidas em $\mathbb{R}$. Contudo, embora possamos determinar o limite em pontos de abcissas que não pertencem ao domínio da função, só faz sentido analisar a continuidade em pontos do domínio. Por exemplo a função definida pela expressão $f(x) = \frac{1}{x-2}$ não está definida em 2, ou seja, o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, logo a continuidade poderá ser analisada apenas no seu domínio.

Uma função diz-se contínua quando for contínua em todos os pontos do seu domínio.

De uma maneira geral, as funções polinomiais, como é o caso das funções h e m , por resultarem de operações de funções contínuas, bom como as funções racionais são contínuas em todos os valores em que estão definidas.

Se f e g são duas funções contínuas no ponto de abcissa a então também são contínuas nesse ponto as funções: $f + g$; $f - g$; $f \times g$; $f^n, n \in \mathbb{N}$; $\frac{f}{g}, \text{com } g(a) \neq 0$; $\sqrt[n]{f}, n \in \mathbb{N}$

- Uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.
- Uma função (ir)racional é contínua em todo o seu domínio.
- Uma função exponencial ou logarítmica é contínua em todo o seu domínio.

Estas propriedades permitem-nos garantir a continuidade de funções que se expressem como soma, diferença, produto, potenciação, quociente e radiciação de funções polinomiais, (ir)racionais, exponencial e logarítmica, desde que num ponto onde estejam definidas, ou seja, no seu domínio!

No caso das funções serem definidas por ramos temos que analisar a continuidade em cada ramo do domínio e, com especial atenção, nos pontos de transição de um ramo para outro. Vejamos um exemplo.

Tarefa: Sendo
$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$
. Determine a e b para que f represente uma função contínua.

Resolução: No intervalo $]-\infty; 0[$ a função é contínua por ser polinomial de 2.º grau. No intervalo $]0; 1[$ a função é contínua por ser polinomial de grau 1. No intervalo $]1; +\infty[$, a função é contínua por se tratar de uma função constante. Temos que analisar então a continuidade nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Para que a função f seja contínua nestes pontos, os limites laterais no ponto de abcissa 0 e no ponto de abcissa 1 têm de coincidir. Vejamos: $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^2 = 0$. Analisando o limite à direita de 0, vem: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$. Para que os limites laterais de zero sejam iguais, $b = 0$. Façamos agora o estudo para o ponto de abcissa 1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$. Por outro lado $\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a \times (1) + b = a + b$. Já concluímos que $b = 0$, logo $a + b = a + 0 = a$. Para os limites laterais de 1 coincidirem $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 = a = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b$. Portanto $a = 2$. Para que a função seja contínua em $\mathbb{R}$, $a = 2$ e $b = 0$.

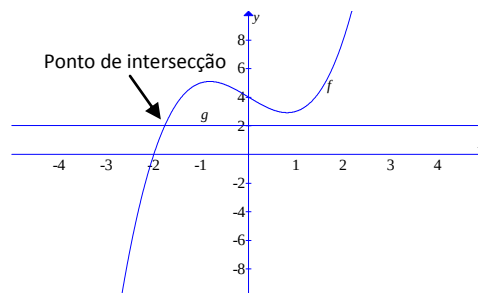
Antes de prosseguir, recomendamos a exploração do MA6.

TEOREMA DE BOLZANO-CAUCHY

Consideremos a análise da altura das marés ao longo de um dia no porto da Baía de Santo António. Marcamos numa estaca a altura da baixa-mar (altura mínima da maré), 0,47m, que foi atingido às 10:25h de dia 30 de

Novembro de 2012. A variação da maré começa agora no sentido inverso, a aumentar de altura e a preia-mar (pico máximo da maré) que lhe seguiu foi de 1,71m às 17:03h do mesmo dia nesse mesmo local. Voltamos a marcar a estaca que se manteve intacta entre os dois registos. Garantidamente que na estaca ficou marcado (molhado) um segmento contínuo entre os dois registos. Porquê? Porque a altura da maré teve de percorrer todos os valores entre 0,78m e 1,71m no intervalo de tempo entre as 10:25h e as 17:03h. Mas claro que tal só foi possível porque a maré não pode ter aumentado de uma altura para outra sem passar por todas as alturas, não houve qualquer pontinho da estaca por menor que fosse a sua dimensão que não tenha sido molhado pela maré.

Esta é a ideia do Teorema de Bolzano. Transpondo para o plano, se uma linha contínua (f) passa de um lado de uma recta (g) para o outro, então tem que intersectar essa recta em algum ponto. Utilizando alguns termos matemáticos podemos afirmar que se uma função é contínua num intervalo não passa de um valor para outro sem passar pelos valores intermédios.



Teorema de Bolzano-Cauchy

Se uma função f é contínua num intervalo $[a,b]$, então, qualquer que seja k compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um ponto c compreendido entre a e b tal que $f(c)=k$.

Note bem: para o Teorema de Bolzano- Cauchy ser aplicável a continuidade não é a única condição a verificar, contudo, no caso dos contextos trabalhados na 12.ª classe, basta garantir que a função esteja definida num (sub)conjunto de números reais. É isso que assumimos, a menos que seja dada alguma informação em contrário.

Tarefa: Sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x > 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$.

O teorema de Bolzano pode ser aplicado no intervalo $]0,2[$? Justifique a resposta.

Resolução: Para que o Teorema de Bolzano possa ser aplicado num intervalo é condição necessária (não suficiente!) que a função seja continua nesse intervalo. Nos intervalos $]0,1[$ e $]1,2[$, a função é contínua por serem funções polinomiais. Contudo, teremos que confirmar se os limites à esquerda e à direita de 1 coincidem, analisando o limite à direita de 1 no 1.º ramo e o limite à esquerda de 1 no segundo ramo, pelo intervalo onde cada ramo está definido.

Ora $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = (1^-)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = (1^+)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1$, donde a função f não é contínua no ponto de abcissa 1, pelo que, não podemos aplicar o Teorema de Bolzano no intervalo $]0,2[$.

Uma consequência imediata deste teorema é que:

Se uma função f é contínua num intervalo $[a,b]$, e $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrário, então a função tem pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$.

Tarefa: Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^5 - x + 1 = 0$. O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo:

- (A) $] -1,0[$ (B) $]0,1[$ (C) $]1,2[$ (D) $]2,3[$

Resolução: A função g é contínua em $\mathbb{R}$ por ser polinomial e $g(x) - 8$, designemo-la por f , também o é, pelo que estamos em condições de aplicar o Teorema de Bolzano. Ora

$g(x) = 8 \Leftrightarrow x^5 - x + 1 = 8 \Leftrightarrow x^5 - x + 1 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^5 - x - 7 = 0$. Pela consequência imediata do Teorema de Bolzano temos que se as imagens de $f(x) = x^5 - x - 7$ nos extremos de um determinado intervalos tiverem

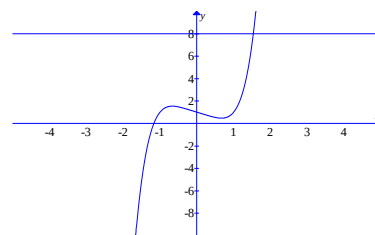
sinais contrários é porque existe um zero nesse intervalo. Determinemos então a imagem desta nova função para -1, 0, 1, 2 e 3, os extremos dos intervalos em causa.

$$f(-1) = (-1)^5 - (-1) - 7 = -1 + 1 - 7 = -7;$$

$$f(0) = (0)^5 - (0) - 7 = -7 = -7;$$

$$f(1) = (1)^5 - 1 - 7 = 1 - 1 - 7 = -7;$$

$$f(2) = (2)^5 - (2) - 7 = 32 - 2 - 7 = 23.$$



Já obtivemos imagens com sinais distintos, pelo que não precisamos continuar. Já podemos afirmar que no intervalo $]1,2[$ existe pelo menos um zero de f , ou seja, uma solução para a equação $g(x) = 8$. Podemos confirmar por observação gráfica.

Para resolver:

24. Observe a representação gráfica da função f .

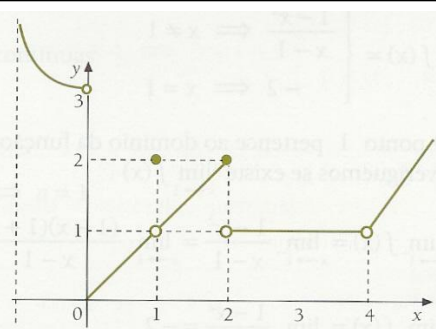
Indique o domínio, contradomínio e pontos de descontinuidade da função.

25. Esboce o gráfico de uma função f que verifique as condições:

25.1 $D_f =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$; contínua no intervalo $] -\infty; 3[$,

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 3; f(10) = -2;$$

25.2 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$; contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$.



26. Estude, quanto à continuidade, cada uma das funções nos pontos indicados:

26.1 $f(x) = 2x^3 - x + 3$; para $x = -2$ e $x = 10$

26.2 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 4}$, para $x = 0$ e $x = 2$

26.3 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, para $x = -2$

26.4 $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$, para $x = 0$

26.5 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{se } x \leq 1 \\ -x+1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$, para $x = 1$ e $x = 2$

26.6 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ -1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$, para $x = 1$

26.7 $f(x) = \begin{cases} |x+6| & \text{se } x \neq -6 \\ -1, & \text{se } x = -6 \end{cases}$, para $x = -6$ e $x = -4$

26.8 $f(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{se } x > 0 \\ xe^x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, para $x = 0$

27. Determine k de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + k & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2 + 5x - k}{x - 3} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

28. Seja h uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$. Qual dos seguintes conjuntos não pode ser o contradomínio de h ?

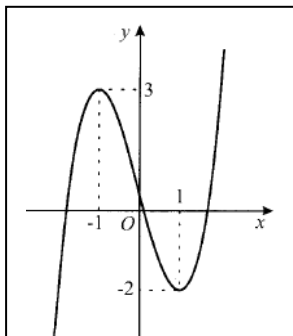
(A) $\mathbb{R}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (C) $\mathbb{R}^-$ (D) $]0,1[$

29. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g , polinomial do terceiro grau. A função g admite máximo relativo igual a 3 para $x = -1$ e admite mínimo relativo igual a -2 para $x = 1$.

Qual é o conjunto dos valores de b para os quais a equação $g(x) = b$ tem três soluções distintas?

(A)] $-\infty, 3[$ (B)] $-2, +\infty[$

(C)] $-2, 3[$ (D)] $-2, 3]$



30. De uma função f , de domínio $[-4,5]$ e contínua em todo o seu domínio, sabe-se que:

• $f(-4) = 6$; $f(2) = -1$; $f(5) = 1$

• f é estritamente decrescente no intervalo $[-4,2]$

• f é estritamente crescente no intervalo $[2,5]$

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

31. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]1,4[$, contínua e estritamente crescente.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira relativamente à equação $f(x) = 2$?

(A) Não tem solução

(B) Tem mais de duas soluções

(C) Tem 1 única solução

(D) Tem exactamente 2 soluções

32. Mostre, aplicando o teorema de Bolzano, que a equação $x^4 - 2x - 1 = 0$ tem pelo menos um zero no intervalo $[-1,0]$.

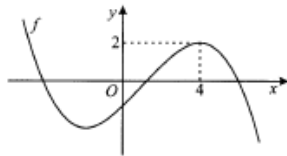
Para resolver:

33. Considere a função real de variável real f definida graficamente (imagem 1).

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 0$
 (C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = +\infty$
 (D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$

34. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , polinomial do terceiro grau. 2 é um máximo relativo da função f . Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - 2$.



Quantos são os zeros da função g ?

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

35. De uma função f , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 2$, $y = -3$ é a equação da asymptota horizontal (bilateral). Então,

- (A) f tem um, e um só zero (B) f não tem zeros
(C) f tem pelo menos 2 zeros (D) f tem mais de 3 zeros

Sugestão: faz um esboço do gráfico.

36. De uma função g , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

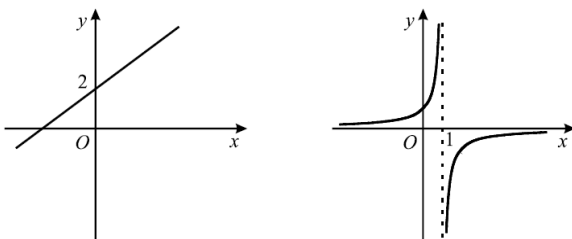
- 1 é zero de g ;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$.

37. De duas funções, f e g , sabe-se que:

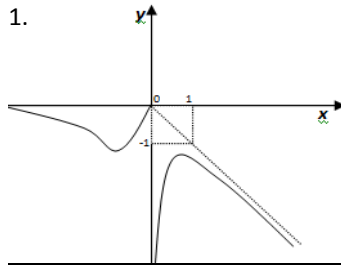
- O gráfico de f é uma recta, cuja ordenada na origem é igual a 2;
- O gráfico g é uma hipérbole.

Nas figuras estão representadas parte dessa recta e parte dessa hipérbole. A equação $x = 1$ é asymptota do gráfico g .



Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$:

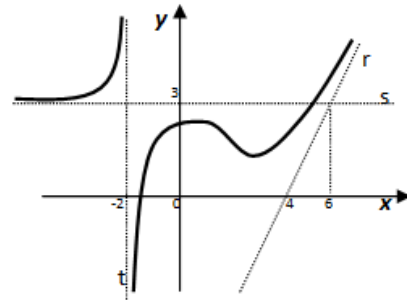
- (A) 0; (B) 2; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$



38. Seja $k(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ uma função.

- a. Indique o domínio de k .
 b. A função tem zeros? Se sim, qual(ais)?
 c. Através do cálculo de limites, indique as equações das asymptotas do gráfico da função em causa.

39. No referencial da figura está representada uma função f . As rectas r , s e t são asymptotas do gráfico.



- a. Por observação do gráfico, indique o valor dos seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{3}{2}x + 6 \right)$$

- b. Determine as coordenadas do ponto de intersecção das rectas r e t .

40. A função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+e) & \text{se } x \geq k \\ e^{-x} & \text{se } x < k \end{cases} \quad \text{é contínua em } x = k \text{ se:}$$

- (A) $k = -e$ (B) $k = 1$ (C) $k = 0$ (D) $k = e$

41. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} k + e^{2x} & \text{se } x \leq 1 \\ 2 \ln x + 2e^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Para que seja possível aplicar o Teorema de Bolzano em $] -1, 3[$ o valor de k é:

- (A) e^2 (B) $-e^2$ (C) $2e^2$ (D) $-2e^2$

42. Admite que a temperatura, em graus celsius, de um café servido num determinado local t minutos após ter sido colocado no chávena, é dado por:

$$f(t) = 20 + 50e^{-0,04t}, t \in [0, +\infty[\quad (e, \text{ número de Neper})$$

- a. Determina a temperatura do café no momento em que foi colocado na chávena.
 b. Com o decorrer do tempo, o café tende a igualar a temperatura ambiente. Indica, justificando, a temperatura ambiente.
 c. Quanto tempo decorre entre o momento em que o café é colocado na chávena e o instante em que atinge os 65°C ?

CÁLCULO DIFERENCIAL. DERIVADAS

▪ VARIAÇÃO. TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

Exemplo 1: Uma pequena bola é lançada e a distância y , em metros, percorrida em x segundos, é dada, aproximadamente, pela fórmula:

$$y = f(x) = -2x^2 + 20x$$

Na figura ao lado representou-se graficamente a função.

- Qual a variação da altura da bola no 3.º segundo?

$$\text{variação}_{[2,3]} = f(3) - f(2) = 42 - 32 = 10\text{m}$$

Conclui-se que a variação no 3.º segundo corresponde a uma subida de 10m da bola.

- Qual a velocidade média no 1.º segundo?

Sabendo que: velocidade média = $\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$

$$\text{Temos: } v_{m[0,1]} = \frac{f(1)}{1} = \frac{18}{1} = 18\text{m/s}$$

Este resultado representa a taxa média de variação da função no intervalo $[0, 1]$

- Qual a velocidade média no 2.º segundo?

$$t.m.v._{[1,2]} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{32 - 18}{1} = 14\text{m/s}$$

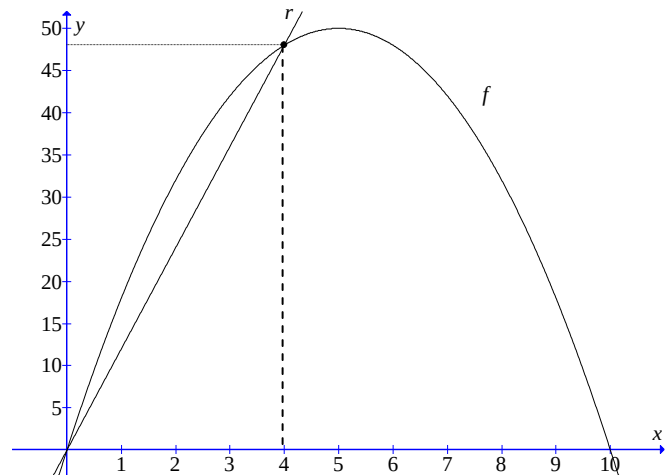
- Qual a velocidade média no 8.º segundo?

$$t.m.v._{[7,8]} = \frac{f(8) - f(7)}{8 - 7} = \frac{32 - 42}{1} = -10\text{m/s}$$

- Qual a velocidade média nos 4 primeiros segundos?

$$t.m.v._{[0,4]} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{48}{4} = 12\text{m/s}$$

Este resultado representa o declive da recta r que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(4, 48)$.



A variação de uma função f no intervalo $[a, b]$ é dada por: $f(b) - f(a)$

A taxa média de variação de uma função f no intervalo $[a, b]$ representa-se por $t.m.v._{[a,b]}$ e é dada por: $t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Da definição de taxa média de variação de uma função f num intervalo $[a, b]$ decorrem os seguintes resultados:

- se f é est. crescente em $[a, b]$, então $t.m.v._{[a,b]} > 0$;
- se f é est. decrescente em $[a, b]$, então $t.m.v._{[a,b]} < 0$;
- se f é constante em $[a, b]$, então $t.m.v._{[a,b]} = 0$.

A taxa média de variação da função f no intervalo $[a, b]$ representa geometricamente o declive da recta, definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

▪ TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Retomemos ao **exemplo 1**, que relaciona a altura, em metros da bola em função do tempo segundo $f(x) = -2x^2 + 20x$.

Vimos anteriormente como calcular a velocidade média (taxa média de variação) da função num dado intervalo, imaginemos, agora, que pretendemos determinar a velocidade da bola num dado instante, por exemplo quando $x = 3$ segundos.

Para responder à questão vamos procurar determinar a velocidade média quando x varia 3 segundos para $3 + h$ segundos:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{(3+h) - 3} = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Consideremos $h = \pm 0,1$; $\pm 0,01$; $\pm 0,001$

h	- 0,1	- 0,01	- 0,001	$\rightarrow 0 \leftarrow$	0,001	0,01	0,1
$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$	8,2	8,02	8,002	$\rightarrow 8 \leftarrow$	7,998	7,98	7,8

Observando os valores da tabela parece razoável concluir que a velocidade para $x = 3$ é 8m/s uma vez que:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} \rightarrow 8 \text{ quando } h \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 8$$

A este limite chamamos taxa de variação instantânea, taxa de variação ou derivada de f no ponto 3.

A derivada da função no ponto 3 pode ser representada

por $f'(3)$ ou $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=3}$.

Então temos: $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

A derivada da função f para $x = 3$ representa geometricamente o valor do declive da recta tangente ao

gráfico de f nesse ponto.

Determinemos a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 3$:

A equação da recta é do tipo $y = mx + b$.

Como foi referido anteriormente $m = f'(3) = 8$.

Precisamos agora de um ponto da recta para determinar b . podemos utilizar o ponto $(3, f(3)) = (3, 42)$, porque é comum à função e à recta.

Vem: $42 = 8 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 18$

Temos a recta: $y = 8x + 18$

A derivada de f em x_0 , ou seja $f'(x_0)$, representa geometricamente o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 .

Exemplo 2: Seja f a função definida por $f(x) = 2x^2 - 3$. Determine a derivada da função f no ponto de abcissa 2.

Resolução:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 - 3 - (2 \times 2^2 - 3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 8h + 2h^2 - 3 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8 + 2h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 2h) = 8 + 2 \times 0 = 8 \end{aligned}$$

45. Seja $f(x) = x^2$.

45.1. Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o valor obtido

45.2. Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

46. Um projectil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admita que a altitude h (em metros), t segundos após o lançamento, é dada pela função: $h(t) = 220t - 5t^2$. Determine a velocidade (em metros por segundo) do projectil, 10 segundos após o lançamento.

47. Em relação a uma função j sabe-se que:

- é par
- $j(1) = 0$ e $j'(1) = 5$
- a recta $y = -x + 2$ é tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 3.

47.1. Determine:

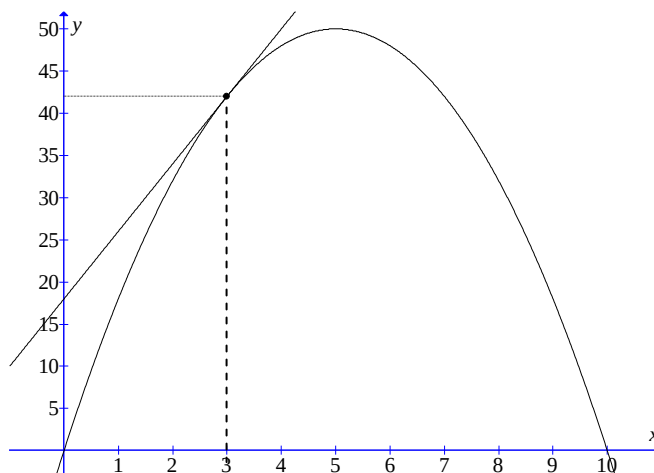
- a) $j(3)$ b) $j'(3)$ c) $j'(-3)$

47.2. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de função j no ponto de abcissa 1.

Seja $y = f(x)$, definida no intervalo $]a, b[$, e seja x_0 um ponto desse intervalo.

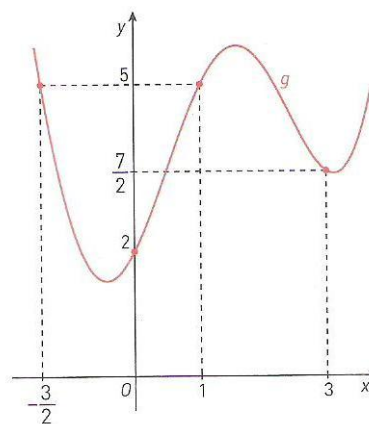
Chama-se derivada ou taxa de variação da função no ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0)$, ao limite, quando existe:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Exercícios:

43. No referencial da figura está representada uma função g de domínio $\mathbb{R}$.



43.1. Calcule a variação da função g no intervalo $[1, 3]$.

43.2. Calcule a t.m.v. da função no intervalo:

- a) $[0, 3]$ b) $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$ c) $[1, 3]$

43.3. Calcule $g(-10)$, sabendo que a variação da função no intervalo $[-10, 0]$ é 6.

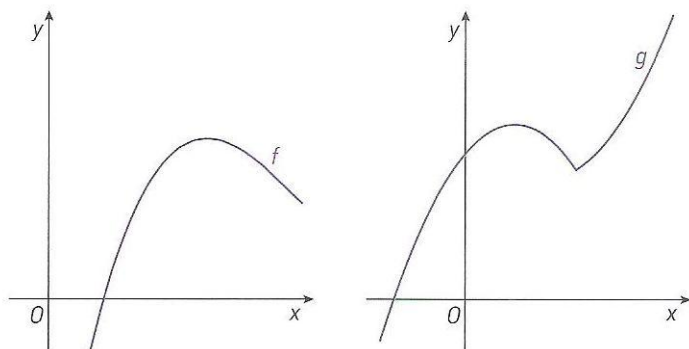
44. Faça uma representação gráfica de uma função f de domínio $[1, 4]$, sabendo que:

- 44.1.** f é monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = 2$
44.2. f não é monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = 2$
44.3. f não é monótona e t.m.v. $_{[1, 4]} = -2$

▪ **DERIVADAS LATERAIS. PONTOS NOS QUAIS A FUNÇÃO NÃO É DERIVÁVEL**

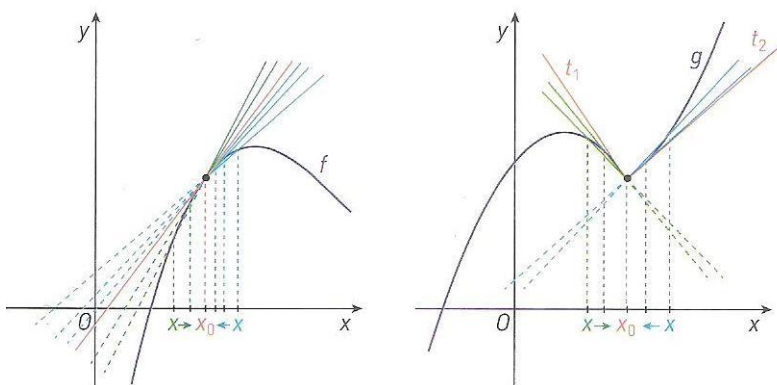
Uma função diz-se derivável num ponto x_0 se tem nesse ponto derivada finita.

Nos referenciais apresentados a seguir estão representadas duas funções f e g .



A seguir, analisa-se, a possibilidade, ou não, de se traçar a recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa designada por x_0 .

No ponto do gráfico da abscissa x_0 , é possível traçar a recta tangente ao gráfico da função nesse ponto?



Esta análise está relacionada com o facto de existir, ou não, derivada em x_0 .

- No caso da função f , existe derivada em x_0 , que coincide com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa x_0 (derivada positiva, atendendo à inclinação da recta tangente). Assim, conclui-se que existe $f'(x_0)$ e é igual a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- No caso da função g , não existe derivada em x_0 .

Como as semitangentes, à esquerda e à direita no ponto de abscissa x_0 , têm declives distintos, conclui-se que não há recta tangente no ponto de abscissa x_0 .

As derivadas laterais são diferentes.

Atendendo às inclinações das semitangentes, conclui-se que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0^-) < 0$$

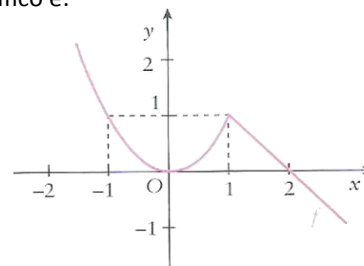
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0^+) > 0$$

Como $g'(x_0^-) \neq g'(x_0^+)$, conclui-se que não existe $g'(x_0)$.

Exemplo: Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Cujo gráfico é:



1. Determine $f'(-2)$ usando a definição de derivada num ponto.

2. Verifique se existe $f'(1)$.

Resolução:

$$\begin{aligned} 1. \quad f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4 \end{aligned}$$

Assim conclui-se que $f'(-2) = -4$.

$$\begin{aligned} 2. \quad f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} (2 + h) = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1+h) + 2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$ conclui-se que não existe $f'(1)$.

Exercício:

48. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

48.1. Represente graficamente cada função.

48.2. Determine $f'(3)$ e $g'(0)$ usando a definição de derivada num ponto.

48.3. Estude a existência de $f'(0)$ e $g'(1)$.

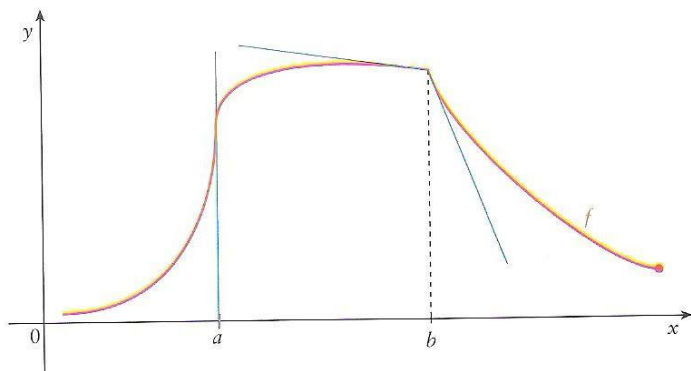
▪ DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

Teorema:

Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

M.A.(7)

No entanto, o recíproco deste teorema nem sempre se verifica. Há funções contínuas num ponto que não têm derivada finita nesse ponto.



f é contínua e não tem derivada finita em a (a tangente à curva em a é $x = a$) nem de b (onde as semitangentes não estão no prolongamento uma da outra).

▪ FUNÇÃO DERIVADA

Aplicando a definição de derivada, pode determinar-se a derivada de uma função num ponto $x = a$.

Exemplo: Seja f uma função real de variável real definida por: $f(x) = 3x^2 - x$.

Calcule $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(a)$.

Resolução:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3h^2 - h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3h - 1) = -1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(1+h)^2 - (1+h)) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 5h + 3h^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 + 3h) = 5$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(a+h)^2 - (a+h)) - (3a^2 - a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h - 3a^2 + a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6ah + 3h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6a + 3h - 1) = 6a - 1$$

Pode concluir-se que: $f'(x) = 6x - 1$

Seja f uma função real de variável real e D o conjunto de todos os pontos do domínio de f que admitem derivada (finita). Chama-se função derivada de f à função de domínio D que a cada valor de x faz corresponder o número real $f'(x)$.

Exercícios:

49. Considere as funções contínuas em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = |x-3| \quad g(x) = \sqrt{|x|} \quad h(x) = \sqrt{x^2}$$

Serão as funções deriváveis em todos os pontos do seu domínio?

50. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = |x| + 1$

Mostre que f é contínua em $x = 0$ e, no entanto, não é derivável neste ponto.

51. Estude a continuidade e a derivabilidade da função f definida, em $\mathbb{R}_0^+$, por:

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad \text{para } x = 0.$$

Exercícios:

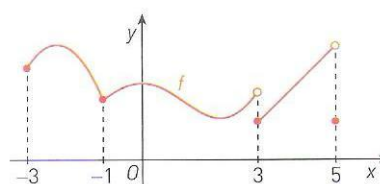
52. Dada a função real de variável real:

$$f(x) = -2x + 3$$

52.1. Calcule $f'(x_0)$, sendo x_0 um número real qualquer.

52.2. Caracterize a função f' derivada de f .

53. No referencial da figura está representada uma função f de domínio $[-3, 5]$.



Por observação do gráfico, indique o domínio da função f' , função derivada de f .

54. Caracterize a função derivada da função f definida por:

$$54.1. f(x) = \frac{1}{x^2} \quad 54.2. f(x) = |2-x|$$

$$54.3. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

▪ DERIVADA DE ALGUMAS FUNÇÕES

> Derivada de uma função constante

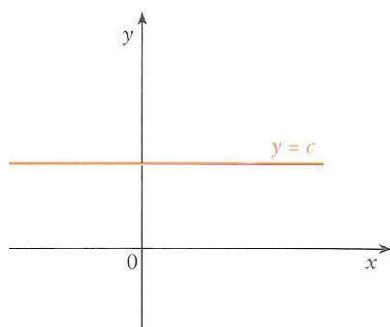
Consideremos a função real de variável real definida por: $f(x) = c$ ($c = \text{constante}$)

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto x_0 , vem:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Geometricamente:



O declive da recta tangente ao gráfico da função em qualquer ponto é igual ao declive da própria recta horizontal $y = c$ e, portanto, é igual a zero.

A derivada de uma função constante é igual a zero.

$$y' = c' \Leftrightarrow y' = 0$$

> Derivada de uma função Afim

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$f(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto x_0 , vem:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a \end{aligned}$$

Então $f(x) = ax + b$ e $f'(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$

A derivada de uma função afim é igual ao declive da recta que representa a função. $y' = (ax + b)' \Leftrightarrow y' = a$

> Derivada de uma função Quadrática

Seja f uma função real de variável real.

