

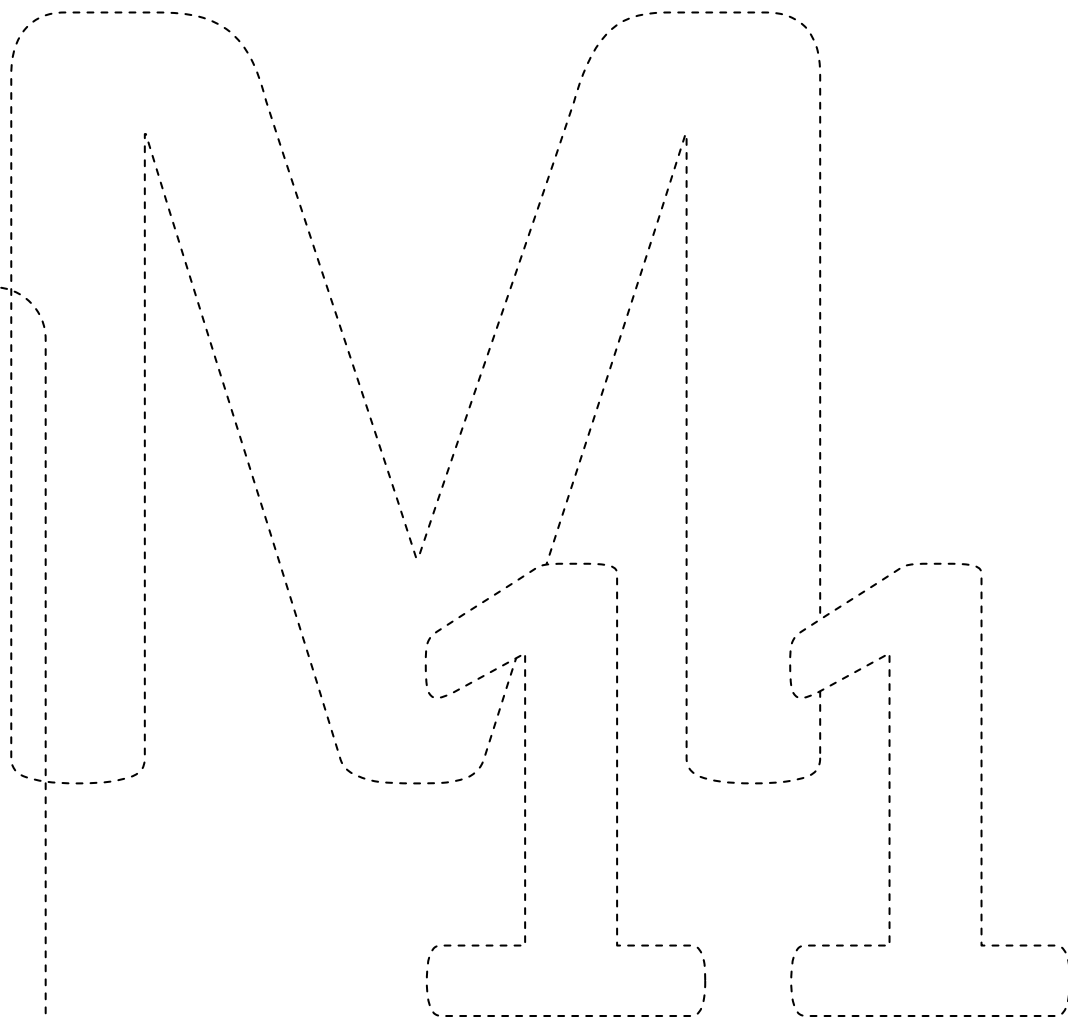
TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

11ª Classe – 2º Ciclo

MATEMÁTICA



Ministério da Educação
Cultura e Formação



ÍNDICE

Tema 1 – Geometria	3
▪ Resolução de Problemas Envolvendo Triângulos. Uso da Calculadora	4
▪ Ângulo e Arco Generalizado // Funções e Equações Trigonométricas	9
▪ Produto Escalar no Plano e no Espaço	21
▪ Complementos de Geometria Analítica no Plano e no Espaço	24
▪ Programação Linear	31
Tema 2 – Funções	33
▪ Revisão: Resolução de Problemas com Funções Polinomiais	33
▪ Funções Racionais	34
▪ Funções Definidas por 2 ou Mais Ramos	40
▪ Operações com Funções	41
▪ Funções com Radicais Quadráticos ou Cúbicos	44
▪ Inversa de uma Função	46
Tema 3 – Sucessões	48
▪ Sucessões. Definições	49
▪ Progressões Aritméticas	54
▪ Progressões Geométricas	57
▪ A sucessão de Termo Geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	61
▪ Limites de Sucessões	62
Bibliografia	70

TEMA 1

GEOMETRIA

INTRODUÇÃO

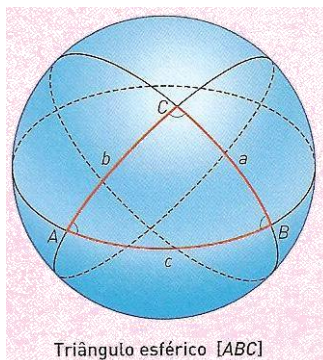
A trigonometria tem na sua origem a aplicação de processos matemáticos eminentemente práticos para determinar distâncias que não podiam ser avaliadas directamente.

Curiosidade:

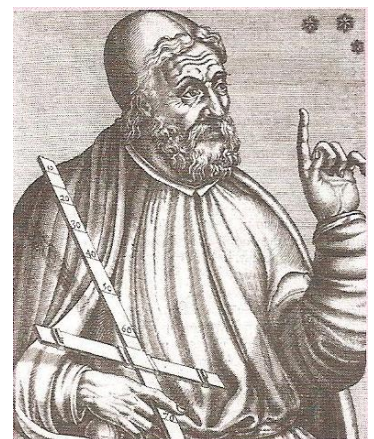
A palavra trigonometria deriva do grego, das palavras *trigonos* (triângulo) e *metrûn* (medida).

Assim etimologicamente, *trigonometria* significa medidas de triângulos.

Actualmente, para além da trigonometria estar relacionada com a resolução de problemas envolvendo triângulos, aparece associada a certas funções de ângulos, chamadas funções circulares, goniométricas ou trigonométricas. O matemático suíço Euler, na sua obra denominada *Introductio*, de 1748, fez o estudo analítico das funções trigonométricas que se tornou fundamental para o estudo de fenómenos periódicos, como, por exemplo, vibrações, movimentos ondulatórios e planetários.



Referência Histórica



Foi Ptolomeu (100 – 170 d. c.), astrónomo grego, que influenciou o desenvolvimento da trigonometria durante séculos. A sua obra *Almagesto* contém uma tabela de cordas que pode ser considerada equivalente a uma tabela de senos.

Curiosidade:

Quadrante

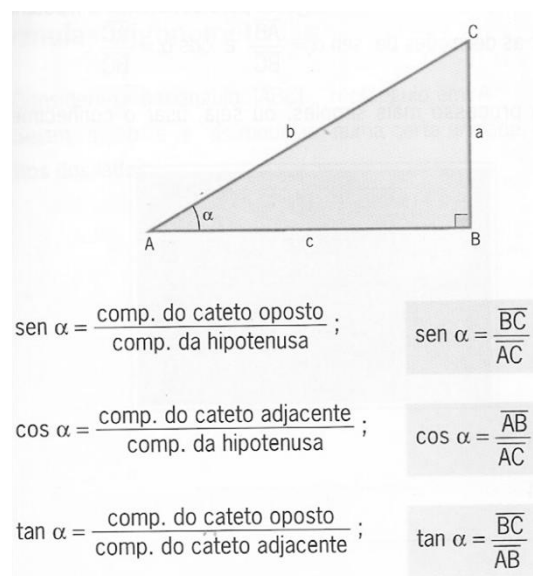
Instrumento que serve para medir ângulos ou a altura angular de um ponto. Foi utilizado pelos portugueses nos descobrimentos. Com o quadrante é possível medir a altura de uma árvore, de uma casa, ou outro ponto elevado.



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO TRIÂNGULOS

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM TRIÂNGULO RECTÂNGULO. USO DA CALCULADORA

Para qualquer triângulo rectângulo as três razões trigonométricas básicas de um ângulo agudo são:



Exercícios:

1. Determine com duas casas decimais:

1.1. $\sin 25^\circ$ 1.2. $\cos 37^\circ$ 1.3. $\tan 85^\circ$

2. Sendo α um ângulo agudo, explique por que é que $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ são números positivos inferiores à unidade e $\tan \alpha$ pode ser igual a um número positivo qualquer.

3. Determine α , sabendo que:

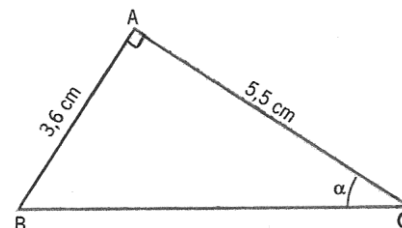
3.1. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$ 3.2. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

3.3. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ 3.4. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exemplo: De acordo com os dados da figura, determinemos, com duas casas decimais, $\tan \alpha$, $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$:

Através do teorema de Pitágoras vamos calcular o comprimento da hipotenusa $\overline{BC}$.

$$\begin{aligned} (\overline{BC})^2 &= (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 \\ \Leftrightarrow (\overline{BC})^2 &= 3,6^2 + 5,5^2 \Leftrightarrow (\overline{BC})^2 = 12,96 + 30,25 \\ \Leftrightarrow (\overline{BC})^2 &= 43,21 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{43,21} \Leftrightarrow \overline{BC} = 6,5734 \end{aligned}$$



Agora basta aplicar as fórmulas das razões trigonométricas:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3,6}{6,5734} = 0,5476 \approx 0,55$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5,5}{6,5734} = 0,8367 \approx 0,84$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{3,6}{5,5} \approx 0,65$$

Com a ajuda da calculadora podemos resolver este exercício de outra forma: Começamos por determinar o valor de α :

$$\tan \alpha = \frac{3,6}{5,5} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3,6}{5,5}\right) \Leftrightarrow \alpha = 33,2066^\circ$$

teclas: |SHIFT| |tan|

Continuando a usar as razões trigonométricas na calculadora:

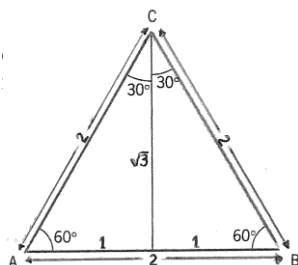
$$\sin \alpha = \sin(33,21^\circ) = 0,5476 \approx 0,55 \quad \cos \alpha = \cos(33,21^\circ) = 0,8367 \approx 0,84$$

tecla: |sin|

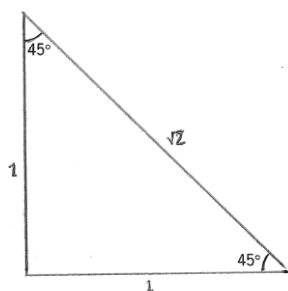
tecla: |cos|

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE 30° , 45° E 60°

Considere-se o triângulo equilátero [ABC] de lado 2 unidades de comprimento.



Considere-se o triângulo rectângulo isósceles, tendo os catetos 1 unidade de comprimento.



Analisando as figuras temos:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Como valores de referência devemos **saber determinar e memorizar** as razões trigonométricas de 30° , 45° e 60°

Exercícios:

4. Simplifique a expressão:

$$\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - 2\sin 45^\circ + \tan 30^\circ$$

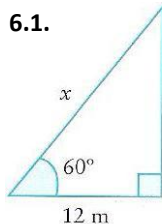
5. Mostre que:

$$5.1. \frac{\sin 30^\circ \times \tan 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 1$$

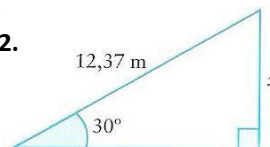
$$5.2. \frac{\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 45^\circ$$

6. Determine o valor de x e, sempre que se justifique, o valor aproximado com duas casas decimais, sabendo que:

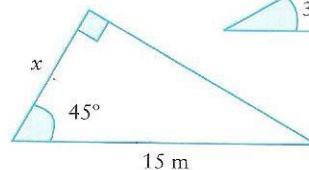
6.1.



6.2.



6.3.



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS USANDO AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Exemplos:

1. A figura representa o trajeto de um barco na travessia de um rio. Com a ajuda dos dados da figura determinemos a largura do rio.

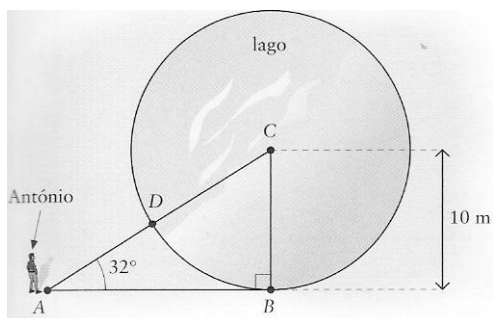
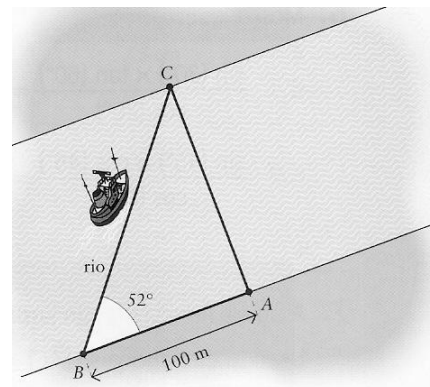
Determinar a largura do rio é o mesmo que determinar $\overline{AC}$.

Do triângulo [ABC] conhece-se o comprimento do cateto [AB] e a amplitude do ângulo ABC e pretende-se determinar o cateto [AC]. A tangente é a razão trigonométrica que relaciona os dois catetos.

Tem-se:

$$\tan 52^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \tan 52^\circ = \frac{\overline{AC}}{100} \Leftrightarrow \overline{AC} = \tan 52^\circ \times 100 \Leftrightarrow \overline{AC} = 127,99$$

Resposta: O rio tem de largura 128m.



2. Na figura está representado um lago circular com 10 m de raio e centro C. O António está no ponto A e a recta AB é tangente à circunferência em B e, portanto, [ABC] é um triângulo rectângulo em B. Calculemos a que distância está o António do lago.

Determinar a distância do António ao lago é o mesmo que determinar $\overline{AD}$.

Comecemos por determinar $\overline{AC}$ utilizando o seno.

$$\sin 32^\circ = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sin 32^\circ = \frac{10}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{10}{\sin 32^\circ} \Leftrightarrow \overline{AC} = 18,87$$

$$\text{Então: } \overline{AD} = \overline{AC} - 10 = 18,87 - 10 = 8,87$$

Resposta: O António está a 8 metros e 87 centímetros do lago.

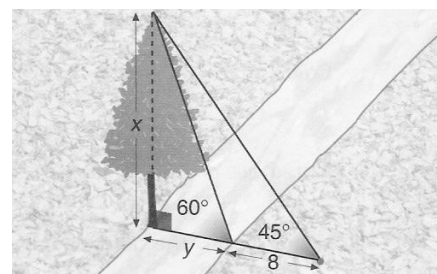
3. Da margem de um rio, observa-se a copa de uma árvore situada na outra margem, segundo um ângulo de 60° . A 8 metros da margem o ângulo de observação é de 45° . Calculemos a altura da árvore e a largura do rio.

A altura da árvore está representada por x e a largura do rio por y .

Usemos as razões trigonométricas:

$$\begin{cases} \tan 60^\circ = \frac{x}{y} \\ \tan 45^\circ = \frac{x}{y+8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = \frac{x}{y} \\ 1 = \frac{x}{y+8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{3} \\ y+8 = y\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{3} \\ y - y\sqrt{3} = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{3} \\ y(1 - \sqrt{3}) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{-8}{1 - \sqrt{3}}\right) \times \sqrt{3} \\ y = \frac{-8}{1 - \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18,9 \\ y = 10,9 \end{cases}$$



Resposta: A altura da árvore é 18,9 m e a largura do rio é 10,9 m.

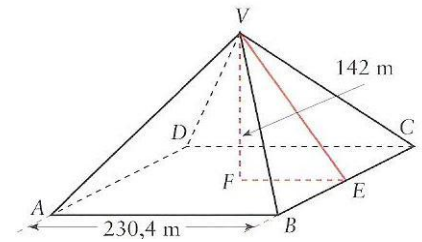
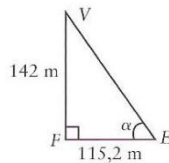
4. A Grande Pirâmide do Egito tem a base quadrada de lado 230,4 m e altura 142 m.

4.1. Determinemos amplitude do ângulo VEF.

O triângulo [VEF] é rectângulo em F.

Utilizando a tangente:

$$\tan \alpha = \frac{142}{115,2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{142}{115,2} \right) \Leftrightarrow \alpha = 50,95^\circ$$



4.2. Determinemos a área lateral da pirâmide.

Para calcular a área de uma face lateral é necessário determinar a altura do triângulo [BCV].

Podemos utilizar o Teorema de Pitágoras ou o ângulo determinado anteriormente.

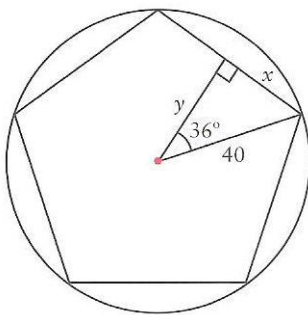
$$\sin \alpha = \frac{142}{VE} \Leftrightarrow VE = \frac{142}{\sin(50,9587)} \Leftrightarrow VE \approx 182,8525 \text{ m}$$

$$\text{Área triângulo [BCV]} = \frac{230,4 \times 182,8525}{2} \approx 21064,608 \text{ m}^2$$

$$\text{Área lateral} = 4 \times \text{Área triângulo [BCV]}$$

$$\text{Área lateral} = 4 \times 21064,608$$

$$\text{Área lateral} \approx 84258,4 \text{ m}^2$$



5. Um pentágono regular está inscrito num círculo de raio 40cm.

Determinemos o perímetro e a área do pentágono.

A primeira coisa a fazer neste tipo de problema é desenhar um triângulo como o da figura e de seguida calcular a amplitude dos ângulos internos.

$$360^\circ : 5 = 72^\circ$$

$$72^\circ : 2 = 36^\circ$$

De seguida calculamos as medidas que nos interessam com a ajuda das razões trigonométricas

$$\sin 36^\circ = \frac{x}{40} \Leftrightarrow x = 40 \times \sin 36^\circ$$

$$\cos 36^\circ = \frac{y}{40} \Leftrightarrow y = 40 \times \cos 36^\circ$$

$$\text{Perímetro pentágono é: } 5 \times (2x) = 10 \times 40 \sin 36^\circ \approx 235,1 \text{ cm}$$

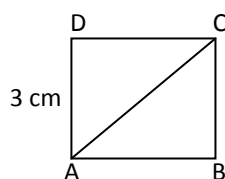
$$\text{Área pentágono é: } 5 \times \left(\frac{2x \times y}{2} \right) = 5 \times 40 \sin 36^\circ \times 40 \cos 36^\circ \approx 3804,23 \text{ cm}^2$$

Na resolução de problemas aplicando trigonometria, pode ajudar seguir as seguintes recomendações:

1. Depois da leitura cuidada do enunciado desenhe uma figura onde seja possível colocar a informação, respeitando quanto possível a escala.
2. Use letras para representar a incógnita ou incógnitas e coloque-as também na figura.
3. De acordo com os dados e as incógnitas decida quais as razões trigonométricas ou fórmulas que vai utilizar (tangente quando a relação em causa é entre dois catetos, seno quando a relação em causa é entre a hipotenusa e o cateto oposto e co-seno quando a relação em causa é entre a hipotenusa e o cateto adjacente).
4. Resolva o problema e pense se a resposta que vai dar é adequada ao contexto real ou geométrico apresentado (valor aproximado ou valor exacto).

Exercícios:

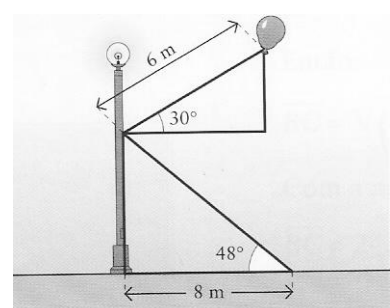
7. Na figura [ABCD] é um quadrado de lado 3 cm. [AC] é uma das diagonais do quadrado.



7.1 Determine $\overline{AC}$.

7.2 Usando a figura determine $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ e $\tan 45^\circ$.

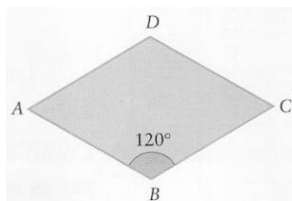
8. Observe a figura e, de acordo com os dados, determine a distância a que o balão está do chão.



Exercícios:

9. Na figura [ABCD] representa um losango de perímetro 40 cm.

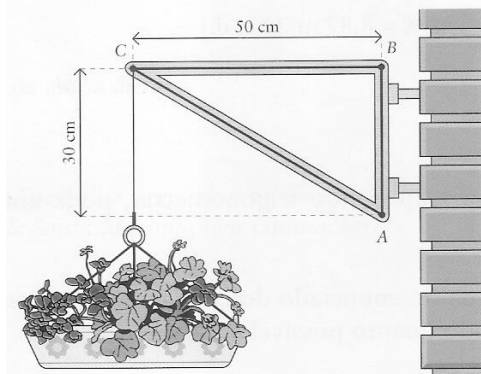
Sabendo que $\hat{A}BC = 120^\circ$, determine:



9.1 $\hat{B}CD$

9.2 O valor exacto da área do losango.

10. Na parede de uma casa encontramos um suporte de um vaso de flores com a forma de um triângulo rectângulo como se mostra na figura.

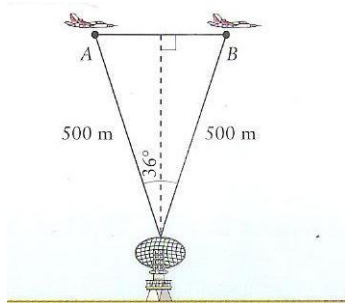


De acordo com os dados da figura, determine:

10.1. O perímetro do triângulo [ABC].

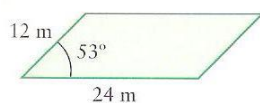
10.2. $\hat{B}CA$

11. Observe a figura e determine a distância entre aviões

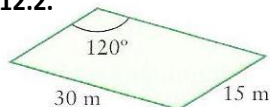


12. Determine a área de cada um dos seguintes paralelogramos.

12.1.

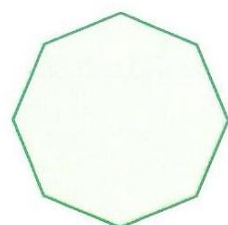
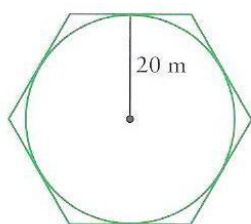


12.2.

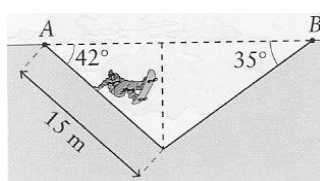


13. Determine a área de:

13.1. um octógono regular com 5m de lado;

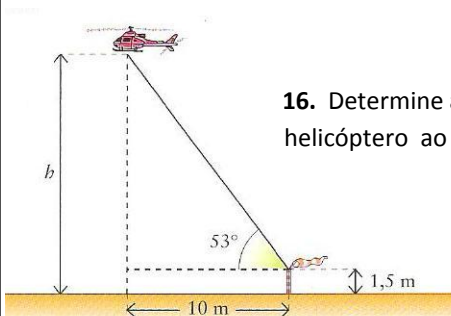
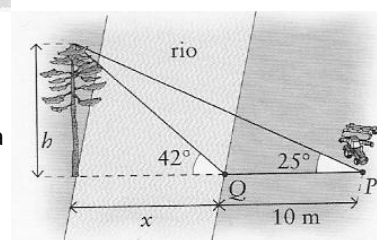


13.2. um hexágono circunscrito a um círculo de 20m de raio.



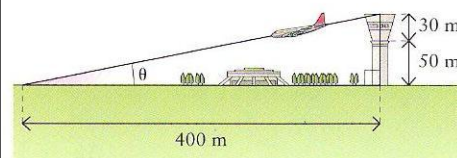
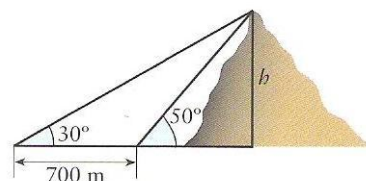
14. Observe a figura e determine a distância entre A e B.

15. De acordo com os dados da figura determine a largura do rio e a altura da árvore.



16. Determine a altura, h , do helicóptero ao solo.

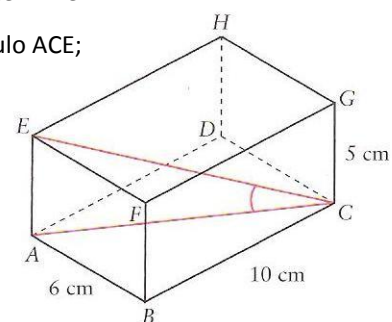
17. Determine a altura da montanha.



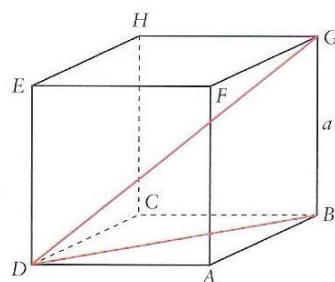
18. Determine o ângulo θ .

19. Observe a figura e determine:

19.1. a amplitude do ângulo ACE;

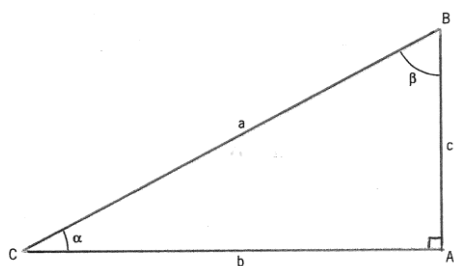


19.2. a amplitude do ângulo BDG no cubo de aresta a .



■ FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Considere-se o triângulo [ABC], rectângulo em A. Sejam a , b , e c as medidas, numa certa unidade, dos comprimentos dos lados.



> Ângulos complementares

α e β são ângulos complementares; $\alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow \beta = 90^\circ - \alpha$

Tem-se:

$$\sin \alpha = \frac{c}{a}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a}; \quad \cos \beta = \frac{c}{a};$$

Para um dado ângulo α , tem-se:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

> Relação entre seno, co-seno e tangente de um ângulo α

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \tan \alpha.$$

Para um dado ângulo α , tem-se:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

> Fórmulas secundárias

Partimos da fórmula fundamental:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(\sin \alpha \neq 0)$$

Dividindo ambos os membros por $\sin^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(\cos \alpha \neq 0)$$

Dividindo ambos os membros por $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

As fórmulas trigonométricas relacionam umas razões trigonométricas com as outras.

A fórmula $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ relaciona o seno com o co-seno do mesmo ângulo. Conhecendo o seno de α pode-se então conhecer o co-seno de α .

No seu conjunto, as fórmulas trigonométricas permitem determinar todas as razões trigonométricas de um ângulo α conhecendo-se apenas uma delas.