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então:

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

Exemplo: Consideremos as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5 \quad ; \quad g(x) = 5x^2$$

Aplicando a definição anterior temos:

$$f'(x) = 2x + 4 \quad ; \quad g'(x) = 10x$$

Exercícios:

55. Para cada uma das funções, reais de variável real, seguintes indique a função derivada:

55.1. $a(x) = -3$

55.2. $b(x) = 4x - 3$

55.3. $c(x) = 2\sqrt{2}$

55.4. $d(x) = \frac{x}{2} + 1$

55.5. $e(x) = 1 - 2x$

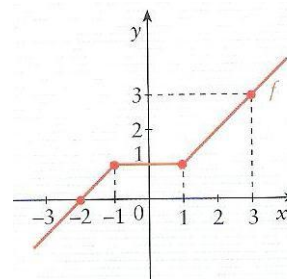
55.6. $f(x) = -x + 3$

55.7. $g(x) = -2x^2 - \sqrt{3}x + 7$

55.8. $h(x) = 8 + \frac{x^2}{2}$

55.9. $i(x) = x - x^2$

56. Considere a função f representada graficamente por:



Represente graficamente a função derivada de f .

57. Seja g a função definida por:

$$g(x) = x^2 + 4x$$

57.1. Utilizando a definição de derivada num ponto prove que $g'(x) = 2x + 4$.

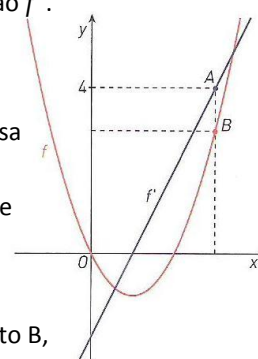
57.2. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g :

a) no ponto de abscissa 1.

b) paralela ao eixo das abscissas.

58. No referencial da figura estão representadas duas funções. A função f e a sua derivada, a função f' .

A ponto A pertence ao gráfico de f' , tem ordenada 4 e a abscissa é igual à abscissa do ponto B que pertence ao gráfico de f .



Determine as coordenadas do ponto B, sabendo que $f(x) = x^2 - 2x$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Será possível determinar a derivada de uma função soma, produto, diferença,..., conhecendo as derivadas das parcelas, factores, ...?

De seguida apresentamos algumas regras de derivação muito uteis na determinação da função derivada.

Sejam f e g duas funções deriváveis num conjunto A e sejam a constante real ($a \in \mathbb{R}$) e n uma constante natural ($n \in \mathbb{N}$).

Derivada de uma constante: Seja $f(x) = a$ então $f'(x) = 0$	Exemplos: Para $f(x) = -\frac{1}{3}$ e $g(x) = \sqrt{5}$ temos $f'(x) = 0 \quad \text{e} \quad g'(x) = 0$
Derivada do produto de uma constante por uma função: A função $y = cf(x)$ é derivável em A e: $[cf(x)]' = cf'(x)$	Exemplo: Seja $f(x) = 4x$ sabemos que $f'(x) = 4$. Consideremos agora a função $g(x) = 5f(x)$. Pela regra de derivação: $g'(x) = [5f(x)]' = 5f'(x) = 5 \times 4 = 20$ Por outro lado: $g(x) = 5f(x) = 5 \times 4x = 20x$ Logo: $g'(x) = (20x)' = 20$
Derivada da soma e diferença de duas funções: A função $f + g$ é derivável em A e: $(f + g)' = f' + g'$ A função $f - g$ é derivável em A e: $(f - g)' = f' - g'$	Exemplo: Sejam $f(x) = 4x$ e $g(x) = x + 1$. Pela regra de derivação: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = (4x)' + (x + 1)' = 4 + 1 = 5$ Por outro lado: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (4x) + (x + 1) = 5x + 1$ Logo: $(f + g)'(x) = (5x + 1)' = 5$
Derivada de um produto de funções: A função $f \times g$ é derivável em A e: $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	Exemplo: Sejam $f(x) = 4x$ e $g(x) = x + 1$. Pela regra de derivação: $(f \times g)'(x) = (4x)' \times (x + 1) + (4x) \times (x + 1)' = 4 \times (x + 1) + (4x) \times 1 = 8x + 4$
Derivada de uma potência natural: A função f^n é derivável em A e: $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$	Exemplo: Sejam $f(x) = 5x^3$ e $g(x) = (2x - 1)^2$. Aplicando as regras de derivação: $(f)'(x) = (5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \times 3 \times x^{3-1} = 15x^2$ $(g)'(x) = [(2x - 1)^2]' = 2 \times (2x - 1)^{2-1} \times (2x - 1)' = 2 \times (2x - 1) \times 2 = 4(2x - 1) = 8x - 4$
Derivada de um quociente de funções: Se g não se anula em A , a função $\frac{f}{g}$ é derivável em A e: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	Exemplo: Sejam $f(x) = 4x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Reparemos que $g(x) \neq 0$ em todo o seu domínio. Aplicando as regras de derivação: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(4x)' \times (x^2 + 1) - (4x) \times (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4 \times (x^2 + 1) - 4x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$

Actividade de investigação/exploração:

Demostre, usando a definição de derivada num ponto, cada uma das regras de derivação indicadas na tabela anterior.

(a) A regra de derivação da potência de expoente natural generaliza-se ao expoente racional:

$$(\sqrt[n]{f})' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

Exercícios:

59. Determine a expressão da função derivada de cada uma das seguintes funções:

59.1. $a(x) = -2x(3x - 1)$ 59.2. $b(x) = 4(x^3 - 2x + 1)$

59.3. $c(x) = (1 - x^2)(x^3 - 1)$ 59.4. $d(x) = \frac{x^3}{3}(x^2 + 2x)$

59.5. $e(x) = x^4$ 59.6. $f(x) = (1 - 2x)^5$

59.7. $g(x) = (x - 2x^2)^3$ 59.8. $h(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3$

59.9. $i(x) = \sqrt{3x - 1}$ 59.10. $j(x) = 2x\sqrt{x + 1}$

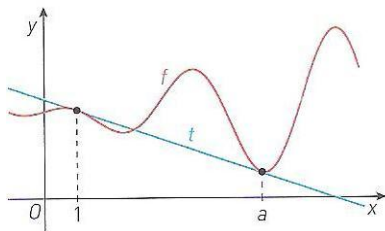
59.11. $k(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ 59.12. $l(x) = \sqrt[5]{2x - 3}$

59.13. $m(x) = \frac{3}{x}$ 59.14. $n(x) = -\frac{x}{x - 2}$

59.15. $o(x) = \frac{x^2}{x + 3}$ 59.16. $p(x) = \frac{3x + 1}{(x - 1)^2}$

59.17. $q(x) = -\frac{x}{2\sqrt{x}}$ 59.18. $r(x) = \left(\frac{1 - x}{2x}\right)^3$

60. No referencial da figura está parte da representação gráfica de uma função f e a recta t que é tangente ao gráfico de f em dois pontos, um de abscissa 1 e outro de abscissa a .



Sabe-se que: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$ é uma equação da recta t .

Seja g a função definida por: $g(x) = -2x^2 + 3x$

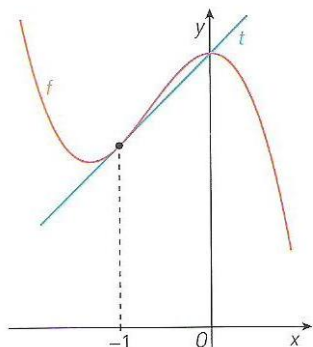
60.1. Determine $(g + f)'(1)$.

60.2. Determine a sabendo que: $(g + f)'(a) = -\frac{87}{5}$.

61. No referencial da figura está a parte da representação gráfica de uma função f e a recta t que é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1.

Sabe-se que $y = x + 3$ é uma equação da recta t .

Determine $(f \times g)'(-1)$ sabendo que $g(x) = -2x^3$.

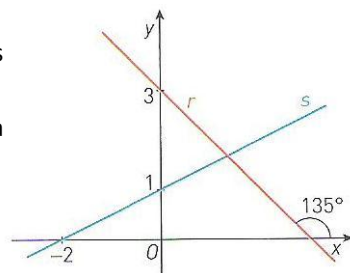


62. No referencial da figura, as rectas são representações gráficas das funções r e s .

62.1. Seja j a função definida por $j(x) = 2r(x)$.

Determine $j'(4)$.

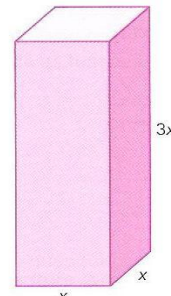
62.2. Determine $(r \times s)'(0)$.



63. Na figura está representado um prisma quadrangular regular.

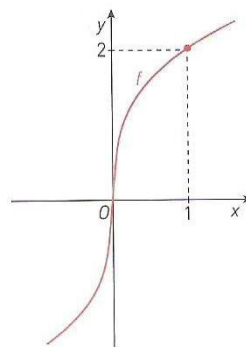
Admita que as dimensões estão expressas em centímetros.

Atendendo à informação dada na figura, determine a taxa de variação do volume para $x = 4$.



64. Relativamente a uma função f , sabe-se que $y = 2x + 5$ é uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3.

Seja g definida por $g(x) = (f(x))^4$. Determine $g'(3)$.



65. Na figura está representada a função f .

Determine $\left(\frac{g}{f}\right)'(1)$,

sabendo que

$$g(x) = -3(2 - x)^2 + 3.$$

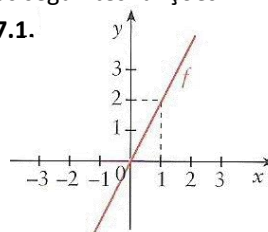
66. Considere a família de funções reais de variável real de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = ax^n, \quad a \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

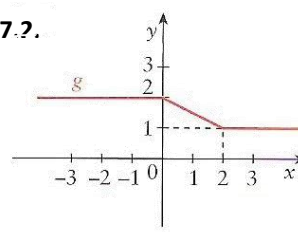
Determine a e n , sabendo que: $f'(1) = 1$ e $f'(3) = 9$

67. Faça um esboço de gráfico de uma função que possa corresponder ao gráfico da função derivada de cada uma das seguintes funções.

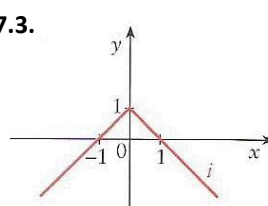
67.1.



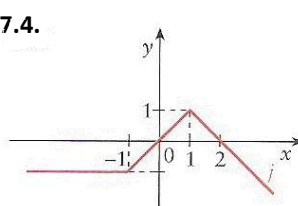
67.2.



67.3.



67.4.



▪ DERIVADA DE MAIS ALGUMAS FUNÇÕES

> Derivada de funções compostas

Função composta (revisão): Dadas duas funções f e g , reais de variável real, em que os domínios são, respectivamente, D_f e D_g , chama-se função composta f após g à função $f \circ g$ tal que:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $(D_{f \circ g}) = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$



Dadas duas funções f e g tais que $x_0 \in D_{g \circ f}$, f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$, então a derivada de $g \circ f$ em x_0 é dada por:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$$

Exemplo: Sejam $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x^4$.

Consideremos agora a função $h = (g \circ f)$.

Qual é o valor de $h'(-1)$?

- Pela regra de derivação anterior: $h'(-1) = g'[f(-1)] \times f'(-1)$

$$f'(x) = 2x - 2 \text{ então } f'(-1) = -2 - 2 = -4.$$

$$g'(x) = 4x^3 \text{ então } g'(f(-1)) = g'(3) = 4 \times 3^3 = 108.$$

$$\text{Assim: } h'(-1) = g'[f(-1)] \times f'(-1) = 108 \times (-4) = -432$$

- Por outro lado: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x)^4$

Aplicando a regra da derivada de uma potência:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[(x^2 - 2x)^4 \right]' = 4 \times (x^2 - 2x)^3 \times (x^2 - 2x)' = \\ &= 4 \times (x^2 - 2x)^3 \times (2x - 2) \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} h'(-1) &= 4 \times ((-1)^2 - 2 \times (-1))^3 \times (2 \times (-1) - 2) = \\ &= 4 \times 27 \times (-4) = -432 \end{aligned}$$

NOTA

A regra $(f^n)' = n f^{n-1} f'$ é um caso particular de aplicação da regra da derivada da função composta.

(1) De $f'(x) = 4x^3$ conclui-se que $f'[g(x)] = 4[g(x)]^3$.

Exercícios:

68. Considere as funções h, f e g , tais que:

$$h(x) = \frac{1}{x-1} ; \quad f(x) = x^2 - 9 ; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Caracterize as funções:

68.1. $g \circ f$ 68.2. $h \circ f$ 68.3. $f \circ h$

69. Indique duas funções, f e g , de modo que $h = f \circ g$, sendo:

69.1. $h(x) = (x+1)^2$ 69.2. $h(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

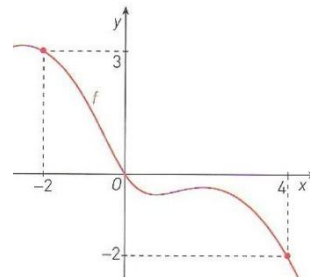
70. Na figura está parte da representação gráfica da função f de domínio $\mathbb{R}$.

Seja g a função definida por $\log_2 x$.

Determine:

70.1. $(f \circ f)(4)$

70.2. $(f \circ g)(0,25)$



71. Determine $(h \circ j)'(x)$, sendo:

71.1. $h(x) = x^5$ e $j(x) = -2x + 1$.

71.2. $h(x) = \frac{x^2}{x+6}$ e $j(x) = x - 3$.

71.3. $h(x) = \sqrt[3]{-x+2}$ e $j(x) = x^3$.

71.4. $h(x) = x^3$ e $j(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

71.5. $h(x) = \frac{x+1}{x}$ e $j(x) = \sqrt{x}$.

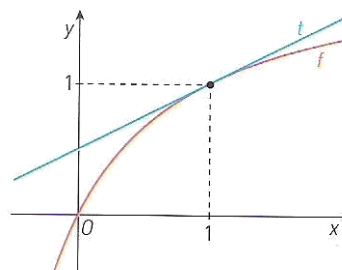
72. Aplique a regra de derivação da função composta para determinar $f'(x)$, sendo:

72.1. $f(x) = (3x-1)^2$

72.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

73. Na figura estão representadas uma função f e uma recta t tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Sabe-se que $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ é uma equação da recta t .



Sendo g a função definida por $g(x) = \sqrt{x}$, determine $(g \circ f)(1)$.

> Derivada de funções exponenciais

Consideremos a função real de variável real definida por: $f(x) = e^x$ (e = número de Neper)

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto vem:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \times 1 = e^x$$

Então $f'(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ou seja $(e^x)' = e^x$

Vejam agora mais duas funções exponenciais:

• Seja $g(x) = e^{2x-3}$, calculemos $g'(x)$.

$g'(x) = (e^{2x-3})'$ Recorrendo à derivada da função composta:

$h(x) = e^x$ e $u = 2x - 3$. Sabe-se que $h'(x) = e^x$ e $u' = 2$

Então:

$$g'(x) = (e^{2x-3})' = (h(u))' = h'(u) \times u' = e^{2x-3} \times 2$$

• Seja $h(x) = 3^x$, calculemos $h'(x)$.

Sabemos que 3^x pode ser escrito na forma de exponencial de base e :

$$3^x = e^{\ln(3^x)} = e^{x \ln 3}$$

Assim, $(3^x)' = (e^{x \ln 3})' = (x \ln 3) \times e^{x \ln 3} = \ln 3 \times e^{x \ln 3} = \ln 3 \times 3^x$

Resumidamente temos:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^x)' = a^x \times \ln a$$

$$(a^u)' = u' \times a^u \times \ln a$$

> Derivada de funções logarítmicas

Consideremos a função real de variável real definida por: $f(x) = \ln x$

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x \frac{h}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{h}{x} + 1\right)}{\frac{h}{x}}$$

Fazendo $y = \frac{h}{x}$, $h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x} \quad \text{Logo, } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Aplicando a regra da derivada da função composta e as propriedades dos logaritmos conseguimos encontrar as restantes regras.

Resumidamente temos:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \times \ln a}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \times \ln a}$$

O número e (número de Neper) pode ser definido como a base de uma função exponencial cuja derivada é a própria função.

$$(e^x)' = e^x$$

→ Na 11ª classe, o número irracional e foi definido como o limite da

sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercícios:

74. Determine a expressão da função derivada de cada uma das seguintes funções:

74.1. $a(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ 74.2. $b(x) = e^{-x + \frac{1}{3}}$

74.3. $c(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ 74.4. $d(x) = 2^{-x^2}$

74.5. $f(x) = x^3 e^{-x}$ 74.6.

$g(x) = \frac{x\pi^{-x} - 1}{\pi}$

74.7. $h(x) = 2^{x \ln 3}$ 74.8. $i(x) = \ln(3x)$

74.9. $j(x) = \ln(x - x^2)$ 74.10. $k(x) = x \ln x$

74.11. $l(x) = \log_2(\sqrt{x})$

74.12. $m(x) = \log_3(x^2 - 3)$

74.13. $n(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{-3}{x^2 - 1}\right)$

74.14. $o(x) = e^x \ln^2 x$

74.15. $p(x) = \sqrt{\ln x^2}$

75. Caracterize a função derivada da função f , sendo:

75.1. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ -e^x + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

75.2. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x} & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 + \frac{x}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

75.3. $f(x) = 1 + |\ln x|$

76. Considere a função f definida por $f(x) = x \ln(x) - x$.

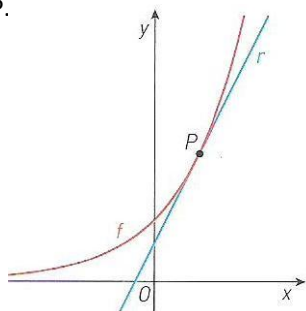
76.1. Resolva a equação $f(x) = 0$.

76.2. Mostre que $f'(x) = \ln(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercícios:

77. Seja r a recta paralela à recta $y = 2x$ e tangente ao gráfico da função f no ponto P .

Determine as coordenadas de P , sabendo que $f(x) = e^x$

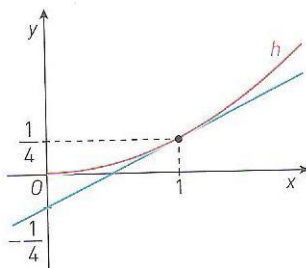


78. Na figura encontra-se parte de uma representação gráfica da função h e a recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa 1.

Seja j a função tal que

$$j(x) = 3^{\sqrt{h(x)}}$$

Determine $j'(1)$.

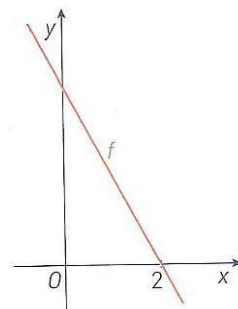


79. A recta que se encontra representada, no referencial da figura, é uma representação gráfica da função f .

Seja g a função definida por $g(x) = \log_{\pi}(f(x))$.

79.1. Qual o domínio de g ?

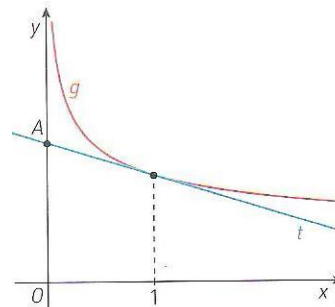
79.2. Mostre que $g'(1) \in \mathbb{R}^+$.



80. No referencial da figura está parte da representação gráfica da função g definida por:

$$g(x) = \frac{2^{\ln x}}{x}$$

A recta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 intersecta o eixo das ordenadas no ponto A .



Mostre que a ordenada do ponto A é $\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)$.

MONOTONIA E EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO // SINAL DA SUA DERIVADA

A função derivada de uma função é uma ferramenta útil para a determinação dos intervalos em que a função é monótona e para localizar eventuais extremos (máximos e mínimos) relativos ou absolutos.

De um modo geral, sendo $]a, b[$ um intervalo contido no domínio da uma função f :

$m > 0$ $f'(x_0) > 0$	$m < 0$ $f'(x_0) < 0$	$m = 0$ $f'(x_0) = 0$
Se uma função tem derivada positiva em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$, então a função é estritamente crescente nesse intervalo.	Se uma função tem derivada negativa em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$, então a função é estritamente decrescente nesse intervalo.	Se uma função tem derivada nula em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$, então a função é constante nesse intervalo.

Exemplo 1: Consideremos a função f real de variável real tal que $f(x) = (x-1)^2 + 2$:

1.1. Estudemos a monotonia e a existência de extremos da função.

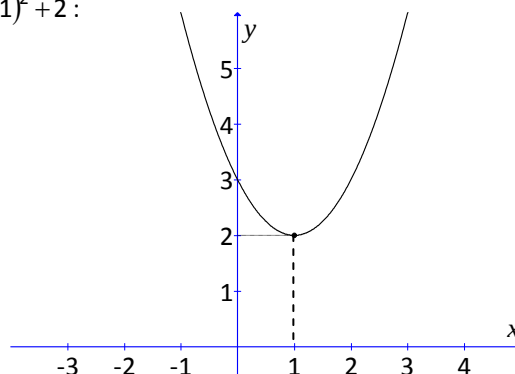
Resolução: A função f é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, com vértice em $(1, 2)$ e ordenada na origem 3 ($f(0) = (0-1)^2 + 2 = 3$).

Da análise do esboço do gráfico podemos concluir que:

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$,

f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$,

f é tem um mínimo absoluto para $x = 1$ que é 2 .



1.2. Estudemos, agora, a monotonia e a existência de extremos da função, utilizando apenas a sua derivada.

Resolução: $f(x) = (x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x + 3$ então: $f'(x) = 2x - 2$

Como vimos anteriormente existe uma relação entre a monotonia da função e o sinal da sua derivada, estudemos então o sinal da derivada.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Trata-se de uma função afim com declive positivo ($m = 2$) e por isso crescente e com zero em $x = 1$.

Coloquemos essa informação numa tabela:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f		mínimo	

Como f é uma função contínua derivável em todo o seu domínio podemos concluir que no intervalo em que a derivada é negativa a função é decrescente, no intervalo em que a derivada é positiva a função é crescente e que no zero da derivada a função tem um mínimo (para $x = 1$).

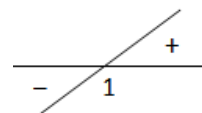
Da tabela resulta:

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$,

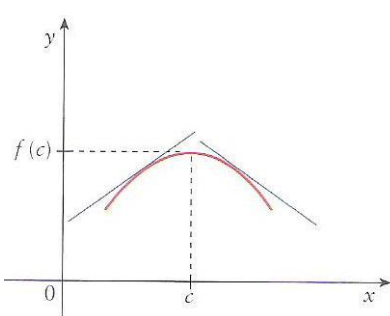
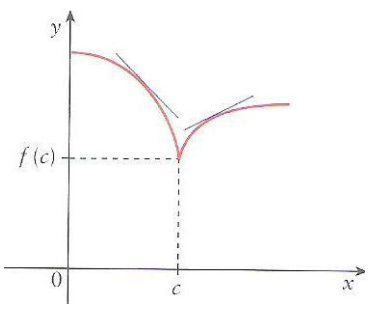
f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$,

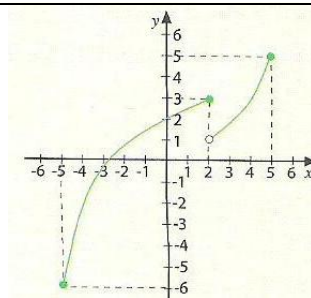
f é tem um mínimo absoluto para $x = 1$ que é 2

$$(f(1) = (1-1)^2 + 2 = 2).$$



Seja D o domínio de uma função f real de variável real e $c \in D$:

Se f é contínua em c e f' muda de sinal em c , então $f(c)$ é um extremo:		Se f é descontínua em c é necessário fazer o estudo caso a caso, atendendo à definição de extremos.
		
$f(c)$, é máximo se f' , passa de positiva a negativa.	$f(c)$, é mínimo se f' , passa de negativa a positiva.	



Exemplo 2: Estudemos a monotonia e os extremos da função f definida por: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+1}$:

Resolução: O domínio da função $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{x+1} \right)' = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$$

Zeros da função derivada: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \wedge x \neq -1$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3} \vee x = -1 - \sqrt{3}$$

Zeros de f' : $-1 + \sqrt{3} \vee -1 - \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{3}$		-1		$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
f'	+	0	+	s. s.	-	0	+
f		Max.		s. s.		mín.	

Intervalos de monotonia:

- f é crescente nos intervalos $]-\infty, -1 - \sqrt{3}]$ e $[-1 + \sqrt{3}, +\infty[$;
- f é decrescente nos intervalos $[-1 - \sqrt{3}, -1[$ e $]-1, -1 + \sqrt{3}]$.

Extremos:

• $f(-1 - \sqrt{3}) \approx -7,5$ é máximo relativo.

Não é máximo absoluto porque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x+1} = +\infty$$

• $f(-1 + \sqrt{3}) \approx -0,5$ é mínimo relativo.

Não é mínimo absoluto porque:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x+1} = -\infty$$

Exercícios:

81. Na figura está representada graficamente uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

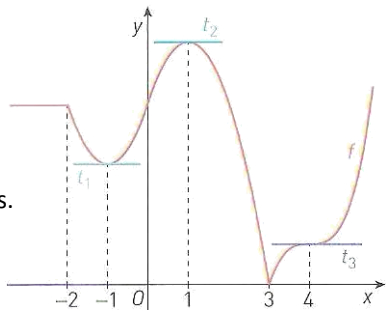
As rectas t_1 , t_2 e t_3 são tangentes ao gráfico e paralelas a Ox .

Indique o conjunto solução das seguintes condições.

81.1. $f'(x) = 0$

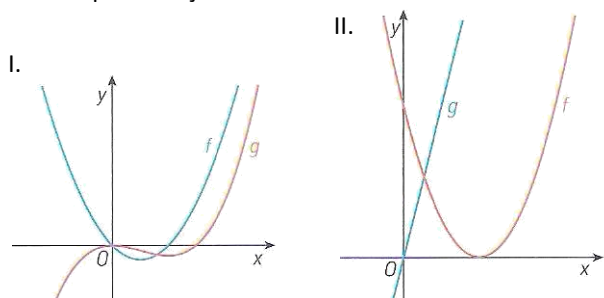
81.2. $f'(x) < 0$

81.3. $f'(x) \times f(2) > 0$



82. Nas figuras seguintes, apenas num dos referenciais se encontram representadas duas funções em que uma é a derivada da outra.

Indique em qual dos referenciais isso acontece e identifique a função e a derivada.



83. Seja f a função definida por: $f(x) = x|x|$

83.1. Caracterize a função derivada de f .

83.2. Mostre, por processos analíticos, que a função f é crescente em todo o seu domínio.

84. Em relação a uma função f , indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

I. Se $f'(a) = 0$, então f é contínua em $x = a$.

II. Se $f'(a) = 0$, então existe um extremo em $x = a$.

III. Se em $x = a$ existe um extremo, então $f'(a) = 0$.

IV. Se em $x = a$ existe um extremo e $f'(a) \in \mathbb{R}$ então $f'(a) = 0$

85. Estude a função g quanto aos intervalos de monotonia e extremos, sendo:

85.1. $g(x) = -x^2 + 3x + 1$

85.2. $g(x) = x^2 e^{-2x}$

85.3. $g(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 2$

85.4. $g(x) = \frac{e^x}{x}$

85.5. $g(x) = x \ln x$

85.6. $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

86. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $g(x) = \frac{2x}{e^x - x}$

Estude a função g quanto a intervalos de monotonia e a extremos.

87. Considere a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{se } x < 0 \\ e^{1-x} + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Estude a função g quanto aos intervalos de monotonia e extremos.

88. Considere a função f tal que: $f(x) = e^{2x-x^2}$

88.1. Estude os intervalos de monotonia e os extremos de f .

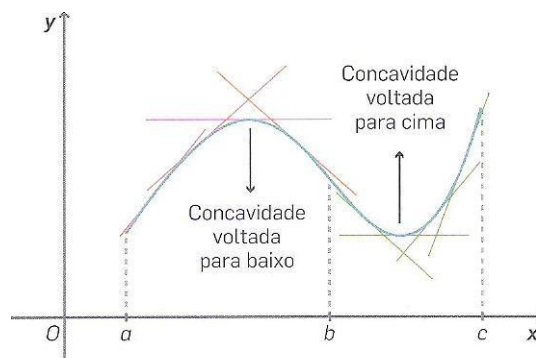
88.2. Mostre, que a recta $x = 1$ é um eixo de simetria de gráfico da função f .

▪ CONCAVIDADE E SEGUNDA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

As expressões “concavidade voltada para cima” e “concavidade voltada para baixo” já fazem parte do vocabulário utilizado para caracterizar gráficos de funções, nomeadamente quando nos referimos aos gráficos de funções quadráticas. Mas, como vamos ver, estas expressões podem ser aplicadas aos gráficos de outras funções.

Sendo f uma função contínua e derivável:

- Diz-se que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima num intervalo se, nesse intervalo, o gráfico se encontra acima de qualquer uma das rectas tangentes em pontos desse intervalo.
- Diz-se que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo num intervalo se, nesse intervalo, o gráfico se encontra abaixo de qualquer uma das rectas tangentes em pontos desse intervalo.
- Diz-se que f tem um ponto de inflexão para $x = b$ ($b \in Df$) se o gráfico muda o sentido da concavidade no ponto $(b, f(b))$.



Analisando o gráfico concluímos que:

- tem concavidade voltada para cima no intervalo $]a, b[$;
- tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]b, c[$;
- a função tem um ponto de inflexão em $x = b$.

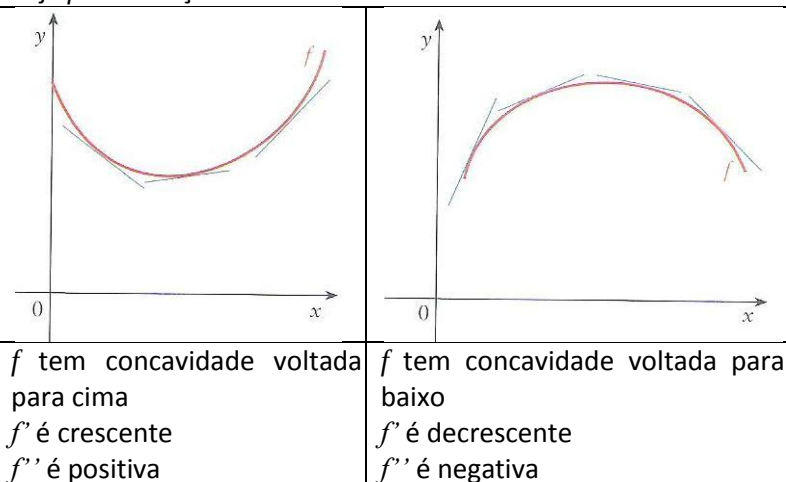
Vamos, agora estudar como determinar o sentido da concavidade e os pontos de inflexão usando a segunda derivada.

A monotonia de uma função f , num intervalo em que f é derivável, está relacionada com o sinal de f' nesse intervalo e a monotonia de f' está relacionada com o sinal de f'' .

Seja f uma função contínua. Os pontos de inflexão de f ocorrem:

- nos zeros de segunda derivada onde haja uma mudança de sinal;
- nos pontos onde não exista segunda derivada, se numa vizinhança à direita desses pontos existir segunda derivada e assumir valores de sinal diferente.