> Fórmula fundamental da trigonometria

No triângulo da figura, e de acordo com o teorema de Pitágoras, $c^2 + b^2 = a^2$

Dividindo ambos os membros por a^2 ,

$$\text{vem: } \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1$$

$$\text{mas, } \sin \alpha = \frac{c}{a}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{a};$$

Então:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1; \text{ ou } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Exercícios

20. Considere que $0 < \alpha < 90^\circ$:

20.1. Sabendo que $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ calcule $\cos \alpha$.

20.2. Sabendo que $\tan \alpha = 3,2$ calcule $\sin \alpha$.

20.3. Sabendo que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ calcule $\sin \alpha$ e

$\tan \alpha$.

21. Determine $\sin \alpha - 3 \cos \alpha$ sabendo que $\tan \alpha = \frac{5}{3}$, $0 < \alpha < 90^\circ$.

22. Determine $\sin \alpha$, sabendo que α é um ângulo agudo e que $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

23. Mostre que:

23.1. $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^6 = 1$

23.2. $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2 - (\cos \alpha + \sin \alpha)^2$

23.3. $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = 1 - \sin \alpha$

23.4. $\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

23.5. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

23.6. $1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

23.7. $\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$

23.8. $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$

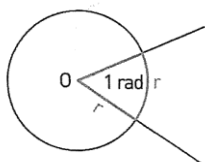
ÂNGULO E ARCO GENERALIZADO // FUNÇÕES E EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

▪ MEDIDAS DE ÂNGULOS. O RADIANO

Para medir a amplitude de um ângulo tem-se usado como unidade de medida o grau. O sistema que tem como unidade o grau é o sistema sexagesimal.

Neste sistema a: 1 grau correspondem 60' (60 minutos) ; $1^\circ = 60'$
1 minuto correspondem 60'' (60 segundos) ; $1' = 60''$

O sistema que tem como unidade de medida o radiano é o sistema circular.



Um **radiano (rad)** é a amplitude do ângulo ao centro a que corresponde um arco de comprimento igual ao raio da circunferência a que pertence.

Utilizando um transferidor pode-se concluir que: $57^\circ < 1\text{rad} < 58^\circ$.

Para determinar o valor exacto a que corresponde, no sistema sexagesimal, 1 radiano, podemos investigar quantas vezes uma circunferência contém o seu raio.

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{raio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

O raio "cabe" na circunferência 2π (6,28....) vezes.

Então: $1\text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$ ou $1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$

Assim:

Graus	360	180	90	60	45	30	1	$\frac{180}{\pi}$
Radianos	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{180}$	1

Exemplo 1: Passagem de graus a radianos

Converta em radianos: 135° ; 60° ; 112°

Resolução:

Para passar de graus a radianos, o melhor processo é utilizar uma proporção ou regra de três simples:

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ ----- } \pi \\ 135^\circ \text{ ----- } x \end{array} \quad x = \frac{135^\circ \times \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi \quad ; \quad 135^\circ = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$$

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ ----- } \pi \\ 60^\circ \text{ ----- } x \end{array} \quad x = \frac{60^\circ \times \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ ----- } \pi \\ 112^\circ \text{ ----- } x \end{array} \quad x = \frac{112^\circ \times \pi}{180^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{28}{45}\pi \quad ; \quad 112^\circ = \frac{28}{45}\pi \text{ rad}$$

Exemplo 2: Passagem de radianos a graus

Escreva em graus: $\frac{\pi}{3}\text{rad}$; $\frac{3\pi}{2}\text{rad}$; $\frac{5\pi}{4}\text{rad}$

Resolução:

Para passar de radianos a graus, o processo mais simples consiste em substituir π por 180° ($180^\circ = \pi \text{ rad}$)

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \quad \quad \frac{3\pi}{2} = \frac{3 \times 180^\circ}{2} = 270^\circ$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5 \times 180^\circ}{4} = 225^\circ$$

Exercícios:

24. Escreva em graus:

24.1. $\frac{5\pi}{6}\text{rad}$

24.2. $\frac{11\pi}{8}\text{rad}$

24.3. $\frac{2\pi}{9}\text{rad}$

24.4. $\frac{7\pi}{10}\text{rad}$

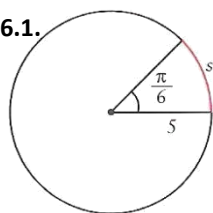
24.5. $\frac{11\pi}{18}\text{rad}$

25. Escreva em radianos:

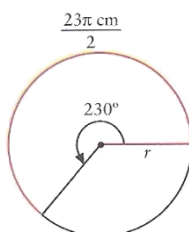
25.1. 50° 25.2. 240° 25.3. 120° 25.4. 80° 25.5. 300° 25.6. $15^\circ 30'$

26. De acordo com os dados, determine o comprimento do arco s (cm), o raio r (cm) ou θ (rad).

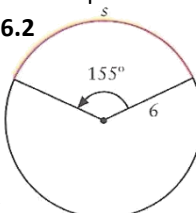
26.1.



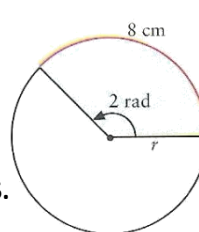
26.4.



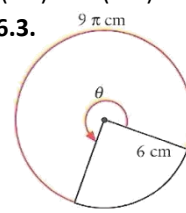
26.2.



26.5.

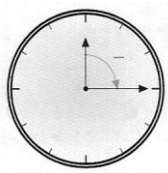


26.3.



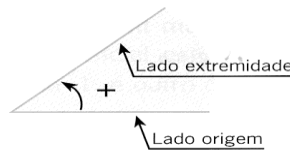
▪ GENERALIZAÇÃO DA NOÇÃO DE ÂNGULO

> Noção de ângulo e sua representação

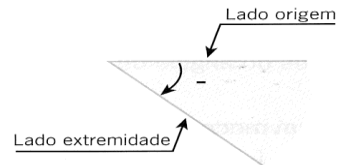


A cada ângulo pode associar-se uma amplitude e um sentido. Convencionou-se que o sentido do movimento dos ponteiros do relógio correspondia ao sentido negativo e o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio correspondia ao sentido positivo.

Partindo de duas semi-rectas sobrepostas, fixando uma, o lado origem do ângulo, e rodando a outra, o lado extremidade do ângulo, em torno da origem, duas situações podem acontecer:



A semi-recta roda no sentido contrário aos ponteiros do relógio e descreve um ângulo positivo.

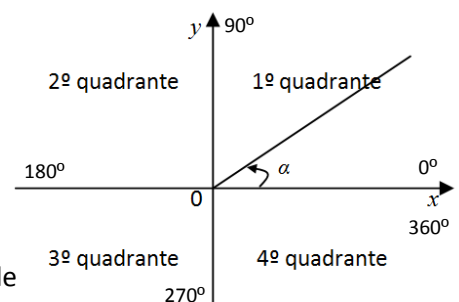


A semi-recta roda no sentido dos ponteiros do relógio e descreve um ângulo negativo.

A um ângulo ao qual se atribui um sentido chama-se ângulo orientado.

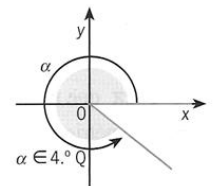
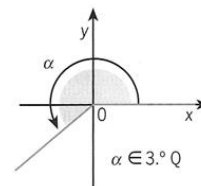
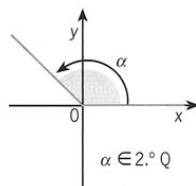
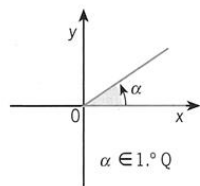
Para representar um ângulo orientado utiliza-se um sistema de coordenadas cartesianas.

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões e cada uma delas chama-se quadrante. Os quadrantes numeram-se como se mostra na figura ao lado.



O lado origem coincide com a parte positiva do eixo das abcissas como se pode perceber pelo ângulo α representado.

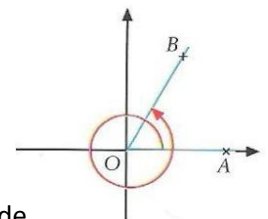
Os ângulos dizem-se do 1.º, 2.º, 3.º ou 4.º quadrante, de acordo com o quadrante a que pertence o lado extremidade do ângulo:



> Ângulos com o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade

Faz sentido falar num ângulo de $+420^\circ$?

Naturalmente que sim. A semi-recta $\vec{OB}$ descreveria uma volta inteira de 360° mais 60° .



Para descobrirmos qual o menor ângulo positivo que tem o mesmo lado origem e extremidade basta dividir a amplitude do ângulo por 360° ou por 2π , no caso de a amplitude ser dada em radianos, para saber quantas voltas completas dá o lado extremidade. O resto da divisão é um ângulo equivalente ao dado.

Exemplo1: Indique a amplitude do menor ângulo positivo com os mesmos lados, origem e extremidade, de um ângulo de:

1.1. 1840°

$1840^\circ = 5 \times 360^\circ + 40^\circ$,
logo 1840° é equivalente a 40°

1.2. $\frac{29\pi}{6} \text{ rad}$

$\frac{29\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$, logo $\frac{29\pi}{6} \text{ rad}$ é equivalente a $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

Exemplo2: Determine o quadrante a que pertence cada um dos ângulos:

2.1. -3013°

$-3013^\circ = -(8 \times 360^\circ + 133^\circ)$,
logo -3013° é equivalente a -133°
 -133° pertence ao 3º quadrante.

2.2. $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

$\frac{2 \times 180}{3} = 120^\circ$, logo $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ pertence ao 2º quadrante.

Se α é uma das amplitudes de um ângulo orientado, então $\alpha + 360k$, $k \in \mathbb{Z}$ são também amplitudes de ângulos que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade. São ângulos equivalentes.

Exercícios:

27. Indique a amplitude de três ângulos distintos com os mesmos lados, origem e extremidade, de um ângulo de:

27.1. 395° 27.2. 2100°

27.3. $\frac{13\pi}{4} \text{ rad}$ 27.4. $\frac{17\pi}{3} \text{ rad}$

28. Escreva a expressão geral dos ângulos com o mesmo lado que:

45° ; 125° ; -60° ; $-\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

29. Sabendo que $0 < \alpha < 90^\circ$ indique os quadrantes a que pertencem cada um dos seguintes ângulos:

29.1. $90^\circ + \alpha$ 29.2. $180^\circ - \alpha$

29.3. $180^\circ + \alpha$ 29.4. $-\alpha$

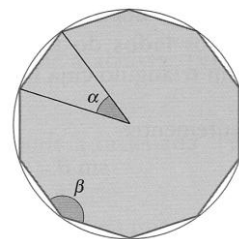
30. Considere os ângulos:

$x = -5\pi \text{ rad}$ e $y = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$

30.1. Represente-os num referencial.

30.2. Escreva, em graus, $x + y$ e $x - 10y$.

31. Na figura está inscrito um decágono regular.



31.1. Escreva em graus e em radianos α e β .

31.2. Represente num referencial α e β e diga a que quadrantes pertencem.

▪ RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO QUALQUER. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

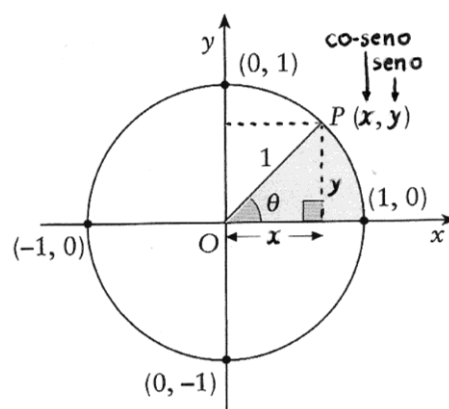
> Razões Trigonométricas do Ângulo θ

Consideremos a figura ao lado, onde temos um círculo centrado na origem e de raio 1 e o ângulo θ (téta) que pertence ao 1º quadrante.

Calculemos as suas razões trigonométricas:

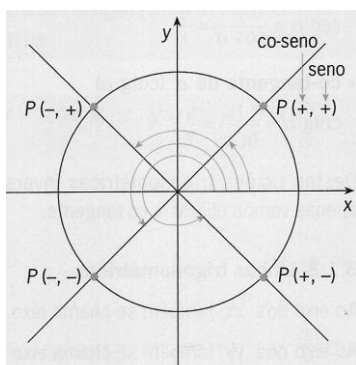
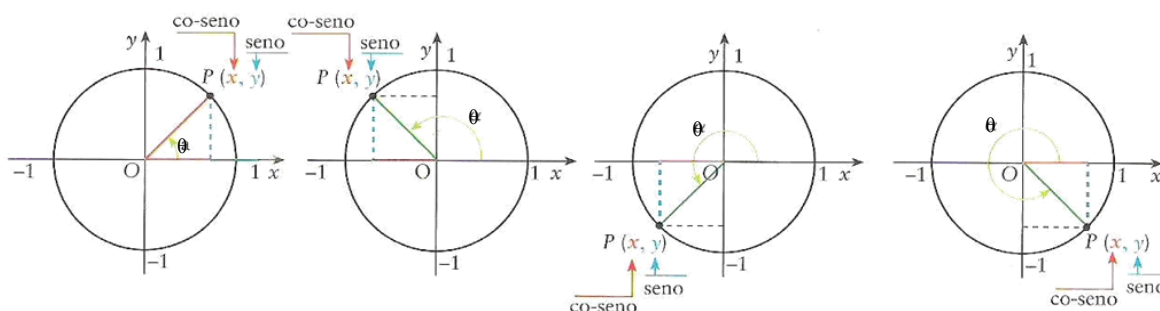
$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = \frac{y}{1} \Leftrightarrow \text{sen } \theta = y$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \text{cos } \theta = \frac{x}{1} \Leftrightarrow \text{cos } \theta = x$$



O ponto $P \mapsto (x, y)$ chama-se **ponto associado ao ângulo θ** e as suas coordenadas são $P \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$.

Imaginando o ponto P a percorrer o círculo trigonométrico, o seno do ângulo θ será a ordenada do ponto e o co-seno do ângulo θ é a abcissa do ponto P.



Com o movimento do ponto ao longo do círculo trigonométrico podemos verificar, também, que o sinal do seno e do co-seno depende do quadrante a qual o ângulo pertence.

- $\cos \alpha$ é positivo nos quadrantes onde a abcissa (x) é positiva (1º e 4º quadrantes).
- $\sin \alpha$ é positivo nos quadrantes onde a ordenada (y) é positiva (1º e 2º quadrantes).
- O sinal da tangente determina-se atendendo a que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

> Sinal das razões trigonométricas:

Quadrante	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
1.º Q	+	+	+
2.º Q	+	-	-
3.º Q	-	-	+
4.º Q	-	+	-

Exercício:

32. Indique o sinal do seno, do co-seno e da tangente de cada um dos seguintes ângulos:

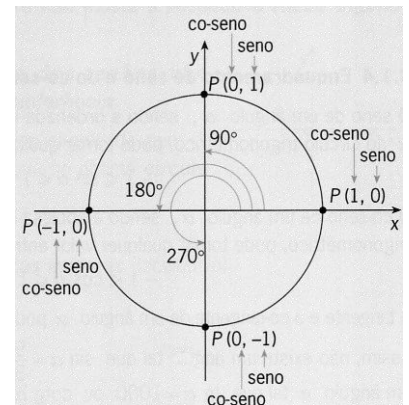
32.1. $\alpha = 220^\circ$ **32.2.** $\alpha = 1500^\circ$ **32.3.** $\alpha = 1 \text{ rad}$

32.4. $\alpha = \frac{29\pi}{6} \text{ rad}$ **32.5.** $\alpha = -\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ **32.6.** $\alpha = 1^\circ$

> Ângulos de 0° , 90° , 180° e 270° :

Como a abscissa do ponto P (ponto associado ao ângulo) corresponde ao co-seno do ângulo e a ordenada ao seno do ângulo, é imediato concluir que:

Ângulo	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	Ângulo
0°	0	1	0	0 rad
90°	1	0	Não está definida	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
180°	0	-1	0	$\pi \text{ rad}$
270°	-1	0	Não está definida	$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$



Decorre também da leitura da abscissa e da ordenada do ponto P associado ao ângulo α , no círculo trigonométrico, que:

Sendo α um ângulo qualquer $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

A tangente de um ângulo α pode ser um número real qualquer.

Exercícios:

33. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

33.1. $\sin \pi + \cos 3\pi + 2 \tan 8\pi + \cos 5\pi$ **33.2.** $\frac{\cos(1080^\circ) - 2 \sin(1530^\circ)}{\sin(-270^\circ) + \tan 0^\circ}$

33.3. $\sin \frac{\pi}{2} + \tan \pi + 2 \cos \pi - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2}$

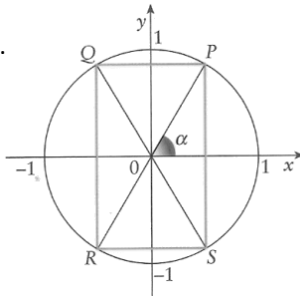
33.4. $-3 \cos \frac{\pi}{2} + \sin \pi - 2 \cos \frac{3\pi}{2} + \tan 0 + \cos 0$

34. Na figura ao lado, [PQRS] é um rectângulo e $\alpha = 60^\circ$

34.1. Escreva as coordenadas de P, Q, R e S.

34.2. Copie e complete a seguinte tabela:

α	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\tan \alpha$				



35. Determine $\sin x$, sabendo que $\cos x = -\frac{1}{3}$ e $x \in 3^\circ \text{Q}$.

36. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

36.1. $\forall \alpha \in 2^\circ \text{Q} : \cos \alpha \times \tan \alpha > 0$;

36.2. $\forall \alpha \in 3^\circ \text{Q} : \cos \alpha \times \sin \alpha > 0$;

36.3. $\exists \alpha \in 4^\circ \text{Q} : \cos \alpha = \frac{5}{2}$;

36.4. $\exists \alpha \in 1^\circ \text{Q} : \tan \alpha = 5$.

37. Indique $x \in [0^\circ, 360^\circ]$, tal que:

37.1. $\sin x = 1$ **37.2.** $\cos x = 1$

37.3. $\sin x = 0$ **37.4.** $\cos x = 0$

37.5. $\tan x = 0$ **37.6.** $\cos x = -1$

38. Indique um quadrante em que:

38.1. O seno é positivo e o co-seno é negativo;

38.2. O seno é negativo e a tangente é positiva;

38.3. O co-seno é negativo e a tangente é negativa.

39. Acerca de um ângulo α , sabe-se que

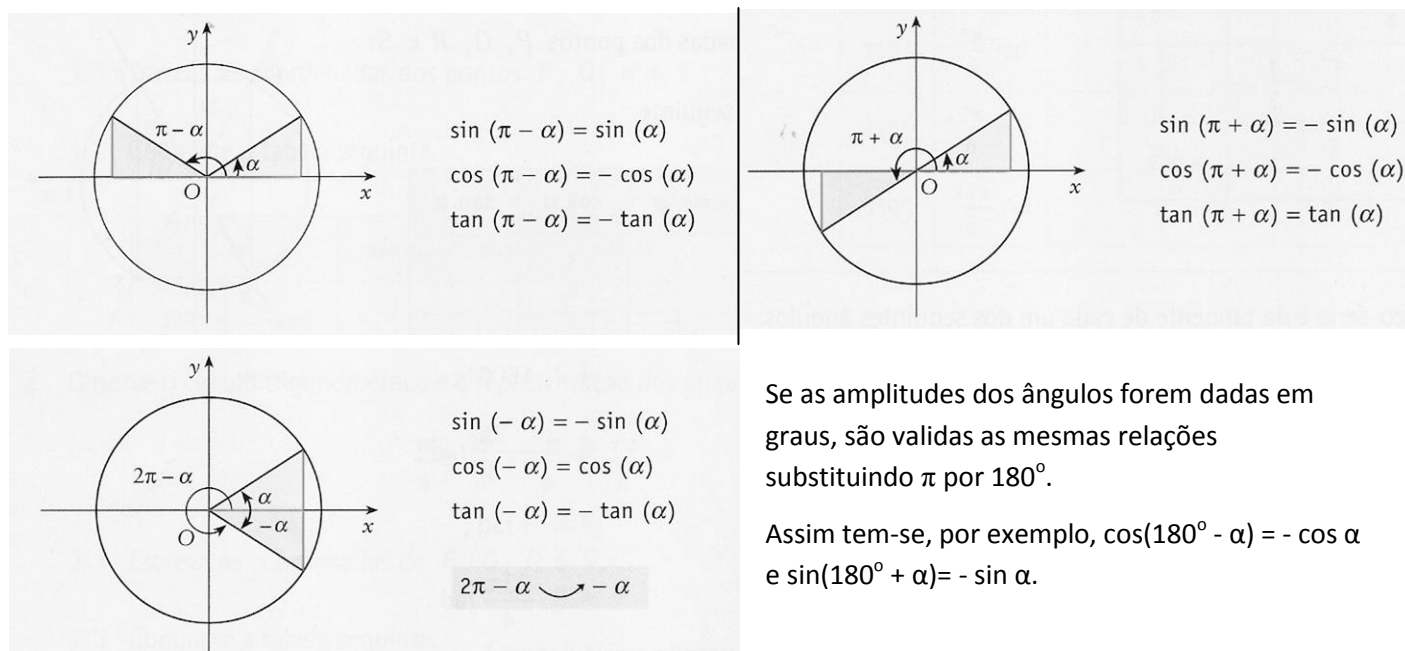
$\tan \alpha = \frac{3}{4}$ e que $x \in 3^\circ \text{Q}$.

Calcule $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

■ RELAÇÕES ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

> Relações entre as razões trigonométricas de α e as de $\pi \pm \alpha$ e $-\alpha$

Recorrendo ao círculo trigonométrico concluímos imediatamente a relação existente entre razões trigonométricas de um dado ângulo α e as de $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ e $-\alpha$ (em radianos).



Se as amplitudes dos ângulos forem dadas em graus, são válidas as mesmas relações substituindo π por 180° .

Assim tem-se, por exemplo, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ e $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

Estas relações são muito úteis, pois pode-se reduzir o cálculo das razões trigonométricas de qualquer ângulo ao cálculo das razões trigonométricas de um ângulo do 1.º quadrante.

Exemplos: Reduzir ao 1.º quadrante

1. Partindo do conhecimento dos valores da tabela, calcule:

1.1. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\text{rad}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\text{rad}\right)$ e $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\text{rad}\right)$

1.2. $\sin 315^\circ$, $\cos 315^\circ$ e $\tan 315^\circ$

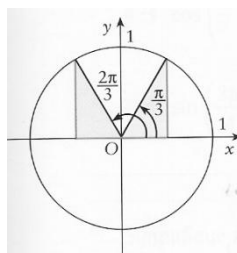
Resolução:

1.1. $\frac{2\pi}{3}\text{rad} \in 2^\circ\text{Q} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ com $\frac{\pi}{3}\text{rad} \in 1^\circ\text{Q}$

Podemos relacionar as razões trigonométricas de $\frac{2\pi}{3}\text{rad}$ com as razões de $\frac{\pi}{3}\text{rad}$.

Analisando o círculo trigonométrico, concluímos que:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}\end{aligned}$$



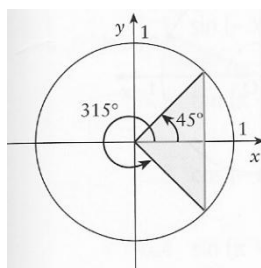
1.2. $315^\circ \in 4^\circ\text{Q} \rightarrow 315^\circ = 360^\circ - 45^\circ$, $45^\circ \in 1^\circ\text{Q}$

Logo,

$$\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$



	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	$\frac{\pi}{6}\text{rad}$	$\frac{\pi}{4}\text{rad}$	$\frac{\pi}{3}\text{rad}$

Exercícios:

40. Copie e complete:

$$\sin(\pi - \alpha) = \dots \quad \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \dots$$

$$\cos(\pi + \alpha) = \dots \quad \sin 225^\circ = \dots$$

$$\sin(-\alpha) = \dots \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dots$$

41. Complete as expressões colocando no lugar ... um ângulo do 1º quadrante e de modo a obter afirmações verdadeiras:

41.1. $\sin 150^\circ = \sin \dots$

41.2. $\sin 250^\circ = -\sin \dots$

41.3. $\cos 125^\circ = -\cos \dots$

41.4. $\tan 115^\circ = -\tan \dots$

41.5. $\cos(-225^\circ) = -\cos \dots$

41.6. $\tan(-310^\circ) = \tan \dots$

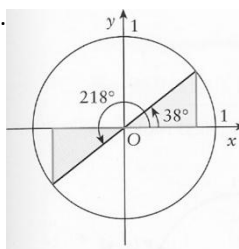
2. Escreva $\sin(218^\circ)$ como razão de um ângulo agudo.

Resolução:

$$218^\circ \in 3^\circ Q \rightarrow 218^\circ = 180^\circ + 38^\circ$$

Logo,

$$\sin(218^\circ) = \sin(180^\circ + 38^\circ) = -\sin 38^\circ$$



3. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

3.1. $\sin(210^\circ) + \cos(135^\circ) + \cos(120^\circ) + \tan(180^\circ)$,

3.2. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Resolução:

3.1. $\sin(210^\circ) + \cos(135^\circ) + \cos(120^\circ) + \tan(180^\circ) =$

$$= \sin(180^\circ + 30^\circ) + \cos(180^\circ - 45^\circ) + \cos(180^\circ - 60^\circ) + 0$$

$$= -\sin 30^\circ - \cos 45^\circ - \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.2. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$

$$= \sin\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Simplifique a expressão: $\sin(\pi - x) + \cos(x - 5\pi) + \tan(12\pi - x)$.

- $\sin(\pi - x) = \sin x$;

- $\cos(x - 5\pi) = \cos(5\pi - x) = \cos(4\pi + \pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$

- $\tan(12\pi - x) = \tan(-x) = -\tan x$

Logo,

$$\sin(\pi - x) + \cos(x - 5\pi) + \tan(12\pi - x) = \sin x - \cos x - \tan x$$

Exercícios:

42. Sem recorrer à calculadora, determine o valor exacto de:

42.1. $\sin 210^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

42.2. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \tan\frac{5\pi}{6} + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

42.3.

$$\sin 60^\circ - 2\tan 135^\circ + \cos 210^\circ + \sin 300^\circ$$

42.4. $\sin\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{7\pi}{6} - \sin\frac{11\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{3}$

42.5. $\cos 225^\circ + \sin(-135^\circ) - 2\tan 240^\circ$

42.6. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$

42.7. $\cos 210^\circ - \sin 330^\circ + \tan 225^\circ$

42.8. $\frac{1}{2}\tan\left(\frac{29\pi}{3}\right) + 2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

42.9. $\cos 540^\circ - 2\cos 30^\circ + \sin(-315^\circ)$

43. Simplifique as expressões:

43.1. $\tan(\pi + x) - \sin(-x)$

43.2. $\sin(-x + \pi) + \cos(2\pi - x)$

43.3. $\cos(-\pi - x) - \cos(\pi - x)$

44. Determine x , sabendo que $x \in [0, 2\pi]$ e que:

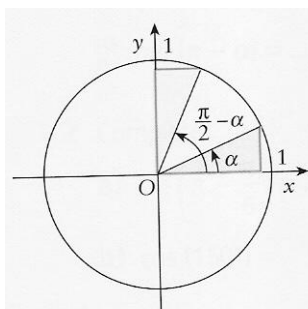
44.1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 44.2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

44.3. $\tan x = 1$ 44.4. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

44.5. $\cos x = -\frac{1}{2}$ 44.6. $\tan x = \sqrt{3}$

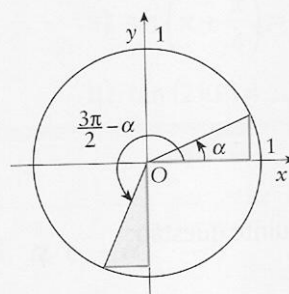
> **relações entre as razões trigonométricas de α e as de $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ e $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$**

Por observação do círculo trigonométrico é imediato tirar conclusões sobre as relações e entre as razões trigonométricas de ângulos cuja soma ou cuja diferença é $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ou $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$. Estas conclusões são igualmente válidas para amplitudes expressas em graus.