Seja f uma função derivável duas vezes:



Exemplos: Estudemos a concavidade e a existência de pontos de inflexão dos gráficos das seguintes funções:

$$f(x) = 2 - x^3$$

Resolução:

f é contínua.

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{3-1} = -\frac{1}{3}x^2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{3} \times 2x = -\frac{2}{3}x$$

$$f''(x) = 0 \text{ é impossível e } Df'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	S. S.	+
f		P. I.	

O gráfico de f :

- tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$;
- tem concavidade voltada para cima em $]0, +\infty[$.
- tem ponto de inflexão em $(0, 2)$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$$

g é contínua.

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 1 \\ -2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g''	+	S. S.	-
g		P. I.	

O gráfico de g :

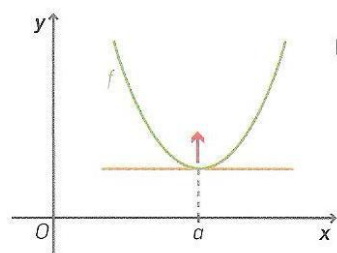
- tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$;
- tem concavidade voltada para baixo em $]1, +\infty[$.
- tem ponto de inflexão em $(1, 1)$.

> O Sinal da segunda derivada e os extremos da função

Seja f uma função duas vezes derivável numa vizinhança de a .

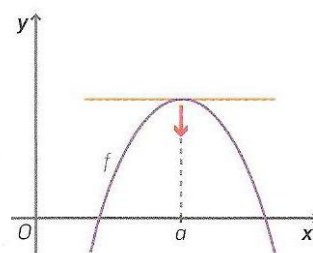
Se no ponto a se tem $f''(a) = 0$ e $f'''(a) > 0$, a função tem um mínimo para $x = a$.

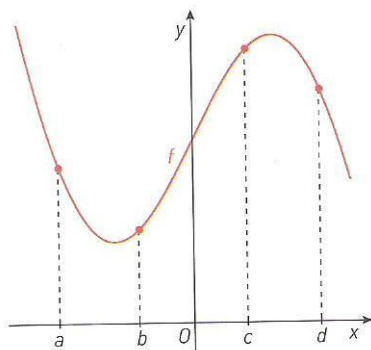
Se no ponto a se tem $f''(a) = 0$ e $f'''(a) < 0$, a função tem um máximo para $x = a$.



No ponto de abscissa a a reta tangente é horizontal ($f'(a) = 0$) e a concavidade está voltada para cima ($f''(a) > 0$).

No ponto de abscissa a a reta tangente é horizontal ($f'(a) = 0$) e a concavidade está voltada para baixo ($f''(a) < 0$).

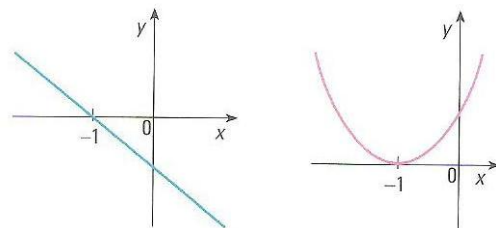


Exercícios:**89.** Determine $f''(x)$, sendo: **89.1.** $f(x) = \ln^2 x$ **89.2.** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ **89.3.** $f(x) = x + 2^{-x}$ **90.** Um corpo é lançado na vertical, de baixo para cima, sendo a altura h , em metros, a que se encontra o corpo decorridos t segundos após o lançamento, dada pela expressão: $h(t) = -t^2 + 7t + 1$ **90.1.** Qual a velocidade do corpo no instante $t = 2$?**90.2.** Determine a aceleração em:**a)** $t = 2$ **b)** $t = 5$ **91.** Na figura está representada uma função f . Estão assinalados alguns pontos que pertencem ao gráfico de f . Por observação da figura, indique o sinal de:

- 91.1.** $f'(a) \times f''(a)$
91.2. $f''(b) \times f'(c)$
91.3. $f'(b) \times f''(c)$
91.4. $f''(c) + f''(d)$

92. Estude o sentido das concavidades e os pontos de inflexão do gráfico de f , sendo:

- 92.1.** $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2$ **92.2.** $f(x) = (x-1)e^x$
92.3. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ **92.4.** $f(x) = e^x(x^2 - x)$

93. De uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a sua derivada f' é definida por: $f'(x) = \frac{1 + \ln x}{2x}$ Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.**94.** Seja f uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abscissa -1.Qual dos seguintes gráficos pode ser o da segunda derivada de f ?

Justifique a resposta.

95. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = xe^{1-x^2}$ **95.1.** Mostre que $f''(x) = (4x^3 - 6x)e^{1-x^2}$.**95.2.** Estude o sentido da concavidade e a existência de pontos de inflexão do gráfico de f .**96.** Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 2x^2 - e^{-\frac{x}{2}}$$

Determine a abscissa do único ponto de inflexão do gráfico de f .**▪ ESTUDO ANALÍTICO DE FUNÇÕES**

Com os conceitos de cálculo diferencial estudados neste tema, é possível, neste momento, por via analítica, ampliar o estudo das funções.

Entre outras características, o estudo de limites, da continuidade, da existência de assíntotas, da derivabilidade e da paridade permite um conhecimento mais pormenorizado da função ou de uma sua restrição que, em muitos casos e como já foi visto, modelam situações reais.

Nota:

A tecnologia gráfica hoje ao nosso dispor constitui uma ajuda preciosa nesta matéria. A representação gráfica das funções nas calculadoras gráficas deve servir de apoio ao estudo da função.

Estudo de uma função:

- Determinar o domínio;
- Estudar a continuidade da função;
- Determinar as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da função com os eixos coordenados;
- Estudar a paridade;
- Determinar os extremos e estudar a monotonia da função (estudo do sinal da primeira derivada);
- Estudar o sentido da concavidade e existência de pontos de inflexão do gráfico da função (estudo do sinal da segunda derivada);
- Determinar equações da assíntotas do gráfico da função;
- Determinar o contradomínio;
- Representação gráfica.

Exemplo: Estudemos a função real de variável real:

$$f(x) = xe^x$$

Resolução:

- Domínio: $\mathbb{R}$
- Continuidade: a função é contínua em $\mathbb{R}$
- Intersecção com eixos:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Intersecção do gráfico com o eixo Ox: (0, 0)

$$f(0) = 0 \times e^0 = 0$$

Intersecção do gráfico com o eixo Oy: (0, 0)

- Paridade:

$$f(-x) = (-x)e^{(-x)} = -xe^{-x}$$

A função não é par nem é ímpar.

- Intervalos de monotonia e extremos:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	-	0	+
f		min	

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}. \text{ O mínimo da função é } -\frac{1}{e}.$$

- Concavidades. Pontos de inflexão:

$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2+x) = 0 \Leftrightarrow 2+x = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	-	0	+
f		p.i.	

O ponto P $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ é o ponto de inflexão do gráfico.

- Assíntotas:

O gráfico da função não tem assíntotas verticais.

Não verticais: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Seja $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Seja $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Se $m = 0$ vem:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) \stackrel{(a)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

$$(a) \quad y = -x \Leftrightarrow x = -y \quad x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

A recta $y = 0$ é assíntota horizontal quando: $x \rightarrow -\infty$

Exercícios:

97. Estude e represente graficamente a função definida por:

$$97.1. \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$97.2. \quad f(x) = \frac{x^2 - x}{2 - x}$$

$$97.3. \quad f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2}$$

$$97.4. \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$$

$$97.5. \quad f(x) = x + \ln \frac{1}{x}$$

$$97.6. \quad f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$97.7. \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$97.8. \quad f(x) = xe^x - e^x$$

98. Relativamente à função f sabe-se que:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

• satisfaz a tabela:

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f		3		-2	

98.1. Complete a tabela.

98.2. f é contínua? Justifique.

98.3. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1.

98.4. Esboce um possível gráfico de f .

98.5. Qual o contradomínio de f ?

99. Esboce um possível gráfico da função f , sabendo que:

99.1.

- tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- é ímpar
- $x = 0$ é uma assíntota
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$
- $f''(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

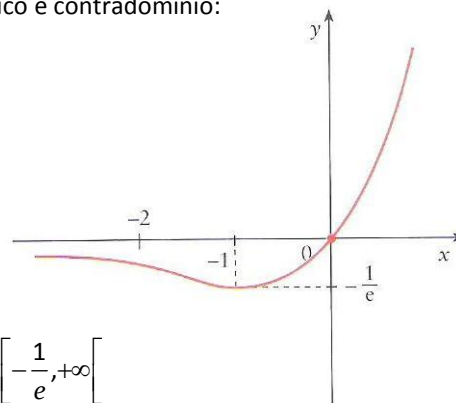
99.2.

- tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $x = 1$ é assíntota
- $f'(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$
- $f'(3) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

99.3.

- tem domínio $\mathbb{R}$
- $x = 2$ é assíntota vertical
- $f'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Gráfico e contradomínio:



$$D'_f = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right[$$

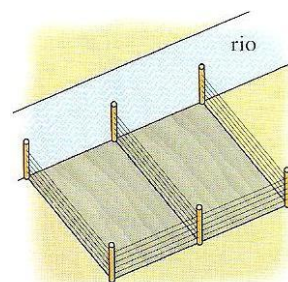
▪ MODELAÇÃO E OPTIMIZAÇÃO

Muitos fenómenos de Física, Economia, Sociologia e muitas outras ciências têm como modelo matemático uma função. Estes modelos matemáticos permitem resolver alguns problemas, fazer projecções a curto ou a médio prazo e/ou determinação de valores óptimos.

Exemplo 1: Um agricultor tem 8100 mil dobras para gastar na vedação de duas cercas contínuas, rectangulares e iguais, junto a um rio, como se mostra na figura.

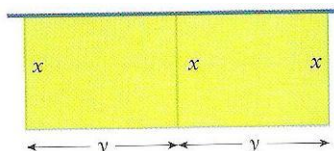
A vedação dos três lados perpendicular ao rio custa 90 mil dobras o metro, enquanto que vedar o lado paralelo ao rio custa 80 mil dobras o metro.

Quais devem ser as dimensões das cercas de modo a que a área destas seja máxima?



Resolução: Pretende-se otimizar a área das cercas.

Começemos por fazer um desenho e identificar as variáveis Independentes.



Seja: x = comprimento de um lado perpendicular ao rio;

y = comp. de um lado, de uma cerca, paralelo ao rio.

Estamos condicionados pelo custo da vedação e pelo dinheiro disponível.

$$3x \times 90 + 2y \times 80 = 8100 \Leftrightarrow y = \frac{810 - 27x}{16}$$

Custo da vedação
dos lados
perpendiculares ao rio.

Custo da vedação
do lado paralelo
ao rio.

A área A é dada por $A = 2xy$; escrevendo a área em função de x , vem:

$$A(x) = 2x \times \frac{810 - 27x}{16} \quad \text{ou} \quad A(x) = \frac{810x - 27x^2}{8}$$

Calculando $A'(x)$, vem:

$$A'(x) = \frac{810 - 54x}{8} ; \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

Estudemos a variação da função área A .

x	0		15	
A'		+	0	-
A			Máx	

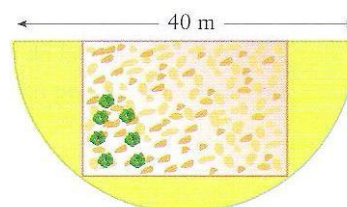
$$x = 15 ; y = \frac{810 - 27 \times 15}{16} = 25,3125$$

Verificação: $3 \times 15 \times 90 + 2 \times 25,3125 \times 80 = 8100$

Logo as dimensões da cerca que conduzem à área máxima são $x = 15$ m e $y = 25,3125$ m.

Exercícios:

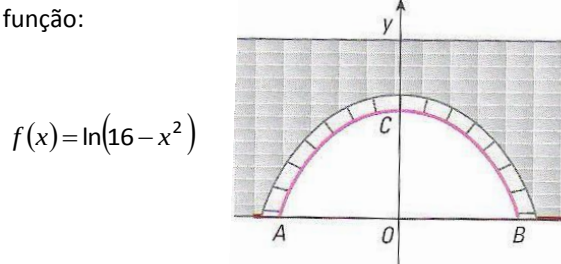
100. Um terreno tem a forma de um semicírculo de raio 20m. Pretende-se fazer um jardim com a forma de um rectângulo, em que um dos lados está sobre o diâmetro do semicírculo e os vértices do lado oposto pertencem à circunferência.



100.1. Determine as dimensões do jardim de modo que a sua área seja máxima.

100.2. Qual é a área máxima do jardim?

101. O modelo matemático encontrado para descrever o arco de entrada num túnel, representado no referencial o.n. xOy , é dado pela função:



101.1. Resolva a equação $f'(x) = 0$ e interprete o valor encontrado no contexto do problema.

101.2. Determine a distância do segmento $[A, B]$ (a largura da entrada no túnel)

102. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de q centenas de peças, expresso em milhares de dobras, é dado por

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000.$$

102. 1. Determine a função $C'(q)$, custo marginal, e calcule o seu valor para 6 centenas de peças.

102.2. Estude a variação do custo total, no intervalo $]0, 8[$. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo.

Exemplo 2: A pilha de Volta foi o primeiro gerador estático de energia eléctrica. O criador, o físico italiano Alessandro Volta, viveu entre 1745 e 1827.



A potência fornecida por uma pilha de Volta é dada, em determinada unidade, por: $p = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$

sendo $E \neq 0$ uma força electromotriz constante.

r é uma resistência interna e R é uma resistência externa, $r > 0, R > 0$.

2.1. Mostre que a potência é máxima quando $R = r$.

2.2. Determine a maior potência que é possível obter.

Resolução:

2.1. Tem-se: (a) vamos derivar em ordem a R .

$$\begin{aligned} p'(R) &= \left(\frac{E^2 R}{(r + R)^2} \right)' = \frac{(E^2 R)' \times (r + R)^2 - E^2 R ((r + R)^2)'}{(r + R)^4} = \\ &= \frac{E^2 (r + R)^2 - 2(r + R)E^2 R}{(r + R)^4} = \frac{E^2 (r + R)(r + R - 2R)}{(r + R)^4} = \\ &= \frac{E^2 (r - R)}{(r + R)^3} \end{aligned}$$

Atendendo a que $E \neq 0$,

$$p'(R) = 0 \Leftrightarrow E^2 (r - R) = 0 \Leftrightarrow r - R = 0 \Leftrightarrow r = R$$

Se $R < r$ tem-se $r - R > 0$ e, portanto, $p'(R) > 0$.

Se $R > r$ tem-se $r - R < 0$ e, portanto, $p'(R) < 0$.

Portanto p toma o valor máximo quando $R = r$.

2.2. O maior que a maior potência pode tomar é $p(r)$:

$$p(r) = \frac{E^2 r}{(r + r)^2} = \frac{E^2 r}{4r^2} = \frac{E^2}{4r}$$

106. Admite que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por:

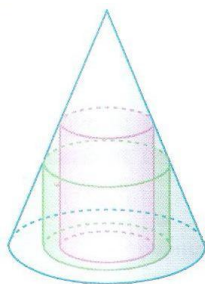
$$C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}, \text{ com } t \geq 0$$

106.1. Mostra que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi de 13 gramas por litro. (se utilizar a calculadora para eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos use três casas decimais)

106.2. Determina o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

107. Os cilindros e o cone têm a base assente no mesmo plano e as respectivas alturas contidas na mesma recta. O cone tem de altura 60 cm e raio da base 10 cm.

Determine o volume máximo do cilindro que se pode inscrever o cone.



Exercícios:

103. Admita que a altura do nível da água, em metros, num reservatório é dada, durante 15 minutos e a partir de um certo instante, pela expressão:

$$h(t) = \frac{4t - 60}{t - 30} \text{ com } t \text{ em minutos.}$$

103.1. Mostre, por processos analíticos, que durante os 15 minutos o reservatório está a esvaziar.

103.2. Qual a taxa de variação da altura do nível da água no instante $t = 10$?

104. Admite que um forno eléctrico foi ligado às 11 horas de um determinado dia. Passado algum tempo após ter sido ligado, houve uma falha de energia.

A temperatura dentro do forno, C , em graus centígrados, é dada por

$$C(t) = 20 + 150t \times e^{-0,3t}, \quad t \geq 0,$$

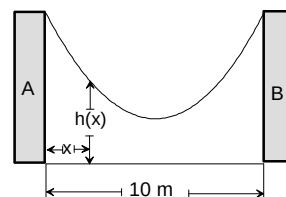
em que t é o tempo, em horas, a partir do instante em que o forno foi ligado.

104.1. Qual foi a temperatura a que o forno se encontrava no momento de ser ligado.

104.2. Determina a hora em que ocorreu a falha de energia (nota que a temperatura cresceu até um determinado valor e aquando da falha de energia começou a decrescer).

Apresenta o resultado em horas e minutos.

105. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considera a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11).$$

Admite que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

105.1. Determina a altura da parede A. Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

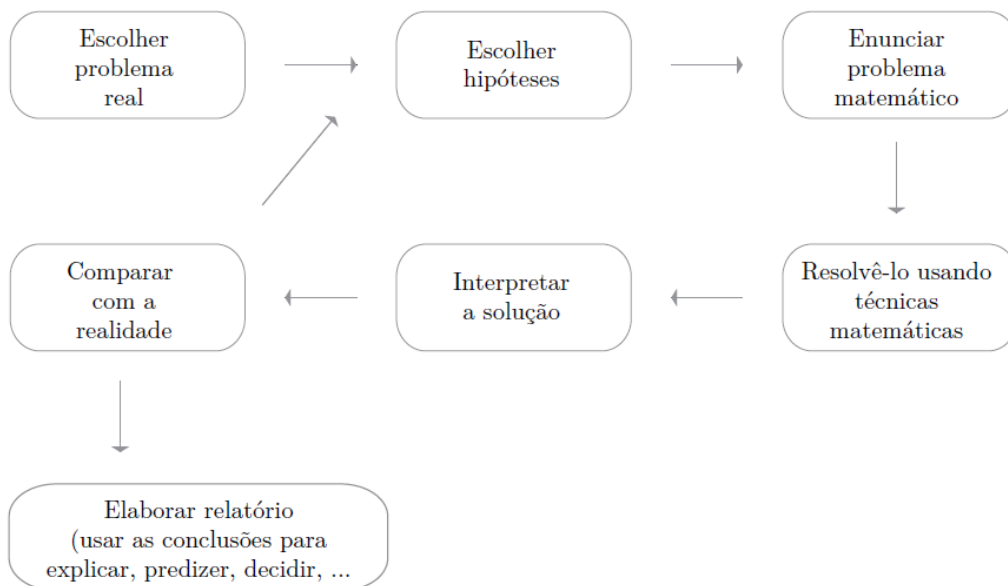
105.2. Estuda a função h quanto à monotonia e conclui daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

TEMA 3

TRIGONOMETRIA

INTRODUÇÃO

Ao longo do ano em diversos momentos foram referidos modelos matemáticos e o processo de modelação matemática. Mas o que é, afinal, o processo de **modelação matemática**? Apresentamos uma possibilidade!

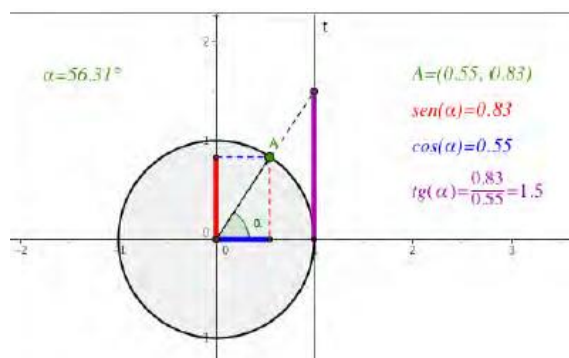


O início do processo é a **escolha de um problema real** que pode estar mais ou menos (in)definido. Em seguida há que **selecionar hipóteses**: considera-se o atrito ou despreza-se, considera-se a espessura do material ou despreza-se, etc. A validade das conclusões dependem exactamente das hipóteses que consideramos. Posteriormente estamos em condições de **enunciar o problema matemático** propriamente dito: que (in)equações há a resolver, quais são as variáveis, o que é constante, etc. A partir daqui, em princípio será clara a **técnica matemática** que pode ser usada, embora possa não ser simples chegar à **solução**. Finalmente há que redigir um **relatório** em que a solução do problema é usada para explicar o fenómeno, ou prever a evolução futura, ou para servir de suporte a uma tomada de decisões. A comunicação sob a forma matemática é uma ferramenta importante nos dias de hoje para todos os cientistas e investigadores.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMO FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

As razões trigonométricas podem ser vistas, não só como relações entre os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos de triângulos rectângulos, mas também como correspondências unívocas, em que a cada amplitude x (em radianos) de um ângulo corresponde uma razão trigonométrica dessa amplitude x .

Na 11.ª classe as razões trigonométricas foram também associadas ao círculo trigonométrico, círculo de raio 1 com o centro a coincidir com a origem do referencial, que nos permite visualizar as razões trigonométricas, como é o caso do seno, co-seno e tangente.



Visualização das razões trigonométricas no círculo trigonométrico para um determinado ângulo.

Imagine um ponto que se movimenta sobre a circunferência (por exemplo, ponto A na figura acima). A cada ângulo, x , em radianos, que esse ponto define podemos fazer corresponder uma das razões trigonométricas, ou seja, cada posição deste ponto dá-nos um ponto no gráfico da função trigonométrica.

Como as amplitudes, em radianos, bem como os valores correspondentes das razões trigonométricas, são números reais, estamos a definir funções reais de variável real.

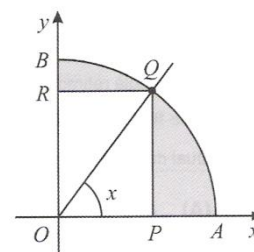
Neste caso, dizemos que estamos perante funções trigonométricas.

Uma concretização da descrição do movimento de um ponto numa circunferência é a tarefa seguinte:

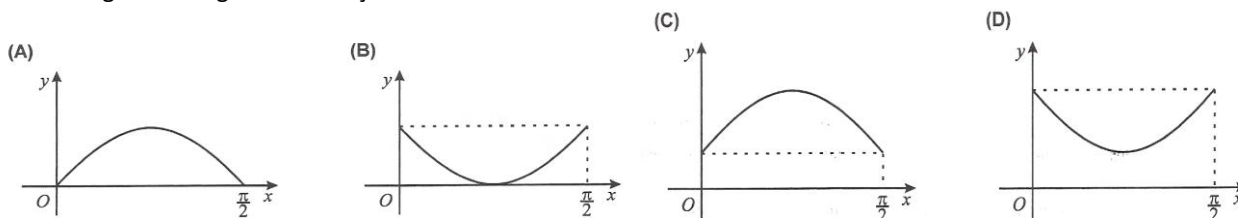
Tarefa: Na figura está representada, num referencial ortonormado (o.n.) xOy , um arco de circunferência AB , de centro na origem do referencial. O ponto Q move-se ao longo desse arco.

Os pontos P e R , situados sobre os eixos Ox e Oy , respectivamente, acompanham o movimento do ponto Q , de tal forma que o segmento de recta $[PQ]$ é sempre paralelo ao eixo Oy e o segmento $[QR]$ é sempre paralelo ao eixo Ox .

Para cada posição do ponto Q , seja x a amplitude do ângulo AOQ e seja $h(x)$ a área da região sombreada.



Qual dos gráficos seguintes a função h ?



Resolução: Vejamos que para $x=0$ e para $x=\frac{\pi}{2}$, a área sombreada corresponde a um quarto de circunferência, amplitudes para as quais a área é máxima. Assim, as opções possíveis serão a resposta (B) e (D), onde o extremo dos intervalos são maximizantes da função. Contudo e como podemos observar na figura a área sombreada até $x=\frac{\pi}{4}$ diminui, mas nunca chega a atingir o zero (existe sempre parte a sombreado!), pelo que a resposta correcta é a alínea (D).

Para resolver:

1. Na figura está representado um hexágono regular, inscrito no círculo trigonométrico.

Determine:

1.1. $\sin \hat{AOB}$ 1.2. $\cos \hat{AOC}$ 1.3. $\tan \hat{AOE}$

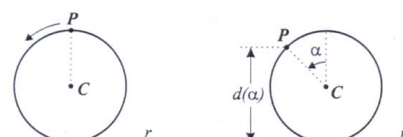
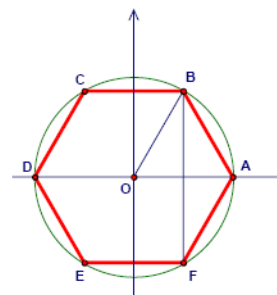
2. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r.

Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura.

Inicialmente o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r.

Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α . Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer real positivo α ?

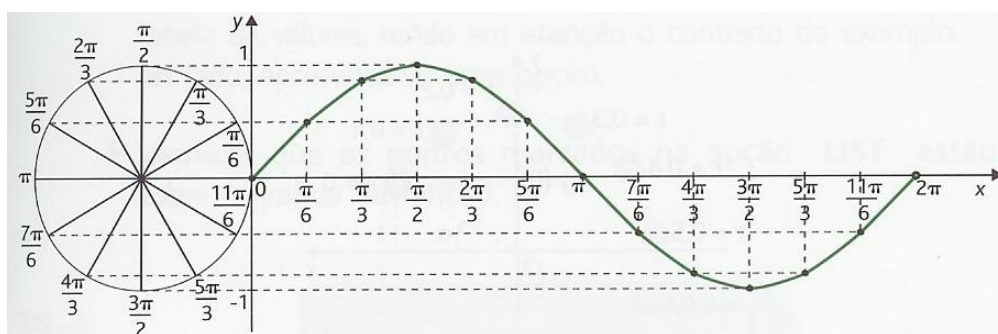
- (A) $d(\alpha) = 1 + \cos \alpha$ (B) $d(\alpha) = 2 + \sin \alpha$
 (C) $d(\alpha) = 1 - \cos \alpha$ (D) $d(\alpha) = 2 - \sin \alpha$



O MA8 inclui uma breve síntese relativamente à trigonometria estudada na 11.ª classe.

▪ FUNÇÃO SENO

A partir do círculo trigonométrico podemos construir, geometricamente, o gráfico da função $y = \sin x$



Para cada valor de $x \in [0, 2\pi]$, $\sin x$ é a ordenada do ponto intersecção do lado extremidade do ângulo com o círculo trigonométrico. Podemos continuar este estudo para ângulos cujas amplitudes sejam maiores ou igual a 2π e para amplitudes negativas. Assim podemos concluir que para a função seno:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D_f' = [-1, 1]$
- É uma função ímpar pois $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
 (o gráfico é simétrico em relação à origem do referencial)
- É uma função periódica pois $\sin(2k\pi + x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$
 Para $k = 1$ obtém-se 2π a que se dá o nome de período mínimo
- A expressão geral dos zeros é: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- A função é positiva em $]2k\pi, \pi + 2k\pi[$ $k \in \mathbb{Z}$
 e negativa em $]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[$ $k \in \mathbb{Z}$
- A função tem máximos relativos para: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- A função tem mínimos relativos para: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para resolver:

3. Considere a função g, definida por $g(x) = \sin x$ no intervalo $[-4\pi; -2\pi]$.

Indica, em relação à função g:

- extremos;
- zeros;
- sinal;
- intervalos de monotonia.

4. Determine se as funções definidas pelas seguintes expressões são pares ou ímpares:

4.1. $f(x) = 2 \sin x + \pi$

4.2. $g(x) = \sin(2x^2 + \pi)$

5. Resolva as equações:

5.1. $\sin x = \sin \frac{\pi}{7}$

5.2. $\sqrt{3} + 2 \sin(2x) = 0$

• Quanto à monotonia a função é crescente em $\left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$

e decrecente em $\left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$

- A função não é injectiva
- A função é contínua em todo o seu domínio
- O gráfico da função é uma sinusóide

Uma aplicação deste tipo de função é, por exemplo, a modelação das marés que são fenómenos periódicos. Consideremos o seguinte contexto:

Para resolver:

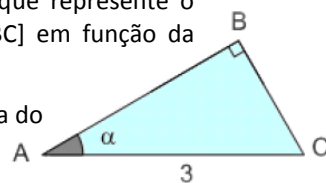
6. Na figura está representado um triângulo rectângulo [ABC], de hipotenusa 3.

Apresente uma expressão que represente o perímetro do triângulo [ABC] em função da amplitude α .

Sugestão: Expresse a medida do

comprimento dos lados

recorrendo a razões trigonométricas.



Tarefa:

Numa praia, em determinado dia, foram feitas várias medições que permitiram chegar à seguinte função:

$y = 3 + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, onde t representa o tempo em horas e y o nível da água, em metros.

1. Às vinte horas, qual era o nível da água?

2. Em que momentos a água atingiu o nível de 4m?

Resolução:

Graficamente a resolução destas questões passa por, na alínea 1 determinar a imagem do objecto 20 e no segundo caso, as soluções que procuramos coincidem com as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função com a recta constante $y=4$.

Vejamos a resolução analítica.

1. Substituímos t por 20 na expressão e obtemos:

$$y = 3 + 2\sin\left(\frac{20}{2}\right) \Leftrightarrow y = 3 + 2\sin(10) \Leftrightarrow y = 1,91 \text{ (2c.d.)}$$

R: O nível da água era cerca de 1,9m.

2. Neste caso é-nos dado o valor de y e pedido o valor de t .

Assim, igualamos a expressão a 4, obtendo:

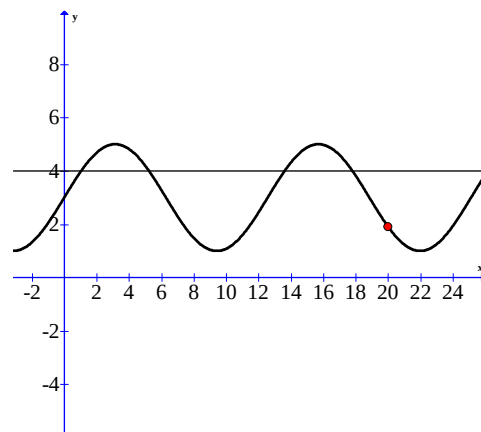
$$3 + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{t}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee t = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo:

$$k=0 \quad t = \frac{\pi}{3} \approx 1 \vee t = \frac{5\pi}{3} \approx 5,2; \quad k=1 \quad t = \frac{13\pi}{3} \approx 13,6 \vee t = \frac{17\pi}{3} \approx 17,8$$

R: Às 1h, 5,2h, 13,6h e 17,8h aproximadamente do dia em causa.



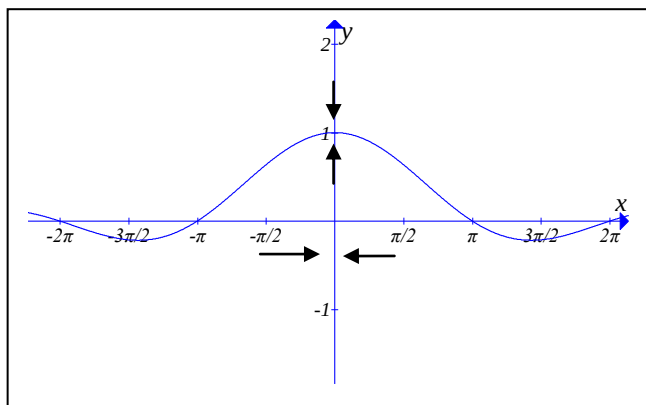
> Limites

A função $\sin x$ é contínua em $\mathbb{R}$, para qualquer número real a , logo $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$. Como é uma função periódica não existe limite nos ramos infinitos ($x \rightarrow \pm\infty$).