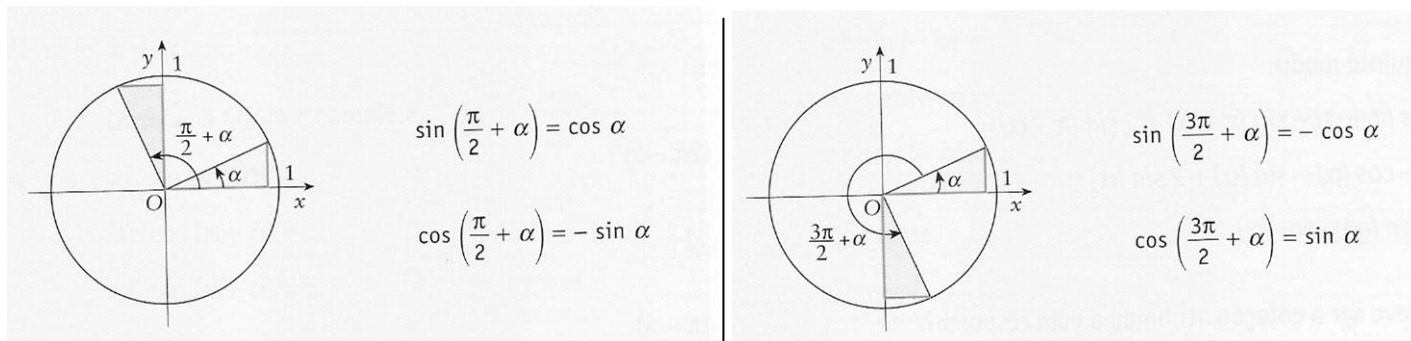
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$



Nas relações aqui apresentadas o seno passa a co-seno e o co-seno passa a seno.

No que respeita à tangente tem-se: $\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$

Exercícios:

45. Copie e complete:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dots \quad \sin(80^\circ) = \cos \dots$$

$$\sin(135^\circ) = \cos(90^\circ + \dots) = \dots$$

$$\cos(270^\circ - \alpha) = \dots \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \dots$$

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \dots \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \dots$$

46. Exprima nas razões trigonométricas do ângulo α :

46.1. $\sin(180^\circ - \alpha)$ 46.2. $\cos(360^\circ - \alpha)$

46.3. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 46.4. $\sin(-\pi + \alpha)$

47. Simplifique:

47.1. $\cos(\alpha - 90^\circ) + \tan(180^\circ - \alpha)$

47.2. $2\cos(450^\circ) - \sin(-\alpha) + \tan(180^\circ - \alpha)$

48. Sem recorrer à calculadora, determine o valor exacto de:

48.1. $\frac{\cos 360^\circ + \sin 45^\circ}{1 - \cos 765^\circ}$

48.2. $\frac{\cos(-210^\circ) + \sin 300^\circ}{\tan(-60^\circ)}$

48.3. $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

48.4. $\cos(-4\pi) + \tan(-5\pi) - \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

48.5.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(3\pi) + \cos\left(\frac{11\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$$

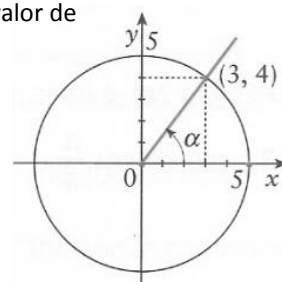
49. Observe a figura e indique o valor de

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\cos(\pi - \alpha)$$

$$\sin(\pi + \alpha)$$

$$\tan(-\alpha)$$



50. Determine:

50.1. $\sin \alpha - 3\cos \alpha$, sabendo que $\tan \alpha = \frac{5}{3}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

50.2. $\tan \alpha - \cos \alpha$, sabendo que $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

51. Sabendo que $\alpha \in 4^\circ Q$ e $\tan \alpha = -\frac{5}{2}$, determine $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

52. Determine o valor da expressão $2\sin(\alpha - \pi)$, sabendo que $\tan \alpha = 2$ e $\alpha \in 3^\circ Q$

53. Determine o valor exacto de:

53.1. $\cos(3\pi + x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ sabendo que $\tan(x) = -2$ e $0 < x < \pi$

53.2. $\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan(\alpha + 4\pi)$ sabendo que $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ e

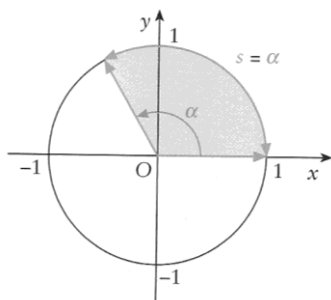
$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

53.3. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(-\pi - \alpha)$ sabendo que $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ e

$$\alpha \in]\pi, 2\pi[$$

▪ FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

No círculo trigonométrico, a medida do comprimento de um arco é igual à medida, em radianos, do ângulo ao centro correspondente.



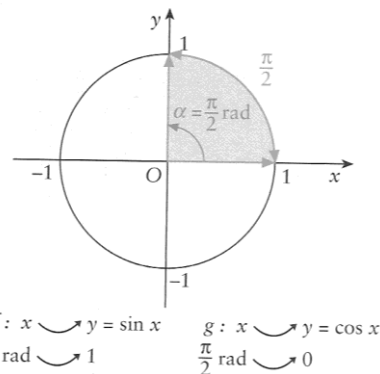
Assim, se o ângulo α está expresso em radianos, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ou $\tan \alpha$ podem ser interpretados como $\sin s$, $\cos s$ ou $\tan s$ (pois $\alpha=s$).

Como as medidas do arco s são medidas de comprimento (cm, dm, m, ...) e estas medidas são números reais, conclui-se que $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ou $\tan \alpha$ podem ser considerados como o seno, o co-seno e a tangente de um número real

Portanto, a cada número real x corresponde um e um só número real y tal que $y = \sin x$ e $y = \cos x$. Por exemplo:

Assim, $y = \sin x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$ ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) passam a ser consideradas funções reais de variável real.

Vamos construir o gráfico de cada uma destas funções trigonométricas e de seguida fazer o seu estudo completo.



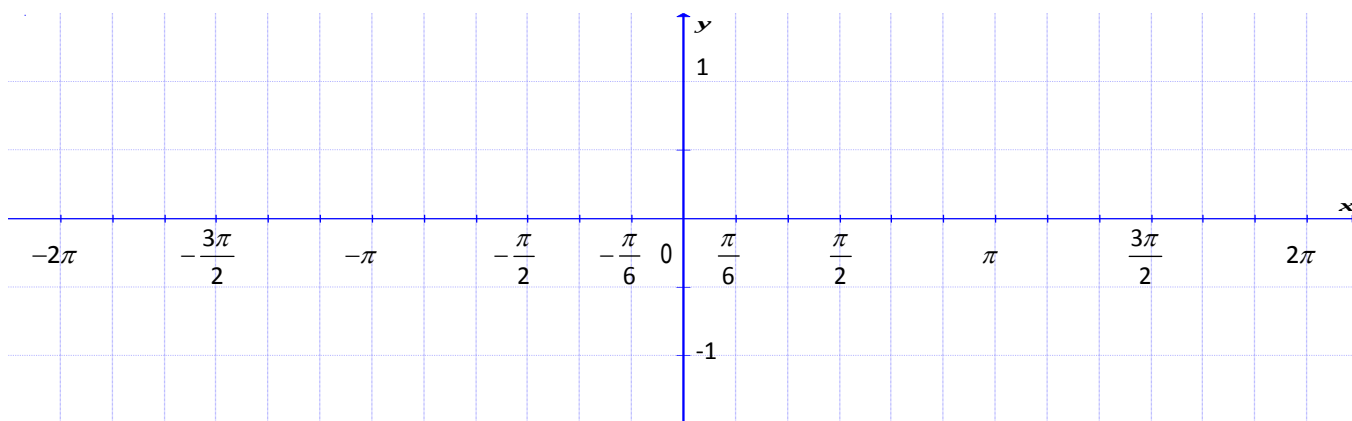
> **Função seno:** $f(x) = \sin x$

M.A.(1)

1º passo: Completar a tabela

x	-360°	-270°	-180°	-90°	-30°	0°	30°	90°	180°	270°	360°
	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$											

2º passo: Colocar os pontos no referencial e desenhar o gráfico



3º passo: Estudar o comportamento da função

Domínio: $D_f =$ _____

Contradomínio: $D'_f =$ _____

Zeros: _____

Período: _____

Máximo: _____

Mínimo: _____

Paridade: _____

Continuidade: _____

Monotonia: _____

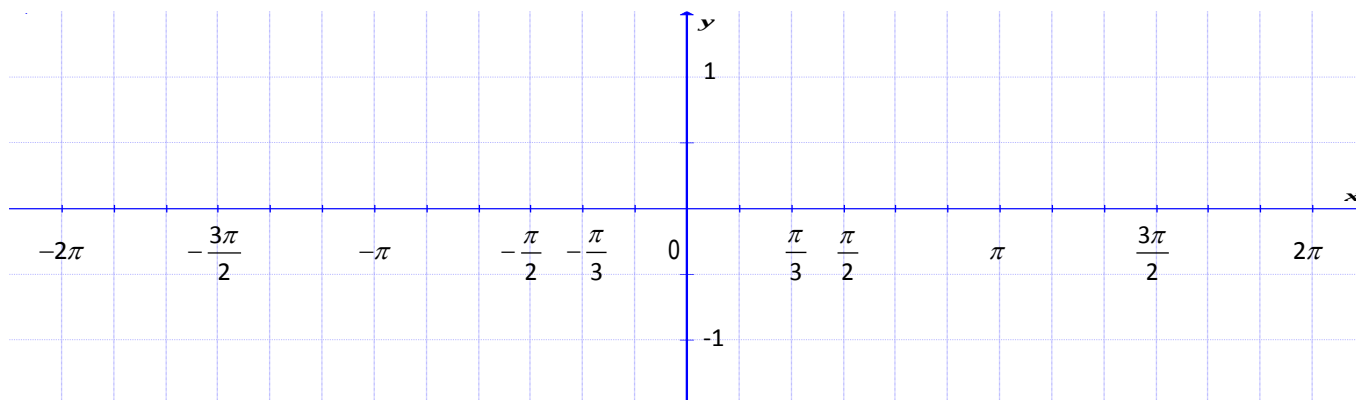
Sinal: _____

> **Função co-seno:** $g(x) = \cos x$

1º passo: Completar a tabela

x	-360°	-270°	-180°	-90°	-60°	0°	60°	90°	180°	270°	360°
	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$											

2º passo: Colocar os pontos no referencial e desenhar o gráfico



3º passo: Estudar o comportamento da função

Domínio: _____

Contradomínio: _____

Zeros: _____

Período: _____

Máximo: _____

Mínimo: _____

Paridade: _____

Continuidade: _____

Monotonia: _____

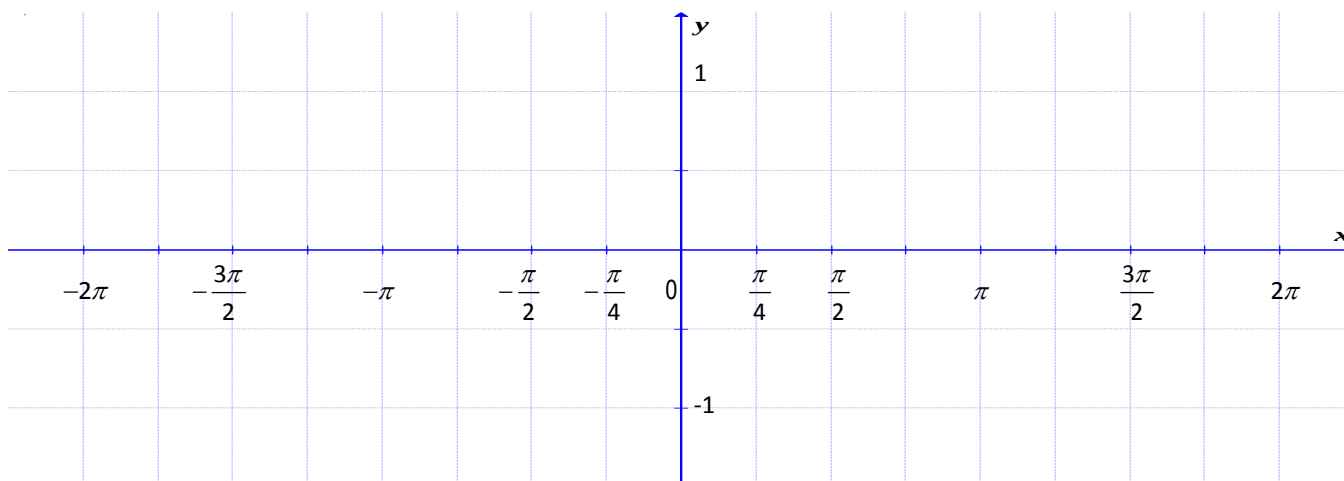
Sinal: _____

> **Função tangente:** $h(x) = \tan x$

1º passo: Completar a tabela

x	-360°	-270°	-180°	-90°	-45°	0°	45°	90°	180°	270°	360°
	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\tan x$											

2º passo: Colocar os pontos no referencial e desenhar o gráfico



3º passo: Estudar o comportamento da função

Domínio: _____

Contradomínio: _____

Zeros: _____

Período: _____

Máximo: _____

Mínimo: _____

Paridade: _____

Continuidade: _____

Monotonia: _____

Sinal: _____

> Transformações dos gráficos das funções trigonométricas

$y = f(x) + a$		Translação de a na direcção do eixo dos yy . (Translação associada ao vector $\vec{u} = (0, a)$)
$y = f(x + a)$		Translação de $-a$ na direcção do eixo dos xx . (Translação associada ao vector $\vec{v} = (-a, 0)$)
$y = a f(x)$		Expansão ou contracção segundo o factor a , na direcção do eixo dos yy .
$y = f(ax)$		Expansão ou contracção segundo o factor $\frac{1}{a}$, na direcção do eixo dos xx .
$y = -f(x)$		Simetria em relação ao eixo dos xx .
$y = f(-x)$		Simetria em relação ao eixo dos yy .
$y = f(x) $		Mantêm-se os pontos de ordenada positiva ou nula e para os pontos de ordenada negativa tem-se uma simetria relativamente ao eixo dos xx .
$y = f(x)$		Mantêm-se os pontos de abcissa positiva e o gráfico fica simétrico relativamente ao eixo dos yy .

Recordemos que, partindo do gráfico de uma função $y = f(x)$, podem ser obtidos gráficos de outras funções.

Exercícios:

54. Represente no mesmo referencial e descreva como estão relacionados:

54.1. $f(x) = \sin x$ e $a(x) = -\sin x$

54.2. $g(x) = \cos x$ e $b(x) = -\cos x$

54.3. $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$

55. Para que valores de x se tem:

55.1. $\tan x = 1$ **55.2.** $\tan x = -1$

55.3. $\tan x = 0$

56. Represente os gráficos das seguintes funções:

56.1. $y_1 = 3\sin x$ **56.2.** $y_2 = \sin(2x)$

56.3. $y_3 = 3\sin(2x)$ **56.4.** $y_4 = |\sin x|$

▪ EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As equações trigonométricas resolvem variadíssimas questões relativas às funções que acabamos de estudar. Pela forma como estas funções de ângulo ou arco foram definidas, recorrendo às coordenadas de um ponto do lado extremidade, conclui-se imediatamente que as equações trigonométricas, quando possíveis, têm infinitas soluções.

A resolução de equações trigonométricas deverá ser sempre acompanhada do círculo trigonométrico.

>Resolver equações do tipo $\sin x = a$

Exemplo 1: Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação $\sin x = \frac{1}{3}$.

Resolução: Com a calculadora é muito fácil encontrar uma solução para a equação:

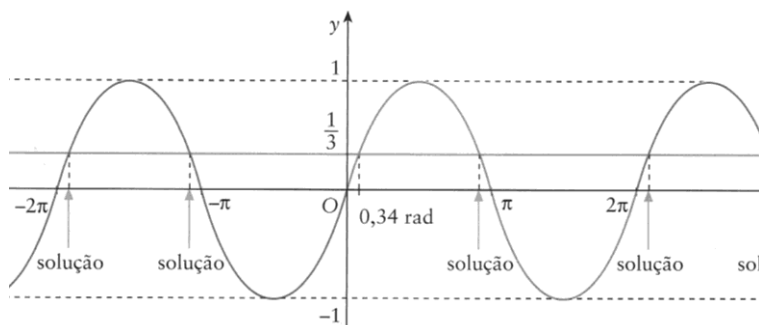
$$\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = 19,47^\circ \quad \text{ou} \quad x = 0,34 \text{ rad}$$

modo: deg

modo: rad

Mas a verdade é que esta equação tem outras soluções.

Consultando o gráfico concluímos que existem infinitas soluções:



Para conseguirmos escrever todas estas soluções vamos usar o círculo trigonométrico.

No intervalo de $[0, 2\pi]$, a equação tem duas soluções.

$\frac{1}{3}$ não corresponde ao seno de nenhum

ângulo conhecido, por isso, temos que usar a calculadora:

$$\alpha = 0,34 \text{ rad} \quad \text{e} \quad \pi - \alpha = 2,80 \text{ rad}$$

Falta, agora, considerar todos os ângulos que têm o mesmo lado extremidade e lado origem mas com amplitudes diferentes:

$$x = 0,34 + 2k\pi \quad \vee \quad x = 2,80 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Conjunto solução} = \{0,34 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2,80 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplo 2: Resolva a equação $\sin x = 1$ no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$

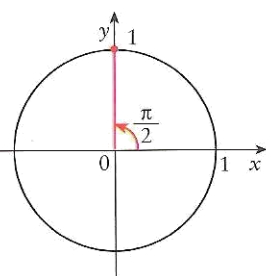
Resolução:

1 é o valor do co-seno de um ângulo conhecido: $\frac{\pi}{2}$

Analisando o círculo trigonométrico concluímos que:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para encontrarmos as soluções no intervalo dado basta substituir o k por valores de $\mathbb{Z}$.



De um modo geral para as equações do tipo $\sin x = a$ tem-se:

- a equação só tem soluções se $a \in [-1, 1]$
- no intervalo $[0, 2\pi[$ existem dois valores que têm o mesmo seno: α e $\pi - \alpha$
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercícios:

57. Resolva em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações

57.1. $\sin x = -1$

57.2. $\sin x = 0$

57.3. $2\sin x + 1 = 0$

57.4. $\sin(2x) = 0$

57.5. $\sin x = \frac{1}{5}$

57.6. $\sin(2x) = \pi$

57.7. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

57.8. $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

58. Resolva no intervalo $[0, 2\pi[$, cada uma das seguintes equações:

58.1. $6\sin x - 3 = 0$

58.2. $2\sin x = \frac{1}{2}$

58.3. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

58.4. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

59. Determine as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções reais de variável real, representadas por:

59.1. $y_1 = \sin(2x); \quad y_2 = -\frac{1}{2}$

59.2. $y_1 = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right); \quad y_2 = -1$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$$

$$CS = \left\{ -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\}$$

>Resolver equações do tipo $\cos x = a$

Exemplo 2: Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação $1 - 2\cos x = 0$.

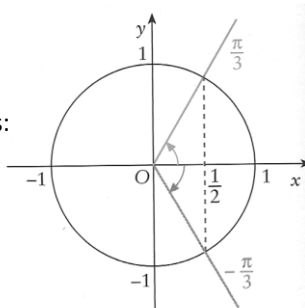
Resolução:

$$1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ é o valor do co-seno de um ângulo conhecido: $\frac{\pi}{3}$

Desenhando no círculo trigonométrico encontramos dois valores:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad -\alpha = -\frac{\pi}{3}$$



Então temos

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

>Resolver equações do tipo $\tan x = a$

Exemplo 3: Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação $\tan x = 1$.

Resolução:

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan x = 1$ para $x = \frac{\pi}{4}$

Como o período da função $y = \tan x$ é π , vem:

$$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercícios:

De um modo geral para as equações do tipo $\cos x = a$ tem-se:

- a equação só tem soluções se $a \in [-1, 1]$
- no intervalo $[-\pi, \pi[$ existem dois valores que têm o mesmo co-seno: α e $-\alpha$
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercícios:

60. Resolva em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações

60.1. $2\sin(2x) = 0$

60.2. $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

60.3. $5\cos x = 1$

60.4. $2\cos(2x) + 1 = 0$

61. Resolva em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações

61.1. $3\tan x + \sqrt{3} = 0$

61.2. $\tan(2x) - 2 = 0$

De um modo geral para as equações do tipo $\tan x = a$ tem-se:

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

62. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

62.1. $2\cos x + 1 = 0$ **62.2.** $\cos x - 0,3 = 0$

62.3. $\sin x \cdot \cos x + \sin x = 0$

62.4. $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$ **62.5.** $\tan^2 x - 3 = 0$

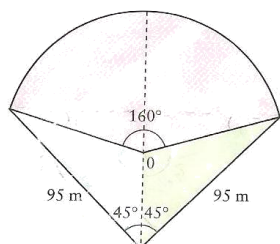
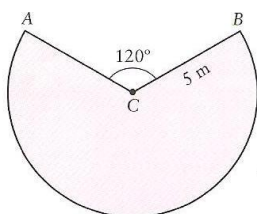
62.6. $\tan^2 x + \tan x = 0$ **62.7.** $\cos(2x) + \cos(x) = 0$

63. Resolva no intervalo $[0, 2\pi]$, as equações:

63.1. $\sqrt{3} = 2\cos(2x)$

63.2. $3\tan x - \sqrt{3} = 0$

64. A figura representa um sector circular de raio 5m. Determine o valor exacto e um valor aproximado para a área da parte colorida

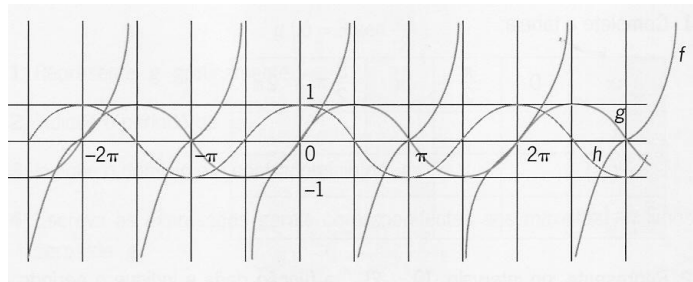


65. Um campo de jogos é formado por um sector circular de centro O e dois triângulos, como se mostra na figura.

De acordo com os dados, determine:

65.1. o perímetro do campo. **65.2.** a área do campo.

66. Observe o gráfico seguinte:



66.1. As funções f , g e h são funções trigonométricas. Identifique cada uma delas.

66.2. Indique um intervalo onde a função:

- Seno seja negativa;
- Co-seno seja positiva;
- Tangente seja negativa;
- Seno seja crescente;
- Co-seno seja decrescente

66.3. Quando a função seno tem um zero o que acontece á função tangente?

PRODUTO ESCALAR NO PLANO E NO ESPAÇO

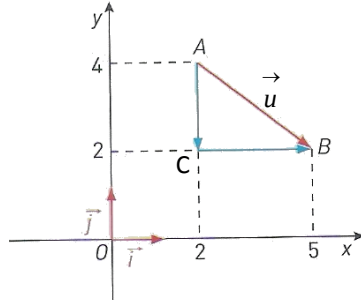
VECTORES (REVISÃO)

Um vector (ou vector livre) é um ente matemático caracterizado por:

- uma direcção
- um sentido
- um comprimento

Na figura temos vários vectores:

$$\vec{u} = \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{CB}; \vec{i}; \vec{j}$$



Considerando os vectores $\vec{i}$ e $\vec{j}$, que

têm uma unidade de comprimento e a direcção e sentido dos eixos coordenados, podemos decompor os restantes vectores e definimos assim as suas componentes:

$$\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}; \quad \vec{AC} = -2\vec{j}; \quad \vec{CB} = 3\vec{i}$$

Daqui resultam as coordenadas que definem o vector:

$$\vec{u} = (3, -2); \quad \vec{AC} = (0, -2); \quad \vec{CB} = (3, 0)$$

Podemos ainda determinar um vector como diferença de dois pontos.

Por exemplo: $\vec{AB} = B - A = (5, 2) - (2, 4) = (5 - 2, 2 - 4) = (3, -2)$

Ao comprimento vector chama-se norma.

Podemos identificar a norma do vector por observação: $\|\vec{AC}\| = 2$

Ou podemos usar as coordenadas do vector e aplicar a fórmula:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

É possível, também, efectuar algumas operações com vectores:

- Soma de um ponto com um vector: $C + \vec{AB} = (2, 2) + (3, -2) = (2+3, 2+(-2)) = (5, 0) \rightarrow$ o resultado é um ponto
- Soma e subtração de dois vectores: $\vec{AB} + \vec{AC} = (3, -2) + (0, -2) = (3+0, -2+(-2)) = (3, -4) \rightarrow$ o resultado é um vector
- Produto de um número real por um vector: $4\vec{AB} = 4 \times (3, -2) = (4 \times 3, 4 \times (-2)) = (12, -8) \rightarrow$ o resultado é um vector

PRODUTO ESCALAR NO PLANO

Um corpo desliza num plano inclinado devido ao seu peso $\vec{P}$, que se decompõe em duas forças: $\vec{N}$, que mantém o corpo sobre a superfície em que desliza, e $\vec{F}$, que é a força paralela ao deslocamento ($\vec{d}$).

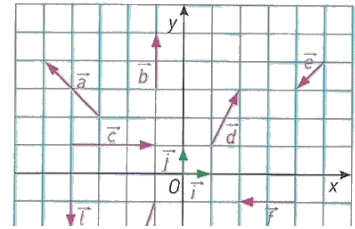
Vamos analisar o trabalho realizado pelas diferentes formas:

- $W_F = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \rightarrow$ A força actua $\vec{F}$ na direcção da trajectória.
- $W_P = \|\vec{P}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos\alpha \rightarrow$ Neste caso a força $\vec{P}$ não tem a mesma direcção que o movimento e por isso temos que usar o ângulo de inclinação α .
- $W_N = \|\vec{N}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos 90^\circ = 0 \rightarrow \vec{N}$ também não tem a direcção de na direcção $\vec{d}$. O ângulo formado é de 90° .

Como vimos anteriormente a soma de dois vectores e o produto de um número real por um vector é um vector. O produto escalar de vectores é também uma operação com vectores mas o resultado dessa operação é um número real e não um vector. Na definição de produto escalar de vectores entram dois conceitos geométricos: norma de um vector e ângulo de vectores.

Exercícios:

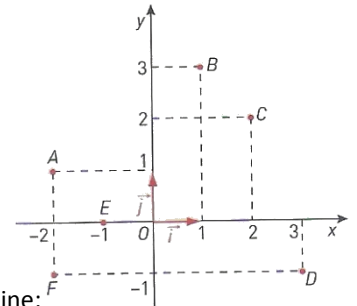
67. Com base no referencial da figura, identifica os vectores através das suas componentes e coordenadas.



68. No referencial o. n., encontram-se representados alguns pontos:

68.1. Indica as coordenadas de:

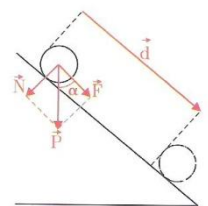
- $\vec{AB}$
- $\vec{BC}$
- $\vec{DC}$
- $\vec{DE}$
- $\vec{DF}$
- $\vec{FA}$



68.2. Determine:

- $\|\vec{AB}\|$
- $\|\vec{BD}\|$
- $\|\vec{FD}\|$
- $\vec{DE} + \vec{DF}$
- $\vec{O} + \vec{FA}$
- $\vec{BC} - \vec{FA}$
- $2\vec{AB} + \vec{DF}$
- $-3\vec{CB} - \vec{DC}$
- $5(\vec{FA} - \vec{BC})$

68.3. Verifica se $\vec{AB}$ e $\vec{CE}$ são iguais.



Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores não nulos do plano, o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o número real representado pela expressão:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

O ângulo de dois vectores não nulos é o ângulo convexo definido por dois representantes desses vectores com a mesma origem.

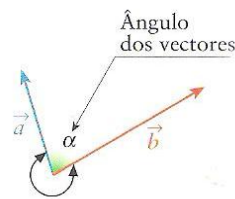
O ângulo de dois vectores é sempre inferior ou igual a 180° .

Sendo α o ângulo de dois vectores

$\vec{u}$ e $\vec{v}$, α representa-se por

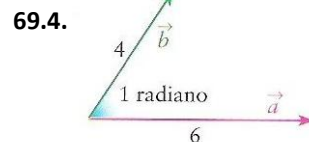
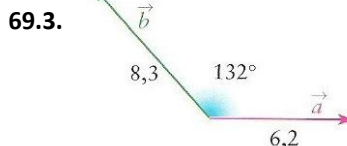
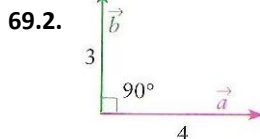
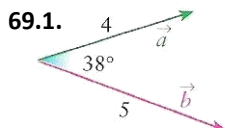
$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ou $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ e tem-se

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

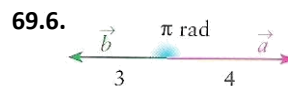
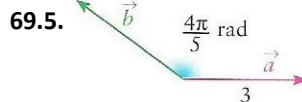


Exercícios:

69. Determine $\vec{a} \bullet \vec{b}$ sendo:



70. Com os resultados do exercício anterior explique o que influencia o sinal do produto escalar.



■ PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vectores arbitrários do plano ou do espaço e $t \in \mathbb{R}$.

Tem-se então:

- $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ (propriedade comutativa)
- $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$ (propriedade distributiva)
- $(t\vec{u}) \bullet \vec{v} = t(\vec{u} \bullet \vec{v}) = \vec{u} \bullet (t\vec{v})$ (propriedade associativa mista)

O conhecimento das propriedades do produto escalar permite resolver alguns problemas de demonstração de propriedades geométricas.

71. Na figura está representado um hexágono regular [ABCDEF] inscrito numa circunferência de centro O e raio 4.

Calcule:

71.1. $\vec{OA} \bullet \vec{OB}$

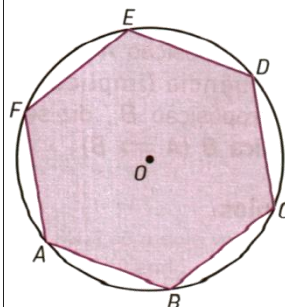
71.2. $\vec{OC} \bullet \vec{OE}$

71.3. $\vec{OB} \bullet \vec{BE}$

71.4. $\vec{AD} \bullet \vec{OD}$

71.5. $\vec{FA} \bullet \vec{AB}$

71.6. $\vec{BE} \bullet \vec{CB}$



■ PRODUTO ESCALAR NO ESPAÇO

As definições e propriedades relativas ao produto escalar no plano estendem-se ao espaço tridimensional.

Dados dois vectores do espaço $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o seu produto escalar $\vec{u} \bullet \vec{v}$ determina-se considerando, num mesmo plano, vectores iguais a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com a mesma origem e efectuando o produto entre eles.

Exercícios:

72. Utilize as propriedades referidas para mostrar que:

72.1. $(\vec{u} - \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} - \vec{v} \bullet \vec{w}$

72.2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v}$

Propriedade: $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = \|\vec{u}\|^2$

73. Dados dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mostre que eles têm a mesma norma, se, e só se, os vectores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são ortogonais.

74. Na figura está representada uma cubo. Sabe-se que:

- M é o ponto médio de [AE];

- $\overline{AB} = 4$;

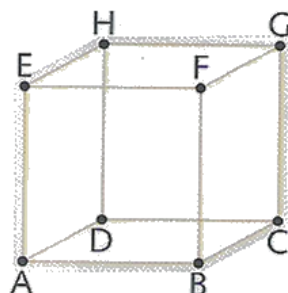
Calcule:

74.1. $\vec{AB} \bullet \vec{DB}$

74.2. $\vec{AG} \bullet \vec{AC}$

74.3. $\vec{AM} \bullet \vec{BC}$

74.4. $\vec{AB} \bullet \vec{CD}$



▪ EXPRESSÃO ANALÍTICA DO PRODUTO ESCALAR

A expressão do produto escalar de dois vectores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ num referencial ortonormado do plano, em função das suas coordenadas é:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

A expressão do produto escalar de dois vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ num referencial ortonormado do espaço, em função das suas coordenadas é:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Com este novo método de calcular o produto escalar temos a possibilidade de determinar o ângulo entre dois vectores quando necessário.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Exemplo: Considere a figura e determine:

1. $\vec{u} \bullet \vec{w}$ e $\vec{u} \bullet \vec{v}$

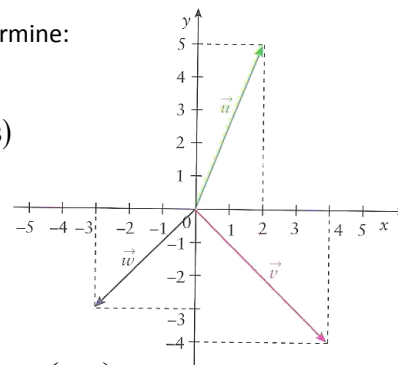
$$\vec{u} = (2, 5) \quad \vec{v} = (4, -4) \quad \vec{w} = (-3, -3)$$

$$\vec{u} \bullet \vec{w} = 2 \times (-3) + 5 \times (-3) = -21$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \times 4 + 5 \times (-4) = -12$$

2. $(\vec{u}, \vec{v})$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-12}{\sqrt{29} \times \sqrt{32}} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \approx 113,20^\circ$$



> Vectores perpendiculares

Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e $\vec{u} \perp \vec{v}$, tem-se $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \underbrace{\cos 90^\circ}_0 \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Então, dados dois vectores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, em referencial ortonormado, tem-se:

No plano, $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

No espaço, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$$

Exercícios:

75. Considere os vectores:

$$\vec{u} = (-2, 5), \vec{v} = (3, 2) \text{ e } \vec{w} = (2, -5)$$

75.1. Represente os vectores num referencial.

75.2. Calcule: $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|$

75.3. Determine: $\vec{v} \bullet \vec{w}, \vec{u} \bullet \vec{w}, \vec{u} \bullet \vec{v}$

75.3. Determine: $(\vec{u}, \vec{v}), (\vec{v}, \vec{w})$

76. Sendo:

$$A(3, 4); B(-2, 1) \text{ e } C(-4, -2).$$

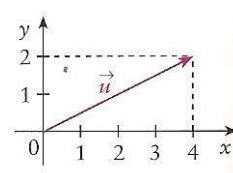
76.1. Calcule: $\vec{AB} \bullet \vec{BC}$ e $\vec{AC} \bullet \vec{BA}$

76.2. Determine o ângulo dos vectores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$.

77. Sendo $\vec{u} = (4, 2)$ escreva:

77.1. As coordenadas de 3 vectores perpendiculares a $\vec{u}$.

77.2. A expressão geral que representa todos os vectores do plano perpendiculares ao vector $\vec{u}$.



78. Em relação a um referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ considere:

$$A(-1, 3), B(-4, -2) \text{ e } \vec{u} = (2, -1)$$

78.1. Calcule:

$$\text{a) } \vec{AB} \bullet \vec{u} \quad \text{b) } -\vec{u} \bullet (2\vec{AB}) \quad \text{c) } \vec{u} \bullet (\vec{AB} + 2\vec{i}) \quad \text{d) } (-\vec{i} + 3\vec{j}) \bullet (3\vec{u})$$

78.2. Determine um ponto P pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares que satisfaça a condição: $\vec{OP} \bullet \vec{AB} = 1$

79. Em relação a um referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ considere:

$$A(1, 0, 2), B(1, -4, 2) \text{ e } \vec{u} = (-1, 3, 1)$$

Calcule:

$$\text{79.1. } \vec{AB} \bullet \vec{u} \quad \text{79.2. } (\vec{i} - 2\vec{k}) \bullet (-2\vec{AB}) \quad \text{79.3. } 3\vec{u} \bullet (\vec{j} + \vec{k})$$

COMPLEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO

▪ EQUAÇÃO VECTORIAL E REDUZIDA DA RECTA (REVISÃO)

Uma equação vectorial da recta r que passa no ponto $A(a_1, a_2)$ e que tem a direcção do vector $\vec{u}(u_1, u_2)$ é: $(x, y) = (a_1, a_2) + k(u_1, u_2), k \in \mathbb{R}$	Chama-se equação reduzida de uma recta não vertical, à equação do tipo: $y = mx + b$ onde m é o declive da recta e b é a ordenada na origem. $m = \frac{u_2}{u_1}$
---	---

▪ ÂNGULO DE DUAS RECTAS

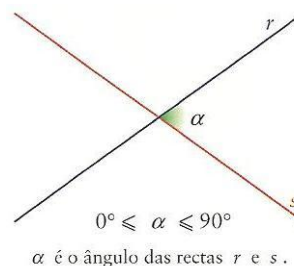
Desenhemos duas rectas concorrentes não perpendiculares: r e s .

As rectas definem no plano quatro ângulos iguais dois a dois.

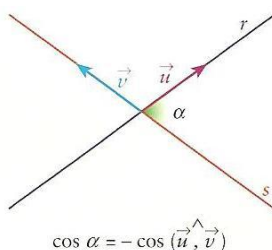
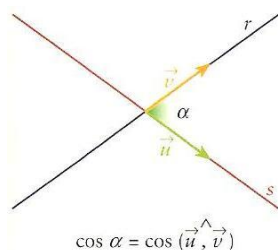
Chama-se ângulo de duas rectas ao menor ângulo por elas definido.

- O ângulo de duas rectas é sempre menor ou igual a 90° .

- O ângulo de duas rectas paralelas é 0° e o ângulo de duas rectas perpendiculares é 90° .



> Determinação do ângulo de duas rectas



Sabemos que: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

Logo $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

Exercícios: 80. Determine o ângulo das rectas r e s definidas por: 80.1. $r: (x, y) = (0, 3) + k(1, 3) k \in \mathbb{R}$ $s: (x, y) = (-1, 5) + k(-1, 2) k \in \mathbb{R}$ 80.2. $r: y = 2x + 1$ $s: y = -3x$ 80.3. $r: y = 2x + 3$ $s: y = 2x - 3$	81. Escreva a equação reduzida da recta: 81.1. que passa nos pontos $(-1, 0)$ e $(5, 4)$ 81.2. $(x, y) = (1, 2) + k(4, 5) k \in \mathbb{R}$ 82. Escreva uma equação vectorial da recta: 82.1. que passa no ponto $A(0, 3)$ e tem a direcção do vector $\vec{v}(0, 3)$. 82.2. que passa nos pontos $P(4, -1)$ e $Q(7, 1)$. 82.3. $y = 3x + 7$
---	---

▪ INCLINAÇÃO DE UMA RECTA

No referencial o. n. Oxv , considere as rectas definidas por $y = x$ e $y = -x + 3$.

Chama-se inclinação da recta ao ângulo positivo que a recta forma com o eixo xx considerando este eixo como o lado origem do ângulo.

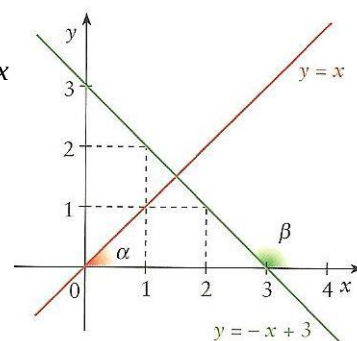
Qual a relação que esta inclinação terá com o valor do declive da recta?

A respeito da recta $y = x$, sabe-se que:

- $\alpha = 45^\circ$ é a inclinação da recta;
- o declive da recta é 1;
- e que $\tan 45^\circ = 1$.

A respeito da recta $y = -x + 3$, sabe-se que:

- $\beta = 135^\circ$ é a inclinação da recta;
- o declive da recta é -1 ;
- e que $\tan 135^\circ = -1$.



O declive de uma recta é a tangente trigonométrica da inclinação da recta.

Se r é uma recta, não vertical, de declive m e inclinação α , então tem-se:

$m = 0 \rightarrow \alpha = 0^\circ$ (recta horizontal)

$m > 0 \rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

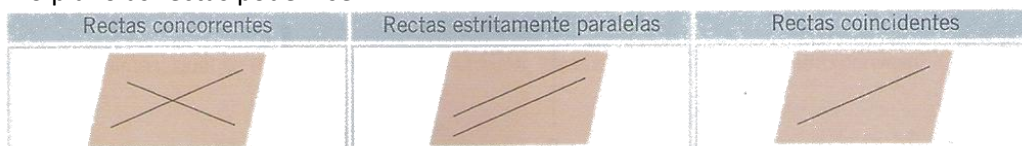
Se $\alpha = 90^\circ$, a recta é vertical.

$m < 0 \rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Exercícios: 83. Escreva uma equação da recta que contém o ponto A(-1, 5) e tem inclinação: 83.1. $\frac{\pi}{3}$ radianos 83.2. 1 radiano 83.3. 45° 83.4. 15°	84. Determine a inclinação de cada uma das rectas: 84.1. $a: y = -3x + 1$ 84.2. $b: y = -2x$ 84.3. $c: y = 2x + \frac{1}{2}$ 84.4. $d: y = -500$ 84.5. $e: x + 2y - 2 = 0$ 84.6. $f: x = 1800$	85. No referencial da figura está representado um triângulo equilátero [ABC]. Sabe-se que a recta AC tem de inclinação 110° . Determine a inclinação das rectas: 85.1. AB 85.2. BC
--	--	--

▪ PERPENDICULARIDADE DE VECTORES E DE RECTAS

No plano as rectas podem ser:

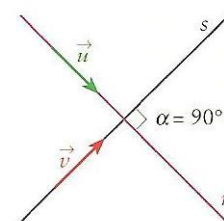


Quando a amplitude do ângulo formado por duas rectas concorrentes é de 90° temos duas rectas perpendiculares.

Duas rectas são perpendiculares se os seus vectores directores forem ortogonais.

Com efeito, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os vectores directores das rectas r e s , respectivamente, vem:

$$\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0 \quad 0 = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \Leftrightarrow 0 = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \Leftrightarrow 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$$



Qual será a relação entre os seus declives?

Sejam as rectas r e s : $r: y = mx + b$ $s: y = m'x + b$

Se as rectas são perpendiculares, então os vectores directores são ortogonais e o seu produto escalar nulo.

$(1, m) \rightarrow$ vector director de r $(1, m') \rightarrow$ vector director de s

$$(1, m) \cdot (1, m') = 0 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

Considerando duas rectas: $r: y = mx + b$ e $s: y = m'x + b$, com $m' \neq 0$ e $m \neq 0$

- Se $m' = m$, as rectas r e s são paralelas.

- Se $m' = -\frac{1}{m}$, as rectas r e s são perpendiculares.

Exercícios:

86. Considere os vectores $\vec{u} = (7, -2)$; $\vec{v} = (-2, 8)$

86.1. Dê exemplos de dois vectores perpendiculares ao vector $\vec{u}$.

86.2. Seja $\vec{w} = (a, b)$. Mostre que $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow a = 4b$.

86.3. Determine k de modo que o vector $\vec{s} = (1, -3k)$ seja perpendicular a $\vec{v}$.

87. Considere a recta r de equação $2y - 3x = 8$ e o ponto A(1, 0). Escreva uma equação reduzida da recta que passa em A e é:

87.1. paralela à recta r .

87.2. perpendicular á recta r .

▪ CONJUNTOS DE PONTOS DEFINIDOS POR CONDIÇÕES NO PLANO E NO ESPAÇO

O produto escalar tem aplicação prática na resolução de problemas que envolvam perpendicularidade, como se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo 1: Mediatriz de um segmento de recta

Sendo A(3, -2) e B(-5, 4), escreva uma equação da mediatriz do segmento de recta [AB].

Exercícios:

88. Considere os pontos A(4, 3), B(-2, -1), C(1, 0) e D(-1, 4).

88.1. Escreva as coordenadas do vector $\vec{AB}$.

Resolução:

Pretende-se determinar uma equação da recta PM sendo P um ponto qualquer da mediatriz e M o ponto médio de [AB].

Sabe-se que $\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0$.

$$P(x, y) \quad M = \left(\frac{3-5}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = (-1, 1)$$

$$\vec{MP} = P - M = (x, y) - (-1, 1) = (x+1, y-1)$$

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (x+1, y-1) \cdot (-8, 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x - 8 + 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 7 = 0$$

Logo, uma equação da mediatriz de [AB] é $4x - 3y + 7 = 0$.

Exemplo2: Equação de uma circunferência

Sendo A(1,2) e B(5,4), escreva uma equação da circunferência de diâmetro [AB].

Resolução:

Seja M um ponto qualquer da circunferência.

Sabe-se que todo o ângulo AMB inscrito na circunferência é um ângulo

recto e que, portanto, $\vec{MB} \perp \vec{MA}$ logo $\vec{MB} \cdot \vec{MA} = 0$.

$$\vec{MB} = B - M = (5-x, 4-y)$$

$$\vec{MA} = A - M = (1-x, 2-y)$$

$$\begin{aligned} \vec{MB} \cdot \vec{MA} &= (5-x, 4-y) \cdot (1-x, 2-y) = \\ &= 5 - 5x - x - x^2 + 8 - 4y - 2y + y^2 = \\ &= x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 \end{aligned}$$

Logo, uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$.

Exemplo3: Recta Tangente a uma circunferência

Escreva uma equação da recta tangente à circunferência de centro O=(1,2) no ponto A(5,3).

Resolução:

Sabe-se que toda a recta tangente a uma circunferência é perpendicular à recta que passa no centro e no ponto de tangência.

Seja P(x, y) um ponto qualquer da recta tangente, então $\vec{OA} \cdot \vec{PA} = 0$.

$$\vec{OA} = A - O = (5, 3) - (1, 2) = (4, 1)$$

$$\vec{PA} = A - P = (5, 3) - (x, y) = (5-x, 3-y)$$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{PA} &= 0 \Leftrightarrow (4, 1) \cdot (5-x, 3-y) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 20 - 4x + 3 - y = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x + y - 23 = 0 \end{aligned}$$

Logo, uma equação da recta tangente é $4x + y - 23 = 0$.

No espaço mantêm-se as mesmas propriedades:

- dados dois pontos A e B, o plano mediador de [AB] é o conjunto de pontos P(x, y, z) do espaço que satisfaçam a condição:

$$\vec{MP} \cdot \vec{AB} = 0, \text{ sendo M o ponto médio de [AB].}$$

- A superfície esférica de diâmetro [AB] é o conjunto dos pontos P(x, y, z) do espaço que satisfaçam a condição:

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

- O plano tangente a uma superfície esférica de centro O no ponto A é o lugar geométrico dos pontos P(x, y, z) do espaço que satisfaçam a condição:

$$\vec{OA} \cdot \vec{PA} = 0$$

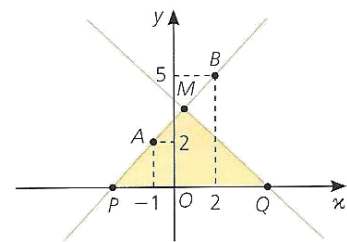
Continuação:

88.2. Usando a definição de produto escalar, escreva uma equação:

- da mediatriz de [AB].
- da circunferência de diâmetro [AB].
- da tangente à circunferência de diâmetro [AB], no ponto B.
- da circunferência de centro C e que contém D.
- a recta perpendicular a CD e que contém a origem das coordenadas.

89. No referencial estão representadas duas rectas. Sabe-se que:

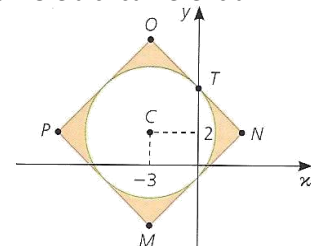
- A recta MQ é a mediatriz de [AB].
- M pertence à recta AB.



Determine:

- uma equação da recta MQ.
- uma equação da tangente à circunferência de diâmetro [AB], no ponto B.
- a área do triângulo [MPQ].

90. No referencial está representada uma circunferência de centro C e raio 4 inscrita no quadrado [MNOP]. O ponto T pertence ao eixo das ordenadas e é o ponto de tangência entre a recta NO e a circunferência.



- Escreva uma equação da circunferência.
- Determine as coordenadas do ponto T.
- Determine a equação reduzida da recta NO.

Exercícios:

91. Na figura está representado um cubo.

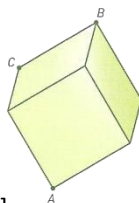
Em relação a um referencial o. n. as coordenadas dos vértices A, B, e C são:

A(5, 1, 0), B(1, 5, 4) e C(1, 1, 4).

91.1. Determine uma equação do plano medidor de [AB].

91.2. Verifique se o vértice C pertence ao plano medidor de [AB].

92. Determine uma equação do plano tangente à superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ na origem do referencial.



93. Em relação a um referencial o. n. considere os pontos: A(3, 0, 2), B(-1, 2, -2) e C(2, -1, 1)

93.1. Determine uma equação da superfície esférica em que [BC] é um diâmetro.

93.2. Identifique o conjunto de pontos do espaço P(x, y, z) que satisfazem a condição $\vec{AP} \cdot \vec{CP} = 0$

93.3. Mostre que a superfície esférica de diâmetro [AB] pode ser definida por: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 7$.

▪ EQUAÇÃO DE UM PLANO

> Equação de um plano definido por um ponto e um vector normal

Na figura está representado um plano α , um ponto A que lhe pertence e

um vector $\vec{n}$ que é normal ao plano α .

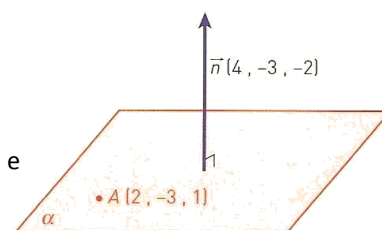
Se o vector $\vec{n}$ é perpendicular ao plano então é perpendicular a todas as rectas e vectores contidos no plano.

Consideremos um ponto genérico do plano, P(x, y, z). Então:

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-2, y+3, z-1) \cdot (4, -3, -2) = 0 \Leftrightarrow 4x-8-3y-9-2z+2=0 \Leftrightarrow 4x-3y-2z=15$$

De uma forma geral a equação que define um plano é da forma:

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ em que } \vec{n} = (a, b, c)$$



Reparemos que: $\vec{n} = (4, -3, -2)$

> Equação de um plano definido por três pontos não colineares

Na figura está representado um plano β , e os pontos A(-1, 3, 1), B(1, 1, 0) e C(0, 2, -2) que lhe pertencem.

Para definirmos o plano precisamos de um vector normal ao plano.

Consideremos o vector $\vec{u} = (a, b, c)$ um vector normal ao plano. Então:

$$\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \wedge \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, -2, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b - c = 0 \\ a - b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a - 2b \\ -5a + 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a - 2b \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \end{cases}$$

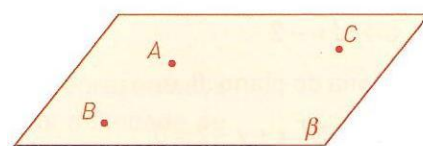
O vector $\vec{u}$ pertence à família de vectores $(a, a, 0)$, $a \neq 0$.

Considerando $a = 1$, temos $\vec{u} = (1, 1, 0)$.

Sabemos que β tem uma equação do tipo: $x + y + d = 0$.

Usemos o ponto do plano A(-1, 3, 1) para determinar d.

$$-1 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2 \quad \text{Então } \beta: x + y - 2 = 0$$



Exercícios:

94. Os pontos A(1, -3, 7), B(2, 0, -5) e C(1, 1, 7) são não colineares e pertencem ao plano α .

Verifique se o vector $\vec{u}$ é normal ao plano α , sendo:

94.1. $\vec{u} = (3, -1, 12)$ 94.2. $\vec{u} = (-6, -2, -1)$

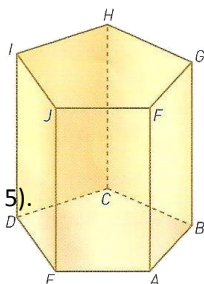
94.3. $\vec{u} = (12, 0, 1)$

95. Considere o prisma pentagonal recto representado na figura.

Em relação a um referencial o. n., os vértices A(-1, 2, -3), F(3, -2, 5) e G(2, -3, 5).

Determine uma equação do plano:

95.1. FGH 95.2. ABC 95.3. ABG



96. Relativamente a cada um dos planos seguintes, indique um vector normal e um ponto que lhe pertença.

96.1. $3x - y + 2z = 3$ 96.2. $x + z + 7 = 0$ 96.3. $z = 6$

97. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.

O ponto M é o centro da base.

Em relação a um referencial o. n.

sabe-se que M(0, 1, -3) e V(2, 0, -1).

97.1. Mostre que: $2x - y + 2z + 7 = 0$

é uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

97.2. Determine o valor de k para o qual o ponto:

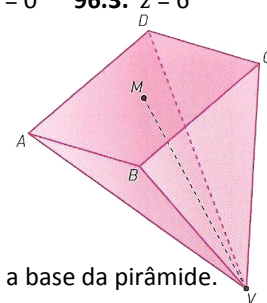
P(k, -2, k+1) pertence ao plano que contém a base da pirâmide.

98. Considere os pontos: A(1, -1, 2)

B(0, 1, -1) e C(3, 0, -2).

98.1. Mostre que os pontos A, B e C definem um plano.

98.2. Determine uma equação cartesiana do plano ABC.



INTERSECÇÃO DE PLANOS E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A intersecção de dois planos pode ser:

Um conjunto vazio (sistema impossível)	Um plano (sistema possível indeterminado)	Uma recta (sistema possível indeterminado)

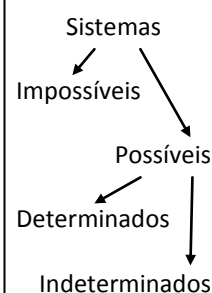
A intersecção de três planos pode ser:

Um conjunto vazio (sistema impossível)			Um plano (sistema possível indeterminado)
Uma recta (sistema possível indeterminado)			Um ponto (sistema possível determinado)

Resolução de Sistemas:

Na resolução de sistemas de equações, além da aplicação de técnicas de resolução, devemos dar-lhe uma interpretação geométrica.

Classificação de Sistemas



M.A.(2)

Exercícios:

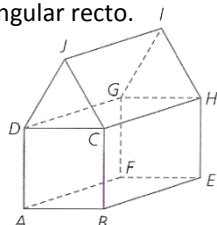
99. Observe o poliedro da figura constituído por um paralelepípedo e um prisma triangular recto.

Indique:

99.1. dois planos cuja intersecção é a recta CJ.

99.2. dois planos estritamente paralelos.

99.3. dois planos perpendiculares cuja intersecção é a recta CH



100. Em relação a um referencial o. n. $Oxyz$, considere o plano β definido pela equação $x + 3y - 5z - 4 = 0$. Determine uma equação vectorial da recta que resulta da intersecção do plano β com o plano.