Estudamos agora uma função em particular que nos vai ser útil para o cálculo das derivadas das funções trigonométricas.

Sendo x , o ângulo em radianos, a função definida por $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ está definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta assume uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, no cálculo do limite quando $x \rightarrow 0$, mas esta indeterminação pode ser levantada. Vamos fazê-lo de forma intuitiva, utilizando tabela e gráfico.

Por observação gráfica o limite sugere 1 como o resultado do limite em causa. Da mesma forma, a observação da tabela dá-nos indicação que, para valores de x próximos de zero, quer por aproximação à esquerda, quer por aproximação à direita, os valores tendem para 1, como seria de esperar pela paridade da função $\frac{\sin x}{x}$.



x (em radianos)	$\frac{\sin x}{x}$	x (em radianos)
1	0,841470...	- 1
0,5	0,958851...	- 0,5
0,125	0,997397...	- 0,125
0,0078125	0,999989...	- 0,0078125
0,000244141	0,999999...	- 0,000244141
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0^+	1	0^-

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ donde podemos concluir que } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Tarefa: Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Resolução: Uma aplicação deste limite vem no cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$,

também ele importante no cálculo na derivada da função $\sin x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x} \times \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(1 + \cos x)} = 1 \times \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} = 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Assim $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0}$

No levantamento de indeterminações envolvendo o cálculo de limites com funções trigonométricas, existem alguns artifícios, como por exemplo o seguinte:

Tarefa: Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x}$.

Resolução: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4} \times \frac{\sin(3x)}{3x} \right) = \frac{3}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{4}$

Visto que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$. Aqui a técnica utilizada passou por multiplicar e dividir por números que nos permitissem utilizar o limite

Para resolver:

7. Determine os seguintes limites:

7.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin(x)}{x}$ 7.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

7.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(5x)}$ 7.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + 1}$

8. Sabendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

mostre que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Para resolver:

9. Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sin x}$

(A) $+\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $-\infty$

10. Para um certo número real k , é contínua a função m definida por:

$$m(x) = \begin{cases} e^{2x} + k, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O valor de k é: (A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 2

notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, que, na verdade, pode ser generalizado para $\lim_{nx \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{nx} = 1$, com uma simples mudança de variável.

> Derivada

Utilizando a definição de derivada, vamos determinar a função derivada de $\sin x$.

Sendo x_0 um ponto qualquer do domínio de $\sin x$:

$$(\sin x_0)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h) - \sin(x_0)}{h} = \sin(x_0) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \times \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0) \quad (2)$$

Em (1) utilizamos o desenvolvimento da fórmula do seno da soma.

Em (2), como já vimos no cálculo de limites $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

Recordar:

Fórmulas da soma ($\sin \alpha$)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

De uma maneira geral se $u = g(x)$, atendendo ao teorema da função composta, vem: $(\sin u)' = u' \cos u$

Tarefa: Determine $(\sin(2x^2 + \pi x))'$.

Resolução: $(\sin(2x^2 + \pi x))' = (2x^2 + \pi x)' \cos(2x^2 + \pi x) = (4x + \pi) \cos(2x^2 + \pi x)$

Para resolver:

11. Determine as expressões das funções derivadas definidas pelas seguintes expressões:

11.1. $f(x) = -2 \sin x + \pi$

11.2. $h(x) = \sin(x^2 + 1)$

11.3. $g(x) = \sin(2x + \pi)$

11.4. $j(x) = \sin^2 x + 1$

12. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \sin x^2$. Sabe-se que a recta tangente ao gráfico de g num ponto tem declive $-2\sqrt{\pi}$.

Quais são as coordenadas desse ponto?

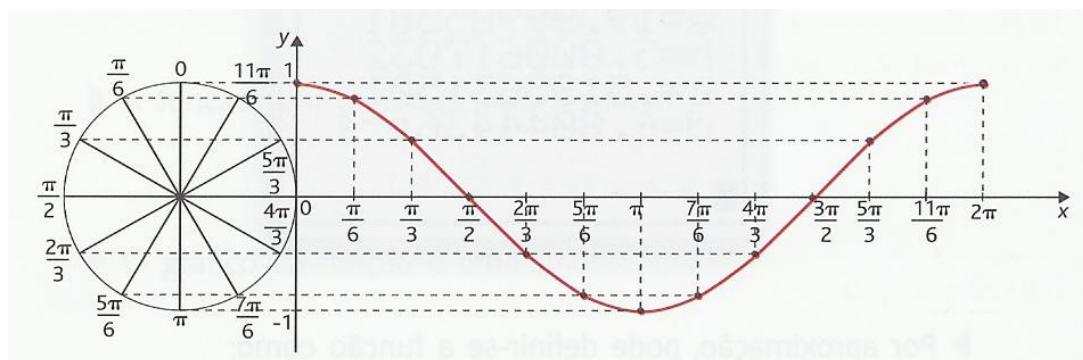
- (A) $(\sqrt{\pi}, 0)$ (B) $(-\pi, 0)$ (C) $(-2\sqrt{\pi}, 0)$ (D) $(\pi, 0)$

Atenção, as notações por vezes não são 100% claras. Repara que: $\sin^2 x = (\sin x)^2$; $\sin x^2 = \sin(x^2)$; $\sin 3x = \sin(3x)$

▪ FUNÇÃO CO-SENO

Seja g uma função real de variável real caracterizada por:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos x$$


Para cada valor de $x \in [0, 2\pi]$, $\cos x$ é a abcissa do ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo com o círculo trigonométrico. Podemos continuar este estudo para ângulos cujas amplitudes sejam maiores ou igual a 2π e para amplitudes negativas.

Assim podemos concluir que para a função co-seno:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D_f' = [-1, 1]$
- É uma função par pois $\cos x = \cos(-x), \forall x \in \mathbb{R}$

(O gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy)

- É uma função periódica pois
- $\cos(2k\pi + x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 1$ obtém-se 2π a que se dá o nome de período mínimo

- A expressão geral dos zeros é: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

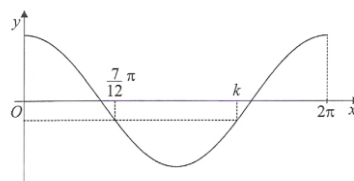
- A função é positiva em $\left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[k \in \mathbb{Z}$

e negativa em $\left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[k \in \mathbb{Z}$

- A função tem máximos relativos para: $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- A função tem mínimos relativos para: $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Quanto à monotonia a função é crescente em $]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[k \in \mathbb{Z}$ e decrecente em $]2k\pi, \pi + 2k\pi[k \in \mathbb{Z}$
- A função não é injectiva mas é contínua em todo o seu domínio
- O gráfico é uma senoide.

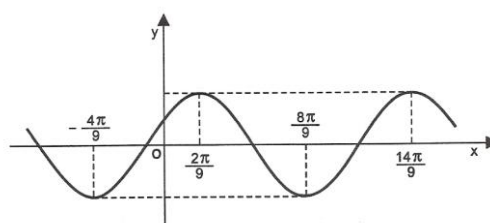
Para resolver: 13. Na figura está a representação gráfica da função f , definida, no intervalo $[0, 2\pi]$, por $f(x) = \cos x$.

Tem-se que $f(k) = f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. Qual é o valor de k ?



- (A) $\frac{11\pi}{12}$ (B) $\frac{14\pi}{12}$ (C) $\frac{17\pi}{12}$ (D) $\frac{19\pi}{12}$

14. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica. Qual o período desta função?



Tarefa: Na figura está representada uma

pirâmide quadrangular. Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta [BC]
- x designa a amplitude do ângulo FGE

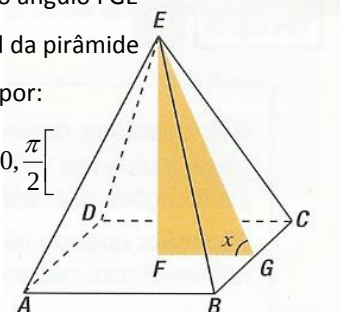
1. Mostre que a área total da pirâmide

é dada, em função de x, por:

$$A(x) = \frac{4\cos x + 4}{\cos x}, x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} A(x)$.

3. Interprete geometricamente o valor obtido.



Resolução: 1. A área total da pirâmide é a soma das áreas dos 4 triângulos das faces laterais (congruentes entre si) com a área do quadrado da base.

$$A_{base} = 2 \times 2 = 4$$

Para resolver: 15. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEG].

Tem-se que:

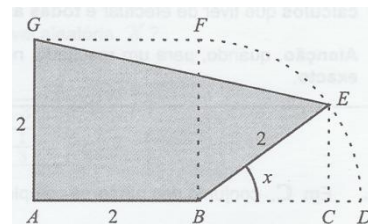
- [ABFG] é um quadrado

de lado 2

- FD é um arco de circunferência

de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento [BD], de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$

- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE e $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$



15.1. Mostre que a área do polígono [ABEG] é dada, em função de x, por: $A(x) = 2(1 + \sin x + \cos x)$

Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio [ACEG]

15.2. Determine $A(0)$ e $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Interprete geometricamente cada um dos valores.

$A_{\text{triângulo}} = \frac{2 \times a}{2}$. A variável a corresponde à altura do triângulo da face lateral que coincide com a hipotenusa do triângulo a

sombreado. Utilizemos as razões trigonométricas para representar a hipotenusa em função de x .

Ora, $FG=1$, logo, $\cos x = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\cos x}$.

Substituindo na fórmula da área do triângulo vem: $A_{\text{triângulo}} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$. Portanto, $A(x) = 4 + 4 \times \frac{1}{\cos x} = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} = \frac{4 \cos \frac{\pi}{2} + 4}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{0^+} = +\infty$.

3. Quando a amplitude do ângulo x aumenta até valores próximos de um ângulo recto, no limite, a figura a sombreado deixa de ser um triângulo rectângulo e a pirâmide deixa de ser um sólido fechado, o que faz com que a área total do triângulo rectângulo e, conseqüentemente, a área total da pirâmide tenda para infinito.

Para resolver:

16. Considere a função g , definida por $g(x) = \cos x$ no intervalo $[4\pi; 6\pi]$. Indique, em relação à função g : extremos, zeros, sinal e intervalos de monotonia.

17. Esboce, no mesmo referencial, os gráficos de $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

17.1. Os zeros da função $y = \sin x$ o que são para a função $y = \cos x$?

17.2. Os zeros da função $y = \cos x$ o que são para a função $y = \sin x$?

18. Considere a função g , definida por $g(x) = \sqrt{3} - 2 \cos(\pi - x)$.

18.1. Simplifique a expressão $g(x)$.

18.2. Determine os zeros da função g .

> Limites

A função $\cos x$ é contínua em $\mathbb{R}$, para qualquer número real a , logo $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$. Como é uma função periódica não existe limite nos ramos infinitos ($x \rightarrow \pm\infty$).

Tarefa: Determine $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x}{\pi - 2x}$.

Observações sobre a resolução:

(1): Porque $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(2): Porque $\sin(-x) = -\sin x$

(3): Mudança de variável $y = x - \frac{\pi}{2}$

(4): Porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Resolução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x}{\pi - 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x}{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{(2)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin y}{y} = 2 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2 \end{aligned} \quad (4)$$

Tarefa: Considere a função g , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \ln(2\pi - x) + 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \sin(2x) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

1. Estude g quanto à continuidade.

2. Determine os zeros de g .

Para resolver:

19. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

19.1 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{4 \cos x}{\pi - 2x}$

19.2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$

19.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

3. Seja $\theta \in [\pi, 2\pi]$ tal que $\cos \theta = \frac{2}{3}$. Determine $g(\theta)$.

Resolução:

1. À excepção do ponto $x = \pi$, em todo o restante intervalo a função g é contínua por resultar de operações com de funções contínuas. Vejamos o comportamento da função no referido ponto. Como a função está definida por ramos, para valores menores que π utilizamos o primeiro ramo e para valores à direita de π o segundo ramo da função g .

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln(2\pi - x) + 1 = \ln(\pi) + 1$ e $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(2x) = \sin(2\pi) = 0$. Como $\ln(\pi) + 1 \neq 0$, não existe limite no ponto estudado.

2. Determinemos os zeros de cada ramo da função.

$$\ln(2\pi - x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(2\pi - x) = -1 \Leftrightarrow 2\pi - x = e^{-1} \Leftrightarrow x = 2\pi - e^{-1} \approx 5,91 (\notin [0, \pi])$$

$$\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Neste caso, } k = 2 \vee k = 3 \vee k = 4.$$

Os zeros da função g são: $x = \pi \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = 2\pi$.

3. Ora, $\cos \theta = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. Portanto $g(\theta) = g\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$. Como $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,84$, fazemos a substituição no primeiro ramo da função. Assim vem: $\ln\left(2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) + 1 \approx 2,69$, ou seja, $g(\theta) = 2,69$ (2c.d.).

20. Considere a função g , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \ln(\pi - x) & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \cos(2x) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

20.1. Estude g quanto à continuidade.

20.2. Determine os zeros de g .

20.3. Seja $\theta \in [\pi, 2\pi]$ tal que $\cos \theta = \frac{2}{3}$.

Determine o valor exacto da expressão $g(\theta) + \sin \theta$.

21. Para cada certo valor de k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função g , definida por ($\ln$ designa logaritmo de base e)

$$g(x) = \begin{cases} k + \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

> Derivada

Analogamente à determinação da derivada da função $\sin x$ vamos fazê-lo para

determinar a função derivada de $\cos x$. Para este caso vamos definir $\cos x$

a partir do $\sin x$, recorrendo à relação entre as funções dos dois ângulos

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Sendo x_0 um ponto qualquer do domínio de $\cos x$,

$$(\cos x_0)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)\right)' \stackrel{(1)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)' \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \times (-1) \stackrel{(2)}{=} -\sin(x_0)$$

Em (1) utilizámos o desenvolvimento da fórmula da derivada da função composta.

Para resolver:

22. Determine as expressões das funções derivadas definidas pelas seguintes expressões:

22.1. $y = \frac{\cos x}{2}$

22.2. $y = x - \frac{1}{2} \cos x$

22.3. $y = x^2 \cos x$

22.4. $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

22.5. $y = 1 + \frac{\cos x}{2}$

22.6. $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

22.7. $y = xe^{\cos x}$

Em (2), pela relação entre ângulos complementares, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = \sin x_0$.

De uma maneira geral se $u = g(x)$, atendendo ao teorema da função composta, vem: $(\cos u)' = -u' \sin u$

Tarefa: Determine $\left(\frac{1}{\cos(2x)}\right)'$.

Resolução:

$$\left(\frac{1}{\cos(2x)}\right)' = \frac{-(\cos(2x))'}{\cos^2(2x)} = \frac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$$

23. Considere a função h , de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por $h(x) = x + \cos x$

23.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $h'(0)$.

23.2. Estude h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

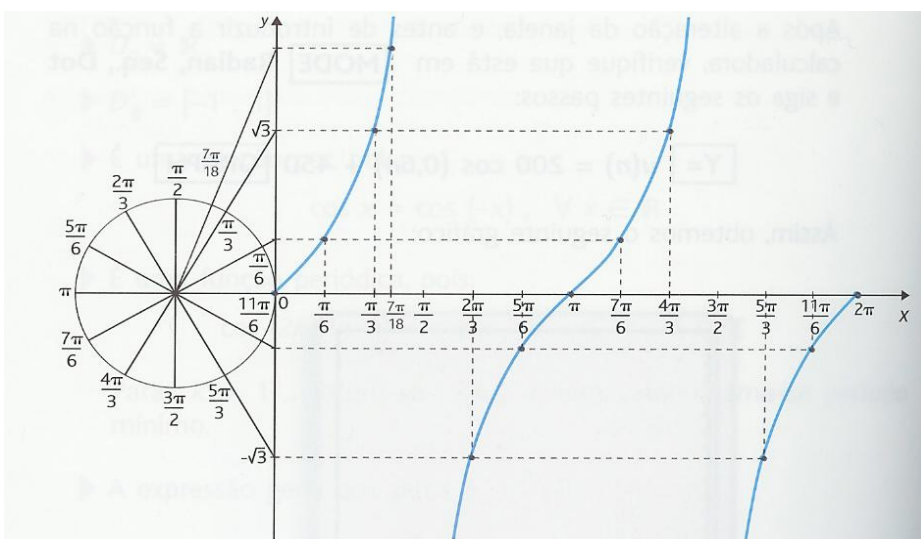
23.3. Determine os valores x , pertencentes ao intervalo $[-\pi, \pi]$, tais que $h(x) = x + \sin x$.

▪ FUNÇÃO TANGENTE

Seja h com a seguinte caracterização:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan x$$



Constata-se que o gráfico não é contínuo, tendo várias interrupções devido à tangente ser definida pelo quociente entre o valor da ordenada e o valor da abscissa do ponto onde o lado extremidade intersecta o eixo das tangentes. Este quociente só tem significado se a abscissa for diferente de zero, ou seja, por exemplo, no intervalo em estudo $[0, 2\pi]$, a amplitude x do ângulo tem que verificar a condição $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$.

Observando o gráfico pode concluir-se:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $D_f' = \mathbb{R}$
- É uma função ímpar pois $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in D_f$

O gráfico é simétrico em relação à origem

- É uma função periódica pois $\tan(k\pi + x) = \tan x, \forall x \in D_f, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 1$ obtém-se π a que se dá o nome de período mínimo

- A expressão geral dos zeros é: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para resolver:

24. Considere a função f , real de variável real, definida por:
 $f(x) = 1 - 3\tan^2(3x)$

24.1. Determine: o domínio e os zeros de f .

24.2. Mostre que: $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$

- A função é positiva em $\left] 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[\cup \left] \pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$

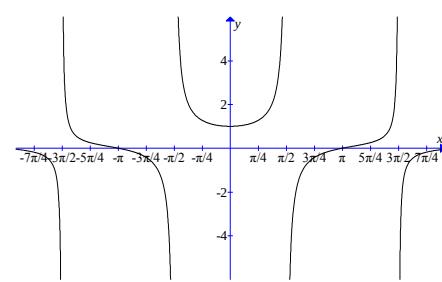
e negativa em $\left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \right[\quad k \in \mathbb{Z}$

- A função não tem máximos relativos nem mínimos relativos
- A função é crescente em qualquer intervalo do tipo:

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad , k \in \mathbb{Z}$$

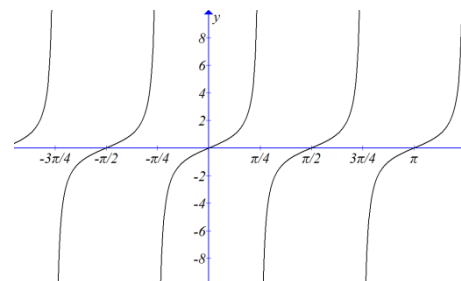
- A função não é injectiva nem contínua
- A função admite assíntotas verticais de equação $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- O gráfico da função é uma tangente.

25. O gráfico seguinte representa a função $h(x) = \frac{\tan x}{x}$



Estude a função nos aspectos que lhe pareçam mais característicos e confirme analiticamente os resultados que possam levantar algumas dúvidas.

Em rigor, determinar analiticamente a equação das assíntotas verticais exige estudar a vizinhança dos pontos em que a função não está definida. Consideremos, a título de exemplo, a função definida pela expressão $y = \tan(2x + \pi)$ representada graficamente na imagem ao lado. Determinar o domínio significa determinar os valores de x tais que $2x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Ou seja: $2x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Assim $D_y = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Verificando os limites laterais no ponto $-\frac{\pi}{4}$: $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^-} \tan(2x + \pi) = \tan\left(\frac{3\pi}{2}^-\right) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \tan(2x + \pi) = \tan\left(\frac{3\pi}{2}^+\right) = \infty$.

Sendo ambos os limites infinitos concluímos que $x = -\frac{\pi}{4}$ é assíntota vertical. Estudo análogo poderia ser feito para outro(s) pontos não definidos.

Repare-se que, neste caso, as assíntotas não distam π unidades entre elas, mas sim $\frac{\pi}{2}$.

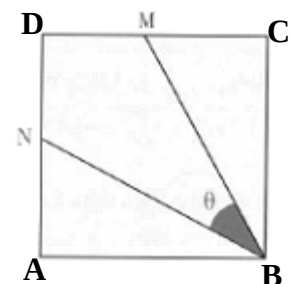
Tarefa: O quadrado da figura onde M e N são pontos médios de dois lados. Admitindo que o lado do quadrado mede 5 cm, calcule com aproximação às unidades do grau, o valor de θ .

Resolução:

Seja $\alpha = \widehat{MBC}$. Uma vez que o triângulo [BMC] é rectângulo, podemos determinar α recorrendo à sua tangente.

$$\tan \alpha = \frac{2,5}{5} \Leftrightarrow \tan \alpha = 0,5 \text{ logo } \alpha = \tan^{-1}(0,5).$$

Uma vez que $\widehat{NBA} = \widehat{MBC}$, $\theta = 90^\circ - 2 \times \tan^{-1}(0,5)$ e portanto, aproximando às unidades, $\theta \approx 37^\circ$.



> Limites

Para $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, isto é, em qualquer ponto do domínio,

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

Para $b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\lim_{x \rightarrow b^-} \tan x = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow b^+} \tan x = -\infty$.

Como é uma função periódica não existe limite nos ramos infinitos ($x \rightarrow \pm\infty$).

Tarefa: Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x} - \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right) = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right) \quad (1) \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{x} \right) \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2}} \\ &= 2 - 1 \times \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 2 - 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Em (1) utilizámos a igualdade $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

Em (2) utilizámos o limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Para resolver:

26. Indique o limite da sucessão:

$$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$$

Para resolver: **27.** Calcule, se existirem, cada um dos limites:

27.1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$; **27.2** $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x$;

27.3 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$; **27.4** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$;

27.4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$; **27.5** $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}$;

27.6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$; **27.7** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{x}$;

27.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan x}$; **27.9** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\sin x}$;

27.10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi - x)}{\pi - x}$; **27.11** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{-2x}$;

27.12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$; **27.13** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)$;

27.14 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t}$; **27.15** $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^t}{\sin t}$;

27.16 $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\tan b + b}{\sin b}$; **27.17** $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t} - 1}{\sin(2t)}$;

27.18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(x+1)}$; **27.19** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$;

27.20 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$; **27.21** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \tan \frac{\pi}{x}\right)$.

> Derivada

Para determinarmos a função derivada de $\tan x$, consideramos a igualdade

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Sendo x_0 um ponto qualquer do domínio de $\tan x$

$$(\tan x_0)' = \frac{(\sin x_0)' \cos x_0 - \sin x_0 (\cos x_0)'}{\cos^2 x_0} = \frac{\cos x_0 \cdot \cos x_0 - \sin x_0 (-\sin x_0)}{\cos^2 x_0} = \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0} \quad (2)$$

Em (1) utilizámos o desenvolvimento da regra da derivação do quociente.

Em (2), pela fórmula fundamental da trigonometria.

Recordar:

Fórmula fundamental da Trigonometria

(FFT) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

De uma maneira geral se $u = g(x)$, atendendo ao teorema da função composta, vem: $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Tarefa: Determine $(\sqrt{\tan x})'$.

Resolução:

$$(\sqrt{\tan x})' = \frac{(\tan x)'}{2\sqrt{\tan x}} = \frac{1}{2\cos^2 x \sqrt{\tan x}}$$

Regras de Derivação das funções trigonométricas:

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Para resolver:

28. Determine a expressão da função derivada das funções definidas pelas expressões:

28.1. $x + \tan(3x)$

28.2. $\tan^2 x$

28.3. $\tan x^2$

28.4. $x \tan^2 x$

28.5. $\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

28.6. $\tan(x^2 + 1)$

29. Seja h definida por $h(x) = \frac{1}{\tan x}$ no intervalo $]0, \pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$

29.1. Mostre que: $h'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

29.2. Estude a monotonia da função no intervalo em que está definida.

29.3. Estuda a função h quanto ao sentido da concavidade e pontos de inflexão.

▪ FAMÍLIAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As transformações de funções trigonométricas já foram abordadas anteriormente, contudo, agora serão aprofundadas, pela importância que alguns desses parâmetros assumem no estudo destas famílias de funções.

Recordamos, no quadro seguinte, as transformações simples de funções.

$y = f(x) + a$		O gráfico obtém-se por uma deslocação na vertical de a unidades para : • cima se $a > 0$ • baixo se $a < 0$
$y = f(x - a)$		O gráfico obtém-se por uma deslocação na horizontal de a unidades para : • a direita se $a > 0$ • a esquerda se $a < 0$
$y = a f(x)$		• se $a > 1$, o gráfico obtém-se "esticando-o" na vertical segundo o factor a ; • se $0 < a < 1$, o gráfico obtém-se "encolhendo-o" na vertical segundo o factor a .
$y = f(ax)$		• se $a > 1$, o gráfico obtém-se "encolhendo-o" na horizontal segundo o factor $\frac{1}{a}$; • se $0 < a < 1$, o gráfico obtém-se "esticando-o" na horizontal segundo o factor $\frac{1}{a}$.
$y = -f(x)$		O gráfico obtém-se por uma simetria em relação ao eixo dos xx .
$y = f(-x)$		O gráfico obtém-se por uma simetria em relação ao eixo dos yy .

O conhecimento de transformações permite-nos determinar algumas características das funções trigonométricas. Nomeadamente o contradomínio das funções seno e co-seno pode ser determinado por enquadramento.

Tarefa: Seja a função f definida por: $f(x) = 2 - 4\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Determine:

1. O contradomínio de f .
2. Os valores de x para os quais a função toma o valor máximo no intervalo $[-\pi; 2\pi]$.

Resolução:

1. A função $\cos(x)$ é uma função limitada entre -1 e 1 . Assim, vem:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times (-1) \leq 4 \cos(x) \leq 4 \times 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - (-4) \geq 2 - 4 \cos(x) \geq 2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \geq 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq -2$$

(Multiplicamos todos os termos por 4)

(Adicionando o simétrico da expressão anterior a 2, trocamos os sinais da desigualdade)

(O argumento da função não influi no contradomínio pois corresponde a deslocação horizontal do gráfico da função)

O contradomínio da função é o intervalo $[-2; 6]$

2. O valor máximo da função é 6. Para determinar os valores de x em que tal acontece, igualamos a expressão a 6 e resolvemos a equação trigonométrica:

$$2 - 4\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 6 \Leftrightarrow -4\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} = \pi + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{2} = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[-\pi; 2\pi]$, a equação admite as soluções: $x = -\frac{\pi}{2} (k=0); x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2} (k=1)$

Para resolver:

30. Determine o domínio, contradomínio e zeros das seguintes expressões analíticas:

30.1. $f(x) = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

30.2. $h(x) = 2 - \tan x$

30.3. $g(x) = 3 - \cos(5x)$

30.4. $j(x) = \frac{1}{2 + \sin x}$

> Amplitude e período de funções trigonométricas

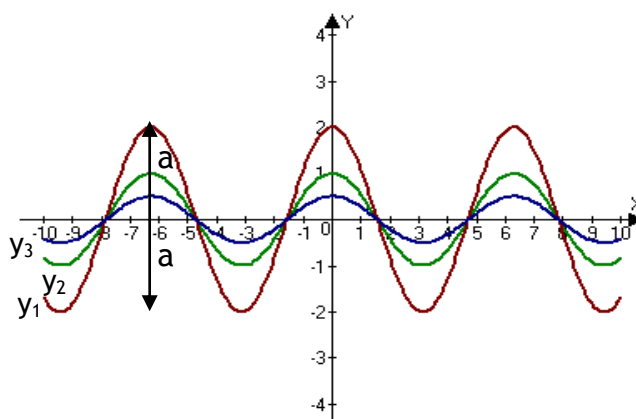
Observemos os gráficos das funções:

$$y_1 = 2 \cos x$$

$$y_2 = \cos x$$

$$y_3 = 0,5 \cos x$$

Sendo $y = a \cos x$, ao número $|a|$ chama-se amplitude da função.



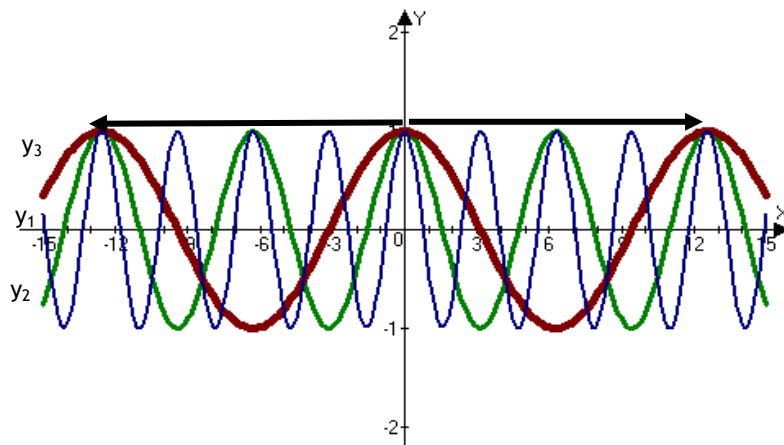
Quanto maior for $|a|$ mais o gráfico da função na direcção do eixo dos

Relativamente a $y_2 = \cos x$, o gráfico da função $y_1 = 2 \cos x$ estica verticalmente para o

Relativamente a $y_2 = \cos x$, o gráfico da função $y_3 = 0,5 \cos x$ encolhe verticalmente para

Observemos os gráficos das funções:

$$y_1 = \cos(2x) \quad y_2 = \cos x \quad y_3 = \cos(0,5x)$$



Seja $y = \cos(kx)$, ao número k chama-se período da função.

As funções completam um período quando $0 \leq kx \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2\pi}{k}$

Por exemplo o período da função $y_1 = \cos(2x)$ é dado por: $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Por exemplo o período da função $y_3 = \cos(0,5x)$ é dado por: $P = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$

Quanto maior for o valor de k mais o gráfico da função na direcção do eixo dos

Relativamente a $y_2 = \cos x$, o gráfico da função $y_1 = \cos(2x)$ para

Relativamente a $y_2 = \cos x$, o gráfico da função $y_3 = \cos(0,5x)$ para

Assim temos:

- Se $y = a \cos[k(x-b)] + c$ então a amplitude é $|a|$ e o período é $\frac{2\pi}{|k|}$.
- Se $y = a \sin[k(x-b)] + c$ então a amplitude é $|a|$ e o período é $\frac{2\pi}{|k|}$.
- Se $y = a \tan[k(x-b)] + c$ então a amplitude é $|a|$ e o período é $\frac{\pi}{|k|}$.

Desafio:

Represente graficamente as funções definidas por:

$$y_1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); y_4 = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

1. Que relação encontra entre os gráficos obtidos e o gráfico da função

$$y = \sin(x)$$

2. Como se pode obter o gráfico de uma função do tipo $y = \sin(x+k)$ a partir do gráfico de uma função $y = \sin(x)$

Exploração do desafio em MA 9

Tarefa: Seja a função f definida por: $f(x) = 2 - 4 \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

Determina a amplitude e o período da função em causa.

Resolução:

Se $y = a \cos[k(x-b)] + c$ então a amplitude é $|a|$ e o período é $\frac{2\pi}{|k|}$.

Na função f $a = -4 \wedge k = 3$, logo a amplitude é -4 e o período é $\frac{2\pi}{3}$.

Para resolver: 31. Considere a função:

$$f(x) = 4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$$

Estude a função no que diz respeito a:
(i) Domínio; (ii) Contradomínio (iii) Período e amplitude; (iv) Intersecção com o eixo Oy; (v) Zeros; (vi) Extremos e monotonia (vii) Sinal; (viii) Concavidades e pontos de inflexão; (ix) Representação gráfica

Sugestão: Pode começar PR31 por expressões mais simples como:

$$y_1 = 1 + \sin x, y_2 = 2 + \sin x, y_3 = -\frac{1}{2} + \sin x$$

$$y_4 = -\tan x, y_5 = 1 + \tan x, y_6 = 3 \tan x,$$

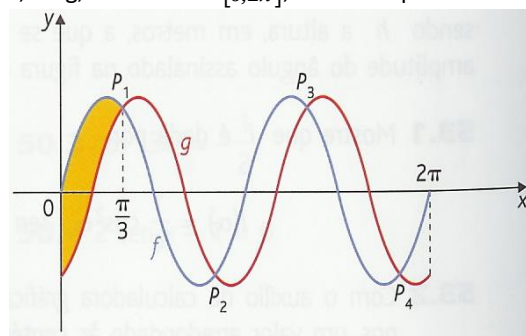
32. Na figura encontram-se as representações gráficas de duas funções, f e g , de domínio $[0, 2\pi]$, definidas por:

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$g(x) = \cos\left(2x - \frac{5}{6}\pi\right)$$

onde P_1 , P_2 , P_3 e P_4 são pontos de intersecção dos gráficos de

f e de g . A abscissa de P_1 é $\frac{\pi}{3}$.



32.1. Determine as coordenadas de P_2 .

32.2. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

As funções trigonométricas modelam diferentes fenómenos. Uma das áreas em que poderemos apreciar essa aplicação é na Medicina. Para modelar a pressão arterial fazem-se medições com aparelhos adequados; a pressão arterial é a pressão exercida pelo sangue contra a superfície interna das artérias. Atinge o valor máximo quando o coração ejecta o seu conteúdo na aorta e atinge o valor mínimo quando o coração acabou de bombear para a aorta todo o sangue que continha. A pressão arterial é medida em milímetros de mercúrio, mmHg, unidade surgida quando Evangelista Torricelli inventou o barómetro de mercúrio, em 1643. Se dissermos que a pressão arterial de determinada pessoa é de 120/80, isso significa que o valor máximo é de 120mmHg e o valor mínimo é de 80mmHg. O melhor modelo para tal situação é dado por uma função trigonométrica. Suponhamos que um ciclo completo – período, ou seja, o intervalo de tempo de um batimento cardíaco, é de aproximadamente 0,75 segundos. Neste caso, um bom modelo será a função

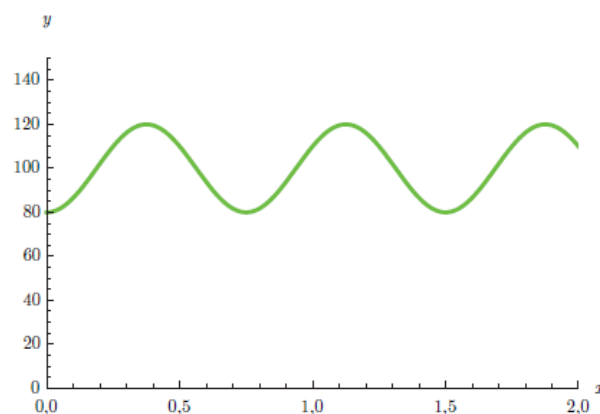
$$f(x) = -20 \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right) + 100$$

O gráfico da função pode representar-se assim:

Um outro fenómeno modelado por funções trigonométricas é a alturas marés ao longo de um período de tempo.

Também a duração do dia e da noite são fenómenos periódicos que podem ser modelados por estas funções.

Para aprofundar conhecimento sobre estes dois tópicos o MA3 e MA4 poderão ser úteis.

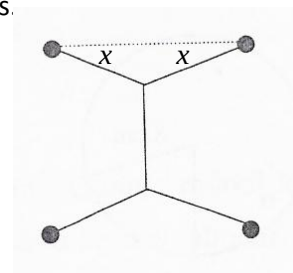


Modelação matemática com funções trigonométricas: MA10 e MA11.

O estudo de funções trigonométricas e as competências já desenvolvidas ao nível do cálculo diferencial permitem-nos também resolver problemas que poderão ter aplicação à realidade. “Ilustrando cabos telefónicos” é uma entre muitas outras abordagens que poderiam ser aqui apresentadas.

Tarefa: Quatro comunidades situam-se nos quatro vértices de um quadrado com 1km de lado.

Ao fazer-se uma instalação de cabos telefónicos ligando as quatro aldeias, a empresa de telecomunicações chegou à conclusão que a solução mais económica é do tipo da que se encontra representada na figura ao lado.



Determine o ângulo x de modo que a medida do comprimento total do cabo seja a menor possível.

Resolução:

Para determinarmos o ângulo assinalado temos que determinar o mínimo de uma função $C(x)$, que relacione a medida do comprimento do cabo para cada ângulo x .

O domínio desta função é o intervalo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, uma vez que o ângulo x é agudo. Para determinarmos a expressão analítica observemos a figura para expressarmos a medida do comprimento de cada um dos troços do cabo de telefone em função da amplitude do ângulo x .

$$C(x) = 4a + (1 - 2b)$$

$$\cos x = \frac{\frac{1}{2}}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2 \cos x} \text{ e } \tan x = \frac{b}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \tan x$$

$$\text{Substituindo } C(x) = \frac{4}{2 \cos x} + 1 - \tan x$$

$$\text{Simplificando: } C(x) = 1 + \frac{2}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \frac{2 - \sin x}{\cos x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Ao lado está uma representação da gráfica da função no intervalo em causa.

Para determinarmos analiticamente o mínimo, vamos estudar os zeros e o sinal da derivada.

- Cálculo da derivada:

$$C'(x) = \frac{(2 - \sin x) \times \cos x - (2 - \sin x) \times (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{-\cos x \times \cos x - (2 - \sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x + 2 \sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-1 + 2 \sin x}{\cos^2 x}$$

- Zeros da derivada:

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 + 2 \sin x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow (\cos(x) \neq 0 \text{ em todo o seu domínio})$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

- Estudo do sinal da derivada e da monotonia e extremos da função:

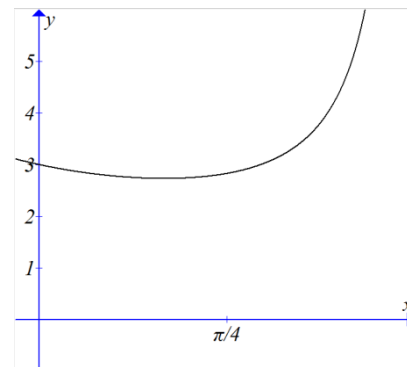
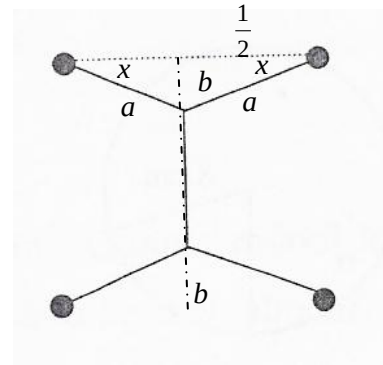
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$C'(x) = \frac{-1 + 2 \sin x}{\cos^2 x}$	-1	-	0	+	S.S.
$C(x)$		$\rightarrow$	m	$\rightarrow$	

Concluimos que o comprimento do cabo de telefone é mínimo quando $x = \frac{\pi}{6}$.

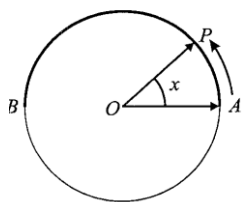
Nesse caso o comprimento é:

$$C\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{2 - \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = 1 + \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 + \sqrt{3} \approx 2,732.$$

Ou seja, 3,732km.



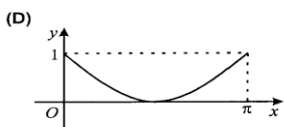
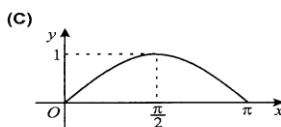
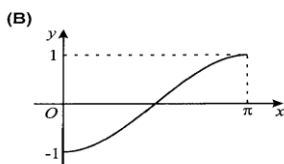
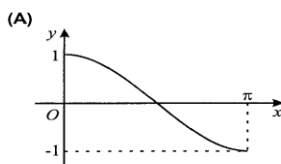
Para resolver:



33. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 1. Os pontos A e B são extremos de um diâmetro da circunferência.

Considere que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre o arco AB, terminando o seu percurso em B. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP.

Seja f a função que, a cada valor de $x \in [0, \pi]$, faz corresponder o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f ?



35. Na figura está representado um trapézio $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.

Considere que um ponto P se desloca sobre o lado $[AB]$. Para cada posição de P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA.

Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento $[PD]$ divide trapézio em duas figuras com a mesma área.

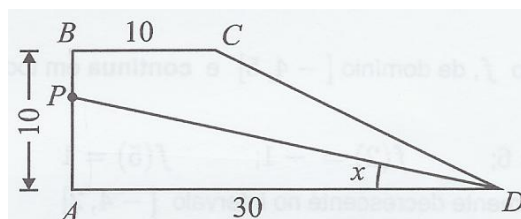
Qual das equações seguintes traduz este problema?

(A) $\frac{30^2 \sin x}{2} = 100$

(B) $\frac{30^2 \tan x}{2} = 100$

(C) $\frac{30 \times 10 \sin x}{4} = 150$

(D) $\frac{30 \times 10 \tan x}{4} = 150$



36. Considere a função f definida por $f(x) = \sin(x^2)$.

Indique qual das expressões seguintes define f' ,

função derivada de f .

(A) $2x \cdot \cos(x^2)$ (B) $2x \cdot \cos(2x)$ (C) $\cos(x^2)$ (D) $-\cos(x^2)$

38. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 1.

O ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$, e o ponto F desloca-se sobre

o lado $[AD]$, de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$.

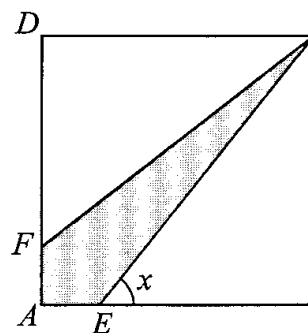
Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC $\left(x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$

38.1. Mostre que o perímetro do quadrilátero $[CEAF]$ é dado, em função de x , por :

$$f(x) = 2 - \frac{2}{\tan x} + \frac{2}{\sin x}$$

38.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

38.3. Mostre que $f'(x) = \frac{2 - 2 \cos x}{\sin^2 x}$ e estude f quanto à monotonia.



34. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax+1} \sin\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x > 0 \\ \ln(e+x)^b & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determine o valor de a e b de modo que f seja derivável em $x=0$

(A) $a = b = 0$

(B) $a = b = \frac{1}{e}$

(C) $a = \frac{1}{e}$ e $b = 0$

(D) $a = \frac{1}{e}$ e $b = e$

37. De uma função f sabe-se que $f(x) - f'(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Qual das seguintes pode ser a expressão analítica de f ?

(A) $\sin x$

(B) x

(C) e^x

(D) $\ln x$

39. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x + \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

39.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

39.2. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 2.

39.3. Prove que no intervalo $]1, +\infty[$, a função f não tem zeros.

40. Um ponto C desloca-se sobre uma circunferência de diâmetro $[AB]$

e centro O . Considere que o comprimento do segmento $[AC]$, em função

da amplitude x do ângulo AOC , é dado por $d(x) = 2 \sin \frac{\pi}{2}$, $x \in [0, \pi]$.

40.1. Indique o valor de x para o qual $d(x) = \overline{AB}$. Justifique que a circunferência tem raio 1.

40.2. Justifique que, quando $x \in]0, \pi[$, o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C .

40.3. Mostre que $\overline{BC} = 2 \cos \frac{x}{2}$.

40.4. Verifique que a área do triângulo $[ABC]$ é $\sin x$.

40.5. Mostre que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é máximo quando a sua área for máxima.

40.6. Considere a função f , de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $f(x) = 2x - \tan x$.

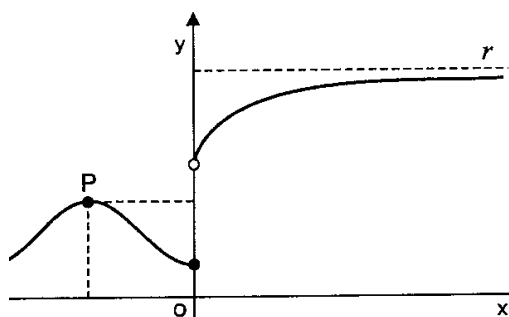
40.7. Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

41. Considere a função f , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{7x+4}{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Na figura estão representados:

- Parte do gráfico de f
- A recta r , assíntota do gráfico de f
- O ponto P , cuja abscissa é o maior dos maximizantes da restrição de f a $\mathbb{R}_0^-$



41.1. Determine as coordenadas do ponto P .

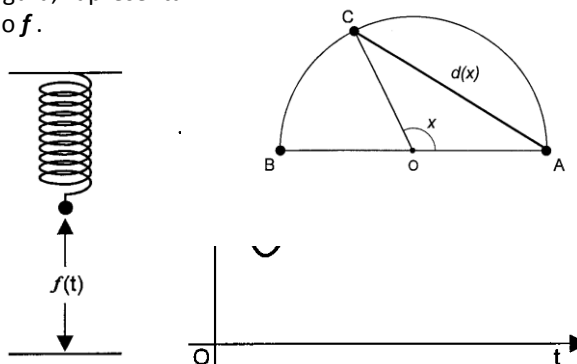
41.2. Determine o contradomínio da função f .

42. Uma bola suspensa de uma mola oscila verticalmente.

Admita que a distância (em cm) da bola ao solo, t segundos após um certo instante inicial, é dada por

$$f(t) = 10 + 5e^{-0,1t} \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \text{ com } t \in [0, +\infty[$$

Na figura, apresenta função f .



42.1. Indique o valor de $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Interprete esse valor em termos do movimento da bola.

42.2. Mostre que existe pelo menos um instante, entre o terceiro e o quarto segundos, em que a bola se encontra a sete centímetros do solo.

42.3. Resolva a equação $f(t) = 10$. A partir do conjunto solução obtido, indique quantas vezes, nos primeiros quinze segundos, a bola passa a dez centímetros do solo. Justifique a sua resposta.

NÚMEROS COMPLEXOS

EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO. O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Consideremos as equações:

I: $x^2 - 2x = 0$ II: $x^2 - 5 = 0$ III: $4x^2 - 1 = 0$ IV: $x^2 + 1 = 0$

Qual o número de soluções de cada uma das equações dadas?

Reparemos que:

$x^2 - 2x = 0$	$x^2 - 5 = 0$	$4x^2 - 1 = 0$	$x^2 + 1 = 0$
$x^2 - 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$	$x^2 - 5 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = 5$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$	$4x^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$	$x^2 + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = -1$ $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1}$
N.º de soluções	N.º de soluções	N.º de soluções	N.º de soluções
Em $\mathbb{N}$: 1 Em $\mathbb{Z}$: 2 Em $\mathbb{Q}$: 2 Em $\mathbb{R}$: 2	Em $\mathbb{N}$: 0 Em $\mathbb{Z}$: 0 Em $\mathbb{Q}$: 0 Em $\mathbb{R}$: 2	Em $\mathbb{N}$: 0 Em $\mathbb{Z}$: 0 Em $\mathbb{Q}$: 2 Em $\mathbb{R}$: 2	Em $\mathbb{N}$: 0 Em $\mathbb{Z}$: 0 Em $\mathbb{Q}$: 0 Em $\mathbb{R}$: 0

O número de soluções depende do conjunto a que x pertence.

Pegando novamente na equação IV: $x^2 = -1$, temos a seguinte questão:

Qual o número que ao quadrado é -1?

Para que esta questão tivesse resposta foi necessário criar novos números: os números imaginários.

Definiu-se um novo número, i , que verifica $i^2 = -1$

i : unidade imaginária, em que $i^2 = -1$.
 $\sqrt{-1} = i$ e se $A > 0$, então $\sqrt{-A} = i\sqrt{A}$.

A equação IV: $x^2 = -1$, tem agora duas soluções: $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, ou seja, i e $-i$.

A partir deste conhecimento, pode afirmar-se que todas as equações do 2º grau são possíveis.

Exemplo: $x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{-1} \Leftrightarrow x = -1 + i \vee x = -1 - i$

As soluções desta equação são números complexos.

O conjunto dos números complexos, que se representa por $\mathbb{C}$, aparece como uma ampliação do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, acrescentando a parte imaginária.

Chama-se número complexo a toda a representação da forma:
 $a + bi$ com a e $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$

Para resolver:

42. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

42.1. $x^2 + 9 = 0$

42.2. $x^3 = -8x$

42.3. $x^2 - 2x + 2 = 0$

42.4. $x^2 - 6x = -11$

Referência histórica:



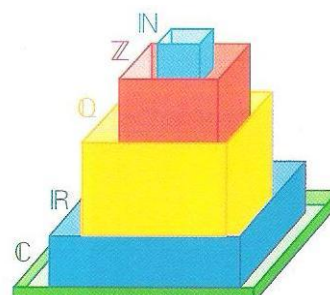
Cardano



Euler

Cardano (1501 – 1576) foi o matemático que pela primeira vez se referiu aos números complexos, verificando que as raízes quadradas de números negativos, embora aparentemente “sem significado”, permitiam prosseguir cálculos para a determinação de valores reais. Mas foi muito mais tarde com **Leonhard Euler** (1707-1783), que foi introduzida a notação i , a chamada unidade imaginária, para representar $\sqrt{-1}$.

Números Complexos		
reais		não reais
racionais	irracionais	
3 0	$\sqrt{3}$ π	$\frac{1}{2}i$ $-i$
-0,2 $\frac{1}{2}$	$\sqrt[3]{5}$ e	$-3 + 5i$
-5 50,67		$\frac{1}{3} - i\sqrt{3}$



FORMA ALGÉBRICA E REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS

Os elementos do conjunto $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, são da forma $a+bi$ com a e $b \in \mathbb{R}$ (forma algébrica).

Em relação ao número $z = a+bi$ podemos considerar duas partes:

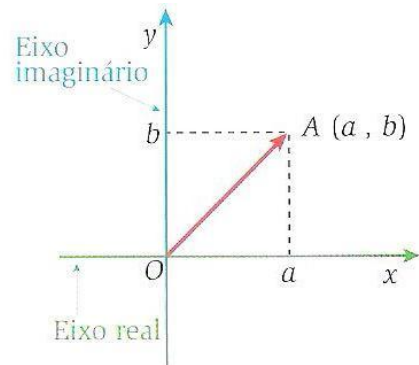
- a é a parte real de z e escreve-se $\text{Re}(z) = a$;
- b é o coeficiente da parte imaginária de z e escreve-se $\text{Im}(z) = b$;
- se $b=0$, o número complexo z é um número real (uma vez que $0 \times i=0$)
- se $a=0$, o número complexo z é um imaginário puro.

$$z = \underbrace{a}_{\text{Parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{Parte imaginária}}$$

Considere-se, no plano, o referencial o.n. Oxy .

- A cada número complexo $z = a+bi$ corresponde o ponto do plano de coordenadas (a, b) ;
- O ponto A chama-se afixo ou imagem geométrica do complexo z ;
- Ao plano chama-se plano de Argand ou plano complexo;
- Ao vector $\overrightarrow{OA}$ chama-se imagem vectorial do número complexo z ;
- A distancia de A à origem chama-se módulo de z , $|z|$, e é dado por:

$$|z| = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



- A representação geométrica de números reais pertence ao eixo real;
- A representação geométrica de números imaginários puros pertence ao eixo imaginário.

Para resolver:

43. Transcreva para o caderno a tabela e complete-a com os valores em falta.

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
$3+5i$	...	...
$-3i$	...	...
7	...	...
...	-2	1
...	0	8
...	$\sqrt{2}$	0
$-\sqrt{3}-i$	...	...

44. Seja z o número complexo representado por: $z = (x-2) + (y+1)i$; $x, y \in \mathbb{R}$. Determine x e y de modo que:

44.1. $\text{Re}(z) = 3$ e $\text{Im}(z) = -1$.

44.2. z seja um número real.

44.3. z seja um imaginário puro.

45. Represente geometricamente:

$$z_1 = 2-4i \quad z_2 = -2i \quad z_3 = -3-2i \quad z_4 = 3$$

46. Determine o módulo de cada um dos seguintes números complexos e represente-os no plano complexo.

46.1. $1-2i$

46.2. $-3+i$

46.3. $3i$

46.4. $-3-3i$

46.5. -5

47. Determine a e $b \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$47.1. 3a + (b-1)i = 6-4i.$$

$$47.2. a^2 - bi = b+4i.$$

$$47.3. a^2 - ai = 4+2i.$$

$$47.4. a + (a-b)i = 3i.$$

> Igualdade de dois números complexos

Dois números complexos são iguais se e só se são iguais as suas partes reais e os coeficientes das suas partes imaginárias.

$$a+bi = c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

Exemplos:

1. Se $a+bi = 2-8i$, então $a = 2$ e $b = -8$.

2. Se $2x+yi = 3-2i$, então:

$$2x=3 \wedge y=-2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \wedge y=-2.$$

Nota:

No conjunto $\mathbb{C}$ não existe uma relação de ordem do tipo da existente em $\mathbb{R}$: "<" (menor que)

- Se fosse $i > 0$, então ter-se-ia $i \times i > i \times 0$, ou seja, $-1 > 0$ (contradição).
- Se fosse $i < 0$, então $-i > 0$ e ter-se-ia $(-i) \times (-i) > (-i) \times 0$, ou seja, $-1 > 0$ (contradição).

> Números complexos conjugados

Dois números complexos designam-se por conjugados quando as partes reais são iguais e os coeficientes das partes imaginárias são simétricos.

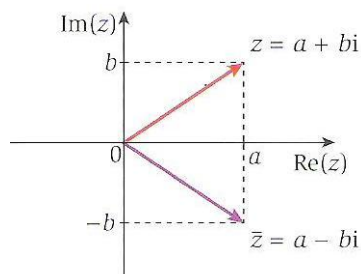
O conjugado de um número complexo z representa-se por $\bar{z}$.

Se $z = a + bi$ então $\bar{z} = a - bi$.

Exemplos:

1. O conjugado de $2 + 3i$ é $2 - 3i$.
2. O conjugado de $-2 - 3i$ é $-2 + 3i$.
3. O conjugado de $2i$ é $-2i$.
4. O conjugado de 2 é 2 .

A imagem geométrica de $\bar{z}$ obtém-se por uma reflexão relativa ao eixo real, da imagem geométrica de z .



▪ OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

As operações de adição e multiplicação de números complexos são extensões das operações com o mesmo nome em $\mathbb{R}$.

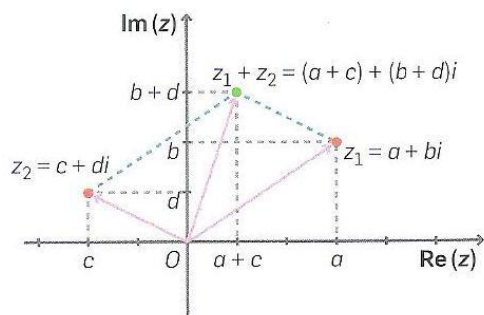
Sejam de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

> Adição e subtração

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

No plano complexo, a adição algébrica de números complexos corresponde à adição de vectores:



Exemplos:

1. $(2 + 3i) + (-1 + i) = 2 + 3i - 1 + i = 1 + 4i$
2. $-3i - (-2 + 5i) = -3i + 2 - 5i = 2 - 8i$

> Números complexos simétricos

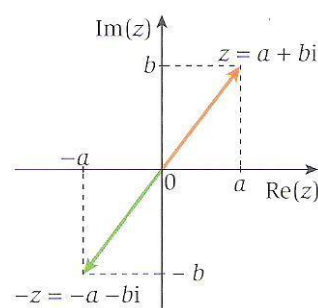
Dois números complexos designam-se por simétricos quando têm partes reais e coeficientes das partes imaginárias simétricos.

O simétrico de $z = a + bi$ é $-z = -a - bi$.

Exemplos:

1. O simétrico de $2 + 3i$ é $-2 - 3i$.
2. O simétrico de $-2 - 3i$ é $2 + 3i$.
3. O simétrico de $2i$ é $-2i$.
4. O simétrico de 2 é -2 .

As imagens geométricas de dois números complexos, simétricos um ao outro, são pontos simétricos em relação à origem do referencial.



Para resolver:

48. Indique o conjugado e o simétrico de:

48.1. $-3 + i$

48.2. $2 - 5i$

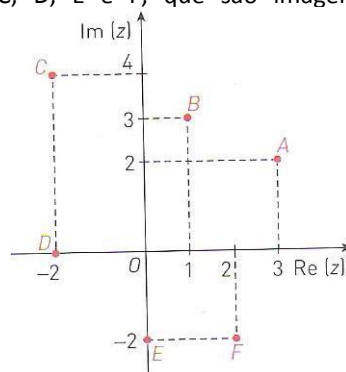
48.3. $10i$

48.4. -15

49. Na figura estão representados, no plano complexo, seis pontos: A, B, C, D, E e F, que são imagens geométricas dos

números complexos:

z_A, z_B, z_C, z_D, z_E e z_F .



49.1. Represente, na forma algébrica, cada um desses números complexos.

49.2. Determine o módulo do número:

a) z_A b) z_C c) z_E

49.3. Represente na forma algébrica e geometricamente o:

- a) simétrico de E
- b) conjugado de C
- c) simétrico de A
- d) conjugado de D

50. Considere os números complexos e calcule: $z_1 = 3 - i$ $z_2 = -1 + 2i$ $z_3 = \frac{i}{2}$

50.1. $z_1 + z_2$

50.2. $\bar{z}_1 - z_2$

50.3. $z_1 + (-z_2) + \bar{z}_3$

50.4. $z_3 - (z_1 + \bar{z}_2)$

> Multiplicação

Multiplicam-se os números complexos como se de números reais de tratasse tendo em conta que $i^2 = -1$.

Exemplo:

$$(2+3i) \times (-4+i) = 2 \times (-4) + 2 \times i + 3i \times (-4) + 3i \times i = -8 + 2i - 12i - 3 = -11 - 10i$$

No caso geral:

$$z_1 \times z_2 = (a+bi) \times (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

> Divisão

Para dividir dois números complexos multiplicam-se ambos os termos da fracção pelo conjugado do denominador. O problema reduz-se, assim, à divisão de um número complexo por um número real.

Exemplo:

$$\frac{2+3i}{8-5i} = \frac{(2+3i)(8+5i)}{(8-5i)(8+5i)} = \frac{16+10i+24i-15}{64-(5i)^2} = \frac{1+43i}{89} = \frac{1}{89} + \frac{34}{89}i$$

No caso geral:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

> Potenciação

As propriedades estabelecidas para as potências de números reais conservam-se em $\mathbb{C}$.

Vamos começar por calcular potências de base i e expoente natural, com as regras habituais da potenciação:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 & i^4 &= i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^1 &= i & i^5 &= i^4 \times i = i \\ i^2 &= -1 & i^6 &= i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1 \\ i^3 &= i^2 \times i = -1 \times i = -i & i^7 &= i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i \end{aligned}$$

Notemos que as potências de base i e expoente natural só tomam os valores: $1, i, -1, -i$

A forma mais simples de encontrarmos uma potência de i , de expoente natural, é usar o conhecimento de:

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$$

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$
$i^4 = 1$	$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$
$i^8 = 1$	$i^9 = i$	$i^{10} = -1$	$i^{11} = -i$
...	...	...	...
$i^{4n} = 1$	$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$

$$i^n = i^r, \text{ sendo } r \text{ o resto da divisão inteira de } n \text{ por } 4 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Para resolver:

51. Determine $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que:

51.1. $(x+2i) + yi = 3$

51.2. $(x^2 - i) - (3 + yi) = 1 + 2i$

51.3. $\overline{(1-xi)} + 2i = y - 3xi + 1$

52. Considere os números complexos:

$$z = -2 + i, \quad w = 3i, \quad t = 1 - 2i$$

Represente na forma algébrica o resultado de:

52.1. $z \times (w+t)$ **52.2.** $t \times z - w$ **52.3.** $z^2 + wt$

53. Considere os números complexos:

$$z_1 = -1 + 3i, \quad z_2 = -2 - i, \quad z_3 = 1 + 2i$$

Represente na forma algébrica o resultado de:

53.1. $z_1 \times z_2$ **53.2.** $z_1 \times \bar{z}_2$ **53.3.** $iz_1 \times z_3 - z_2$

53.4. $z_2 \times \overline{(z_1 + z_3)}$ **53.5.** $\frac{z_2}{z_1}$ **53.6.** $\frac{1}{z_2}$

53.7. $\frac{z_1 + 1}{\bar{z}_2}$ **53.8.** $\frac{z_1 + z_3}{\bar{z}_3 + z_2}$ **53.9.** $\frac{i}{z_3} + \frac{z_3}{i}$

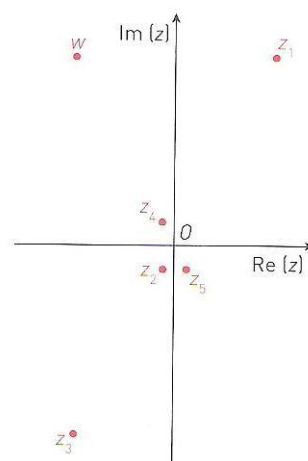
54. Seja $w = \sqrt{3} - i$. Represente na forma algébrica:

54.1. o inverso de w .

54.2. o simétrico do inverso do conjugado de w .

55. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de seis números complexos:

w, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 .



Qual é o número complexo que pode ser igual a $\frac{1}{w}$?

56. Calcule e represente na forma algébrica:

56.1. i^{39} **56.2.** $i^{37} + i^{999} - 2i^{25}$

56.3. $i^{85} + i^{-78}$ **56.4.** $2i^3$

56.5. $(2i)^3 + (1+i)^2$ **56.6.** $(1+2i)^3$

56.7. i^{42} **56.8.** $i^{11}(i^5 + 3i^{74})$

56.9. $i^{4n-2} + \frac{1}{7}, n \in \mathbb{N}$

57. Mostre que i é solução da equação $\frac{1}{z^{15}} = i$.

58. Em cada caso, determine o menor número natural k , tal que:

58.1. $i^{5+k} + i^7 = 0$

58.2. $i^{3k+2} = 1$

58.3. $i^{3k+2} = -1$

59. Mostre que $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{190} = 1$.

Para obter as potências de expoente natural de um número complexo $z = a + bi$ qualquer podemos aplicar a fórmula do desenvolvimento do Binómio de Newton.

$$(a + bi)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p a^{n-p} (bi)^p$$

Tarefas:

1. Calcule: $i^{76} - i^{82} - i^{-23}$

2. Recorrendo à fórmula do desenvolvimento do Binómio de Newton simplifique $(2 - i)^5$.

Resolução:

1. $i^{76} - i^{82} - i^{-23} = i^0 - i^2 - \frac{1}{i^{23}} = 1 - (-1) - \frac{1}{i^3} = 2 - \frac{1}{-i} = 2 - \frac{1 \times i}{-i \times i} = 2 - i$

2. $(2 - i)^5 = {}^5C_0 2^5 (-i)^0 + {}^5C_1 2^4 (-i)^1 + {}^5C_2 2^3 (-i)^2 + {}^5C_3 2^2 (-i)^3 + {}^5C_4 2^1 (-i)^4 + {}^5C_5 2^0 (-i)^5$
 $= 32 - 80i - 80 + 40i + 10 - i = -38 - 41i$

Cálculo auxiliar

76	4	82	4
①	19	②	20
76 = 4 × 19 + 0		82 = 4 × 20 + 2	
23	4		
③	5		
23 = 4 × 5 + 3			

> Resolução de equações em $\mathbb{C}$

Tarefas: Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações e apresente as soluções na forma algébrica.