100.1. xOy

100.2. xOz

100.3. yOz

100.4. $x = z + 1$

101. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 3x - \frac{9}{2}y + 6z = 6 \\ -x + \frac{3}{2}y - 2z = -4 \end{cases}$$

102. Mostre que a intersecção dos seguintes planos é um ponto pertencente ao 2º octante.

$$\alpha: 2x + 5y = 16$$

$$\beta: x + 3y - 2z = -2$$

$$\theta: x + z = 4$$

103. Identifique o conjunto de pontos que resulta da intersecção dos planos α , β e θ , assim definidos:

103.1. $\alpha: 2x + y - 5 = 0$ $\beta: x + 3z - 16 = 0$ $\theta: 5y - z - 10 = 0$

103.2. $\alpha: 2x + y - 5z + 1 = 0$ $\beta: x - y - z + 2 = 0$
 $\theta: x + 2y - 4z - 1 = 0$

104. Num referencial o. n. $Oxyz$, os planos α e β são definidos pelas equações: $\alpha: x - z = 2$ $\beta: x + 2y - 2z = -3$.

Os planos α e β são:

(A) coincidentes

(B) estritamente paralelos

(C) concorrentes não perpendiculares

(D) perpendiculares

▪ EQUAÇÕES CARTESIANAS DA RECTA NO ESPAÇO

A determinação de equações cartesianas de uma recta no espaço pode ser feita a partir da uma equação vectorial da recta.

Seja r uma recta, no espaço, que passo no ponto

$A(x_0, y_0, z_0)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Uma equação da recta é:

$P = A + k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$ ou seja

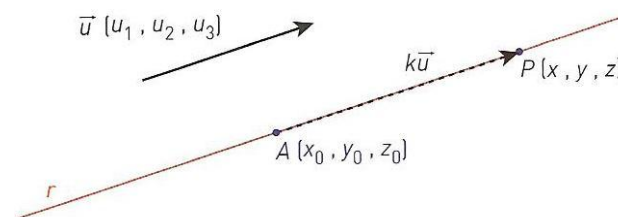
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(u_1, u_2, u_3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Se $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$ resolvendo cada uma das equações em ordem a k :

$$\begin{cases} k = \frac{x-x_0}{u_1} \\ k = \frac{y-y_0}{u_2} \\ k = \frac{z-z_0}{u_3} \end{cases}$$

Equações cartesianas da recta r

$$\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$



- Se uma das coordenadas do vector director for nula, por exemplo $\vec{u} = (0, u_2, u_3)$ com $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$ tem-se:

$$x = x_0 \wedge \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$

- Se duas das coordenadas do vector director forem nulas, por exemplo $\vec{u} = (0, 0, u_3)$ com $u_3 \neq 0$ tem-se:

$$x = x_0 \wedge y = y_0$$

▪ INTERSECÇÃO DE UMA RECTA COM UM PLANO

Posição relativa da recta e plano:

Paralelas		Concorrentes	
r é estritamente paralela a α .	r é apostada a α .	r é perpendicular a α .	r é oblíqua a α .
$r: (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\alpha: x - 2y + z = 0$	$r: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\alpha: 2x - y = 0$	$r: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\alpha: x + 2y + 3z = 0$	$r: \frac{x-1}{2} = y = z$ $\alpha: x + y + z = 0$

**

O vector normal do plano é perpendicular ao vector director da recta. $\vec{n} \perp \vec{r}$

O vector normal do plano é paralelo ao vector director da recta. $\vec{n} // \vec{r}$

A intersecção de uma recta r com um plano α pode ser:

- um ponto, se r é concorrente a α ;
- a recta r , se r está contida no plano;
- o conjunto vazio, se r é estritamente paralela a α .

Nota:

No estudo da posição relativa de rectas e planos é útil averiguar a posição dos vectores que estão envolvidos.

Exercícios:

105. Escreva as equações cartesianas da recta:

105.1. que passa no ponto $A(1, 0, -1)$ e tem a direcção de $\vec{u}(1, -1, 3)$

105.2. $(x, y, z) = (0, 0, 3) + k(-5, 2, 4)$, $k \in \mathbb{R}$

105.3. que passa nos pontos $A(2, 1, 3)$ e $B(2, 0, -1)$

106. Determine analiticamente a intersecção da recta r com o plano α em cada uma das situações apresentadas na figura **.

Exercícios:

107. Em relação a um referencial o. n. $Oxyz$, considere os pontos A, B e C e a recta r tais que:

$$A(2, -3, 4) \quad B(-1, -4, -7) \quad C\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, 2\right)$$

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = z+6$$

107.1. Represente a recta AB através de equações cartesianas.

107.2. Verifique se os pontos A, B e C definem um plano.

107.3. Escreva uma equação vectorial da recta r .

107.4. Mostre que as rectas r e AB são concorrentes em B.

108. Para cada uma das seguintes rectas indique um ponto que lhe pertença e um vector director.

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = z-2 \quad s: 3-x = 2y = \frac{z-1}{4}$$

$$t: x = 3 \wedge y = \frac{z-2}{5} \quad u: y = -1 \wedge z = 7$$

109. Em relação a um referencial o. n. $Oxyz$ considere:

- o ponto A(-1, 3, 2)

- o plano $\alpha: x - \frac{y}{2} - 3z + 1 = 0$

- a recta $t: x = \frac{y+1}{3} = -z+1$

109.1. Escreva uma equação vectorial da recta t .

109.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta t com o plano α , caso exista.

109.3. Represente, através de equações cartesianas, a recta s paralela à recta t que passa no ponto A.

110. Determine uma equação vectorial de recta definida pela condição:

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

111. Para cada uma das seguintes aléneas determine a intersecção da recta r com o plano α .

111.1. $r: (x, y, z) = (1, 3, 0) + k(1, 0, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

$$\alpha: x + y - 2z - 1 = 0$$

111.2. $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = 1-z$ $\alpha: x - y - z = 0$

112. Considere a recta de equação:

$$(x, y, z) = (2, -1, 0) + k(2, 1, -2), \quad k \in \mathbb{R}$$

Determine a intersecção da recta com:

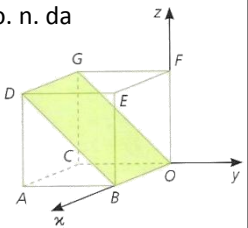
112.1. o plano xOy .

112.2. o plano perpendicular à recta dada e que passa no ponto de coordenadas (2, 1, -1)

112.3. a recta definida por $x-1 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{-2}$

113. O cubo representado no referencial o. n. da figura tem aresta de medida igual a 4 cm.

Escreva dois sistemas de três equações a três incógnitas impossíveis referentes a planos definidos pelos vértices do cubo.



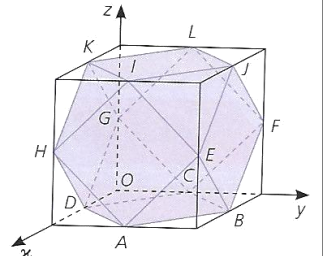
114. Na figura seguinte está representado em referencial o. n. $Oxyz$ um cuboctaedro, cujos vértices são os pontos médios de um cubo de lado 4.

Utilize planos que contêm as faces do cuboctaedro para obter um sistema de três equações nas variáveis x, y e z :

114.1. impossível.

114.2. cuja solução seja a recta AE.

114.3. cuja solução seja o ponto H.



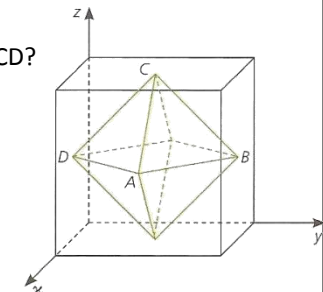
115. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, um cubo de aresta 4 e o seu dual, representados na figura ao lado.

115.1. Calcule $\vec{CD} \cdot \vec{CB}$.

O que pode dizer sobre o ângulo BCD?

115.2. Verifique que os planos ABC e ACD são definidos pelas equações $x + y + z = 8$ e $x - y + z = 4$, respectivamente.

115.3. Determine a intersecção do plano ABC com o eixo Ox .

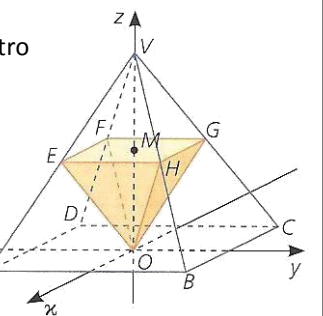


116. No referencial o. n. $Oxyz$ estão representadas duas pirâmides quadrangulares, tal que:

- A origem do referencial O é o centro do quadrado [ABCD] de lado 4 cm.

- M é o ponto médio de [OV] e V tem coordenadas (0, 0, 6).

116.1. Prove que o ponto de intersecção da recta VB com o plano EFG tem coordenadas (1, 1, 3).



116.2. Calcule a área total da pirâmide menor.

116.3. Determine a amplitude do ângulo formado pelas rectas OH e HB. Apresente o resultado aproximado às décimas de grau.

116.4. Identifique, utilizando letras da figura, a intersecção dos planos HEO, VAB, e VAD.

116.5. Defina analiticamente a recta que resulta da intersecção dos planos VDC e VAB.

117. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a recta r e o plano α definidos, respectivamente por: $r: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ e $\alpha: 3x - z = 0$

Qual a intersecção da recta r com o plano α ?

(A) É o ponto (0, 2, 3) (B) É o ponto (0, 0, 0)

(C) É o conjunto vazio. (D) É a recta r .

PROGRAMAÇÃO LINEAR

O desenvolvimento tecnológico e o aumento da competitividade fazem com que a tomada de decisões, na maioria das vezes, se fundamente na análise das mais diversas situações, tendo como objectivo, por exemplo, obter o lucro máximo ou minimizar custos.

A resolução de um problema de programação linear passa pelos seguintes passos:

1.º Passo: Criar um modelo matemático para resolvermos o problema:

- a) Introduzir as variáveis de decisão;
- b) Escrever a função objectivo;
- c) Escrever as restrições às variáveis de decisão.

2.º Passo: Representar graficamente o sistema de inequações e definir a região admissível, ou seja, o conjunto das soluções do problema.

3.º Passo: Calcular o valor da função objectivo nos vértices da região admissível e indicar a solução óptima ou soluções óptimas.

Problema:

Num determinado dia, um pequeno comerciante pretende vender 17 maçãs e 40 peras.

Para tal tem dois tipos de embalagens:

Tipo A: com 1 maçã e 4 peras

Tipo B: com 3 maçãs e 5 peras

Quando vende uma embalagem do tipo A ganha 1 euro e quando vende uma caixa do tipo B ganha 2 euros.

Quantas embalagens de cada tipo deve o comerciante fazer para obter o máximo lucro?

Resolução:

> Variáveis de decisão.

Perguntou-se quantas embalagens de cada tipo deve o comerciante fazer.

Assim, as incógnitas do problema são:

x = número de embalagens do tipo A

y = número de embalagens do tipo B

> Função objectivo

Pretende-se obter o lucro máximo.

Vendendo x embalagens do tipo A ganha-se $1 \times x$

Vendendo y embalagens do tipo B ganha-se $2 \times y$.

Então:

$f(x, y) = x + 2y$ é a função objectivo que pretendemos maximizar.

> Restrições

O enunciado refere 17 maçãs e 40 peras disponíveis.

Assim, temos restrições relativas ao número de maçãs e relativas ao número de peras.

Para ajudar a relacionar os dados construiremos uma tabela:

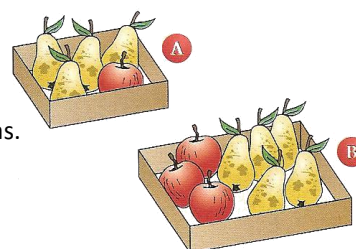
Embalagem	n.º emb.	n.º de maçãs	n.º de peras
Tipo A	x	$1x$	$4x$
Tipo B	y	$3y$	$5y$
Total		$x + 3y$	$4x + 5y$

Como o número de maçãs é 17, temos $x + 3y \leq 17$

Como o número de peras é 40, temos $4x + 5y \leq 40$

Como as variáveis x e y são não negativas, temos ainda que:

$$x \geq 0 \wedge y \geq 0$$



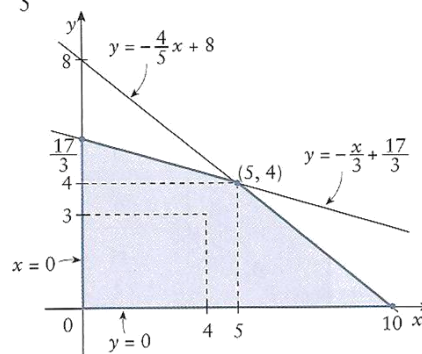
Daqui resulta o sistema de restrições:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 17 \\ 4x + 5y \leq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

> Representação gráfica do sistema de inequações

$$\begin{array}{l} x + 3y \leq 17 \\ 3y \leq -x + 17 \\ y \leq -\frac{x}{3} + \frac{17}{3} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 5 & 4 \\ 0 & \frac{17}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x + 5y \leq 40 \\ 5y \leq -4x + 40 \\ y \leq -\frac{4}{5}x + 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 5 & 4 \\ 0 & 8 \end{array}$$



O conjunto-solução do sistema de inequações, ou seja, a região admissível está a cinza na figura.

Observando a região admissível pode-se concluir que, por exemplo, podem ser feitas:

- 10 caixas do tipo A e nenhuma do tipo B.
- 5 caixas do tipo A e 4 caixas do tipo B.
- 4 caixas do tipo A e 3 caixas do tipo B.

De um modo geral, qualquer ponto da região admissível poderá ser a solução para o problema.

> Determinação da solução ótima / Método analítico

Teremos, agora, de determinar o ponto (x, y) da região admissível que maximiza a função $f(x, y) = x + 2y$.

Para o método analítico calcula-se o valor da função objectivo nos vértices da região admissível.

x	y	$f(x, y) = x + 2y$
0	0	0
10	0	10
5	4	13
0	$\frac{17}{3}$	$\frac{34}{3} \approx 11,3$

Observando os valores da tabela, verificamos que o valor máximo do lucro é 13 euros e é obtido com 5 embalagens do tipo A e 4 embalagens do tipo B.

> Determinação da solução ótima / Método gráfico

Cada um dos pontos coloridos da figura é uma solução possível.

Qual destas soluções nos dá o lucro máximo?

O lucro máximo será obtido para um ponto da recta de equação $x + 2y = k$ que satisfaça as seguintes condições:

- Tenha em comum um ponto da região admissível.
- k seja o maior número.

Para determinar o ponto que satisfaz estas condições desenham-se rectas da forma $x + 2y = k$, todas paralelas à recta da função objectivo. Estas rectas chamam-se rectas de nível.

Pode-se começar pela recta de nível zero. $x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

Com a ajuda da régua e do esquadro desenha-se a recta que toca pelo menos um ponto da região admissível e que está o mais acima possível.

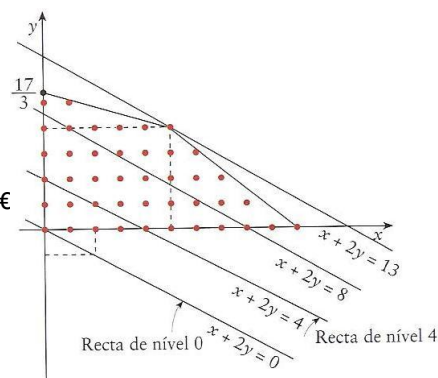
Tem-se que:

$$f(5, 4) = 5 + 2 \times 4$$

$$f(5, 4) = 13$$

Logo, o lucro máximo é 13 €

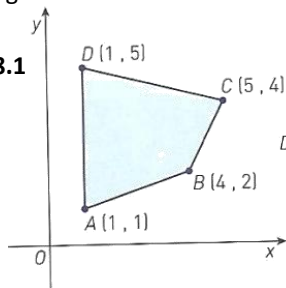
e é obtido se se fizerem 5 embalagens do tipo A e 4 embalagens do tipo B.



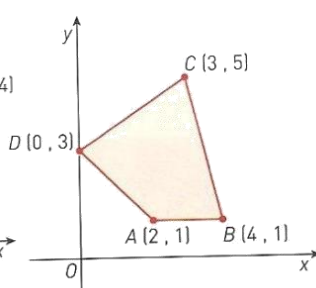
Exercícios:

118. Defina, através da conjunção de condições, a região do plano correspondente a cada um dos seguintes polígonos.

118.1



118.2.



119. Represente em relação a um referencial o. m., o conjunto de pontos do plano definido por:

119.1.

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 3 \\ x \geq 1 \\ y \geq x \end{cases}$$

119.2.

$$\begin{cases} y \geq x \\ 2y \geq -3x + 9 \\ y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

120. Um armazém tem 500 kg de bananas, 100 kg de mangas e 150 kg de carambolas.

Vai encher de fruta dois tipos de cestos:

- cestos do tipo A: com 4 kg de bananas, 2 kg de mangas e 1 kg de carambolas
- cestos do tipo B: com 2 kg de bananas, 1 kg de mangas e 2 kg de carambolas

Os preços dos cestos do tipo A e B são 150 e 165 mil dobras, respectivamente.

120.1. Quantos cestos se deve encher de cada tipo para maximizar o rendimento na venda dos cestos de fruta.

120.2. Qual será o lucro máximo?

121. A Associação de Estudantes de uma Escola Secundária decidiu organizar uma viagem. As inscrições foram abertas e inscreveram-se 350 alunos, ficando decidido que o transporte será feito de autocarro.

A empresa transportadora comunicou à Associação que tem disponíveis 8 autocarros de 50 lugares e 10 de 30 lugares, no entanto, só tem disponíveis 9 motoristas.

O aluguer de um autocarro de 50 lugares é 6 milhões de dobras e o de 30 lugares é 2,5 milhões de dobras.

Quantos autocarros de cada tipo deve alugar a Associação de modo a minimizar o custo da viagem?

122. Uma empresa produz dois tipos de barcos de recreio: barcos tipo A, para duas pessoas, e barcos tipo B, para quatro pessoas.

Cada barco do tipo A necessita de 0,9 horas na parte de fabrico e 0,8 horas na parte de acabamento.

Cada barco do tipo B necessita de 1,8 horas na parte de fabrico e 1,2 horas na parte de acabamento.

O máximo de horas disponíveis, por mês, para o fabrico e para o acabamento é de 864 e 672, respectivamente.

O barco A dá um lucro de 600 mil dobras e cada barco do tipo B um lucro de 1 milhão de dobras.

Quantos barcos de cada tipo devem ser feitos para maximizar o lucro?



FUNÇÕES RACIONAIS

DEFINIÇÃO, DOMÍNIO E ZEROS DE UMA FUNÇÃO RACIONAL

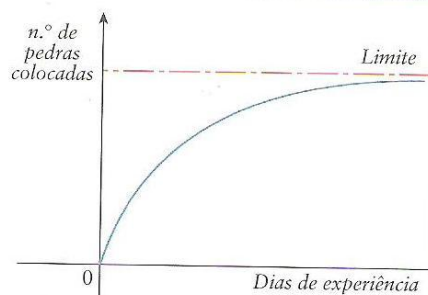
O António vai aprender uma profissão: pavimentar, com pedras decorativas, jardins e calçadas.

No primeiro dia de trabalho coloca um certo número de pedras, no segundo dia mais algumas do que no dia anterior, no terceiro dia ainda coloca mais pedras do que no segundo dia, e assim sucessivamente.

Será que em cada dia que passa o António colocará sempre mais pedras do que no dia anterior?

É evidente que quando adquirir experiência, o António atinge o limite das suas possibilidades e a produtividade do António já não pode ser aumentada.

A situação que acabámos de descrever pode ter como modelo matemático um função racional.



Uma função racional é uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios e $d(x)$ é diferente do polinómio nulo.

O domínio D_f de uma função racional, f , é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : d(x) \neq 0\}$$

Exemplo 1: São funções racionais:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} ; D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} ; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} ; D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 ; D_f = \mathbb{R}$$

Não são funções racionais:

$$f(x) = \sqrt{x} + 3$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \frac{2^x}{3+x}$$

Exemplo 2: Determinemos o domínio e os zeros da função racional:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + x - 2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \neq 0\}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x \in D_f \text{ (uma vez que o denominador não pode ser igual a zero)}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

0 é o único zero da função.

Exercícios:

6. Explique porque é que:

$f(x) = \sqrt{2}x + 3$ é uma função racional e

$g(x) = 2\sqrt{x} + 3$ não é uma função racional

7. Escreva como um produto de factores.

7.1. $2x - 2$

7.2. $x^2 - 4$

7.3. $1 - x^2$

7.4. $\frac{x^2}{4} - 49$

7.5. $x^2 - 4x + 3$

7.6. $x^3 - x^2$

7.7. $2x^2 - 11x + 5$

7.8. $x^3 - x$

8. Determine o domínio e os zeros de cada uma das seguintes funções racionais.

8.1. $f(x) = \frac{2}{x-3}$

8.2. $f(x) = \frac{-3}{2x+1}$

8.3. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

8.4. $f(x) = \frac{2x+3}{4-3x}$

8.5. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

8.6. $f(x) = \frac{2x}{3x^2 - 9}$

8.7. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

8.8. $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{4x^2 - 4x + 6}$

8.9. $f(x) = \frac{x-5}{2x^2 - 11x + 5}$

■ CARACTERÍSTICAS DE UMA FUNÇÃO RACIONAL E DO SEU GRÁFICO

Na figura ao lado está representada graficamente a função racional, f ,

definida por
$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Observando o gráfico podemos concluir que:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- 0 é o único zero da função
- A função é positiva em $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ e negativa em $]0, 2[$
- A função é decrescente e contínua em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$
- Quando x se aproxima de 2, por valores à esquerda de 2, a função tende para menos infinito.

Simbolicamente $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.

- Quando x se aproxima de 2, por valores à direita de 2, a função tende para mais infinito.

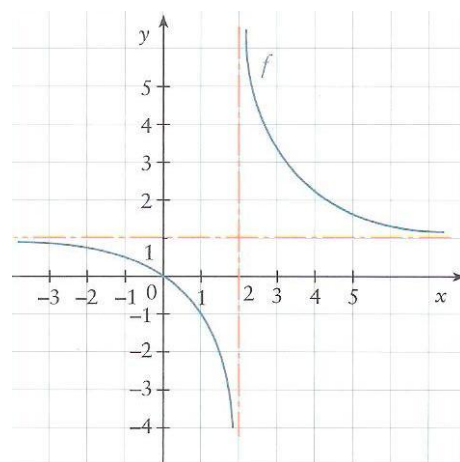
Simbolicamente $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

- Quando x se aproxima de $+\infty$, a função tende para 1.

Simbolicamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

- Quando x se aproxima de $-\infty$, a função tende para 1.

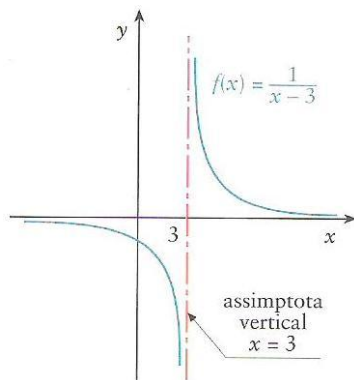
Simbolicamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.



A recta $x=2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f
A recta $y=1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f

■ ASSIMPTOTAS VERTICAIS

Observe o gráfico da função:



Nas funções racionais as assíntotas verticais estão associadas aos zeros do denominador.

Seja f uma função racional definida por:

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios.

Se a é um número real tal que $d(a) = 0$ e $n(a) \neq 0$, então a recta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico $y = f(x)$.

Exercícios:

9. Observe as representações gráficas das funções f e i .

9.1. Indique o valor dos seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

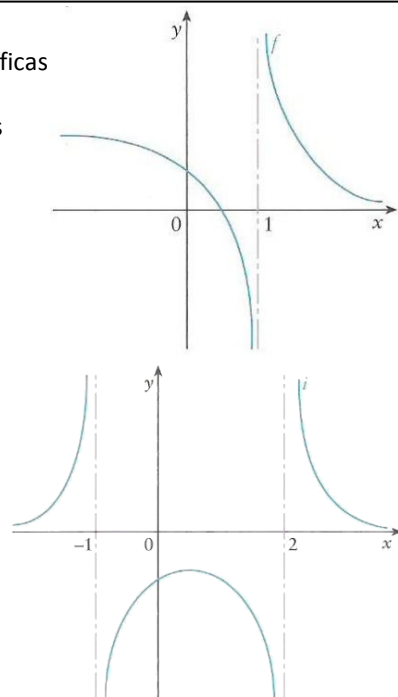
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} i(x)$$

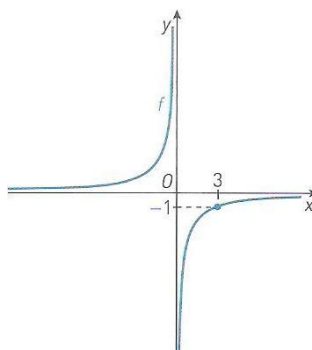
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} i(x)$$

9.2. Para cada uma delas indique o domínio e escreva as equações das assíntotas verticais e horizontais.



10. No referencial da figura está representada uma função f tal que:

$$f(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



10.1. Determine o valor de k .

10.2. Sabe-se que a equação $f(x) = a$ é impossível. Qual é o valor de a ?

10.3. Qual é o domínio da função? E o contradomínio?

10.4. Escreva as equações das assíntotas do gráfico da função.

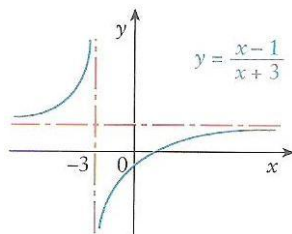
Exemplos: Determinemos a assíntota ou assíntotas verticais das funções:

1. $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Zeros de f : 1

$x = -3$ é assíntota vertical do gráfico de f

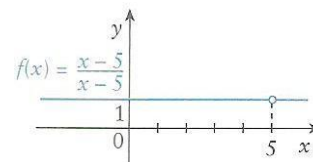


2. $f(x) = \frac{x-5}{x-5}$

$Df = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Zeros de f : não tem

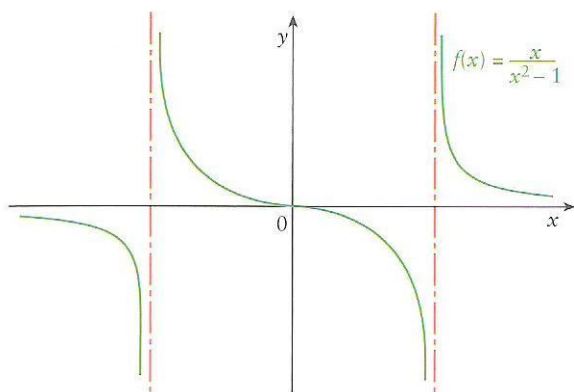
A função não tem assíntotas verticais.



■ ASSÍMPTOTAS HORIZONTAIS

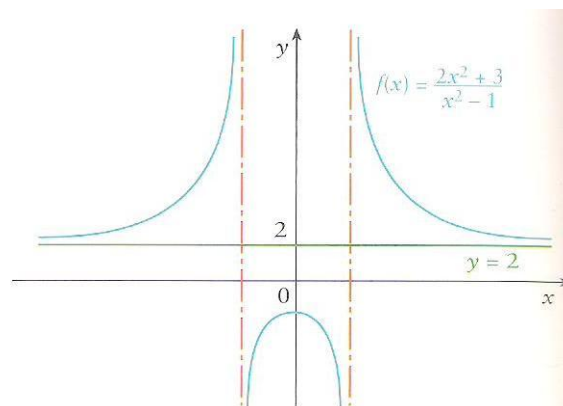
A recta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se $f(x) \rightarrow b$ quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$.