1. $iz - 2 = 3z$ 2. $2z - i\bar{z} = 1 + 3i$ 3. $z^2 + 2z + 17 = 0$.

Resolução:

1. $1z - 2 = 3z \Leftrightarrow iz - 3z = 2 \Leftrightarrow z(i - 3) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{i - 3} \Leftrightarrow z = \frac{2(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} \Leftrightarrow z = \frac{-6 - 2i}{9 + 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -\frac{3}{5} - \frac{i}{5}$ $S = \left\{ -\frac{3}{5} - \frac{i}{5} \right\}$

2. Fazendo $z = a + bi$ com a e $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$2z - i\bar{z} = 1 + 3i \Leftrightarrow 2(a + bi) - i(a - bi) = 1 + 3i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a + 2bi - ia - b = 1 + 3i \Leftrightarrow (2a - b) + (2b - a)i = 1 + 3i$

Atendendo à igualdade de números complexos vem:

$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 2b - a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 1 \\ 2(2a - 1) - a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 4a - a = 3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \times \frac{5}{3} - 1 \\ a = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{3} \\ a = \frac{5}{3} \end{cases}$

Então $z = \frac{5}{3} + \frac{7}{3}i$. $S = \left\{ \frac{5}{3} + \frac{7}{3}i \right\}$

3. Aplicando a fórmula resolvente:

$z^2 + 2z + 17 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 68}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2}$

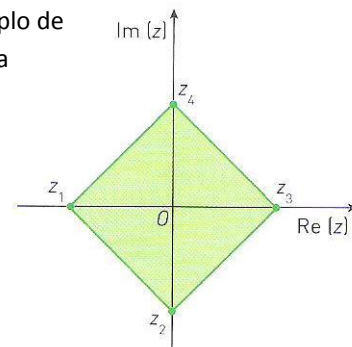
$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm 8i}{2} \Leftrightarrow z = -1 \pm 4i$ $S = \{-1 - 4i, -1 + 4i\}$

Para resolver:

60. Considere os números complexos $z_1 = i^n$; $z_2 = i^{n+1}$; $z_3 = i^{n+2}$; $z_4 = i^{n+3}$ com $n \in \mathbb{N}_0$.

60.1. Mostre que, no plano complexo, as imagens geométricas de z_1, z_2, z_3 e z_4 são os vértices de um quadrado com perímetro igual a $4\sqrt{2}$.

60.2. Dê um exemplo de um valor de n para o qual as imagens geométricas de z_1, z_2, z_3 e z_4 são as representadas na figura.



61. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

61.1. $iz^2 - z = 0$

61.2. $2z - 3i = zi$

61.3. $2z + \bar{z} = 1$

61.4. $z^3 + 3z = 0$

61.5. $z^2 - z + 2 = 0$

61.6. $z^2 + 4 = 0$

61.7. $z^2 + 10z + 26 = 0$

61.8. $16z^2 + 8z + 5 = 0$

61.9. $z^2 - 2iz - 5 = 0$

61.10. $z^3 = -16z$

61.11. $z^3 + 6z^2 + 13z = 0$

61.12. $z^3 + 6iz^2 = 10z$

62. Resolva a equação, dê exemplo de três soluções e represente no plano complexo o respectivo conjunto-solução.

62.1. $iz + \bar{z} = 0$

63.2. $\text{Re}(z) - z = 2i$

Actividades de investigação/exploração:

1. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ quaisquer números complexos. Mostre que:

1.1. $z + \bar{z}$ é um número real

1.2. $z - \bar{z}$ é um imaginário puro

1.3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

1.4. $z \times \bar{z} = |z|^2$

1.5. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

2. Com a utilização de exemplos, verifique que:

2.1. A adição, em $\mathbb{C}$, goza das propriedades comutativa e associativa.

2.2. A multiplicação, em $\mathbb{C}$, goza das propriedades comutativa e associativa.

2.3. Em $\mathbb{C}$, a multiplicação é distributiva em relação à adição.

REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Consideremos um número complexo $z = x + yi$ e a respectiva imagem geométrica que corresponde ao ponto $P(x, y)$.

Vimos já que o módulo de z se representa por $|z|$ e corresponde à distância da imagem geométrica de z à origem. Designemo-lo, agora, por ρ .

Assim $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sendo $\rho \in [0, +\infty[$.

Consideremos, agora, θ a medida em radianos, da amplitude de um ângulo em que o lado origem é semieixo real positivo e o lado extremidade é a semirrecta $\vec{OP}$.

A θ dá-se o nome de argumento de z e representa-se por $\arg(z) = \theta$

Observando mais uma vez a imagem podemos concluir que:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Portanto, temos $z = \rho \cos \theta + \rho i \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ que se designa por representação trigonométrica de z .

Podemos abreviar esta expressão considerando $\cos \theta + i \sin \theta = \text{cis} \theta$ de onde resulta:

$$z = \rho \text{cis} \theta$$

Tarefa 1: Represente na forma trigonométrica:

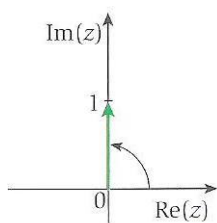
1.1. $z_1 = i$ 1.2. $z_2 = -1 - i$

Resolução:

1.1. $z_1 = i$

$$|z_1| = 1 ; \arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$$

$$z_1 = \text{cis} \frac{\pi}{2}$$



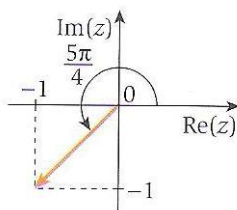
1.2. $z_2 = -1 - i$

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de z_2 .

$$\begin{cases} (-1, -1) \in 3^\circ \text{Q} \\ \tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \text{cis} \frac{5\pi}{4}$$



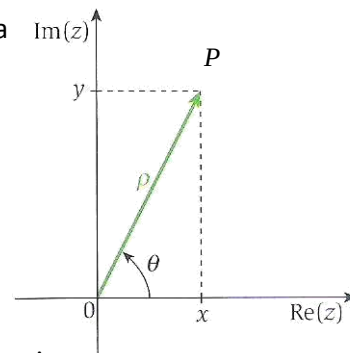
Tarefa 2: Represente na forma algébrica os números complexos:

2.1. $z_1 = 2 \text{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$ 2.2. $z_2 = 5 \text{cis} \pi$

Resolução:

$$2.1. z_1 = 2 \text{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\underbrace{\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right)}_{4^\circ \text{Q}} + i \underbrace{\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)}_{4^\circ \text{Q}} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$2.2. z_2 = 5 \text{cis} \pi = 5(\cos \pi + i \sin \pi) = 5(-1 + i \times 0) = -5$$



Notas:

- “ ρ ” é a letra grega que se lê “ró”
- “ θ ” é a letra grega que se lê “téta”

• Para cada número complexo, podemos considerar uma infinidade de argumentos. Se θ é argumento de um número complexo z , então qualquer amplitude $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), é argumento de z .

• Considera-se:

Argumento positivo mínimo:

$$0 < \arg(z) \leq 2\pi$$

Argumento principal:

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi$$

Para resolver:

64. Represente na forma trigonométrica cada um dos complexos:

64.1. $z_1 = 3$ 64.2. $z_2 = \sqrt{3} + i$

64.3. $z_3 = 4i$ 64.4. $z_4 = -4 - 4i$

64.5. $z_5 = -2i$ 64.6. $z_6 = 1 - \sqrt{3}i$

64.7. $z_7 = -\sqrt{2}$ 64.8. $z_8 = \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{5}{4}i$

65. Escreva na forma algébrica:

65.1. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

65.2. $z = 5 \text{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

65.3. $z = 3\sqrt{2} \text{cis} \frac{3\pi}{4}$ 65.4. $z = 2 \text{cis} \frac{5\pi}{3}$

65.5. $z = \sqrt{3} \text{cis} \left(-\frac{5\pi}{6} \right)$ 65.6. $z = \text{cis} 0$

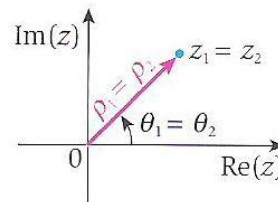
65.7. $z = 2 \text{cis} \pi$ 65.8. $z = \sqrt{2} \text{cis} \frac{\pi}{2}$

> Igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica

Dois números complexos iguais têm a mesma imagem no plano complexo.

Se $z_1 = \rho_1 \text{cis} \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \text{cis} \theta_2$ então:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 \text{cis} \theta_1 = \rho_2 \text{cis} \theta_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



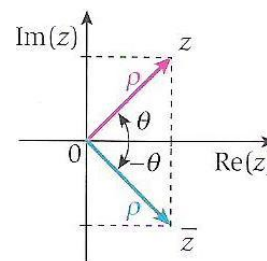
Exemplo: $z_1 = 2\text{cis} \pi$ e $z_2 = 2\text{cis}(9\pi)$ são iguais uma vez que têm o mesmo módulo e $\pi - 9\pi = -8\pi$ (4 voltas completas)

> Números complexos conjugados na forma trigonométrica

A imagem geométrica do conjugado de z obtém-se da imagem geométrica de z por uma reflexão relativamente ao eixo real.

Logo, $|z| = |\bar{z}|$ e se θ é um argumento de z , então $-\theta$ é um argumento do conjugado de z .

$$\text{Se } z = \rho \text{cis} \theta, \text{ então } \bar{z} = \rho \text{cis}(-\theta)$$

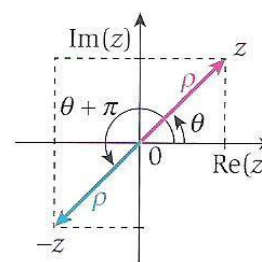


> Números complexos simétricos na forma trigonométrica

No plano complexo, a imagem de $-z$, simétrico de z , obtém-se da imagem de z por uma rotação de centro na origem do referencial e amplitude π radianos.

Então, $|z| = |-z|$ e se θ é um argumento de z , então $\theta + \pi$ é um argumento de $-z$.

$$\text{Se } z = \rho \text{cis} \theta, \text{ então } -z = \rho \text{cis}(\pi + \theta)$$



Para resolver:

66. Considere os seguintes números complexos:

$$w_1 = 2 + 2\sqrt{3}i \quad \text{e} \quad w_2 = 4\text{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

66.1. Mostre que $w_1 = w_2$.

66.2. Indique o argumento positivo mínimo de $\bar{w}_2$.

67. Para cada um dos números complexos z , represente na forma trigonométrica $\bar{z}$ e $-z$ e indique os quadrantes a que pertencem, no plano complexo, as respectivas imagens geométricas.

$$\mathbf{67.1.} \quad z = 1 - \sqrt{3}i \quad \mathbf{67.2.} \quad z = 3\text{cis}\left(\frac{10\pi}{9}\right) \quad \mathbf{67.3.} \quad z = -\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

▪ OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Algumas operações com números complexos podem efectuar-se de forma simples quando estes estão representados na forma trigonométrica: a multiplicação, a divisão, a potenciação e a radiciação.

Para efectuar a adição de números complexos, estes devem estar expressos na forma algébrica.

> Multiplicação na forma trigonométrica

Sejam os números complexos:

$$z_1 = \rho_1 \text{cis} \theta_1 \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2 \text{cis} \theta_2$$

O seu produto será:

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= \rho_1 \text{cis} \theta_1 \times \rho_2 \text{cis} \theta_2 = \rho_1 \times \rho_2 \text{cis} \theta_1 \times \text{cis} \theta_2 = \\ &= \rho_1 \times \rho_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \\ &= \rho_1 \times \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) = \\ &= \rho_1 \times \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] = \\ &= \rho_1 \times \rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

$$z_1 \times z_2 = \rho_1 \text{cis} \theta_1 \times \rho_2 \text{cis} \theta_2 = \rho_1 \rho_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

Recorde:

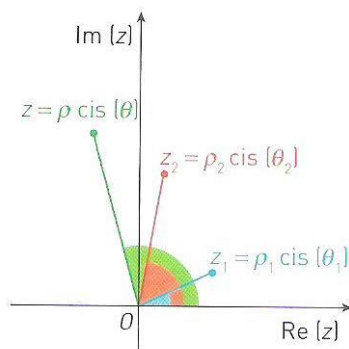
- $\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$

No plano complexo:

$$z = z_1 \times z_2 = \rho_1 \text{cis} \theta_1 \times \rho_2 \text{cis} \theta_2 = \\ = \rho_1 \rho_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \rho \text{cis} \theta$$

$$\rho = \rho_1 \rho_2$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$



Tarefa: Escreva $z_1 \times z_2$ na forma trigonométrica:

1. Sendo $z_1 = 2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 3\text{cis}\frac{2\pi}{3}$.

2. Sendo $z_1 = 2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

Resolução:

1. $z_1 \times z_2 = 2\text{cis}\frac{\pi}{4} \times 3\text{cis}\frac{2\pi}{3} = 6\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 6\text{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

2. Começamos por expressar $1 + \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica.

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Seja θ um argumento de z_2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, \sqrt{3}) \in 1^\circ \text{Q} \\ \tan \theta = \sqrt{3} \end{array} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \right.$$

$$z_2 = 2\text{cis}\frac{\pi}{3}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\text{cis}\frac{\pi}{4} \times 2\text{cis}\frac{\pi}{3} =$$

$$= 4\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 4\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

> Inverso de um número complexo na forma trigonométrica

Seja $z_1 = \rho_1 \text{cis} \theta_1$ um número complexo, não nulo, e seja $z_2 = \rho_2 \text{cis} \theta_2$ o seu inverso.

Sabendo que $z_1 \times z_2 = 1$ e que $\text{cis} 0 = 1$ vem:

$$\rho_1 \rho_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \text{cis} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 \rho_2 = 1 \wedge \theta_1 + \theta_2 = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \rho_2 = \frac{1}{\rho_1} \wedge \theta_2 = -\theta_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Pode considerar-se: $z_2 = \frac{1}{\rho_1} \text{cis}(-\theta_1)$

O inverso do número complexo $z = \rho \text{cis} \theta$, não nulo, é o número $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \text{cis}(-\theta)$.

> Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Para dividirmos o número $z_1 = \rho_1 \text{cis} \theta_1$ por $z_2 = \rho_2 \text{cis} \theta_2$, com $z_2 \neq 0$, multiplicamos z_1 pelo inverso de z_2 .

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = (\rho_1 \text{cis} \theta_1) \times \left[\frac{1}{\rho_2} \text{cis} \theta_2 \right] = \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

Para resolver:

68. Calcule e apresente o resultado na forma trigonométrica:

68.1. $\left(2\text{cis}\frac{\pi}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)$

68.2. $(1-i) \times \text{cis}\frac{\pi}{5}$ **68.3.** $-3\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \times (-2i)$

69. Seja z um número complexo. Indique um argumento de $z \times \bar{z}$.

70. Considere os números complexos $z = \sqrt{3} + i$ e $t = \frac{1}{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

70.1. Represente z na forma trigonométrica e t na forma algébrica.

70.2. Represente $z \times t$ na forma:

a) algébrica **b)** trigonométrica

71. A imagem geométrica do número complexo z situa-se no 2º quadrante. Em que quadrante se situa a imagem geométrica de:

71.1. iz

71.2. $i^2 z$

71.3. $-iz$

71.4. $i^7 \bar{z}$

72. Considere o número complexo $w = \frac{1}{2}\text{cis}\frac{\pi}{7}$.

Qual dos seguintes números complexos corresponde a $\frac{1}{w}$? **(A)** $w_1 = \frac{1}{2}\text{cis}\frac{6\pi}{7}$

(B) $w_2 = 2\text{cis}\frac{13\pi}{7}$

(C) $w_3 = 2\text{cis}\frac{8\pi}{7}$

73. Considere $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_2 = 2\text{cis}\frac{\pi}{7}$.

Calcule e apresente o resultado na forma trigonométrica.

73.1. $\frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}$

73.2. $z_2 \times (-z_2)$

74. Considere os números complexos $z_1 = \text{cis}\frac{\pi}{3}$

e $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

74.1. Represente $\frac{z_1}{z_2}$ na forma algébrica.

74.2. Represente $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

74.3. Recorrendo aos resultados anteriores, determine os valores exactos de $\sin\frac{\pi}{12}$ e

$\cos\frac{\pi}{12}$.

Tarefa: Sendo $z_1 = 6\sqrt{2}cis\frac{\pi}{3}$ e $z_2 = -1+i$. Calcule $3i \times \frac{z_2}{z_1}$.

Resolução:

Atendendo às operações que vamos efectuar, devemos escrever na forma trigonométrica os três números envolvidos na expressão:

$$3i = 3cis\frac{\pi}{2} \quad z_2 = -1+i = \sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Temos, então: } 3i \times \frac{z_2}{z_1} = 3cis\frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4}}{6\sqrt{2}cis\frac{\pi}{3}} = 3cis\frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}cis\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 3cis\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{6}cis\frac{5\pi}{12} = \frac{3}{6}cis\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}cis\frac{11\pi}{12}$$

> Potenciação na forma trigonométrica

Seja $z = \rho cis\theta$ um número complexo e $n \in \mathbb{N}$.

Temos por definição de potência: $z^n = \underbrace{z \times z \times z \times \dots \times z}_{n \text{ vezes}}$

Substituindo z por $\rho cis\theta$ e aplicando a fórmula da multiplicação vem:

$$z^n = \underbrace{\rho \times \rho \times \dots \times \rho}_{n \text{ vezes}} \times \underbrace{cis(\theta + \theta + \dots + \theta)}_{n \text{ vezes}}$$

Então:

$$z^n = \rho^n cis(n\theta), n \in \mathbb{N}$$

O resultado

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)], n \in \mathbb{N}$$

é conhecido como fórmula de De Moivre.

Tarefa: Calcule e apresente o resultado na forma algébrica.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right)^{-9}$$

Resolução:

Embora o resultado seja pedido na forma algébrica, temos toda a vantagem em efectuar as operações na forma trigonométrica.

$$\text{Seja } z = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Tendo θ como argumento de z , vem:

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right) \in 4^oQ \\ \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \quad \text{Então: } z = \frac{1}{2}cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} z^{-9} &= \left(\frac{1}{2}cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} cis\left(9 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2^9 cis\frac{3\pi}{2} = \\ &= 512\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 512(0 - i) = -512i \end{aligned}$$

Para resolver:

75. Considere o número complexo $z = 1+i$.

Mostre que:

75.1. z^8 é um número real.

75.2. $\left(\frac{1}{z}\right)^{10}$ é um imaginário puro.

75.3. $(2-z)^5 = -4+4i$

76. Considere os números complexos

$$z = \sqrt{3} + \sqrt{2}i \quad \text{e} \quad w = 2cis\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Calcule:

$$\textbf{76.1. } \frac{1}{64}(z^6 + w^6) \quad \textbf{76.2. } (iz)^{10}(\bar{w})^{-8}$$

77. Seja $z = 1-i$. Mostre que:

77.1. $z^7 = 8\bar{z}$ **77.2.** z^{-8} é um número real.

77.3. $(z+2i)^{14}$ é um número imaginário puro.

78. Mostre que

$$(\sin x - i\cos x)^4 = cis(4x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

79. Calcule:

79.1. As raízes quadradas de $\sqrt{3} - i$.

79.2. As raízes quartas de $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

79.3. As raízes quintas de $-32i$.

80. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

$$\textbf{80.1. } z^3 - 1 = 0 \quad \textbf{80.2. } z^4 + 1 = 0$$

$$\textbf{80.3. } z^6 + i - 1 = 0 \quad \textbf{80.4. } z^3 = \bar{z}$$

81. Considere os seguintes números complexos:

$$z_1 = 2cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad z_2 = 32cis\left(\frac{7\pi}{4}\right) \quad z_3 = -4i$$

Mostre que:

81.1. z_1 é uma raiz quadrada de z_3 .

81.2. z_1 é uma raiz índice 5 de z_2 .

82. Considere os seguintes números complexos:

$$w_1 = 2cis\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad w_2 = -\sqrt{3} + i$$

Mostre que são duas das raízes cúbicas do mesmo número complexo z e determine-o.

> Radiciação na forma trigonométrica

Tarefa: Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = 8i$.

Resolução: Resolver a equação $z^3 = 8i$ equivale a determinar as raízes índice 3 (raízes cúbicas) do número complexo $8i$.

Seja $z = \rho \operatorname{cis} \theta$. $z^3 = 8i \Leftrightarrow (\rho \operatorname{cis} \theta)^3 = 8 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \rho^3 \operatorname{cis}(3\theta) = 8 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right)$

Atendendo ao critério de igualdade de complexos na forma trigonométrica, tem-se

$$\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{8} \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Como $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, este fica determinado por atribuição de valores a k .

Se $k = 0$, resulta o número complexo $z_0 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right)$.

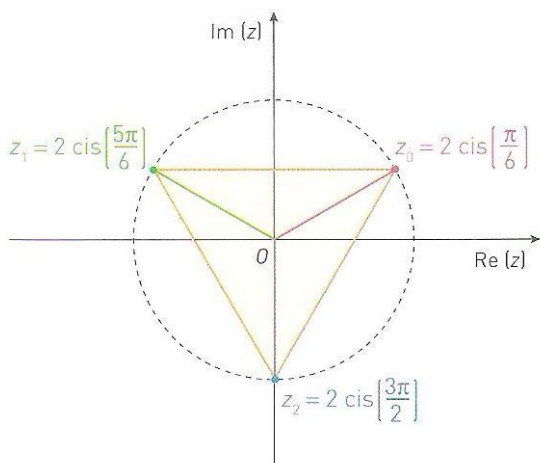
Se $k = 1$, resulta o número complexo $z_1 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right)$.

Se $k = 2$, resulta o número complexo $z_2 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)$.

Por atribuição de qualquer outro valor inteiro a k resulta um dos três números complexos z_0 , z_1 ou z_2 .

Daqui resulta que a equação $z^3 = 8i$ tem três e só três soluções, isto é, há três e só três raízes cúbicas (índice 3) do número complexo $8i$.

No plano:



As imagens geométricas correspondem aos vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 2 e centro O .

Para resolver:

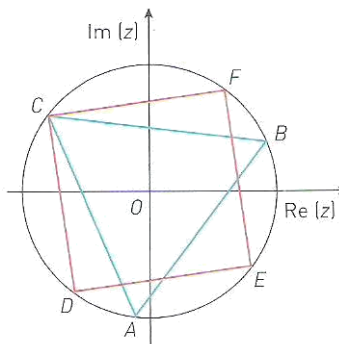
83. Na figura estão representados, no plano complexo, um triângulo e um quadrado inscritos numa circunferência de centro O .

Sabe-se que o ponto B é a imagem geométrica do número complexo:

$$2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{8} \right)$$

83.1. Determine o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto D .

83.2. Considere os vértices do quadrado as imagens geométricas das raízes de índice 4 de um complexo z . Determine z .



De um modo geral:

Dado um complexo $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + k2\pi}{n} \right)$$

com $z \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

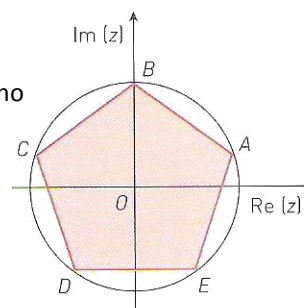
esta igualdade designa-se por fórmula de De Moivre generalizada.

Notas:

- As imagens geométricas das raízes de índice n , de um número complexo $\rho \operatorname{cis} \theta$ definem, no plano complexo, um polígono regular de n lados, centrado na origem, com vértices numa circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$.
- Todas as raízes têm o mesmo módulo, $\sqrt[n]{\rho}$, e os argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

84. Considere, no plano complexo, o pentágono $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de raio 1 e centro na origem do referencial, representado na figura.

Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice 5 de um complexo z .



84.1. Determine z .

84.2. Represente na forma trigonométrica o número complexo:

- a) cuja imagem é A . b) cuja imagem é D .
c) em que a imagem do conjugado é C .

▪ DOMÍNIOS PLANOS E CONDIÇÕES EM VARIÁVEL COMPLEXA

Neste tópico, veremos como caracterizar alguns lugares geométricos recorrendo a condições em variável complexa (condições em $\mathbb{C}$).

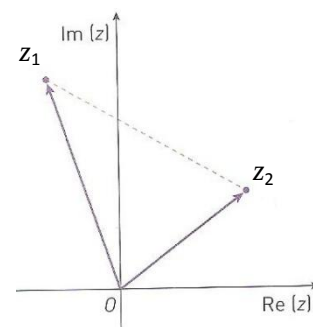
> O módulo $|z_1 - z_2|$ como distância entre dois pontos.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos em que as imagens geométricas estão representadas, no plano complexo.

A diferença entre z_1 e z_2 , ou seja, $z_1 - z_2$, é representada, no plano complexo, pelo vector $\overrightarrow{z_2 z_1}$.

Assim, o módulo do número complexo $z_1 - z_2$ corresponde à norma do vector $\overrightarrow{z_2 z_1}$, que equivale à distância entre os pontos z_1 e z_2 .

Assim, tem-se: $|z_1 - z_2| = \overline{z_1 z_2}$.



$|z_1 - z_2|$ representa a distância entre as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 .

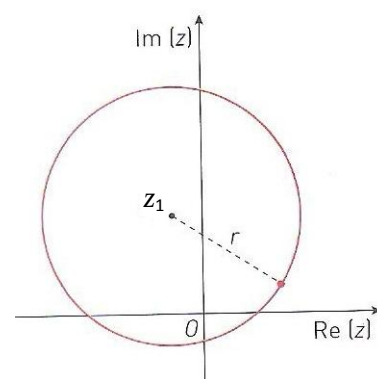
> Circunferência.

Consideremos, agora, no plano complexo, a circunferência de raio r e centro z_0 .

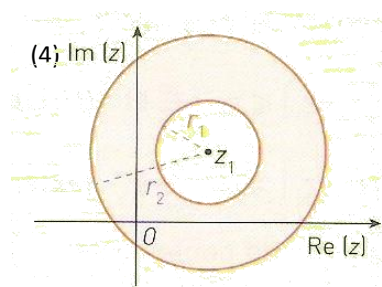
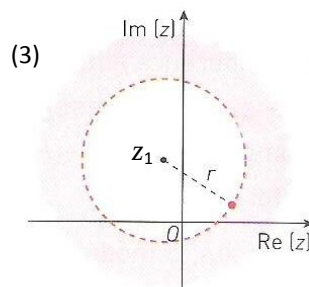
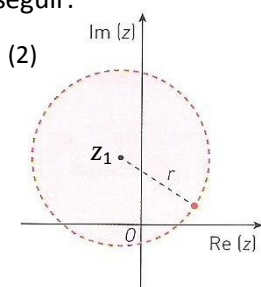
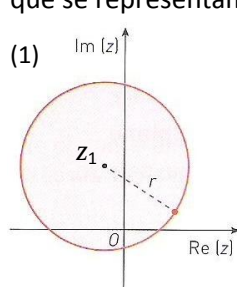
A circunferência é o conjunto dos pontos a uma distância r de z_0 , sendo cada um desses pontos a imagem geométrica de um número complexo.

Então:

$|z - z_0| = r$, $r \in \mathbb{R}$, é uma condição em variável complexa que define a circunferência de raio r , com centro em z_0 .



Com base na condição que representa uma circunferência, podemos definir outros domínios planos, como os que se representam a seguir:



• $|z - z_1| \leq r$, $r \in \mathbb{R}$, representa o círculo de raio r e centro em z_0 . (1)

• $|z - z_1| < r$, $r \in \mathbb{R}$, representa o lugar geométrico dos pontos interiores à circunferência de raio r e centro em z_0 . (2)

• $|z - z_1| > r$, $r \in \mathbb{R}$, representa o lugar geométrico dos pontos exteriores à circunferência de raio r e centro em z_0 . (3)

• $r_1 \leq |z - z_1| < r_2$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, representa uma coroa circular. (4)

Para resolver:

85. Represente, no plano complexo, o conjunto das imagens geométricas dos números complexos z que satisfazem a condição:

85.1. $|z| = 2$

85.2. $|z - 1| \leq 3$

85.3. $|z - 1 + 2i| > 2$

85.4. $1 \leq |z + 2 - i| \leq 3$

85.5. $|z| \leq 3$

85.6. $|z - i| < 2$

85.7. $|-2 + i - z| \geq 1$

85.8. $|z - 1 + i| \leq 3 \wedge |z| \geq 1$

86. Defina por uma condição, em $\mathbb{C}$, a circunferência:

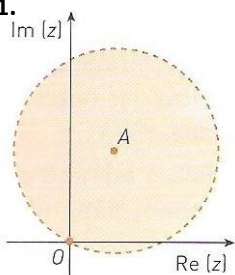
86.1. centrada na origem e raio 3.

86.2. de raio 2 e centrada na imagem geométrica do conjugado de $3 - i$.

Para resolver:

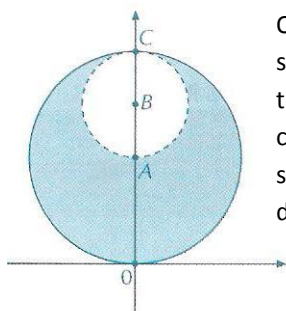
87. Defina por uma condição, em $\mathbb{C}$, o conjunto de pontos representado no plano complexo por:

87.1.



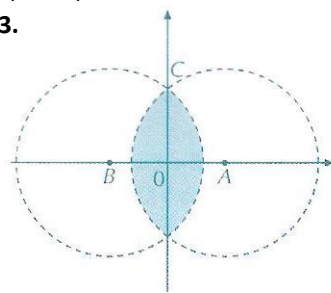
Centro de circunferência:
o ponto A(1, 2)

87.2.



Os pontos A, B e C
são imagens geomé-
tricas dos números
complexos $2i$, $3i$ e $4i$,
sendo A e C os centros
das circunferências.

87.3.



A(3, 0), B(-3, 0) e C(0, 4)

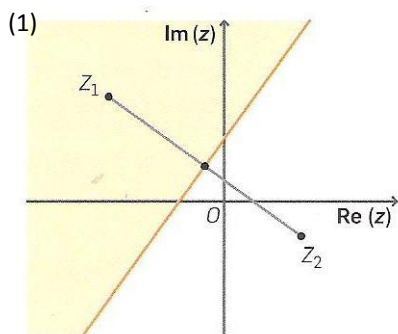
> Mediatriz de um segmento de recta.

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos.

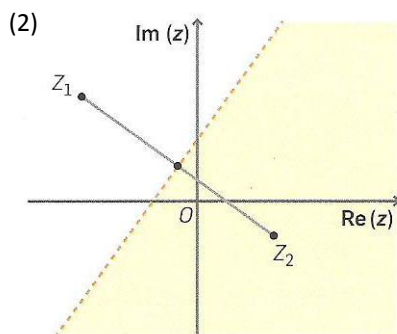
A condição em variável complexa $|z - z_1| = |z - z_2|$
define a mediatriz do segmento de recta $[z_1, z_2]$.

De facto, a condição representa o conjunto das imagens geométricas dos números complexos cuja distância a z_1 é igual à distância a z_2 .

Com base na condição que representa a mediatriz, podemos definir os respectivos semiplanos (abertos ou fechados):



$$|z - z_1| \leq |z - z_2|$$



$$|z - z_1| > |z - z_2|$$

- $|z - z_1| \leq |z - z_2|$ define o semiplano (fechado) limitado pela mediatriz do segmento de recta $[z_1, z_2]$ ao qual pertence a imagem de z_1 . (1)
- $|z - z_1| > |z - z_2|$ define o semiplano (aberto) limitado pela mediatriz do segmento de recta $[z_1, z_2]$ ao qual pertence a imagem de z_2 . (2)

Tarefa: Identifique e represente, no plano complexo, o conjunto de pontos que são imagens geométricas dos complexos que satisfazem a condição:

$$|z - (2 - i)| \geq |z - (-2 + 3i)|$$

Resolução: Considerem-se os números complexos $z_A = 2 - i$ e $z_B = -2 + 3i$ cujas imagens geométricas são A(2, -1) e B(-2, 3) respectivamente.

A condição define o semiplano (fechado) limitado pela mediatriz do segmento de recta $[A, B]$, ao qual pertence o ponto B.

Calculemos o ponto médio (M) de $[AB]$ e de seguida o vector $\overrightarrow{AB}$:

$$M = \left(\frac{2 + (-2)}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (0, 1) \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (-4, 4)$$

Sabemos então que a recta AB tem declive: $m_1 = \frac{4}{-4} = -1$

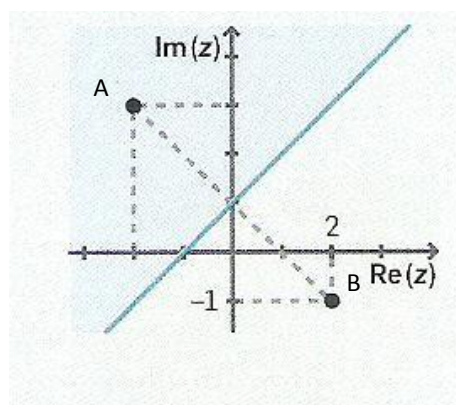
Como a mediatriz é perpendicular à recta AB o seu declive é dado

$$\text{por: } m_2 = -\frac{1}{m_1} = 1$$

A mediatriz tem declive 1 e passa pelo ponto M(0, 1).

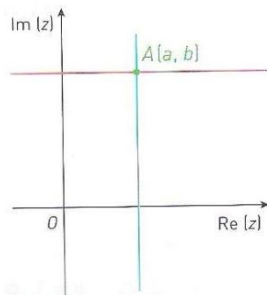
Assim, uma equação é: $y = x + 1$.

Representando no plano complexo:



> Rectas horizontais e rectas verticais.

Considere-se um número complexo $z_A = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$, em que a imagem geométrica é o ponto $A(a, b)$.



O ponto A é a intersecção das rectas representadas pelas condições $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$.

- $\text{Re}(z) = a$ representa uma recta paralela ao eixo imaginário.
- $\text{Im}(z) = b$ representa uma recta paralela ao eixo real.

> Semi-rectas.

$\text{Arg}(z) = \theta$ (semi-recta com origem na origem do referencial)	$\text{Arg}(z - z_1) = \theta$ (semi-recta com origem na imagem geométrica de z_1)
Os números complexos z de argumento θ situam-se sobre a semi-recta de origem O que forma com o semieixo real positivo um ângulo de amplitude θ.	As imagens geométricas dos números complexos z que satisfazem a condição $\text{arg}(z - z_1) = \theta$ estão sobre a semi-recta de origem P_1 e que forma um ângulo de amplitude θ com a semi-recta de origem P_1 e com a direcção e sentido do semieixo positivo real.

Tarefa: Represente, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos z que satisfazem a condição: $\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 + 2i) \leq \frac{2\pi}{3}$

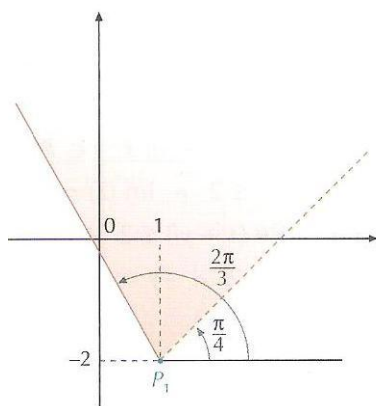
Resolução:

$$\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 + 2i) \leq \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \arg(z - (1 - 2i)) \leq \frac{2\pi}{3}$$

Seja $P_1(1, -2)$ o afixo do número complexo $1 - 2i$.

Na figura está a representação geométrica sombreada que corresponde à condição dada.



Para resolver:

88. Identifique e represente o conjunto de pontos constituído pelas imagens geométricas dos números complexos que verificam as condições:

88.1. $|z| = |z - 4|$ **88.2.** $|z - 1 + i| = |z + 3|$

88.3. $|z + i| = |z - i|$ **88.4.** $|z - i| = |z - 1|$

88.5. $|z + 3| \leq |z - 1|$ **88.6.** $|z| > |z + 1 - 2i|$

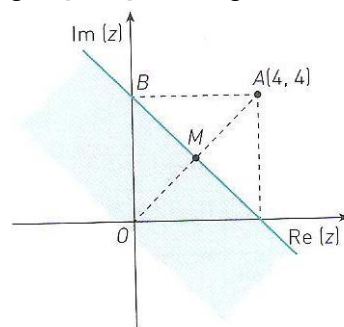
88.7. $|z - 4 + 2i| \leq |z| \leq |z - 2i|$

88.8. $\text{Re}(z) < 2 \wedge \text{Im}(z) \geq -1$

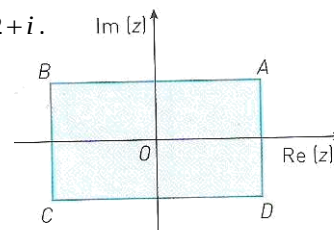
88.9. $-2 \leq \text{Re}(z - 1) \leq 3$

89. Defina, por uma condição em $\mathbb{C}$, os seguintes conjuntos:

89.1. M é o ponto médio de $[OA]$ e o triângulo $[OMB]$ é rectângulo em M .

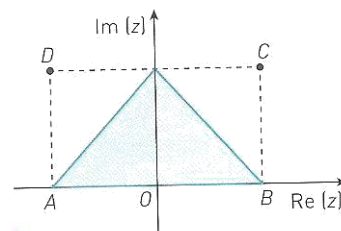


89.2. Os vértices A, B, C e D são as imagens geométricas, respectivamente, dos números complexos $z, -\bar{z}, -z$ e $\bar{z}$ sendo $z = 2 + i$.

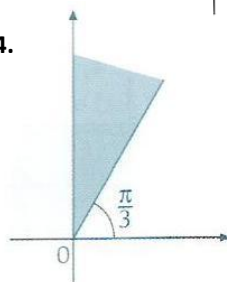


89.3. Sendo $z = 3 + 3i$, sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um rectângulo;
- C é a imagem geométrica de z ;
- D é a imagem geométrica de $(-\bar{z})$.



89.4.



Para resolver:

90. Identifique o lugar geométrico do conjunto das imagens geométricas dos números complexos que verificam as condições:

90.1. $\arg(z) = \pi$

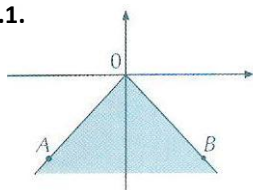
90.2. $|\arg(z)| = \frac{\pi}{2}$

90.3. $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

90.4. $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$

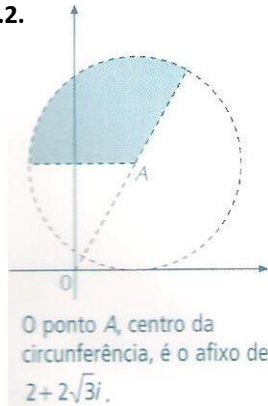
91. Defina, por uma condição em $\mathbb{C}$, os seguintes conjuntos:

91.1.



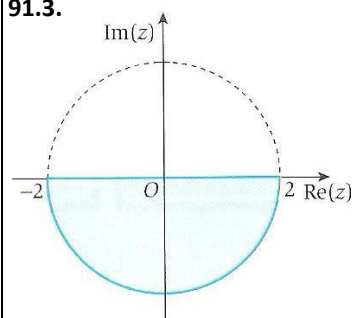
O ponto A é a imagem de um número complexo z , de argumento $\frac{5\pi}{4}$, e B é a imagem geométrica de $w = iz$.

91.2.

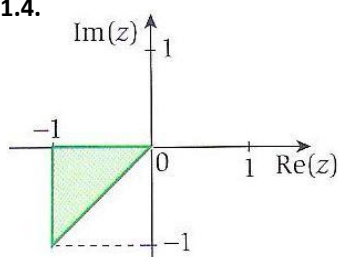


O ponto A, centro da circunferência, é o afixo de $2 + 2\sqrt{3}i$.

91.3.



91.4.



92. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo real?

(A) $z + \bar{z} = 0$

(B) $z - \bar{z} = 0$

(C) $|z - 1| = 0$

(D) $\arg(z) = 0$

93. Qual das seguintes condições define uma recta no plano complexo:

(A) $|z - 2| = |z - 2i|$

(B) $|z - 2 + 3i| = 9$

(C) $2z + 5i = -z$

(D) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

94. Considere o complexo $z_1 = \sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$.

A imagem geométrica de z_1 pertence à região do plano definida por:

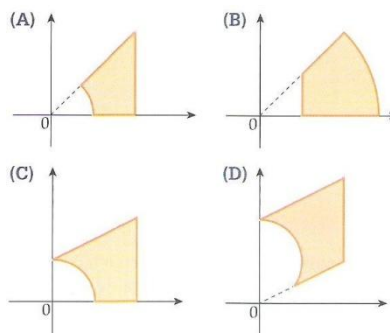
(A) $|z| \leq 1,7$

(B) $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$

(C) $\operatorname{Im}(z) = \frac{5\pi}{6}$

(D) $\frac{3\pi}{4} < \arg(z) < \pi$

95. Em qual das figuras pode estar representado, no plano complexo, o conjunto definido pela condição: $|z| \geq 1 \wedge 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Re}(z) \leq -2$



NÚMEROS IMAGINÁRIOS EXISTEM E TAMBÉM SÃO CONHECIDOS POR NÚMEROS COMPLEXOS, EXPRESSOS NA FORMA $a+bi$, SENDO QUE "a" CONSTITUI A PARTE REAL E "bi", SUA PARTE IMAGINÁRIA. A LETRA "i" REPRESENTA A RAIZ QUADRADA DE -1.

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA NA COMPILAÇÃO:

- AAVV, **Programa de Disciplina Matemática 2.º ciclo**, Projecto Escola+, Lisboa 2010
- ABRANTES, P. & CARVALHO, R., **O novo M11**, Texto Editora, Lisboa 1991
- ANDRADE, Carlos; VIEGAS, Cristina; PEREIRA, Paula Pinto e PIMENTA, Pedro, **Ípsilon 12, Matemática A - 12º Ano**, Texto Editores, 2012
- AUBYN, Marinela Cabral St.; BRITO, Cristina, **Mat 12, Matemática A 12º Ano**, Lisboa Editora, 2005
- BERNARDES, A.; LOUREIRO, C.; VARANDAS, J.M.; VIANA, J.P., BASTOS, R., **Matemática 11 – Funções 2**, Edições Contraponto, Porto 1999
- CARDOSO, M. (S.D.), **Apontamentos de Matemática: Função exponencial, função logarítmica**, São Tomé, Liceu Nacional.
- COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda, **Novo Espaço, Matemática A 12º Ano**, Porto Editora 2012
- COSTA, Belmiro; RESENDE, Lurdes do Céu e RODRIGUES, Ermelinda, **Espaço 12, Matemática A 12º Ano**, Edições Asa 2008
- FERREIRA NEVES, Maria Augusta; GUERREIRO, Luís e MOURA, Ana, **Matemática A 12º Ano**, Porto Editora, 2011
- FERREIRA NEVES, Maria Augusta; PEREIRA, Albino e SILVA, Jorge Nuno, **Matemática A 12º Ano**, Porto Editora, 2012
- GT T³, APM, **Modelação no Ensino da Matemática: Calculadora, CBL e CBR**, APM, Lisboa 1999
- LOPES, A.; BERNARDES, A.; LOUREIRO, C.; VARANDAS, J.M.; VIANA, J.P., BASTOS, R., **Matemática 12 – Funções**, Edições Contraponto, 1999
- LOPES, A.; BERNARDES, A.; LOUREIRO, C.; VARANDAS, J.M.; VIANA, J.P., BASTOS, R., **Matemática 12 – Trigonometria e Complexos**, Edições Contraponto, 1999
- SILVA, J. C.; PINTO, J.; & MACHADO, V., **Aleph 11 – volume 2**, Edições Asa, Lisboa 2011
- SILVA, J. C.; PINTO, J.; & MACHADO, V., **NIUaleph 12**, Lisboa, 2012
- TEIXEIRA, P.; PRECATADO, A.; ALBUQUERQUE, C.; ANTUNES, C. & NÁPOLES, S., **Funções 11**, Ministério da Educação, Lisboa 1998
- TEIXEIRA, P.; PRECATADO, A.; ALBUQUERQUE, C.; ANTUNES, C. & NÁPOLES, S., **Funções 12**, Ministério da Educação, Lisboa 1998
- LOUREIRO, C.; OLIVEIRA, F.; SILVA, J.N.; BASTOS, R., **Trigonometria e Números Complexos**, Ministério da Educação, Lisboa 2000

Sites da Internet

<http://mat.absolutamente.net>

www.educ.fc.ul.pt

<http://www.amatoso.org/>

www.apm.pt/

www.nctm.org

<http://www.hidrografico.pt/s.-tome-e-principe.php>

<http://esa.un.org/unpd/wpp/index.htm>

Agradecemos ainda os materiais gentilmente cedidos pelos colegas: Anabela Soares, Filomena, Helena Condeço Silva, Joaquim Pinto, José Leal e Maria Teresa Santos.



Desafio:

Quantas vezes precisa de dobrar uma folha de papel para chegar até à lua? 39, 452, 1000, 3000000? Registem as diferentes estimativas dos elementos da classe e vamos descobrir quem está mais próximo da verdade!

Pegue numa folha de papel e dobra-a ao meio. A espessura da folha aumentou para o dobro. Ao repetir novamente este procedimento a espessura da folha passa a ser o quádruplo da folha inicial. Admita que consegue dobrar uma folha de papel o número de vezes que quiser, repetindo o mesmo procedimento.

Suponha que espessura de uma folha de papel é de um décimo de milímetro.

A partir da ilha do Príncipe, quantas vezes precisas de dobrar uma folha de papel para conseguir atingir S. Tomé. (A distância entre estes dois locais é aproximadamente 150km)?

A partir de um ponto qualquer do planeta Terra, quantas dobragens sucessivas são necessárias para se atingir a Lua, sabendo que a distância da Terra à Lua é cerca de 384 000 km?

Resolução:

N.º de dobras	1	2	3	4	5	6	...	10	...	14...
Espessura em folha	2	4	8	16	32	64	...	1024	...	16384...
Espessura em folha (em mm)	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2	6,4		102,4		1638,4
Forma de potência (espessura da folha)	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	...	2^{10}	...	2^{14} ...

Nota: 1km=1000000mm, logo 150km=150000000mm

Assim procuramos os valores 150000000 e 384000000000 na nossa tabela!

Até à 14.ª dobra, temos 1638,4mm, um pouco mais do que 1,5m, ainda estamos muito longe de atingir os 150km, que na nossa tabela irão equivaler a 150000000mm, mas, observando os valores da 2.ª linha, existe uma sequência familiar que corresponde às potências de bases 2, que poderá ser acrescentado numa 4.ª linha da tabela. Ou seja para n dobras, a espessura poderá ser traduzida por 2^n folhas.

Substituindo o valor de n por um valor considerável, por exemplo 26 (poderia ser qualquer outro). Ora $2^{26} = 67108864$. 6,7108864km! O suficiente para percorrer a distância de S Tomé a Bombom e regressar, mas ainda muito longe de 150km. Experimentemos agora um valor maior para n , por exemplo, 29. Agora $2^{29} = 53,6870912$ km. Já estamos perto! No próximo já teremos um valor superior a 100km (dobro de 50) e no outro seguinte um valor superior a 200km (dobro de 100). De facto para $2^{30} = 1073741824$ – 107km (Oc.d.)- e para $2^{31} = 2147483648$ – 214km (Oc.d.), pelo que são precisas 31 dobragens para a espessura atingir 150km. Continuando a obter valores para números maiores, chegamos ao $2^{42} = 43980465110000$, o primeiro que ultrapassa o valor de 384000000000.

Utilizando a calculadora científica, podemos utilizar a tecla que permite repetir procedimentos. A partir do 4.º procedimento, poderemos clicar só na tecla igual, que o valor apresentado é sempre o anterior multiplicado por 2.

Assim, com 31 dobragens numa folha de papel atingimos a distância entre a Ilha de S. Tomé e a Ilha do Príncipe e com apenas mais nove dobragens, 42, conseguimos atingir a distância da Terra à Lua! Este é o caso de um crescimento exponencial de base 2.

Afinal, qual foi a melhor estimativa da classe?

¹ Tarefa adaptada de *Matemática 11: sucessões*3, Lisboa, 2004 no âmbito do projecto Matemática do Planeta Terra 2013



² Material de apoio 2: Evolução da população em São Tomé e Príncipe

I Parte

A tabela seguinte apresenta os dados relativos à população são tomense residente no arquipélago, no período de 1970 a 2012, de acordo com os censos realizados.

Ano	1970	1981	1991	2001	2012
População	73800	96611	117504	137599	187356

1. Represente graficamente a evolução da população ao longo deste período de tempo. Observe que a população não cresceu sempre de igual forma. Identifique, a partir dos dados da tabela, o período com um crescimento mais acentuado.
2. As funções exponenciais são frequentemente usadas para descrever evoluções populacionais. Mas há outras, nomeadamente o modelo logístico, que recorrem também à função exponencial. Considere os dois modelos (exponencial e logístico) definidos da seguinte forma: $P(t) = P_0 \cdot e^{at}$, onde P_0 é a população no instante zero, neste caso 1970, e $P(t) = \frac{b}{1 + ae^{-kt}}$ onde $\frac{b}{1+a}$ é a população no instante zero e b a capacidade máxima do sistema, neste caso, do território do S. Tomé e do Príncipe. Experimente e identifique valores para os parâmetros que descrevam a evolução da população no período em causa.
Sugestão: para o modelo logístico deve ser fixada a capacidade máxima do sistema para o período em que se vão fazer previsões.
3. Qual o ponto de intersecção das duas curvas? Qual o seu significado?
4. Introduza os dados numa lista numa calculadora gráfica e experimente diferentes modelos de regressão.
 - a. A partir desses modelos faça a previsão da população são tomense para os anos de 2050 e 2100.
5. Qual dos modelos, entre os trabalhados em 2 e 4, lhe parece mais adequado para fazer previsões?

Nota: Segundo dados da ONU³ (Organização das Nações Unidas), existem as seguintes previsões (média, por excesso e por defeito) populacionais para São Tomé e Príncipe. Os dados estão em milhares.

Ano	p. média	p. excesso	p. defeito
2020	200000	205000	195000
2050	299000	343000	258000
2100	356000	559000	216000

6. Utilize os seus conhecimentos de Geografia para analisar a evolução da população desde 1970 e baseie-se nesses mesmos conhecimentos para validar as previsões para o futuro.

II Parte

Suponha-se uma população de uma determinada espécie que vive, se reproduz e morre numa determinada região, sem que haja emigração ou imigração de indivíduos dessa espécie. Em cada instante t designe-se por $I(t)$ o número de indivíduos dessa população. Um primeiro aspecto que convém notar é que se vai representar por uma função real de variável real um número de indivíduos que é necessariamente inteiro. Nestas condições, segundo Malthus a evolução da população será dada por:

$$I(t) = I_0 e^{(n-m)t}, \text{ onde } I(0) = k, \text{ se for } I_0 \text{ o número de indivíduos no instante 0.}$$

² Tarefa adaptada da brochura *Funções 12, ME, Lisboa, 1999* e *NIUaleph 12 – volume 2, Lisboa, 2012* no âmbito do projecto Matemática do Planeta Terra 2013

³ <http://esa.un.org/unpd/wpp/index.htm>

A aplicação do modelo de Malthus à população humana dá origem a grandes controvérsias. Por um lado pode-se constatar que nos últimos séculos a população humana tem seguido uma lei de crescimento que parece exponencial. Por outro lado o modelo supõe uma taxa de natalidade uniforme e isso está longe de se verificar na população humana. Tem-se verificado que é entre as populações mais pobres que a taxa de natalidade é maior. Se é previsível que a Terra não pode comportar um número infinito de seres humanos vivos, é um problema decidir o que se pode fazer para evitar um crescimento insustentável. A este propósito citamos a seguinte passagem do relatório “O nosso futuro comum” elaborado em 1987 pela Comissão Mundial do Ambiente e do Desenvolvimento:

“Os países industrializados com preocupações sérias quanto à alta taxa de natalidade noutras partes do mundo têm obrigações além do simples fornecimento de caixas com material contraceptivo. O desenvolvimento económico, através do seu impacto indirecto nos factores socioculturais, baixa as taxas de nascimento. As políticas internacionais que actuam sobre o desenvolvimento económico têm assim interferência na possibilidade de os países poderem fazer alterar a natalidade. O problema do crescimento populacional deve pois integrar-se no problema mais lato do rápido crescimento socioeconómico dos países em vias de desenvolvimento.”

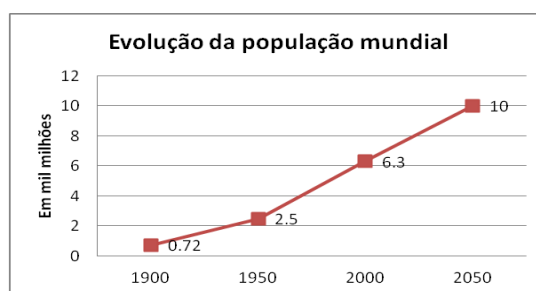
Voltando agora à questão da população humana... Se a evolução da população humana for logística, então o crescimento da população deverá começar a abrandar quando se aproximar do máximo suportado pela região em estudo. Pensando na Terra, colocam-se agora algumas questões interessantes: i) qual será o máximo de população que a Terra pode suportar?; ii) será que esta capacidade máxima é constante ou irá variando com a evolução científica e tecnológica? (aqui há que ponderar recursos renováveis, recursos não renováveis e produção de resíduos); iii) nota-se nos países mais desenvolvidos uma clara tendência para a redução da taxa de crescimento da população; será que nos aproximamos do equilíbrio logístico nessas regiões?

Um sinal do impacto da Matemática na nossa sociedade é que muitos dos pareceres científicos e decisões políticas (em economia, ambiente, etc.) são baseados em modelos matemáticos (que, embora mais sofisticados do que estes, não deixam de ser apenas modelos matemáticos).

A população mundial (em milhares de milhões) desde 1900 pode ser modelada pela função logística

$P(t) = \frac{78,12}{6,3 + 102e^{-0,02817t}}$ onde t representa o número de anos após 1900.

1. Usando este modelo, calcule a população mundial em 1991 e 2001.
2. Faça a previsão de população mundial para o ano de 2080.
3. Leia a notícia no rectângulo em baixo e justifique se o modelo apresentado continua a ser válido para daqui a 300 anos, de acordo com as previsões da ONU.



Relatório da ONU aponta para estagnação do crescimento populacional até 2300.

O planeta vai atingir os sete mil milhões de habitantes na segunda-feira, mas em 2300 poderá não passar dos 8,97 mil milhões, fruto de um processo de estabilização da população mundial.

In Agência de Notícias de Portugal, S.A., em 28 de Outubro de 2011

Em 26 de Dezembro de 2004 ocorreu um sismo na costa sudoeste asiática que produziu um maremoto que se encontra entre os mais mortais desastres naturais da história moderna, tendo devastado a costa de vários países, como a Indonésia, Sri Lanka, Índia e Tailândia, com ondas até 15 metros de altura e atingindo a Somália (África), a 4500 km a Oeste do epicentro.

Um sismo é um fenómeno físico resultante da libertação súbita de grande quantidade de energia, que se foi acumulando em determinada região da crosta terrestre, durante um certo intervalo de tempo e que provoca vibrações que se transmitem a uma extensa área circundante.

A dimensão de um sismo pode ser caracterizada por vários parâmetros, sendo os mais utilizados a magnitude e a intensidade. Cada sismo tem apenas um valor de magnitude, mas produz uma distribuição de intensidades na área afectada.

A *magnitude* é um parâmetro instrumental que caracteriza a dimensão relativa de um sismo e está directamente relacionada com a *energia libertada no foco*. O seu cálculo baseia-se no valor do movimento máximo do solo registado por um sismógrafo.

A escala de magnitude sísmica mais utilizada é a *Escala de Richter*. O sismo que abalou a costa sudoeste asiática a 26 de Dezembro de 2004 teve uma magnitude de 8,9, tendo sido por isso o quarto maior sismo desde 1900, altura em que se iniciou o registo sismográfico. Desde 1900, o maior sismo que ocorreu no mundo foi no Chile, a 22 de Maio de 1960.

A utilização de logaritmos na escala de Richter justifica-se pela enorme amplitude de dados, com uma variação entre dados muito pequenos e muito grandes. Os sismologistas usam uma escala, a escala de Richter, definida pela seguinte expressão: $M = 0,67 \log E - 7,9$ em que E representa a energia libertada e M correspondente à magnitude na escala de Richter.

O quadro seguinte mostra o significado da variação dos valores da escala de Richter a partir da apresentação das consequências de um sismo de acordo com a sua magnitude.

Magnitude (E.Richter)	Resultado no epicentro	Nº por ano
1,0 - 1,9	Detectável apenas por sismógrafo	Muitos
2,0 - 2,9	Sentido por algumas pessoas	800000
3,0 - 3,9	Sentido pela maior parte das pessoas	20000
4,0 - 4,9	Sentido por todos, vidros partidos	2800
5,0 - 5,9	Queda de mobiliário	1000
6,0 - 6,9	Fendas no chão, queda de alguns edifícios	185
7,0 - 7,9	Queda de pontes e barragens	14
8,0 +	Desastre em larga escala	0,2

⁴ Tarefa adaptada da brochura *Funções 12, ME, Lisboa, 1999* e *NIUaleph 12 – volume 2, Lisboa, 2012*, da secção de materiais para aula de Matemática das revistas *Educação & Matemática* n.º 43, *Quando a Terra treme*, e n.º 82, *A Terra volta a tremer*, no âmbito do projecto Matemática do Planeta Terra 2013

Como o logaritmo de um número é um expoente a variação, por exemplo, um ponto na escala de Richter (logarítmica) corresponde a uma actividade sísmica muitas vezes superior a essa variação. Por exemplo um sismo de magnitude 5 apenas provoca alguma queda de mobiliário, enquanto um sismo de magnitude 7 provoca queda de pontes e barragens.

1. Qual a energia libertada pelo sismo registado com 8,9 na escala da Richter.
2. Resolva a equação em ordem à variável E.
3. Em 1 de Novembro de 1755 ocorreu um sismo em Lisboa. Sabendo que este sismo libertou $7,09 \times 10^{24}$ ergs de energia, qual foi a sua magnitude na escala de Richter?

Repare que, estes dois sismos, embora com energias distintas têm associadas magnitudes muito próximas.

4. Recorrendo a processos algébricos e se possível a uma calculadora gráfica analise:
 - a. Se a energia libertada por um sismo for 10 vezes maior que a de outro, qual é a diferença entre as respectivas magnitudes? (pode considerar por exemplo, energias de 10^{15} e 10^{16})
 - b. Cada acréscimo de uma unidade de magnitude, na escala de Richter, resulta da energia libertada ser multiplicada por um factor. Quanto é o valor desse factor? (pode considerar por exemplo, escalas de 5 e 6)

Nota: Para informação adicional poderás consultar na Internet dados organizados sobre muitos sismos. Por exemplo a base de dados "Significant Earthquake Database" em: http://www.ngdc.noaa.gov/seg/hazard/sig_srch.html, contém informação relativa a mais de 5000 sismos de grande intensidade decorridos desde há 4000 anos.

Nota: A exploração desta tarefa pressupõe a informação do exercício 1 da pág.3 do texto de apoio.

1. Para cada caso, escolha duas sucessões (x_n) e (y_n) de valores do domínio da função que tendam para **3**, a primeira por valores superiores e a segunda por valores inferiores e escreva as expressões dos termos gerais dessas sucessões.
2. Estude numericamente, com a calculadora, para cada caso, a sucessão $f_i(x_n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ completando a tabela seguinte e tirando conclusões.

n	x_n	$f_1(x_n)$	$f_2(x_n)$	$f_3(x_n)$	$f_4(x_n)$
1					
5					
10					
50					
100					
1000					
10000					

3. Estude numericamente, com a calculadora, para cada caso, a sucessão $f_i(y_n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ completando a tabela seguinte e tirando conclusões.

n	y_n	$f_1(y_n)$	$f_2(y_n)$	$f_3(y_n)$	$f_4(y_n)$
1					
5					
10					
50					
100					
1000					
10000					

4. Compare os resultados obtidos em 2 e 3 e tente justificar a sua conjectura do exercício 1
5. Formalmente, segundo a definição de Heine, diz-se que: “*f* tende para *b*, quando *x* tende para *a* se, para qualquer sucessão de valores do domínio de *f* convergente para *a*, por valores diferentes de *a*, a correspondente sucessão de imagens $f(x_n)$ convergente para *b*. ”
Utilizando esta definição e as propriedades que conhece de limites de sucessões prove a conjectura que fez acerca do limite da função f_2 no ponto de abscissa **3**.
6. Considere, à sua escolha, dois infinitamente grandes positivos (a_n) e (b_n) . O que pode dizer de $\lim f_4(a_n)$ e de $\lim f_4(b_n)$?

Material de apoio 6: Teorema de Bolzano

Considera as seguintes funções reais de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} 18x^2 + 5x, & \text{se } x < 1 \\ 2x + 22, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}; \quad g(x) = x^3 + 8x$$

1. Determine as imagens das funções f e g nos extremos do intervalo $[0;2]$.
2. Estude a continuidade das funções f e g no intervalo $[0;2]$.
3. Considere apenas a função f . Justifique a veracidade da afirmação: qualquer valor entre 22 e 26 é correspondido por um objecto no intervalo $[0;2]$.
4. Do estudo efectuado e sem a resolver, conjecture em relação à existência de solução, no intervalo $[0;2]$, para a equação $g(x) = 3$
5. Estime, com aproximação a 1c.d., um valor de x , **positivo**, para a solução da equação $g(x) = 0$.
Sugestão: comece por determinar $g(1)$.
6. Considere, novamente, apenas a função f . Indique um valor para k de modo que a equação $f(x) = k$ seja impossível.

Na página 20 do folheto está enunciado o Teorema de Bolzano Cauchy que está relacionado com a exploração de conceitos deste material de apoio. Depois da leitura e, eventualmente, resolução de alguns exercícios de aplicação, poderá utilizá-lo no seguinte modelo matemático.

7. O Joaquim está doente e como tal foi-lhe administrado uma certa dose de antibiótico às 9 horas da manhã. Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada do medicamento a concentração de antibiótico, medida em miligramas por litro de sangue, é dada por : $J(t) = 2t^3 \cdot e^{-0,7t}$.

A variável t designa o tempo, medido em horas, que decorre desde o instante em que é tomado, ($t \in [0,12]$).