Observemos os seguintes exemplos:



Quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ a função tende para 0.

A recta $y = 0$ é uma assíntota horizontal.



Quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ a função tende para 2.

A recta $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Nas funções racionais as assíntotas horizontais estão associadas ao quociente da divisão inteira do numerador pelo denominador.

Seja f uma função racional definida por: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$

- Se $n < m$, a recta $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f .

- Se $m = n$, a recta $y = \frac{a_n}{b_m}$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f .

- Se $n > m$, o gráfico da função não tem assíntota horizontal.

Exemplos: Determinemos a assíntota horizontal do gráfico das funções:

1. $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+3}$ $y = 0$ é a assíntota horizontal do gráfico de f

O polinómio do numerador tem menor grau que o polinómio do denominador.

2. $f(x) = \frac{5x^2+1}{2x^2+3}$ $y = \frac{5}{2}$ é a assíntota horizontal do gráfico de f

Como o numerador e o denominador têm o mesmo grau, basta considerar o quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

Exercícios:

11. Determine as assíntotas verticais e a assíntota horizontal do gráfico de cada uma das funções

11.1. $f(x) = \frac{3}{x-4}$

11.2. $f(x) = \frac{3x}{2x-5}$

11.3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

11.4. $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6}$

11.5. $f(x) = \frac{3x^2+5}{x^2+x-12}$

11.6. $f(x) = \frac{-x^2+3}{x^2+3x-4}$

11.7. $f(x) = \frac{x-1}{x^4-16}$

11.8. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$

12. Escreva uma expressão analítica para uma função racional que tenha:

12.1. uma assíntota horizontal e duas assíntotas verticais.

12.2. uma assíntota horizontal e não tenha assíntotas verticais.

▪ ASSÍMPTOTAS OBLÍQUAS

Consideremos e estudemos a função racional, f , definida por: $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$

Domínio: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Zeros: -1 e 5

$$\text{c.a. } x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$$

Assíntota vertical: $x = 3$

Assíntota horizontal: não tem

Apesar do gráfico da função não ter assíntota horizontal, ainda assim é possível obter mais informação acerca do comportamento da função quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, dividindo o numerador pelo denominador.

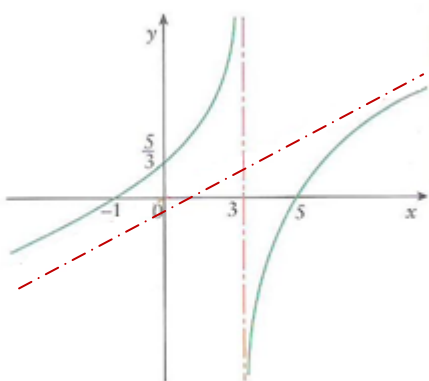
<i>Dividendo</i>	<i>Divisor</i>
$\begin{array}{r} x^2 - 4x - 5 \\ -x^2 + 3x \\ \hline -x - 5 \\ +x - 3 \\ \hline -8 \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 3 \\ x - 1 \\ \hline \end{array}$
<i>Resto</i>	<i>Quociente</i>

Logo, $f(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$

Quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $\frac{8}{x - 3} \rightarrow 0$ e o gráfico da função aproxima-se da recta $y = x - 1$.

Esta recta é chamada de assíntota oblíqua do gráfico da função f .

O gráfico:



Exercícios:

13. Escreva uma expressão analítica de função racional, em que o gráfico admita as assíntotas:

13.1. $x = 2$ e $y = -1$

13.2. $x = 0$ e $y = 3$

13.3. $x = -3$ e $y = 1$

13.4. $x = -1$ e $y = 0$

13.5. $x = 0$ e $y = x$

13.6. $x = 3$ e $y = x + 1$

14. Determine as assíntotas dos gráficos das seguintes funções.

14.1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

14.2. $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$

14.3. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

14.4. $h(x) = \frac{x^2 - 6}{2x}$

▪ FUNÇÕES RACIONAIS DA FAMÍLIA $y = mx + a + \frac{b}{cx + d}$ E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Como vimos em exemplos anteriores é possível transformar algumas expressões de funções racionais em expressões do tipo $y = mx + a + \frac{b}{cx + d}$.

Com a função neste aspecto podemos retirar automaticamente quase todas as suas características. Vejamos com dois exemplos.

Exemplo 1: $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$ (estudado anteriormente)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Zeros: -1 e 5

Assíntota vertical: $x = 3$

Assíntota oblíqua: $y = x - 1$

Mas podemos escrever $f(x)$ na forma $mx + a + \frac{b}{cx + d}$, $f(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$

Com $m = 1$, $a = -1$, $b = -8$, $c = 1$, $d = -3$. E daí concluímos que:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

$$\text{Assíntota vertical: } x = -\frac{d}{c}$$

$$\text{Assíntota oblíqua: } y = mx + a$$

$$\text{ou Assíntota horizontal: } y = a \quad \text{se } m = 0$$

Exemplo 2: $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ efectuando a divisão podemos escrever: $g(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$

Com $m = 0, a = 2, b = -3, c = 1, d = 1$.

Então: $Dg = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$x = -1$ é a assíntota vertical e $y = 2$ é a assíntota horizontal.

$$\begin{array}{r} 2x-1 \quad | \quad x+1 \\ -2x-2 \\ \hline -3 \end{array}$$

Para representar graficamente uma função racional deve-se:

- Determinar o domínio;
- Determinar os pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados;
- Determinar as assíntotas;
- Averiguar a variação do gráfico da função nos intervalos existentes.

M. A. (3)

Exemplo: Representemos graficamente a função racional: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Então: $Dg = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

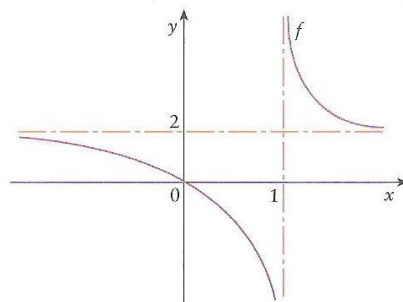
Zeros: 0 c.a. $2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Ordenada na origem: $f(0) = \frac{2 \times 0}{0-1} = 0$

$x = 1$ é a assíntota vertical e $y = 2$ é a assíntota horizontal.

$f(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$ temos, $a = 2, b = 2, c = 1, d = -1$. $\frac{b}{c} > 0$

Gráfico da função



Exercícios:

15. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio, os pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados, as assíntotas verticais, a assíntota horizontal ou oblíqua e esboce o gráfico.

15.1. $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$

15.2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

15.3. $f(x) = \frac{3x}{2x+2}$

15.4. $f(x) = \frac{2x+6}{2-x}$

15.5. $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x+7}$

15.6. $f(x) = \frac{5}{2-x}$

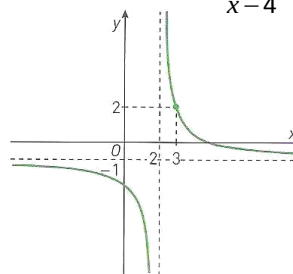
15.7. $f(x) = \frac{3x+3}{x+1}$

15.8. $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-4}$

16. No referencial da figura está representada graficamente uma função f .

Sabe-se que $f(x) = a + \frac{b}{x+d}$; $a, b, d \in \mathbb{R}$

Atendendo á informação contida na figura, determine os valores de a, b e d .



▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES FRACIONÁRIAS

Exemplo 1: Resolva em $\mathbb{R}$, a equação: $\frac{3x}{x+1} = x$

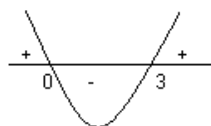
$$\begin{aligned} \frac{3x}{x+1} = x &\Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} - x = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} - \frac{x^2+x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x+3x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=2) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \end{aligned}$$

Conjunto solução: $\{0, 2\}$

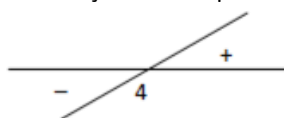
Exemplo 2: Resolva em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{x^2-3x}{x-4} \geq 0$

Devemos começar por calcular os zeros do numerador e do denominador e em seguida esboçamos a respectiva variação de sinal de ambos.

Numerador $\rightarrow$ zeros: 0 e 3



Denominador $\rightarrow$ zeros: 4



Para resolver a inequação podemos recorrer a um quadro de sinais e à observação do esboço gráfico:

x	$-\infty$	0		3		4	$+\infty$
$x^2 - 3x$	+	0	-	0	+	+	+
$x^2 - 4$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$	-	0	+	0	-	ss	+

$$S = [0, 3] \cup]4, +\infty[$$

Exercícios:

17. Por processos exclusivamente analíticos, resolva as equações.

17.1. $\frac{x^2 - 3x}{x + 2} = 0$

17.2. $\frac{1}{x} + \frac{x}{x - 2} = 0$

17.3. $\frac{2x - 1}{x + 2} = 1$

17.4. $\frac{x^2}{x^2 - 9} = \frac{-x}{6 - 2x}$

18. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

18.1. $\frac{x - 2}{x + 1} > 0$

18.2. $\frac{8}{x + 2} < x$

18.3. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3} \leq 0$

18.4. $x + \frac{5}{x + 2} > 4$

19. A função, T , permite determinar a temperatura em graus Celsius de uma chávena de chá, t minutos após ter sido servida, é dada por:

$$T(t) = \frac{8t + 800}{t + 10}, t \geq 0$$



19.1. Represente graficamente a função.

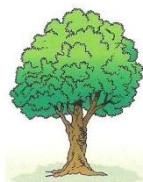
19.2. Qual a temperatura do chá cinco minutos após ter sido servido?

19.3. A Sofia bebeu o chá a 38°C. Quanto tempo decorreu desde o instante em que foi servido?

19.4. Qual o significado da assíntota horizontal do gráfico da função no contexto da situação apresentada?

20. A altura A de uma árvore, em metros, é dada por:

$$A(t) = \frac{10t + 2}{t + 4}, t \geq 0$$



sendo t o número de anos

decorridos desde a sua plantação.

20.1. Faça o esboço do gráfico da função.

20.2. Determine a altura da árvore quando foi plantada.

20.3. Qual será a altura da árvore 50 anos depois de ser plantada?

20.4. Quanto tempo é necessário decorrer para que a árvore tenha 11m de altura?

20.5. Explique o significado da assíntota horizontal, do gráfico da função, no contexto do problema.

21. A evolução do preço P , em euros, de um determinado

produto é dada pela função: $P(t) = \frac{500t + 1900}{t + 1}, t \geq 1$

onde t é o tempo, em meses, decorrido após 1 de Maio de 2005

21.1. Represente graficamente a função.

21.2. O produto pode vir a custar 300 euros? Porquê.

22. A gripe está a afectar a população escolar de uma localidade que é constituída por 200 estudantes. A percentagem de estudantes que falta às aulas passados t dias após o início do 2º período, 3 de Janeiro, é dada pelo seguinte modelo matemático:

$$G(t) = \frac{24}{t + 2}, t \text{ em dias}$$

22.1. No primeiro dia de aulas, quantos alunos dessa localidade estavam doentes com gripe?

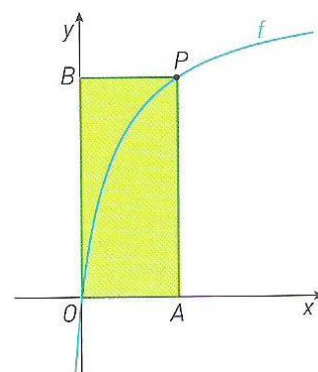
22.2. Em que dia a gripe atinge 2% da população escolar da localidade?

22.3. A atenção dada a este problema deixa de ter significado quando o número de estudantes afectados pela gripe não ultrapassa os 10 estudantes. Qual a data prevista para o fim deste problema?

22.4. Faça um esboço do gráfico correspondente ao modelo utilizado admitindo que é válido até ao dia 10 de Fevereiro.

23. No referencial da figura está representado um rectângulo [OAPB] em que o vértice P, de abscissa positiva, pertencente ao gráfico da função f definida

por $f(x) = \frac{8x}{x + 1}$



Seja x a abscissa do ponto P.

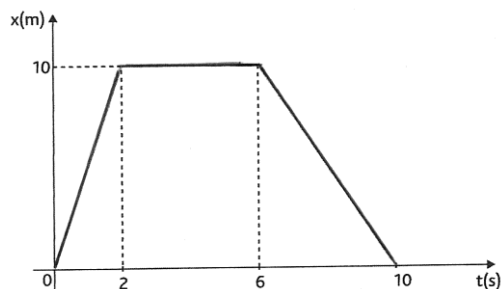
Determine x de modo que:

23.1. [OAPB] seja um quadrado.

23.2. a área do rectângulo [OAPB] seja menor que 18.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR 2 OU MAIS RAMOS

Exemplo 1: O gráfico de $x = f(t)$ traduz o movimento de um carrinho que descreve uma trajectória rectilínea.



Se pretendermos definir analiticamente esta função, temos de considerar três intervalos distintos, pois a função tem comportamentos diferentes em cada um deles.

No intervalo $[0, 2]$ temos um segmento de recta com declive positivo; em $]2, 6[$ a função é constante e igual a 10; por fim, no intervalo $[6, 10]$ temos um segmento de recta com declive negativo.

Uma função deste tipo diz-se definida por ramos ou troços.

Vamos calcular a expressão analítica que define cada um dos ramos.

- No intervalo $]2, 6[$:

A função é constante e igual a 10, logo é definida por:

$$y = 10 \quad \text{se } 2 < t < 6$$

- No intervalo $[6, 10]$:

O 3º segmento tem como extremos os pontos de coordenadas (6,10) e (10,0), ou seja, o declive é igual a:

$$m = \frac{0 - 10}{10 - 6} \Leftrightarrow m = -\frac{10}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}. \text{ Como o ponto } (10,0) \text{ pertence}$$

$$\text{a este ramo, então: } 0 = -\frac{5}{2} \times 10 + b \Leftrightarrow b = 25$$

$$\text{logo este ramo é definido por: } y = -\frac{5}{2}t + 25 \quad \text{se } 6 \leq t \leq 10$$

- No intervalo $[0, 2]$:

O segmento de recta tem como extremos os pontos de coordenadas

(0,0) e (2,10). Assim, o declive será

$$m = \frac{10 - 0}{2 - 0} \Leftrightarrow m = 5.$$

Temos então $y = 5t$ se $0 \leq t \leq 2$

Podemos agora definir analiticamente a função inicial do seguinte modo:

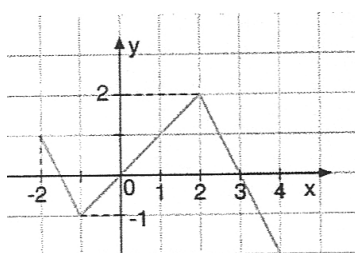
$$f(t) = \begin{cases} 5t & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ 10 & \text{se } 2 < t < 6 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{se } 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Exemplo 2: Represente graficamente a seguinte função e indique o domínio, o contradomínio, os zeros, os extremos, a monotonia, a injectividade e o sinal da função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{se } x \leq -1 \\ x & \text{se } -1 < x < 2 \\ -2x + 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Resolução:

Esboço do gráfico:



$$Dg = \mathbb{R} \quad D'g = \mathbb{R} \quad \text{zeros: } -\frac{3}{2}, 0, 3$$

$$\text{Extremos: } f(-1) = -1 \text{ mínimo relativo} \quad f(2) = 2 \text{ máximo relativo}$$

$$\text{Monotonia: Crescente se } x \in [-1, 2] \quad \text{Decrescente se } x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$$

Não injectiva (tem dois zeros)

$$\text{Sinal: Positiva se } x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]0, 3[\quad \text{Negativa se } x \in]-\frac{3}{2}, 0[\cup]3, +\infty[$$

Exercício:

24. Represente graficamente cada uma das seguintes funções e indique o domínio, o contradomínio, os extremos e os zeros.

$$24.1. f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x + 5 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

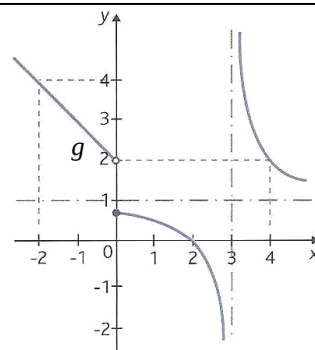
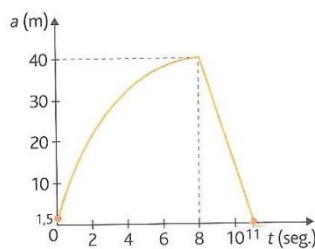
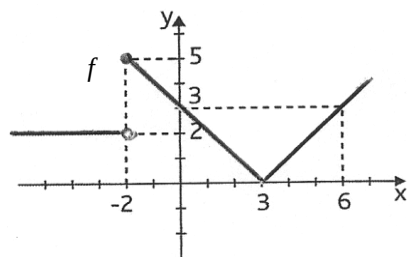
$$24.2. g(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x \leq -2 \\ -x & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$24.3. h(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ 1 & \text{se } 2 < x < 4 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

$$24.4. g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$24.5. h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$24.6. h(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-4} & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 3x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exercício:**25.** Defina analiticamente as funções representadas graficamente.

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

No estudo das funções reais de variável real, deve ter presente que, para caracterizar (definir) uma função, é necessário conhecer:

- o domínio.
- os processo que permite determinar a imagem de qualquer elemento do domínio.

IGUALDADE DE FUNÇÕES

Exemplo: Será que as seguintes funções reais de variável real são iguais?

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

As funções não são iguais porque não têm o mesmo domínio.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Duas funções reais de variável real f e g , são iguais se:

$$D_f = D_g$$

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in D_f$$

Exercícios:**26.** Verifique se são ou não iguais os seguintes pares de funções:

$$26.1. \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2-9} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$26.2. \quad f(x) = \frac{x^4+2x^2}{x^2+2} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

$$26.3. \quad f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$26.4. \quad f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x^2-4} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x-5}{x-2}$$

SOMA, DIFERENÇA, PRODUTO E QUOCIENTE DE FUNÇÕES

Assim como se pode calcular a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números reais, também se determina a soma, a diferença, o produto e o quociente de duas funções.

Exemplo: Sejam $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{2x}{x-1}$.

1. Determine D_f e D_g . 2. Defina: $f+g$; $f-g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$

Resolução:

$$1. \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$2. \quad \bullet \quad f+g$$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} + \frac{2x^2}{x(x-1)} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$f+g: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}$$

Soma

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$f+g: D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) + g(x)$$

Diferença

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$f-g: D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) - g(x)$$

• $f - g$

$$(f - g)(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{2x^2}{x(x-1)} = \frac{-2x^2 + x - 1}{x^2 - x}$$

$$Df \cap Dg = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$f - g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{-2x^2 + x - 1}{x^2 - x}$$

• $f \times g$

$$(f \times g)(x) = \frac{1}{x} \times \frac{2x}{x-1} = \frac{2x}{x(x-1)} = \frac{2}{x-1}$$

$$Df \cap Dg = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$f \times g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2}{x-1}$$

• $\frac{f}{g}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x} : \frac{2x}{x-1} = \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{2x} = \frac{x-1}{2x^2}$$

$$\text{Zeros de } g: 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$Df \cap Dg \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$f/g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x-1}{2x^2}$$

Exercícios:

27. Sendo f e g funções reais de variável real, defina $f + g$, $f - g$, $f \times g$ e $\frac{f}{g}$.

27.1. $f(x) = 3x$ e $g(x) = x + \frac{1}{2}$

27.2. $f(x) = \frac{x+2}{x}$ e $g(x) = \frac{x}{x+4}$

27.3. $f(x) = \frac{2x-6}{x}$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$

27.4. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = |x-1|$

28. Considere a função afim $f(x) = 2x + 3$

Dê um exemplo de uma função g , decrescente, de modo que a função soma $f + g$ seja:

28.1. estritamente decrescente.

28.2. estritamente crescente.

28.3. constante.

29. Sejam h e j duas funções reais de variável real,

$$h(x) = \frac{2x-2}{x} \text{ e } j(x) = x^2$$

29.1. Calcule:

a) $(h \times j)(-1)$ b) $\left(\frac{j}{h}\right)(3)$

29.2. Determine o domínio da função:

a) $h - j$ b) $\frac{j}{h}$

• Produto

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$f \cdot g : D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$$

• Quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

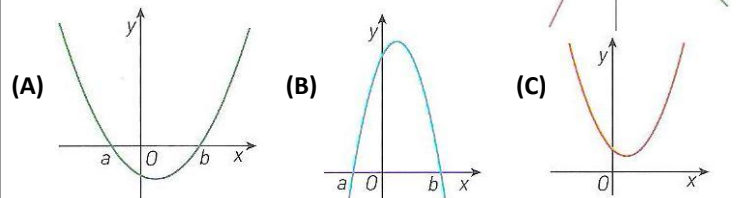
$$\frac{f}{g} : D_{\frac{f}{g}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

30. No referencial da figura estão representadas duas funções afins f e g .

Qual das seguintes representações gráficas pode corresponder à função $f \times g$?



31. Considere a função h definida por $h(x) = x^2 - 4$ e g uma função quadrática representada no referencial da figura. Determine:

31.1. o domínio de $\frac{h}{g}$.

31.2. os zeros de $\frac{h}{g}$.

31.3. o conjunto solução de $\frac{h}{g}(x) \leq 0$.

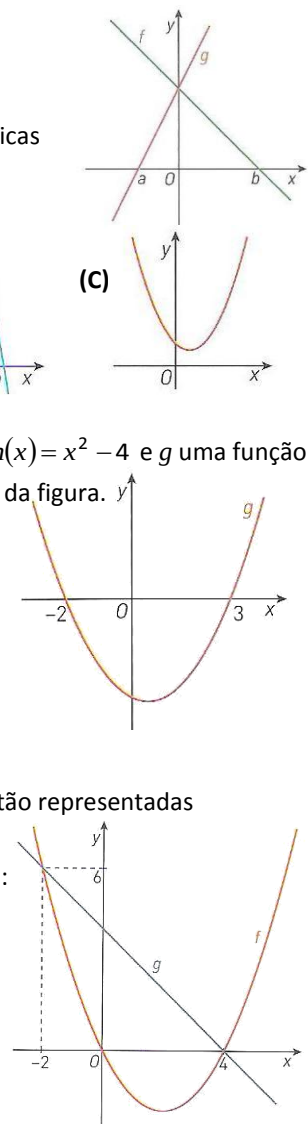
32. Duas funções f e g de domínio $\mathbb{R}$ estão representadas graficamente no referencial da figura.

32.1. Determine o domínio das funções:

a) $f - g$ b) $\frac{f}{g}$ c) $\frac{g}{f}$

32.2. Determine o conjunto-solução da condição:

a) $f(x) \leq g(x)$ b) $(f - g)(x) = 0$



▪ FUNÇÃO COMPOSTA DE DUAS FUNÇÕES

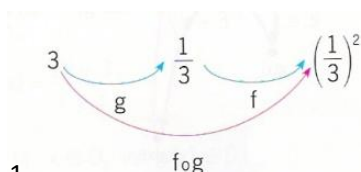
Dadas as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, vamos definir uma nova função que se representa por $f \circ g$ (lê-se f após g) e que é a composta de f com g . $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Calculemos:

$$(f \circ g)(3) = f(g(3))$$

$$g(3) = \frac{1}{3}$$

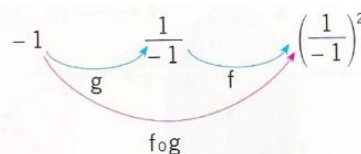
$$\text{então } f(g(3)) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$



$$(f \circ g)(1) = f(g(1))$$

$$g(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

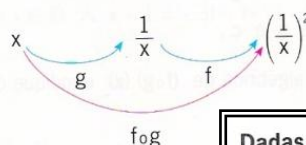
$$\text{então } f(g(-1)) = (-1)^2 = 1$$



As imagens de g passam a ser os objectos de f , ou seja cada elemento x transformado por g passa a pertencer ao domínio de f . Por isso se lê “ f após g ”, ou seja, “ f depois de g ”.

Determinemos então a expressão geral e o domínio desta nova função.

$$g(x) = \frac{1}{x} ; \text{ então } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$



$$D_f = \mathbb{R} \text{ e } D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \neq 0\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$

No caso geral, dadas duas funções f e g , é falsa a afirmação:

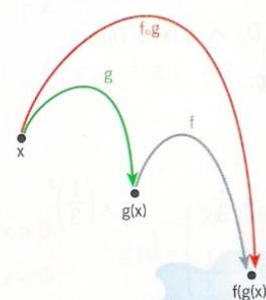
$$g \circ f = f \circ g$$

No entanto, nos casos em que $g \circ f = f \circ g$, as funções f e g dizem-se permutáveis.

Dadas as funções f e g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$



Exercícios:

33. Calcule $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$, sendo:

33.1. $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x + \frac{1}{2}$

33.2. $f(x) = \frac{2}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x+1}$

34. Caracterize $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$, sendo:

34.1. $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x - 2$

34.2. $f(x) = \frac{1}{x-4}$ e $g(x) = x^2$

34.3. $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 4 - 3x$

35. Considere as funções f , g e h definidas por:

$$f(x) = 2x + 1 ; \quad g(x) = \frac{1}{x} ; \quad h(x) = x^3$$

35.1. Caracterize as funções:

a) $g \circ f$ b) $f \circ h$ c) $h \circ f$

35.2. Mostre que as funções g e h são permutáveis.

36. Considere a função g tal que

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ e a função } f \text{ representada graficamente na figura.}$$

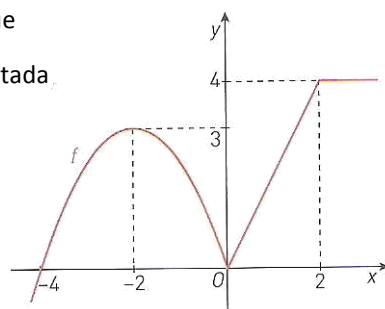
Calcule:

36.1. $g(f(2))$

36.2. $f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

36.3. $f(-f(2))$

36.4. $f(g(0,01))$



37. Para a função f apresentada a seguir, indique duas funções g e h de modo que $f = h \circ g$

37.1. $f(x) = (x+5)^2$

37.2. $f(x) = x^2 + 5$

37.3. $f(x) = \frac{2}{x-1}$

37.4. $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$

37.5. $f(x) = x^2 - 2x$

37.6. $f(x) = \frac{1}{4x^2} + 1$

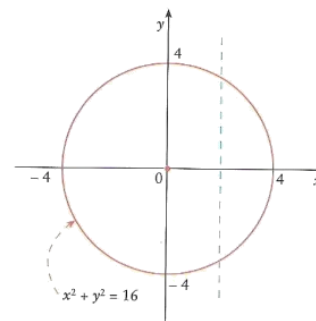
38. Dada a função f definida por $f(x) = x - 2$, defina a função g , de modo que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

FUNÇÕES COM RADICAIS QUADRÁTICOS E CÚBICOS

■ FUNÇÕES IRRACIONAIS

Na figura está representada uma circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio 4.

A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 16$

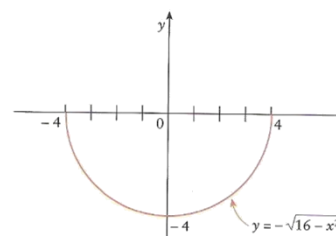
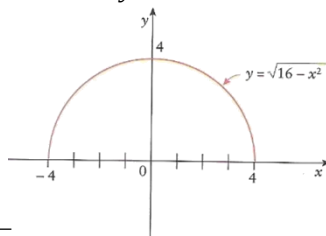


O gráfico da circunferência, representado no referencial, não representa uma função, uma vez que pelo teste da recta vertical, conseguimos traçar uma recta vertical que intersecta mais de que uma vez o gráfico.

No entanto se resolvermos a equação em ordem a y obtemos duas funções:

$$x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = 16 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{16 - x^2} \vee y = -\sqrt{16 - x^2}$$

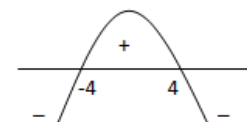


As funções $y = \sqrt{16 - x^2}$; $y = -\sqrt{16 - x^2}$ são irracionais, porque a variável independente, x , está sob o símbolo de radical.

O domínio de cada uma das funções é dado por:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 16 - x^2 \geq 0\} = [-4, 4]$$

$$16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \\ \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$$



Exercícios:

39. Das funções a seguir apresentadas, indique as que são irracionais.

39.1. $f : x \rightarrow 1 + \sqrt{3x}$ 39.2. $g : x \rightarrow \sqrt{3x^2} + \sqrt{2x} + 1$

39.3. $h : x \rightarrow 2 + \frac{x}{\sqrt{3}}$ 39.4. $i : x \rightarrow 2 + \sqrt{\frac{x}{3}}$

40. Determine o domínio das funções f tais que:

40.1. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

40.2. $f(x) = x - \sqrt{-x}$

40.3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

40.4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$

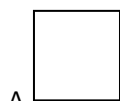
40.5. $f(x) = \sqrt{4 - 2x^2}$

40.6. $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - x - 2}$

■ RAIZ ÍNDICE n DE x // OPERAÇÕES COM RADICAIS QUADRÁTICOS E CÚBICOS

Exemplo A:

Consideremos o quadrado A cuja área é de 64cm^2 .



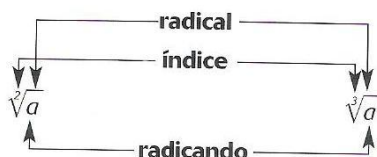
Qual o comprimento dos seus lados?

Seja a a variável que representa a medida de um lado do quadrado. Temos que:

$$a^2 = 64 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow a = -8 \vee a = 8$$

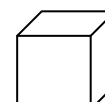
(quais os números que ao quadrado dão 64?)

Como neste caso, a representa uma medida, apenas nos interessa a solução positiva $a = 8$, ou seja, cada um dos lados do quadrado mede 8cm.



Exemplo B:

Consideremos o cubo B cujo volume é de 8cm^3 .



B

Qual a medida de cada uma das suas arestas?

Representemos por b a aresta do cubo. Temos que:

$$b^3 = 8 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow b = 2$$

(quais os números que ao cubo dão 8?)

Neste caso apenas encontramos uma solução e por isso podemos concluir que a aresta do cubo mede 2cm.

No conjunto dos números reais, chama-se raiz de índice n de um número real x , representando-se por $\sqrt[n]{x}$, a um número real y tal que $y^n = x$, sendo n um número natural.

- Da definição resulta: $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

As operações com radicais e a simplificação de expressões, já estudadas em anos anteriores, estão presentes nas tabelas que se seguem.

Radicais quadráticos

Propriedades ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$)	
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36}$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0$	$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}}$
$(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}$	$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2^4}$
$a \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$	$3 \sqrt{7} = \sqrt{9 \times 7}$
$m \sqrt{a} + n \sqrt{a} = (m+n) \sqrt{a}$	$2 \sqrt{3} + 5 \sqrt{3} = (2+5) \sqrt{3}$

Radicais cúbicos

Propriedades ($a, b \in \mathbb{R}$)	
$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{216}$
$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$	$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{54}{16}}$
$(\sqrt[3]{a})^p = \sqrt[3]{a^p}$	$(\sqrt[3]{64})^2 = \sqrt[3]{64^2}$
$a \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$	$2 \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8 \times 5}$
$m \sqrt[3]{a} + n \sqrt[3]{a} = (m+n) \sqrt[3]{a}$	$3 \sqrt[3]{7} + 2 \sqrt[3]{7} = (3+2) \sqrt[3]{7}$

Estas propriedades facilitam os cálculos permitindo até, muitas vezes, prescindir da calculadora para operar com números irracionais.

Exercícios:

41. Complete:

41.1. $x^3 = 30 \Leftrightarrow x = \underline{\hspace{2cm}}$

41.2. $x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \underline{\hspace{2cm}}$

41.3. $a^5 = 32 \Leftrightarrow a = \underline{\hspace{2cm}}$

42. Resolva a equação:

42.1. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ em ordem a r .

42.2. $E = \frac{1}{2}gt^2$ em ordem a t ($t \geq 0$)

42.3. $S = 4\pi r^2$ em ordem a r ($r > 0$)

43. Simplifique:

43.1. $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ 43.2. $5\sqrt{2} - \sqrt{8}$

43.3. $\sqrt[3]{27a}$ 43.4. $\sqrt{2^6}$

43.5. $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$ 43.6. $\frac{\sqrt[3]{16a}}{\sqrt[3]{2}}$

44. Sem recorrer à calculadora mostre que:

44.1. $\sqrt{5} + 2\sqrt{45} - \sqrt{80} = 3\sqrt{5}$

44.2. $\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{150} = 10\sqrt[3]{3}$

44.3. $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{18}{75}} = \frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$

44.4. $(2\sqrt{2} - 1)^2 \times (9 + 4\sqrt{2}) = 49$

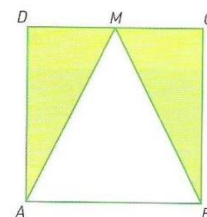
44.5. $\sqrt[3]{0,000\ 001 \times 216} = 0,06$

44.6. $\sqrt{6 - 3\sqrt{2}} \times \sqrt{6 + 3\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

45. Na figura está representado um quadrado [ABCD].

Sabe-se que a medida da diagonal do quadrado é 8 e M é o ponto médio do [CD].

Mostre que $\overline{AM} = 2\sqrt{10}$.

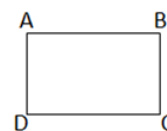


46. Em relação ao rectângulo representado sabe-se que:

- a área é $\sqrt{40} \text{ m}^2$

- $\overline{AD} = \sqrt{5} \text{ m}$

Mostre que o perímetro do rectângulo é igual a $(4\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\text{m}$.



POTÊNCIAS DE EXPOENTE FRACCIÓNÁRIO

Para todo o real não negativo x , com $q \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$, temos:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Ao ser definida potência de expoente fraccionário desta forma, mantêm-se as regras operatórias de potências já conhecidas.

47. Escreva sob a forma de potência de expoente fraccionário:

47.1. $\sqrt[3]{2}$

47.2. $\sqrt{6}$

47.3. $\sqrt[3]{5^2}$

47.4. $\sqrt[3]{2^{-1}}$

48. Escreva sob a forma de radical:

48.1. $3^{\frac{2}{3}}$

48.2. $(7^2)^{\frac{5}{3}}$

48.3. $6^{-\frac{1}{2}}$

48.4. $\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}}$

49. Calcule:

49.1. $27^{\frac{2}{3}}$

49.2. $64^{\frac{5}{6}}$

49.3. $8^{-\frac{4}{3}}$

49.4. $0,001^{-\frac{2}{3}}$

49.5. $m^{\frac{2}{3}} \times m^{\frac{5}{6}}$

49.6. $6^{-\frac{2}{3}} \times 6^{-\frac{4}{3}} : 3^{-2}$

49.7. $0,36^{-\frac{3}{2}}$

50. Resolva em $\mathbb{R}$, as seguintes equações.

50.1. $(x^3 - 30)^4 = 0$

50.2. $x^{\frac{2}{3}} = 9$

50.3. $n^{\frac{3}{5}} = 5^{\frac{1}{5}}$

INVERSA DE UMA FUNÇÃO

FUNÇÃO INVERSA DE UMA FUNÇÃO INJECTIVA

Seja f uma função real de variável real, definida por:

$$f(x) = 2x + 4$$

Determinemos a expressão analítica da inversa de f .

1º Substitui-se $f(x)$ por $y \rightarrow y = 2x + 4$.

2º Resolve-se a equação em ordem a $x \rightarrow y = 2x + 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - 2$$

3º Utilizando x como variável independente e utilizando f^{-1} para representar a função inversa de f vem:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2$$

Sendo f e f^{-1} funções inversas uma da outra, satisfazem a seguinte condição: Se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$.

Se o ponto (a, b) pertence ao gráfico de f , então o ponto (b, a) pertence ao gráfico f^{-1}

Quando representadas num mesmo referencial, os respectivos gráficos são simétricos em relação à recta de equação $y = x$.

Observe-se que o domínio de f coincide com o contradomínio de f^{-1} . Analogamente, o domínio de f^{-1} coincide com o contradomínio de f .

Mas nem sempre uma função admite função inversa, vejamos por exemplo a função $g(x) = x^2$.

Existem elementos distintos com a mesma imagem, por exemplo: $g(2) = g(-2) = 4$

Ao estabelecer-se a correspondência inversa de g , o elemento 4 passa a ter duas imagens, -2 e 2, o que não é compatível com a definição de função. Isto acontece porque g não é injectiva.

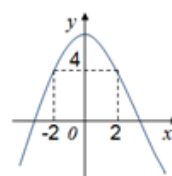
Uma função f admite função inversa se e só se f é injectiva.

Recorde: Função Injectiva

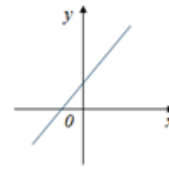
$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função injectiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

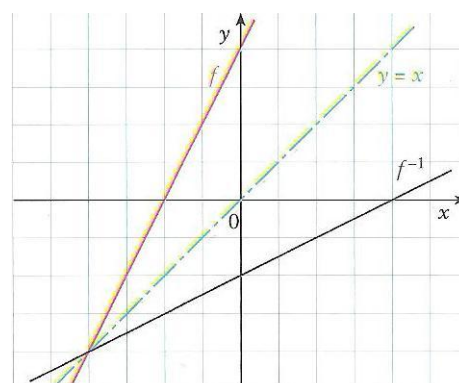
Graficamente, uma função não é injectiva se existir pelo menos uma recta horizontal que intersecta mais do que uma vez o gráfico da função.



não injectiva



injectiva



Seja f uma função real de variável real A e injectiva

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

Se B é o contradomínio de f , isto é $B = f(A)$, chama-se função inversa de f e representa-se por f^{-1} à função:

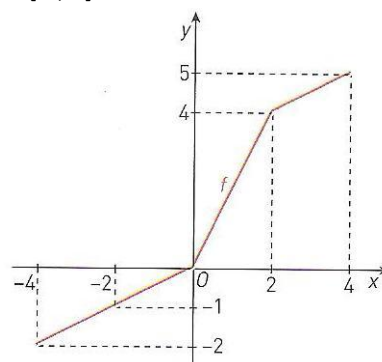
$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$x \mapsto f^{-1}(x)$$

Em que $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$.

Exercícios:

51. Observe a representação gráfica de função f de domínio $[-4, 4]$.



51.1. Indique o contradomínio de função f .

51.2. Seja f^{-1} a função inversa de f .

Determine:

a) $f^{-1}(-2)$

b) $f^{-1}(4)$

c) $f^{-1}(0)$

d) $(f \circ f^{-1})(4)$

51.3. Faça uma representação gráfica da função f^{-1} .

52. Caracterize a função inversa de f , sendo:

52.1. $f(x) = \frac{6}{x}$

52.2. $f(x) = \frac{2}{x-3}$

52.3. $f(x) = 6x + 1$

52.4. $f(x) = 5x - 7$

52.5. $f(x) = \frac{2}{x+5}$

52.6. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

Exercícios: 53. Indique, justificando, qual das seguintes funções admite inversa: 53.1. $a(x) = 2x^3 + 3$ 53.2. $b(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ 53.3. $c(x) = \frac{x+2}{3x-4}$ 54. Com um exemplo, mostre que a inversa de uma função afim é também uma função afim e que as rectas representativas dos seus gráficos têm declives inversos.	55. Dê exemplo de uma função ímpar que: 55.1. tenha inversa. 55.2. não tenha inversa. 56. Mostre que se uma função é par, então não tem inversa.
---	--

▪ RESTRIÇÃO DE UMA FUNÇÃO A UM INTERVALO

Como já vimos anteriormente a função $f(x) = x^2$ não tem inversa porque não é injectiva.

Mas podemos restringir o domínio de f , que é $\mathbb{R}$, de forma a obtermos uma função injectiva.

Por exemplo, consideremos a função f_1 tal que:

$$Df_1 = \mathbb{R}_0^+ \text{ e } f_1(x) = f(x), \text{ para } x \geq 0$$

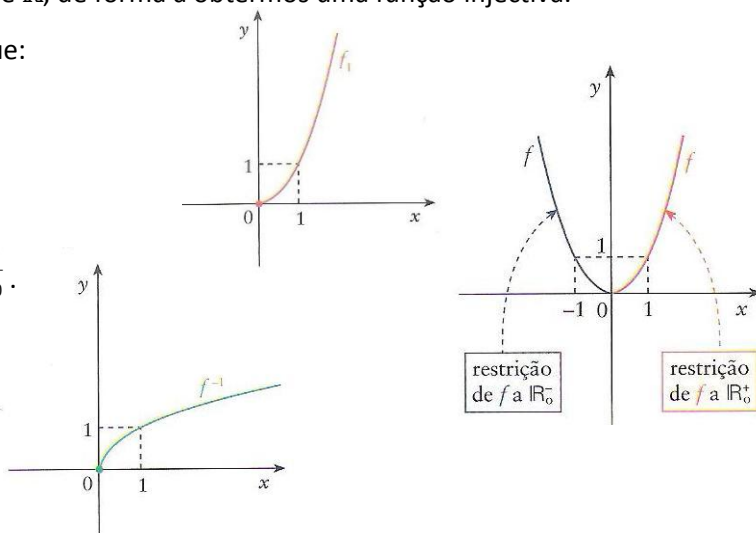
$$f_1: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto x^2$$

Esta função é uma restrição da função f a $\mathbb{R}_0^+$.

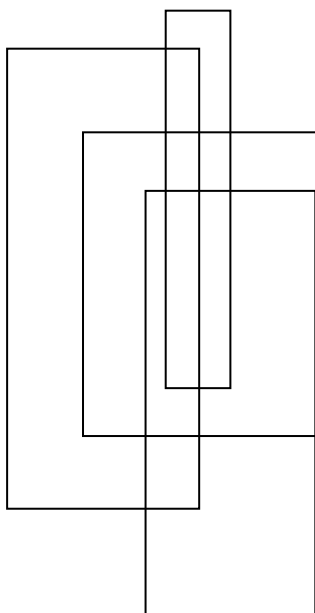
Admite inversa porque é injectiva.

$$y = x^2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

$$f_1^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto \sqrt{x}$$



Exercícios: 57. Considere as funções: $g(x) = x^3$ e $h(x) = x^2$ 57.1. Indique o domínio e o contra domínio das funções. 57.2. Resolva as equações: a) $g(x) = 15$ b) $h(x) = 15$ 57.3. Sendo g^{-1} a função inversa de g, calcule: a) $g^{-1}(g(3))$ b) $g(g^{-1}(2))$ c) $h(g^{-1}(-8))$ 58. Considere a função $f: x \mapsto 1 + \sqrt{8 - 2x^2}$ 58.1. Determine o seu domínio. 58.2. Estude a função f quanto à paridade. 58.3. A função f admite inversa? Justifique. 58.4. Indique duas funções g e h tais que $f = g \circ h$ 59. Dadas as funções f e g tais que: $f(x) = 2x^2 - 1 \text{ e } g(x) = x^3 - 5$ 59.1. Caracterize a função inversa de g. 59.2. A função f admite inversa? Justifique. 59.3. Caracterize a função inversa de f a: a) $\mathbb{R}^-$ b) $[2, +\infty[$ 60. Seja f uma função injectiva e f^{-1} a sua inversa. Se $f(-3) = 1$ e f é uma função ímpar, então $f^{-1}(-1)$ é: (A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) -3	61. Caracterize a função inversa de: 61.1. $f(x) = x^2$ e $Df = \mathbb{R}^-$ 61.2. $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ e $Dg = \mathbb{R}^-$ 61.3. $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ e $Dh = \mathbb{R}_0^+$ 61.4. $p(x) = 2 - \sqrt[3]{x+1}$ em $\mathbb{R}$ 62. O volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Exprima o raio de uma esfera como função do seu volume e represente graficamente essa função. 63. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, representada graficamente: Qual pode ser a representação gráfica da função inversa de h? (A) (B) (C) (D)
---	--



TEMA 3

SUCESSÕES

INTRODUÇÃO

O Conceito de número está ligado a objectos cuja quantidade é por ele representada. É uma ideia abstracta que associa a cada objecto uma unidade.

A sucessão dos números naturais 1, 2, 3, 4, 5, ... envolve outros conceitos além do conceito de número:

- os números estão dispostos por uma certa ordem;
- conhecido um elemento da sucessão conhece-se o seguinte;
- não há um último elemento, mas há um primeiro elemento.

Esta sucessão é a mais simples de todas e a partir dela surgem todas as outras.

Uma das sucessões mais famosa é “O problema dos coelhos” apresentado por Fibonacci no século XIII:

“Quantos casais de coelhos se tem ao fim de cada mês se se iniciar com um casal recém-nascido, sabendo que os casais de coelhos se tornam adultos com um mês de idade, que com dois meses de idade são pais de um novo casal de coelhos e que, a partir daí, ao fim de cada mês, nasce um novo casal?”

(Admite-se que não há mortes de coelhos neste processo)

Esquemáticamente temos:

Meses		Nº de casais
0		1
1		1
2		2
3		3
4		5
5		8
6		13

Referência Histórica

Leonardo Fibonacci
(1170~1250)



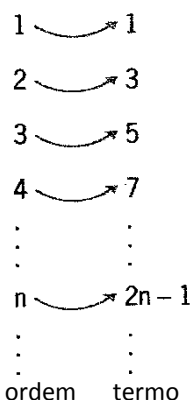
Fibonacci destacou-se na utilização da matemática árabe na actividade comercial, o que provocou um aprofundamento de conhecimentos matemáticos. Entre várias das suas obras destaca-se a que apresentou em 1202, Liber Abaci, que trata essencialmente de métodos algébricos e de problemas.

A sucessão de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., aparece em vários contextos, podemos encontrá-la na natureza e em construções geométricas.

SUCESSÕES. DEFINIÇÕES

Neste tema, dá-se continuidade ao estudo de funções, com uma particularidade: o domínio $\mathbb{N}$.

Consideremos a sucessão de números ímpares:



Seja a a função que a cada n , ordem, faz corresponder um número ímpar.

O domínio da sucessão é o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots$ são os termos da sucessão.

Neste caso, tem-se uma função de variável natural, tal que:

$$a(1) = 1 ; a(2) = 3 ; a(3) = 5 ; \dots ; a(n) = 2n - 1$$

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto 2n - 1$$

Chama-se sucessão de números reais, ou simplesmente sucessão, a uma função que a cada número natural faz corresponder um número real.

As sucessões têm notações e nomenclaturas próprias:

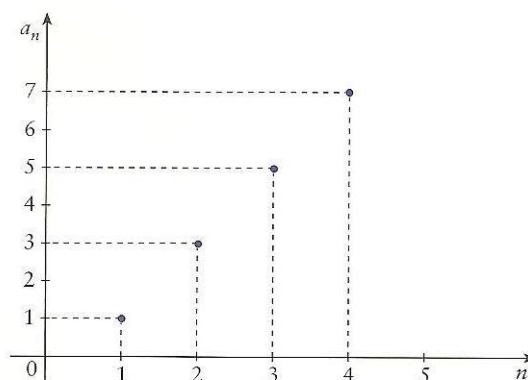
- A expressão $a(1) = 4$ pode ser representada por $a_1 = 4$ e lê-se: "o primeiro termo da sucessão é 4".
- A expressão $a(n) = 2n - 1$ pode ser representada por $a_n = 2n - 1$ e lê-se: "o termo de ordem n é $2n - 1$ ".

Diz-se que o termo geral da sucessão é $2n - 1$.

- É usual utilizar-se a notação (a_n) para designar a sucessão.

> Representação gráfica da sucessão

O gráfico da sucessão $a_n = 2n - 1$ é constituído pelo conjunto de pares ordenados do tipo (n, a_n) , $n \in \mathbb{N}$.



■ MODOS DE DEFINIR UMA SUCESSÃO

> Termo geral

Uma sucessão de números reais fica definida se for dado o seu termo geral, visto que o domínio é $\mathbb{N}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$.

No exemplo anterior temos a sucessão dos números ímpares cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$.

Exemplo: Consideremos a sucessão de termo geral: $u_n = \frac{n+1}{2n}$

1. Calculemos os quatro primeiros termos da sucessão e o termo de ordem 20.

$$u_1 = \frac{1+1}{2 \times 1} = 1; u_2 = \frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}; u_3 = \frac{3+1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}; u_4 = \frac{4+1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}; u_{20} = \frac{21}{40}$$

3. Verifiquemos que 0,51 é termo da sucessão e que 0,4 não é termo da sucessão.

$$\text{Determine-se } n \text{ de modo que: } \frac{n+1}{2n} = 0,51 \Leftrightarrow n+1 = 1,02n \Leftrightarrow n = \frac{1}{0,02} \Leftrightarrow n = 50$$

Então pode concluir-se que 0,51 é termo da sucessão. É o termo de ordem 50, ou seja, é o 50º termo da sucessão.

$$\frac{n+1}{2n} = 0,4 \Leftrightarrow n+1 = 0,8n \Leftrightarrow 1 = -0,2n \Leftrightarrow n = -5 \quad \text{Como } -5 \text{ não é um número natural, } 0,4 \text{ não é termo da sucessão.}$$

Exemplos de sucessões conhecidas:

- sucessão dos números naturais: $u_n = n$

- sucessão dos números pares: $u_n = 2n$

- sucessão das potências de 2: $u_n = 2^n$

A partir do termo geral destas sucessões é possível obter o de muitas outras.

2. Calculemos o termo de ordem $n+1$

$$\text{Se } u_n = \frac{n+1}{2n} \text{ então:}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2n+2}$$

> Por recorrência

Este processo consiste em dar a conhecer alguns dos primeiros termos sendo o termo de ordem n definido através dos termos anteriores.

Observemos os termos da sucessão dos números ímpares.

1, 3, 5, 7, 9, ...

Constatamos que cada um dos termos pode ser calculado adicionando 2 ao termo anterior, por exemplo:

$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$$

De uma forma geral podemos escrever:
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$$

Nota:

Sendo u_n o termo de ordem n da sucessão, u_{n-1} é o termo anterior a u_n e u_{n+1} é o termo posterior a u_n .

Exemplo: Consideremos a sucessão definida por recorrência:
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} - 5, n \geq 2 \end{cases}$$

1. Calculemos os 5 primeiros termos da sucessão.

$$a_1 = 3; \quad a_2 = a_1 - 5 = 3 - 5 = -2; \quad a_3 = a_2 - 5 = -2 - 5 = -7$$

$$a_4 = a_3 - 5 = -7 - 5 = -12; \quad a_5 = a_4 - 5 = -12 - 5 = -17$$

2. Calculemos o termo geral da sucessão:

n	1	2	3	4	...	n
a_n	3	-2	-7	-12	...	$8 - 5n$

Termo geral: $a_n = 8 - 5n$

Exercícios:

1. Determine os 4 primeiros termos de cada uma das sucessões:

1.1. $a_n = 3n - 1$

1.2. $b_n = \frac{n}{n+1};$

1.3. $c_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2 + 1}$

1.4. $d_n = \begin{cases} 4 & \text{se } n \geq 3 \\ n & \text{se } n < 3 \end{cases}$

2. Considere a sucessão de termo geral: $u_n = \frac{n^2 + 3}{n}$

2.1. Determine o termo de ordem 18 e o de ordem $n+1$.

2.2. Verifique se 12,25 é termo da sucessão, e, em caso afirmativo indique a sua ordem.

3. Considere a sucessão: $u_n = -n^2 - 7n$

3.1. Calcule os quatro primeiros termos e represente-os graficamente.

3.2. Verifique se 30 é termo da sucessão.

3.3. Determine a ordem a partir da qual os termos da sucessão são negativos.

4. Determine os quatro primeiros termos da sucessão (u_n), sabendo que:

$$u_1 = 4 \quad \text{e} \quad u_n = 1 - u_{n-1}, n \geq 2$$

Descreva a regularidade que encontra nos termos da sucessão.

5. Considere a sucessão (b_n) definida por recorrência.

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

5.1. Escreva alguns termos da sucessão. O que observou?

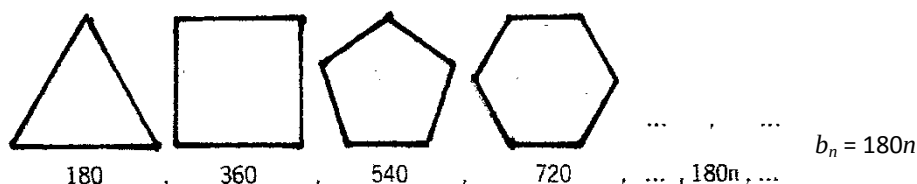
5.2. Faça uma previsão para um processo que permita encontrar qualquer termo da sucessão conhecida a sua ordem.

6. Defina por um processo de recorrência uma sucessão cujos primeiros termos são: 1, 5, 9, 13, 17, ...

7. Defina por um processo de recorrência a conhecida sucessão de Fibonacci apresentada na página 45.

■ SUCESSÕES MONÓTONAS

Exemplo 1: Consideremos a sucessão cujos termos representam as medidas, em graus, da soma das amplitudes dos ângulos internos dos polígonos de $n + 2$ lados.



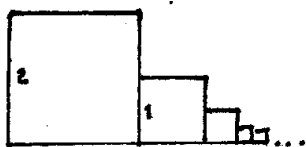
Esta sucessão é crescente porque o termo seguinte é sempre maior que o anterior.

Analicamente podemos confirmar que a sucessão é estritamente crescente uma vez que:

$$b_{n+1} - b_n = 180(n+1) - 180n = 180n + 180 - 180n = 180 > 0$$

Exemplo 2: Também é crescente a sucessão (c_n) cujos termos são: 1, 2, 2, 3, 4, 4, ..., pois, nesta sucessão o termo seguinte é sempre maior ou igual ao anterior. Temos que $c_{n+1} \geq c_n$ e por isso dizemos que a sucessão é crescente.

Uma sucessão (u_n) é <u>estritamente crescente</u> se e só se $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$	Uma sucessão (u_n) é <u>crescente (sentido lato)</u> se e só se $u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
--	--



Exemplo 3: Consideremos agora a sucessão (d_n) : 4, 1, 1/4, 1/16, 1/64, ... em que os números representam as medidas das áreas dos quadrados. Esta sucessão é estritamente decrescente uma vez que $d_{n+1} < d_n$.

Uma sucessão (u_n) é <u>estritamente decrescente</u> se e só se $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$	Uma sucessão (u_n) é <u>decrescente (sentido lato)</u> se e só se $u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
--	--

Exemplo 4: Consideremos a sucessão $v_n = 30$. $v_1 = 30$; $v_2 = 30$; $v_3 = 30$; ...

Uma vez que $v_{n+1} = v_n$ podemos afirmar que a sucessão é constante. Uma sucessão constante é crescente e decrescente.

Exemplo 5: Calculemos os primeiros termos da sucessão $w_n = (-2)^n$: $w_1 = -2$; $w_2 = 4$; $w_3 = -8$; $w_4 = 16$

Neste exemplo a sucessão não é crescente nem decrescente por isso dizemos que é não monótona.