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

7.1. Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Joaquim, quinze minutos depois de ele o ter tomado. Apresente o resultado, arredondado às centésimas.

7.2. Utilize o Teorema de Bolzano Cauchy para mostrar que houve um instante, entre as 9h30min e as 10h, em que a concentração do antibiótico no sangue do Joaquim foi de 0,5 mg/l.

desafio. Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose de medicamento.

Numa breve composição, indique:

- o valor da concentração máxima, bem como, a que horas ocorreu (resultado em horas e minutos);
- quando deverá a Joaquim tomar nova dose de antibiótico.

Nota: na resolução desta questão, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos e a identificação de pontos que julgue necessários (coordenadas arredondadas às décimas).

Teorema:

Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

Demonstração:

Seja f uma função derivável num ponto x_0 do seu domínio:

Então, existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k$$

Provar que f é contínua em x_0 equivale a mostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Quando $x \rightarrow x_0$, tem-se $(x - x_0) \neq 0$ e, assim, a diferença $f(x) - f(x_0)$ pode ser representada na forma:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0)$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = k \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Provou-se que $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, ou seja,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, o que permite concluir que a função f é contínua em x_0 .

Nota:

O teorema demonstrado também garante que, se uma função é descontínua num ponto, então, necessariamente, não é derivável nesse ponto.

Basta observar que, se fosse derivável, por aplicação do teorema, teria que ser contínua no ponto.

Informação complementar:

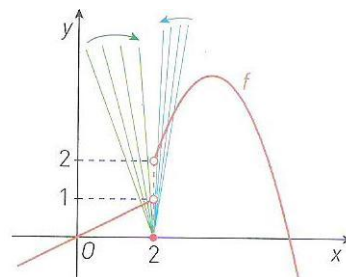
Se $a(x) \Rightarrow b(x)$ se verifica, então também se verifica que $\sim b(x) \Rightarrow \sim a(x)$.

A esta propriedade dá-se o nome de Lei da Conversão.

Exemplo 1: Considere a função f tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 7x - 8 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

A função é descontínua em $x=2$.



Ao estudar a derivabilidade nesse ponto, é necessário estudar as derivadas laterais:

$$\begin{aligned} f'(2^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ f'(2^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(2+h)^2 + 7(2+h) - 8 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 3h + 2}{h} = +\infty \end{aligned}$$

Por outro lado:

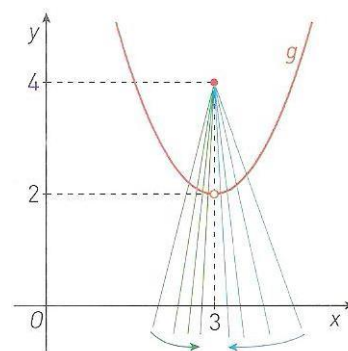
$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2+h}{2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2+h}{2h} = -\infty$$

A função não é derivável no ponto $x=2$.

Exemplo 2: Seja a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} (x-3)^2 + 2 & \text{se } x \neq 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

A função é descontínua em $x=3$.



Repare que, à medida que x tende para 3 por valores à esquerda, as inclinações das semitangentes tendem para 90° por valores inferiores. Quando x tende para 3 por valores à direita, as inclinações das semitangentes tendem para 90° por valores superiores.

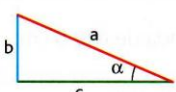
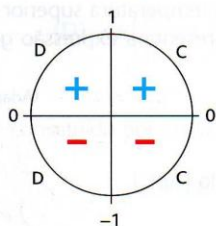
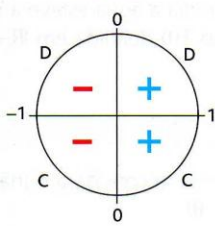
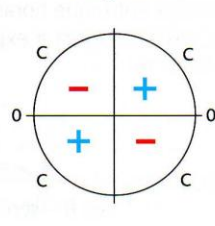
Assim, tem-se:

$$g'(3^-) = +\infty \quad \text{e} \quad g'(3^+) = -\infty$$

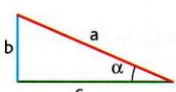
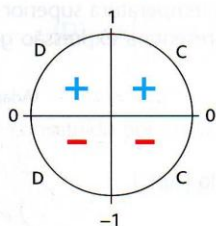
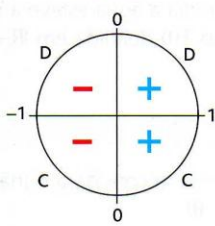
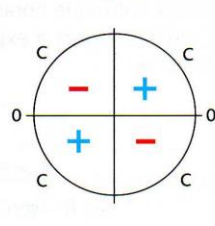
(Justifique, recorrendo à definição de derivada num ponto.)

A função não é, por isso, derivável no ponto $x=3$.

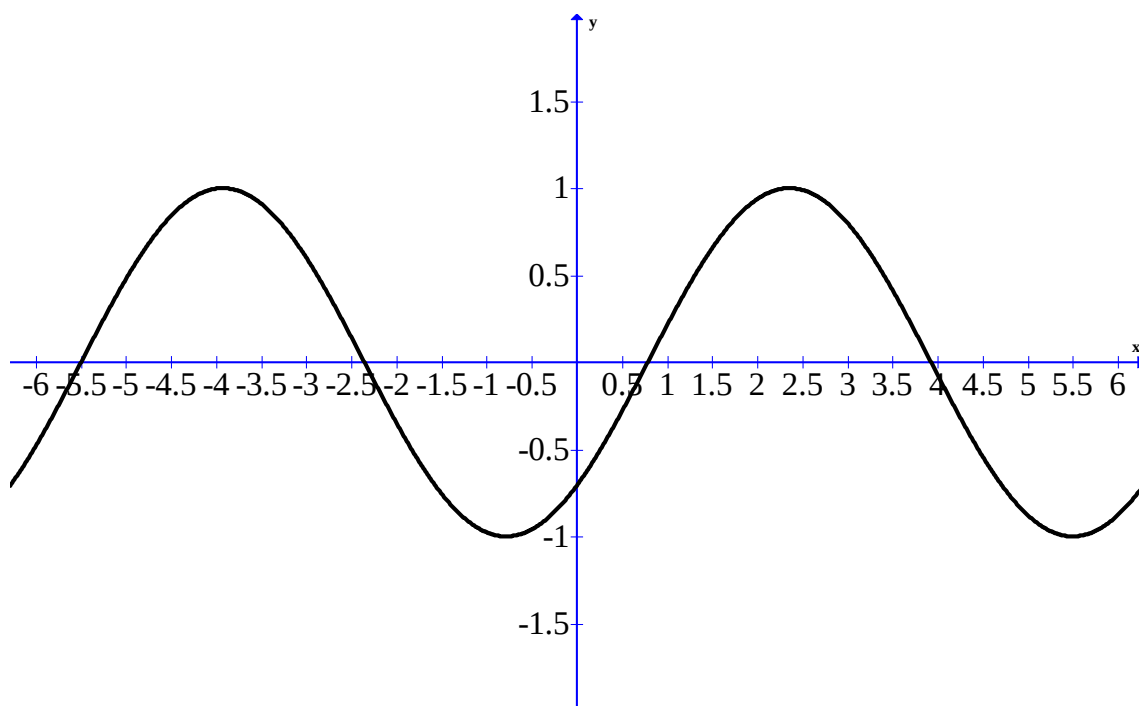
Material de apoio 8: Revisão sobre conceitos de trigonometria

Relações num triângulo rectângulo	 $\frac{b}{a} = \text{sen } \alpha \quad \frac{c}{a} = \cos \alpha \quad \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha$
Fórmulas fundamentais	$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$
Alguns valores exactos	$\begin{array}{lll} \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 \\ \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{array}$
Variação e sinal nos 4 quadrantes	seno  co-seno  tangente 
Relação entre as funções de α e as de $-\alpha$ e de $\pi \pm \alpha$	$\begin{array}{lll} \text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha & \text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha & \text{sen } (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha \\ \cos (-\alpha) = \cos \alpha & \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha & \cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha & \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha & \text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha \end{array}$
Relação entre as funções de ângulos complementares	$\begin{array}{ll} \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha & \text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{sen } \alpha & \end{array}$
Equações trigonométricas	Reduzir à forma: $\begin{array}{l} \text{sen } x = \text{sen } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x = -\alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{tg } x = \text{tg } \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$
Fórmulas da soma, diferença, e da duplicação	$\begin{array}{ll} \text{sen } (a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \text{sen } b \cos a; & \text{sen } (2a) = 2\text{sen } a \cos a \\ \cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen } a \text{sen } b; & \cos (2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \\ \text{tg } (a \pm b) = \frac{\text{tg } a \pm \text{tg } b}{1 \mp \text{tg } a \text{tg } b} & \text{tg } (2a) = \frac{2 \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \end{array}$

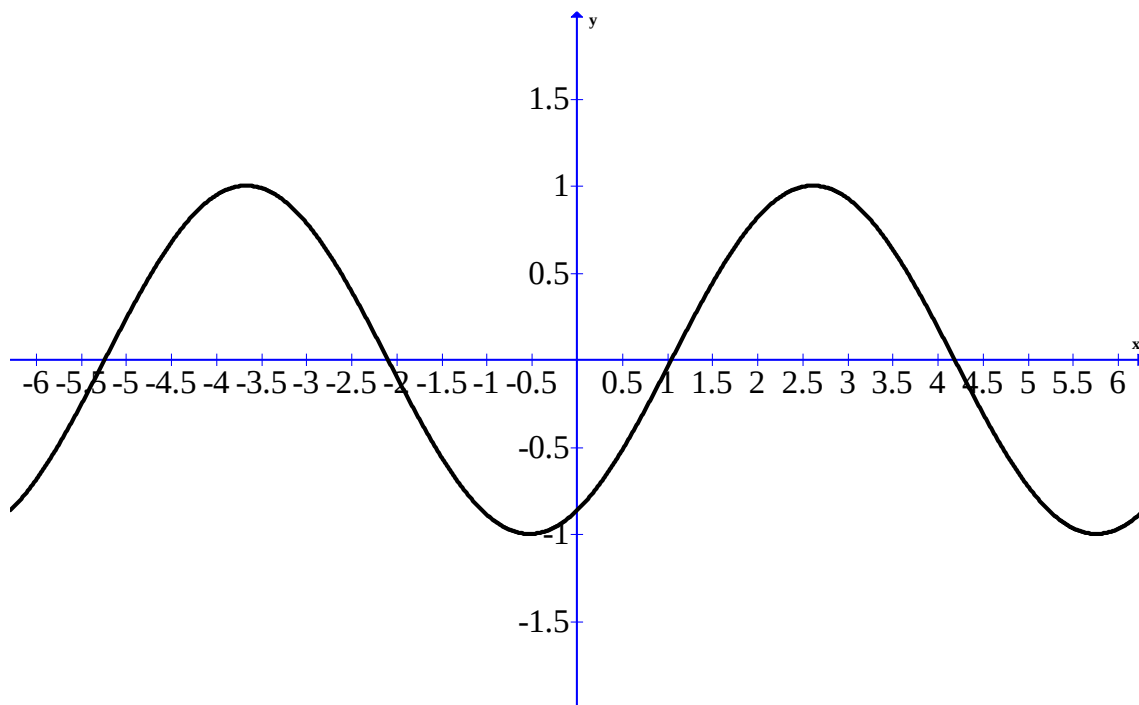
Material de apoio 8: Revisão sobre conceitos de trigonometria

Relações num triângulo rectângulo	 $\frac{b}{a} = \text{sen } \alpha \quad \frac{c}{a} = \cos \alpha \quad \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha$
Fórmulas fundamentais	$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$
Alguns valores exactos	$\begin{array}{lll} \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 \\ \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{array}$
Variação e sinal nos 4 quadrantes	seno  co-seno  tangente 
Relação entre as funções de α e as de $-\alpha$ e de $\pi \pm \alpha$	$\begin{array}{lll} \text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha & \text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha & \text{sen } (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha \\ \cos (-\alpha) = \cos \alpha & \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha & \cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha & \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha & \text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha \end{array}$
Relação entre as funções de ângulos complementares	$\begin{array}{ll} \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha & \text{tg } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{sen } \alpha & \end{array}$
Equações trigonométricas	Reduzir à forma: $\begin{array}{l} \text{sen } x = \text{sen } \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \vee x = -\alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{tg } x = \text{tg } \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$
Fórmulas da soma, diferença, e da duplicação	$\begin{array}{ll} \text{sen } (a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \text{sen } b \cos a; & \text{sen } (2a) = 2\text{sen } a \cos a \\ \cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen } a \text{sen } b; & \cos (2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \\ \text{tg } (a \pm b) = \frac{\text{tg } a \pm \text{tg } b}{1 \mp \text{tg } a \text{tg } b} & \text{tg } (2a) = \frac{2 \text{tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \end{array}$

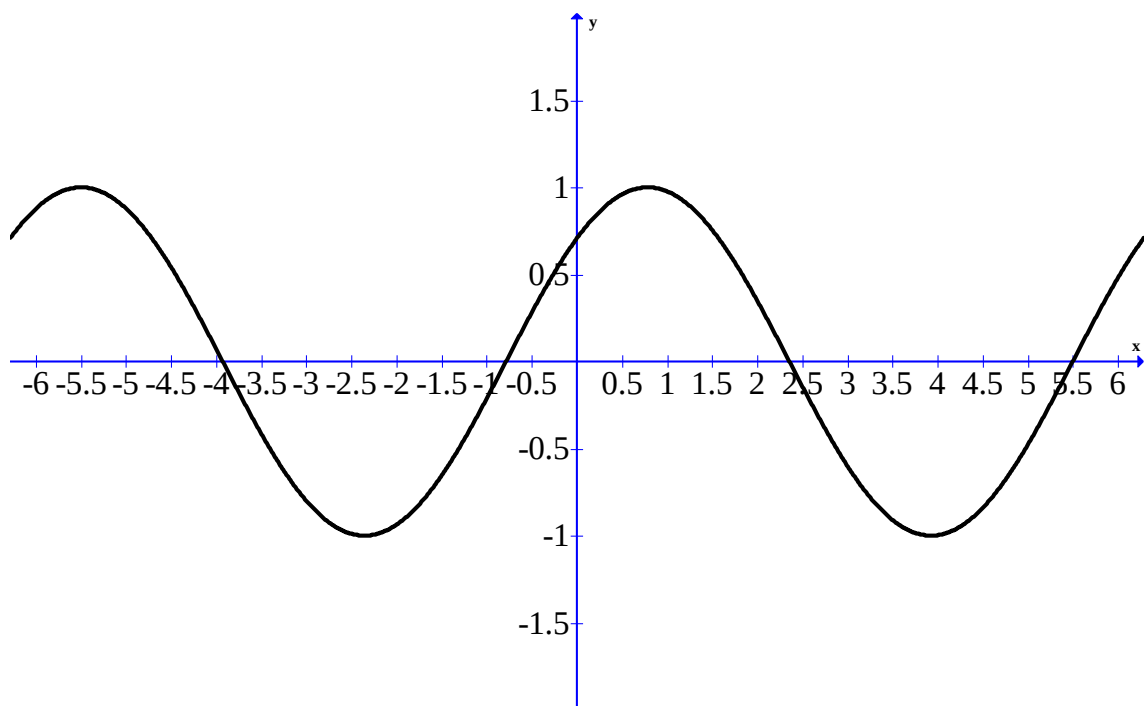
Material de apoio 9: Transformações função seno



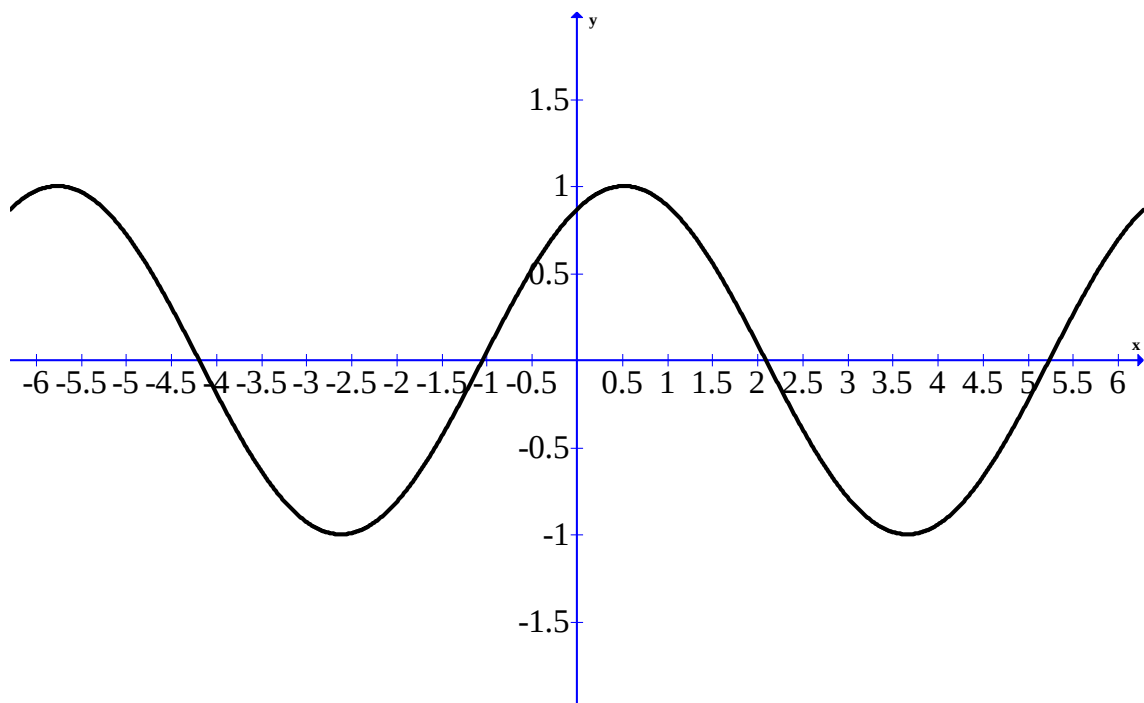
$$y_1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$



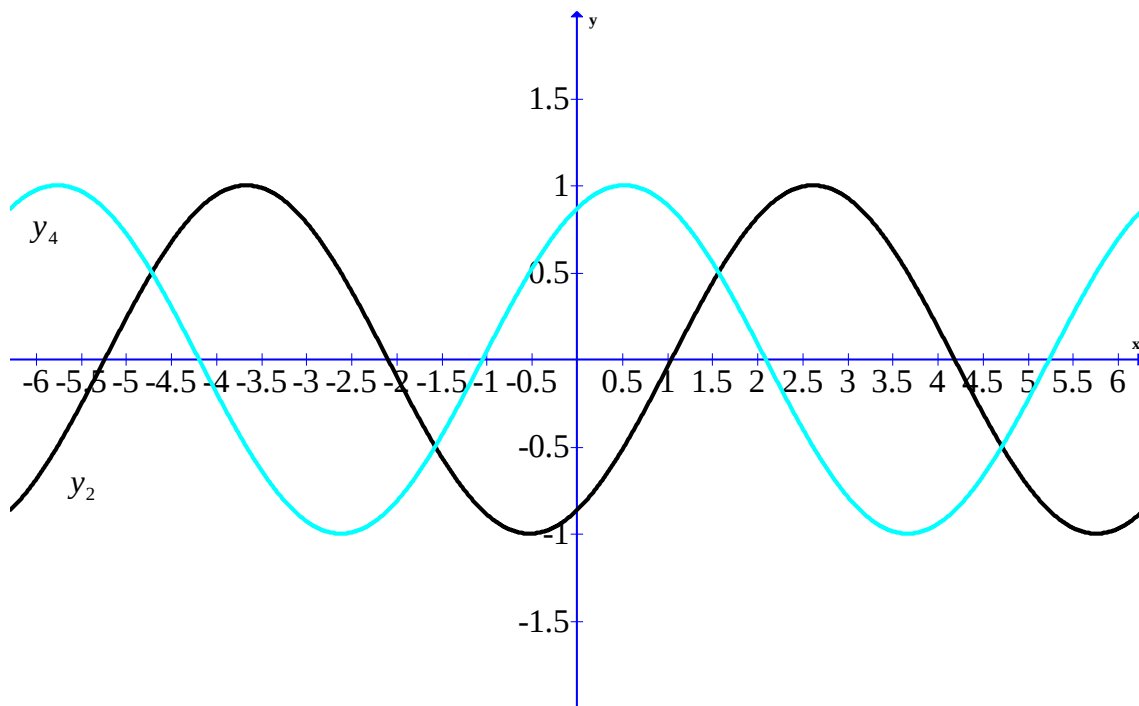
$$y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$



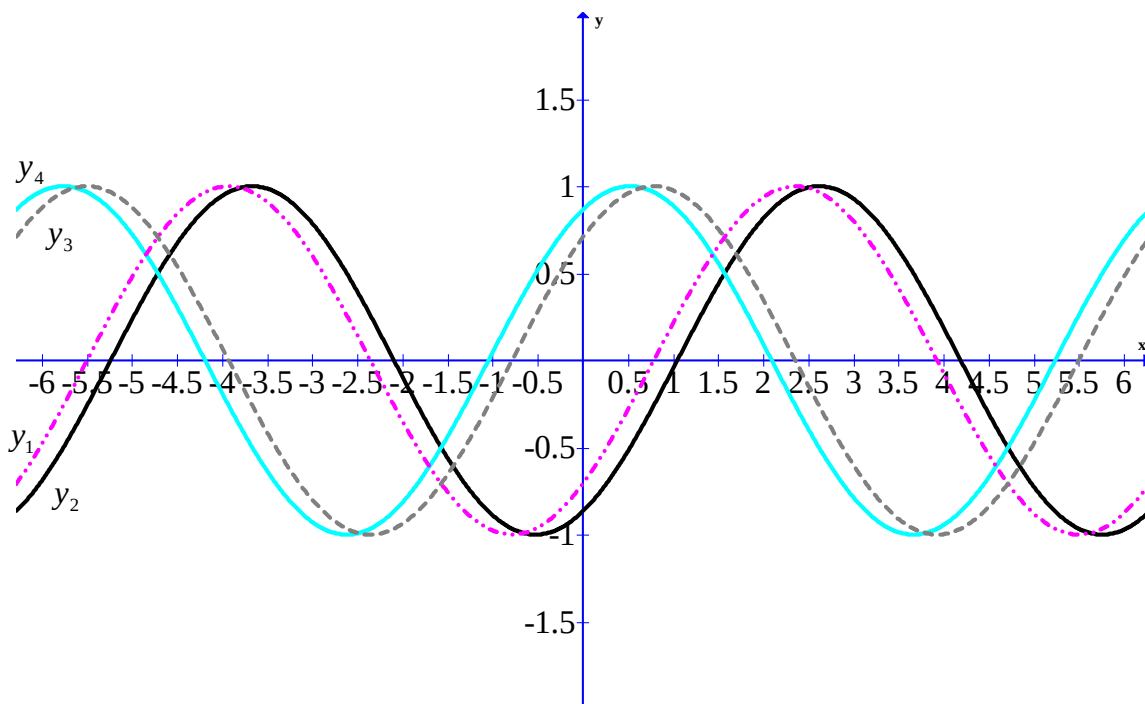
$$y_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$



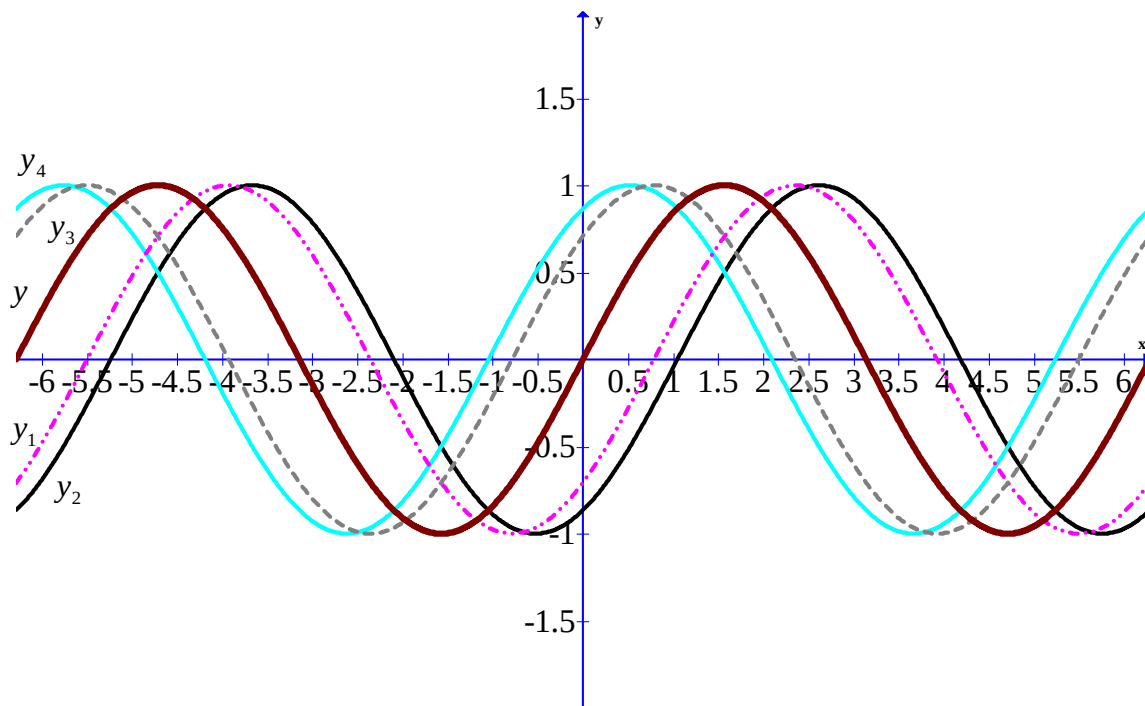
$$y_4 = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad y_4 = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$y_1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad y_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y_4 = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$



$$y_1 = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad y_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y_4 = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \quad y = \sin(x)$$

Repare que:

$$\frac{\pi}{4} \approx 0,7854(4c.d.); \quad \frac{\pi}{3} \approx 1,0472(4c.d.)$$



Os movimentos relativos da Terra, Lua e Sol provocam um número elevado de forças periódicas geradoras de maré. A fórmula seguinte relaciona a altura da maré a partir das constantes determinadas através de estudos astronómicos:

$$h(t) = A_0 + \sum_i^n f_i H_i \cos[w_i t + (V_0 + u)_i - g_i]$$

onde $h(t)$ é a altura de água no instante t , os valores w_i representam as velocidades angulares das ondas constituintes, $V_0 + u$ é o seu argumento inicial, isto é o argumento na maré de equilíbrio para o instante inicial da série de dados e A_0 representa o nível médio do porto.

A fórmula apresentada tem a particularidade de ser válida para qualquer tipo de maré. Contudo a previsão de marés é algo complexo. Por exemplo o programa de previsão utilizado no Instituto Hidrográfico português utiliza 62 constituintes da maré astronómica.

Apesar desta universalidade há factores que fazem com que as características das marés num dado local sofram alterações. É o exemplo de obras portuárias e fenómenos como a erosão e os assoreamentos. Por este motivo é muito importante que as tais constantes sejam recalculadas com regularidade.

(Adaptado de <http://www.hidrografico.pt/glossario-cientifico-mares.php>)

1. A que horas o mar voltará a estar cheio? E haverá outra maré cheia com a mesma altura?

Para ficar a conhecer melhor o horário das marés no local onde vive ao longo do ano, organize um estudo matemático com base em dados reais. Para tal:

- Recolha dados suficientes sobre as horas exactas da preia-mar (mar cheio) e baixa-mar (mar seco) e registe-os na sua calculadora gráfica ou computador (por exemplo, consulte o site <http://www.hidrografico.pt/s.-tome-e-principe.php> e escolha o porto mais perto da cidade onde lives).
- Organize os dados e escreva-os no sistema decimal, justificando a pertinência desta transformação.
- Visualize a representação gráfica dos pontos correspondentes aos dados e discuta-a. É como esperava? Algo o surpreende?
- Procure encontrar um modelo matemático adequado para traduzir altura da maré, justificando a razão que o leva a optar pelo tipo de função escolhida.

2. Embora sem conhecimento profundo de fórmulas, gráficos e tabelas, os pescadores conseguem prever os horários das marés com uma precisão suficientemente grande para fazerem do mar o seu sustento.

- Recolha informação junto de pescadores para saber os cálculos que efectuam para fazerem previsão das marés.
- Verifique a veracidade dos cálculos com base no modelo encontrado.
- Conjecture possíveis justificações matemáticas que sustentem as previsões dos pescadores.

¹ Tarefa realizada no âmbito do projecto Matemática do Planeta Terra 2013



Todos sabemos que o Sol nasce e se põe todos os dias. Também sabemos que o horário a que ele nasce e se põe vai variando ao longo do ano, e consequentemente, vai variando também a quantidade de tempo diário em que dispomos de luz solar. No entanto, conhecer os horários do Sol continua a ser muito importante em diversos domínios.

É ao estudo das variações associadas à duração do dia que nos vamos dedicar.

1. Sabe a que horas nasceu hoje o Sol? E haverá outro dia do ano em que o Sol nasça à mesma hora?

Para ficar a conhecer melhor o horário do nascimento do Sol na capital de São Tomé e Príncipe ao longo do ano, organize um estudo matemático com base em dados reais. Para tal:

a. Recolha dados suficientes sobre as horas exactas do nascer do Sol e registe-os na sua calculadora gráfica ou computador (por exemplo, consulta o site <http://br.weather.com> e escolha a cidade de São Tomé).

b. Organize os dados e escreva-os no sistema decimal, justificando a pertinência desta transformação.

c. Visualize a representação gráfica dos pontos correspondentes aos dados e discuta-a. É como esperava? Algo o surpreende?

d. Procure encontrar um modelo matemático adequado para traduzir o horário do nascer do Sol, justificando a razão que te leva a optar pelo tipo de função escolhida.

2. Talvez saiba melhor a que horas se põe o Sol ... De qualquer modo, realize um estudo semelhante ao do nascer do Sol para ficar a conhecer com rigor o horário do pôr do Sol em São Tomé ao longo do ano. Siga as fases indicadas na questão 1.

3. Vamos agora estudar a duração do dia ao longo do ano, entendendo-a como o tempo que medeia entre o momento em que o Sol nasce e aquele em que o Sol se põe.

a. Na realidade, o tempo de claridade diário é maior do que o que acima definimos como duração do dia. Porquê?

b. Discuta de que forma pode utilizar os modelos encontrados em 1 e em 2 para construir um modelo da duração do dia e teste a sua ideia na calculadora ou computador.

d. Sabe com certeza qual é o maior dia do ano, isto é, aquele em que existe mais tempo de luz solar. Coincide com o do seu modelo? Quantas horas de luz solar tem?

e. É do conhecimento geral que o dia mais curto do ano é 22 de Dezembro e que, a partir daí, os dias começam a aumentar. A maior parte das pessoas pensa que os dias aumentam porque o Sol nasce mais cedo e põe-se mais tarde. Será verdade?

4. Escolha um outro lugar da Terra e organize um estudo semelhante aos anteriores que lhe permita fazer comparações com a sua região e, no final, discutir com a turma o efeito da latitude e longitude na duração do dia. Pode consultar o sítio: http://mat.absolutamente.net/ra_trig_dia.php, onde existe uma aplicação em java sobre o fenómeno em estudo.

² Tarefa adaptada da secção de materiais para aula de Matemática das revistas Educação & Matemática n.º 89, *Quanto tempo dura o dia?* e do sítio mat.absolutamente.net/ no âmbito do projecto Matemática do Planeta Terra 2013.