Uma sucessão (u_n) é <u>constante</u> se e só se $u_{n+1} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$	Uma sucessão (u_n) crescente ou decrescente diz-se uma <u>sucessão monótona</u> .
---	---

Exemplo 6: Estudemos a monotonia da sucessão de termo geral: $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Calculando os primeiros termos da sucessão: $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \dots$ a sucessão parece ser crescente.

Usando o cálculo algébrico, vem:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \text{ uma vez que } n+2 > 0 \text{ e } n+1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, logo podemos afirmar que a sucessão dada é **monótona crescente**.

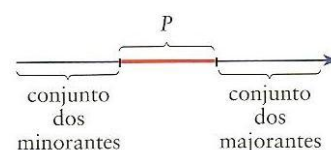
Exercícios: 8. Estude a monotonia das seguintes sucessões definidas por: 8.1. $a_n = -n + 2$ 8.2. $b_n = 6 + (-1)^n$ 8.3. $c_n = 6 - \frac{1}{n}$ 8.4. $d_n = \frac{n+3}{n+1}$ 8.5. $e_n = (3-n)^2$ 8.6. $f_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n < 6 \\ n-1 & \text{se } n \geq 6 \end{cases}$	9. Considere a sucessão de termo geral: $f_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 3 \\ n-2 & \text{se } n > 3 \end{cases}$ 9.1 Mostre que: $\forall n \in \mathbb{N}, n < 3 \Rightarrow f_{n+1} - f_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, n > 3 \Rightarrow f_{n+1} - f_n > 0$ 9.2 A sucessão dada é monótona?
--	---

▪ SUCESSÕES LIMITADAS

Seja P um subconjunto de $\mathbb{R}$. Consideremos $P =]1, 5]$.

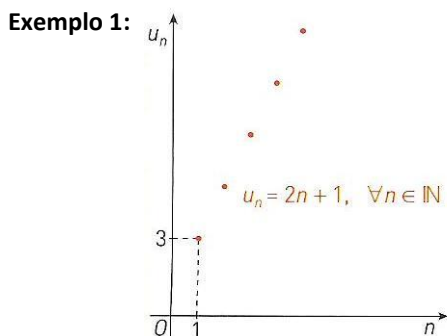
-O número a é um majorante do conjunto P se e só se a é maior ou igual que qualquer elemento do conjunto P. Temos, por exemplo, $a = 5$.

-O número b é um minorante do conjunto P se e só se b é menor ou igual que qualquer elemento do conjunto P. Temos, por exemplo, $b=1$.



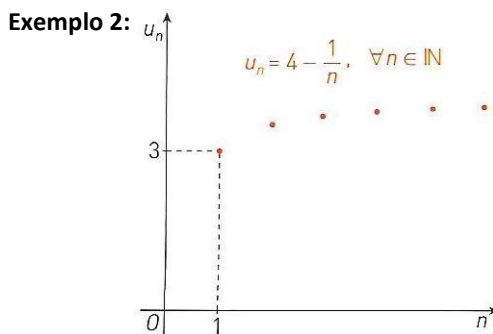
Uma sucessão (u_n) diz-se limitada se o conjunto dos seus termos é majorado e minorado.

(u_n) é limitada se e só se $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$



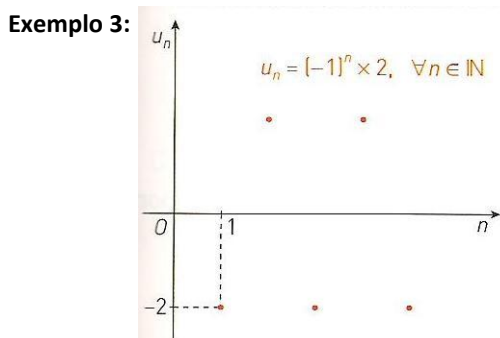
Sucessão não limitada (é minorada, não é majorada)

$$3 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$



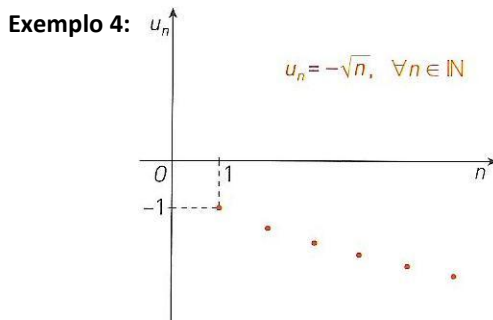
Sucessão limitada (é minorada e majorada)

$$3 \leq u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$$



Sucessão limitada (é minorada e majorada)

$$-2 \leq u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$$



Sucessão não limitada (é majorada, não é minorada)

$$u_n \leq -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 5: Consideremos a sucessão $a_n = \frac{1}{n}$.

Calculando alguns termos: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Podemos concluir que a sucessão é limitada uma vez que:

$$0 < a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 6: Consideremos agora a sucessão $b_n = 10 + \frac{1}{n}$.

Partindo do exemplo anterior sabemos que:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow (\text{enquadramento de referência})$$

Adicionando 10 a cada um dos membros vem:

$$10 < 10 + \frac{1}{n} \leq 11, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, b_n é limitada uma vez que: $10 < b_n \leq 11, \forall n \in \mathbb{N}$

Exemplo 7: Consideremos agora a sucessão $c_n = \frac{5n+3}{n+1}$.

Efectuando a divisão: $c_n = 5 - \frac{2}{n+1}$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \text{multiplicando por 2}$$

$$0 < \frac{2}{n+1} \leq 1 \rightarrow \text{multiplicando por -1}$$

$$-1 \leq -\frac{2}{n+1} < 0 \rightarrow \text{somando 5}$$

$$4 \leq 5 - \frac{2}{n+1} < 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão é limitada uma vez que $4 \leq c_n < 5, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{r|l} 5n+3 & n+1 \\ \hline -5n-5 & 5 \\ \hline -2 & \end{array}$$

Nota: Recorde que:

Se $a < b < c$

Então $-c < -b < -a$

Exercícios:

10. Mostre que são limitadas as sucessões definidas por:

10.1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ **10.2.** $u_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ **10.3.** $u_n = \frac{3n+10}{n}$

10.4. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ **10.5.** $u_n = 2 - \frac{5}{n^2}$

11. Mostre que não são limitadas as sucessões definidas por:

11.1. $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ **11.2.** $u_n = \begin{cases} -3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n+3 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

12. Dada a sucessão: $u_n = \frac{n^2-n}{3} + (-1)^n$

12.1. Calcule u_1, u_2, u_3, u_4 , e represente-os graficamente.

12.2. Justifique que (u_n) não é monótona.

12.3. Verifique se 31 é termo da sucessão.

12.4. Utilize a calculadora para determinar a ordem de um termo que seja maior do que 1 000, outro maior do que 10 000 e um terceiro maior do que 100 000. Será limitada a sucessão dada?

13. Considere a sucessão $u_n = \frac{n+1}{2}$

13.1. Indique um n° do intervalo $[6, 7]$ que não seja termo da sucessão.

13.2. Mostre que $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão é minorada?

Exercícios:

14. Escreva uma expressão analítica que possa gerar a seguinte sequência:

14.1. 8, 16, 24, 32, ... **14.2.** 2, -2, 2, -2, 2, ...

14.3. -2, 2, -2, 2, -2, ... **14.4.** 4, 6, 8, 10, 12, ...

14.5. 3, 5, 7, 9, 11, ... **14.6.** 2, 5, 8, 11, 14, ...

15. Defina por recorrência, as sucessões:

15.1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

15.2. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

16. Considere a sucessão $c_n = 2n - 1$.

16.1. Represente graficamente (c_n) para $n < 6$.

16.2. Determine: $c_{10}, c_{100}, c_{n+1}, c_{t+7}, (t \in \mathbb{N})$

16.3. Indique quantos termos inferiores a 100 tem a sucessão.

16.4. Quantos termos da sucessão são maiores ou iguais a 1000?

16.5. Estude a sucessão quanto à monotonia.

16.6. A sucessão é limitada? Justifique.

17. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A expressão $u_n = \frac{n+1}{n-1}$ define uma sucessão.

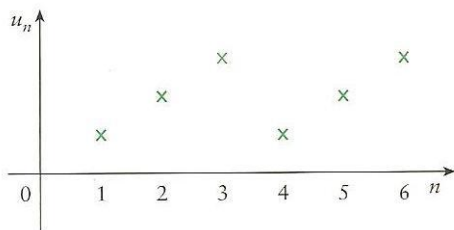
(B) O domínio de uma sucessão é um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$.

(C) O contradomínio de uma sucessão é $\mathbb{R}$.

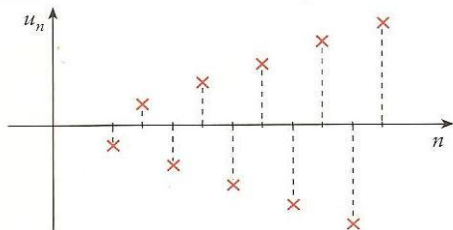
(D) Uma sucessão é uma função real de variável natural.

18. Diga justificando, quais das seguintes afirmações são falsas:

18.1. Trata-se de uma representação de uma sucessão monótona



18.2. Trata-se de uma representação de uma sucessão limitada.



18.3. A sucessão de termo geral $u_n = (-1)^3 \times 10^3$ é limitada.

18.4. Uma sucessão limitada é uma sucessão monótona.

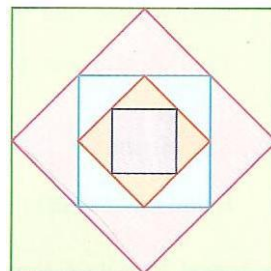
18.5. Uma sucessão monótona crescente é limitada inferiormente.

18.6. Uma sucessão não monótona é uma sucessão limitada.

19. Estude quanto à monotonia e limitação a sucessão

de termo geral: $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

20. Partindo de um quadrado de lado 1 metro, construímos uma sequência de quadrados, unindo sucessivamente os pontos médios dos lados.



20.1. Escreva os cinco primeiros termos da sequência referente à área dos quadrados obtidos.

20.2. Sugira uma expressão geral que permita determinar a área do quadrado conhecida a ordem da sequência.

20.3. Qual será a expressão geral da sucessão dos lados dos quadrados?

21. Dada a sucessão de termo geral $v_n = \frac{n+6}{3n}$

21.1. Calcule a soma dos três primeiros termos.

21.2. Estude a monotonia da sucessão.

21.3. Verifique que $v_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{n}$ e justifique que a sucessão é limitada.

21.4. Defina algebricamente uma sucessão (w_n) sabendo que $w_n = v_n$ para $n > 9$ e (w_n) não é monótona.

22. A sucessão (u_n) satisfaz a condição

$$-2 < u_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indique, das hipóteses apresentadas, afirmação necessariamente verdadeira.

(A) $2 < |u_n| \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}.$

(B) $|u_n| \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}.$

(C) $0 \leq |u_n| \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}.$

(D) $|u_n| \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}.$

23. Dê um exemplo de uma sucessão (u_n) que satisfaça as condições:

23.1. decrescente e de termos positivos.

23.2. crescente e $u_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}.$

23.3. decrescente e $u_n > 4, \forall n \in \mathbb{N}.$

23.4. não limitada $u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}.$

24. Dada a sucessão definida por $a_n = \frac{n}{n+3}$ mostre

que: **24.1.** $\frac{1}{4} \leq a_n$ **24.2.** a sucessão é limitada.

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

DEFINIÇÃO E MONOTONIA DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Observemos a sequência de figuras.

A primeira figura é formada por quatro traços.

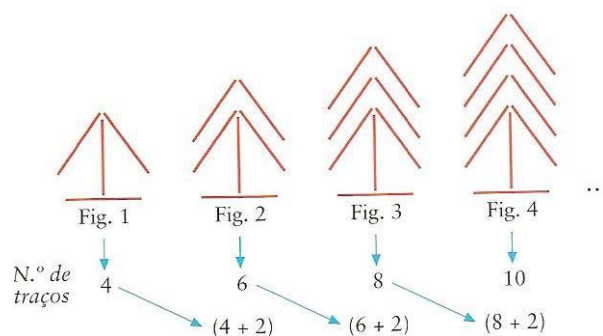
A partir da primeira, cada figura tem sempre mais dois traços do que a anterior.

Seja a_n o número de traços de uma figura; então,

$$a_{n+1} = a_n + 2, \text{ ou seja, } a_{n+1} - a_n = 2.$$

A diferença de cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante e igual a 2.

A uma sucessão deste tipo chama-se progressão aritmética.



Uma sucessão (u_n) é progressão aritmética se e só se existe um número real r (**razão**) tal que:

$$u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Cada termo da sucessão é obtido a partir do anterior adicionando-lhe r , a chamada razão da progressão aritmética:

$$u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N}$$

A monotonia de uma sucessão que seja uma progressão aritmética decorre, de forma quase imediata, da própria definição de progressão aritmética.

Atendendo a que $u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$, resulta que:

- Se $r > 0$, a sucessão é crescente (estritamente).
- Se $r < 0$, a sucessão é decrescente (estritamente).
- Se $r = 0$, a sucessão é constante.

Exemplo 1: As sucessões: $u_n = -\frac{1}{2}n + 1$ e $v_n = n - n^2$ são progressões aritméticas?

Resolução

Calculemos $u_{n+1} - u_n$.

$$u_n = -\frac{1}{2}n + 1; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}(n+1) + 1 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - 1 = -\frac{1}{2}$$

A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{2}$

Podemos ainda dizer que é uma p. a. estritamente decrescente.

Calculemos $v_{n+1} - v_n$

$$v_n = n - n^2; \quad v_{n+1} = (n+1) - (n+1)^2 = -n^2 - n$$

$$v_{n+1} - v_n = -n^2 - n - n + n^2 = -2n$$

Como a expressão $-2n$ depende de n , não é constante. Logo, a sucessão (v_n) não é uma progressão aritmética.

Exemplo 2: Determinemos a razão de uma p. a. sabendo que: $u_5 = 10$ e $u_8 = 16$

Podemos escrever que:

$$u_8 = u_5 + r + r + r \Leftrightarrow u_8 = u_5 + 3r$$

$$\text{Substituindo vem: } 16 = 10 + 3r \Leftrightarrow r = 2$$

A razão da progressão é 2.

Exercícios:

25. Escreva os 5 primeiros termos de uma p. a. em que o 1º termo é 3 e a razão é:

25.1. 5 **25.2.** -5 **25.3.** 0

26. Averigüe se são ou não p. a. as sucessões seguintes e, em caso afirmativo, indique a razão da progressão e a sua monotonia.

26.1. $a_n = \frac{1}{2} - 2n$ **26.2.** $b_n = (n-1)(n+1)$

26.3. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ **26.4.** $v_n = \frac{1-5n}{3}$

27. Sabe-se que (w_n) é uma p. a. de razão 4.

27.1. Determine w_{23} se $w_{20} = 73$.

27.2. Determine w_6 se $w_8 = 25$.

28. Determine a razão de cada uma das seguintes p. a. sabendo que :

28.1. $u_{10} = -3$ e $u_5 = -12$

28.2. $u_6 = -27$ e $u_{13} = -62$

29. Determine o termo 101 da sucessão de números pares

30. Escreva o termo geral de uma p. a. em que:

30.1. $u_1 = 3$ e $r = 10$ **30.2.** $u_2 = 10$ e $u_4 = 20$

30.3. $u_3 = -1$ e $r = 5$ **30.4.** $u_{10} = 8$ e $u_{15} = 23$

31. Determine o termo de ordem 600 na p. a. em que os cinco primeiros termos são:

$$-1/2, \quad 0, \quad 1/2, \quad 1, \quad 3/2$$

32. Escreva uma expressão do termo geral de uma progressão aritmética (u_n) sabendo que

$$u_1 + u_6 = 26 \wedge u_4 + u_8 = 46$$

TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Como vimos no exemplo 2 anterior, podemos calcular qualquer termo de uma progressão aritmética quando sabemos o valor de um dos termos e a razão da progressão.

Considerando (u_n) uma progressão aritmética podemos escrever as seguintes relações entre os seus termos:

$u_2 = u_1 + r$		$u_7 = u_4 + r + r + r = u_4 + 3r$
$u_3 = u_2 + r = u_1 + r + r = u_1 + 2r$	ou	$u_{10} = u_8 + r + r = u_8 + 2r$
$u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r$	ainda:	$u_{13} = u_5 + 8r = u_5 + (13-5)r$
...		...
$u_n = u_{n-1} + r = u_1 + (n-1)r$		$u_n = u_k + (n-k)r$

Se (u_n) é uma progressão aritmética de razão r , tem-se:

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Seja (u_n) uma progressão aritmética de razão r .

Então tem-se: $u_n = u_k + (n-k)r$

Exemplo: Dada a progressão aritmética: -5, -7, -9, -11, ...

1. Determine o termo geral.
2. Determine o termo de ordem 500.

Resolução:

1. Começamos por identificar a razão e o 1º termo:

$$u_1 = -5; \quad r = -2$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$u_n = -5 + (n-1) \times (-2) \Leftrightarrow u_n = -5 - 2n + 2 \Leftrightarrow u_n = -3 - 2n$$

2. Usando o termo geral $u_{500} = -3 - 2 \times 500 \Leftrightarrow u_{500} = -1003$

Exercícios:

33. Numa p. a. o 1º termo é -3 e a razão é 2.

33.1. Calcule o 10º termo.

33.2. Escreva uma expressão do termo geral.

34. Calcule a razão de uma p. a. em que o primeiro termo é 12 e o 11º termo é 42.

35. Numa p. a. (a_n) tem-se: $a_6 = 10$ e $a_{10} = 9$. Calcule a_{15}

36. Calcule b_{50} de uma p. a. (b_n) , sabendo que $b_{35} = 9$ e $b_{45} = 17$.

SOMA DE n TERMOS CONSECUTIVOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Consideremos a sucessão dos números ímpares $u_n = 2n - 1$ que é uma progressão aritmética de razão 2.

Seja S_6 a soma dos 6 primeiros termos de (u_n) .

$$S_6 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$$

$$\text{Ou seja, } S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$

Mas observando a figura podemos concluir que a soma dos 6 primeiros termos da p. a. (u_n) corresponde a adicionar 3 parcelas iguais a 12, pelo que:

$$S_6 = (1+11) \times \frac{6}{2} \quad \text{ou seja} \quad S_6 = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Exemplo 1: Considerando a progressão aritmética:

$$-1, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad 0, \quad \dots$$

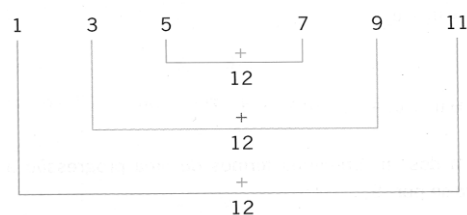
Calcule: **1.1.** $a_1 + \dots + a_{20}$; **1.2.** $a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20}$.

Resolução:

1.1. Temos uma p. a. com $a_1 = -1$ e $r = -\frac{2}{3} - (-1) = \frac{1}{3}$

$$a_{20} = a_1 + 19r = -1 + 19 \times \frac{1}{3} = -1 + \frac{19}{3} = \frac{16}{3}$$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = \frac{-1 + \frac{16}{3}}{2} \times 20 = \frac{130}{3}$$



A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (u_n) é dada por:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nota:

u_1 , não representa necessariamente, o primeiro termo da sucessão, mas o primeiro termo que queremos somar, n também não é sempre a ordem do último termo que queremos somar, mas o número total de termos.

1.2. Nesta alínea pretendemos somar 11 termos da p. a., sendo a_{10} o primeiro termo que queremos somar e a_{20} o último.

$$a_{10} = a_1 + 9r = -1 + 9 \times \frac{1}{3} = -1 + \frac{9}{3} = 2$$

$$S_{11} = \frac{a_{10} + a_{20}}{2} \times 11 = \frac{2 + \frac{16}{3}}{2} \times 11 = \frac{121}{3}$$

Exemplo 2: Seja a sucessão (u_n) definida por: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \end{cases}$

2.1. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética?

2.2. Escreva u_n em função de n .

2.3. Se a soma dos n primeiros termos de (u_n) é -93, quantos termos se somaram?

Resolução:

2.1. A sucessão (u_n) é uma p. a. de razão -7 porque

$$u_{n+1} - u_n = -7, \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2. $u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = 2 + (n-1) \times (-7) \Leftrightarrow u_n = 9 - 7n$

2.3. $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$; $u_1 = 2$; $u_n = 9 - 7n$

$$-93 = \frac{2 + 9 - 7n}{2} \times n \Leftrightarrow -186 = (11 - 7n)n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7n^2 - 11n - 186 = 0 \Leftrightarrow n = 6 \vee n = \frac{31}{7}$$

Somaram-se os 6 primeiros termos da p. a. , ou seja, $S_6 = -93$.

Exercícios:

37. Um atleta resolveu aumentar em cada dia 3 km nos treinos. Se no 1º dia correu 20 km, quantos quilómetros correu no total ao fim de 20 dias?

38. Uma sucessão é definida do seguinte modo:

$$a_1 = -5 \quad e \quad a_{n+1} = a_n + 3$$

38.1. Mostre que (a_n) é uma progressão aritmética e indique a razão da progressão.

38.2. Escreva a_n em função de n .

38.3. Calcule a soma dos 13 termos consecutivos a partir do 6º inclusive.

38.4. Determine n sabendo que

$$a_6 + a_7 + \dots + a_n = 913$$

39. Considere (u_n) uma progressão aritmética de razão r , sendo u_1 o primeiro termo e S_n a soma dos n primeiros termos da sucessão.

39.1. Se $u_1 = 3$ e $r = 4$, calcule u_7 ; u_{15} e S_{10}

39.2. Se $u_5 = 6$ e $r = -2$, calcule u_{10} e S_5 .

39.3. Se $u_4 = 16$ e $u_9 = 34$, calcule u_1 e r .

39.4. Se $r = 3$, $u_5 = 17$ e $S_n = 549$, calcule u_1 e n

39.5. Se $u_4 + u_5 + u_6 = 63$ e $u_{10} + u_{12} = 102$, calcule r e u_1 .

40. Utilizando os conhecimentos sobre progressões aritméticas, calcule: **40.1.** $7 + 14 + 21 + \dots + 77$

40.2. $14 + 10,5 + 7 + 3,5 + \dots + (-17,5)$

41. Estude a monotonia progressões aritméticas definidas por:

41.1. $u_n = 1 + 7n$ **41.2.** $u_n = \frac{1}{4} - 13n$ **41.3.** $u_n = -3$

42. Numa progressão aritmética o primeiro e o sétimo termos são, respectivamente, 7 e 49. Calcule a soma dos 30 primeiros termos.

43. Determine a soma de todos os múltiplos de 4 com três algarismos.

44. Admita que três números reais representados por x , x^2 e $2x$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética (não constante). Determine esses três números.

45. Um auditório tem 30 filas de lugares sentados. Na primeira fila tem 15 lugares, na segunda fila 17, na terceira 19 e assim sucessivamente.

45.1. Escreva o termo geral da sucessão (v_n) cujos termos representam o número de lugares em cada fila.

45.2. Quantos lugares tem a fila número 8?

45.3. Quantos lugares tem o auditório?

46. Das seguintes sucessões, qual delas é uma p. a. ?

(A) 2, 4, 8, 16, ... (B) 2, 3, 5, 7, 11, ...

(C) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ... (D) $1 + \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, ...

47. Se a razão de uma progressão aritmética é 5, qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) $u_{n+1} = u_n + 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(B) $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(C) $u_n - u_{n+1} = -5$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(D) $u_n = u_1 + 5n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

48. Em relação a uma p. a. (t_n) , sabe-se que:

$$t_{16} = 43 \quad e \quad t_{18} = 48$$

Calcule:

48.1. $t_{500} - t_{480}$

48.2. $t_{n+2} - t_{n-1}$

49. Após uma lesão, uma atleta iniciou um programa de recuperação física que consistia no seguinte:

- no 1º dia, um certo exercício é executado durante 10 minutos.

- nos dias seguintes, há um acréscimo de 4 minutos ao tempo dedicado ao mesmo exercício no dia anterior.

49.1. Quanto tempo dedicou ao exercício no 15º dia de recuperação?

49.2. O plano é alterado quando o atleta totalizar 16h dedicadas ao exercício. Para quantos dias foi proposto o plano inicial?

49.3. Nos últimos dez dias de aplicação do plano inicial, quantas horas foram dedicadas ao exercício?

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

DEFINIÇÃO

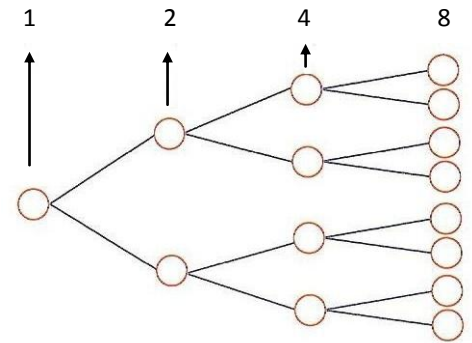
A bactéria estreptococos (responsável pela amigdalite) reproduz-se duplicando-se de meia em meia hora.

1, 2, 4, 8, 16, ...

Se a_n é um termo da sucessão referida, então

$$a_{n+1} = a_n \times 2, \text{ ou seja, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

Trata-se de uma progressão geométrica de razão 2.



Se (u_n) é uma progressão geométrica de razão r , tem-se:

$$u_n = u_1 r^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Seja (u_n) uma progressão geométrica de razão r .

Então tem-se: $u_n = u_k r^{n-k}$

Exemplo: Determine o termo geral de uma progressão geométrica em que: $a_2 = 6$ e $a_5 = 48$

Resolução:

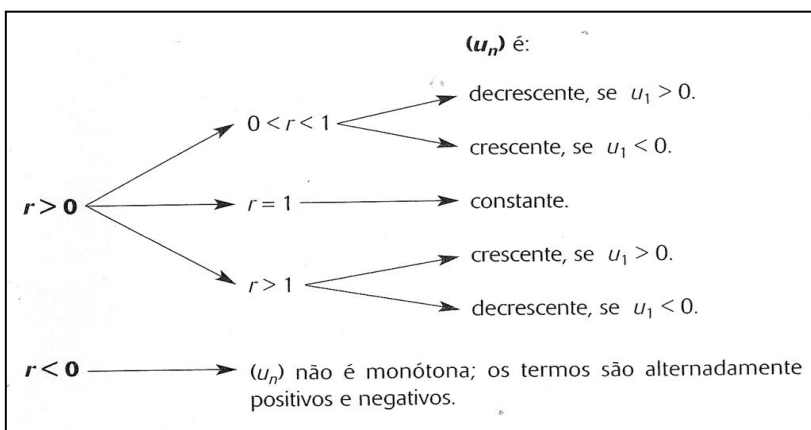
$$a_5 = a_2 \times r^3, \text{ por definição. } 48 = 6 \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$$

A razão da progressão é 2.

$$a_1 = \frac{a_2}{r} \Leftrightarrow a_1 = 3 \quad \text{Logo, } a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

▪ MONOTONIA DE UMA P. GEOMÉTRICA

Uma progressão geométrica (u_n) de razão positiva é sempre monótona, podendo ser crescente ou decrescente (em sentido estrito ou lato). Uma progressão geométrica de razão negativa nunca é monótona.



Exercícios:

53. Determine o 10º termo de uma progressão geométrica em que: $u_7 + u_6 = -486$ e a razão é 3.

54. Determine o termo geral de uma progressão geométrica em que:

54.1. $a_2 = 6$ e $a_3 = 18$ **54.2.** $a_2 = 8$ e $a_4 = 128$

54.3. $a_1 = 8$ e $a_6 = -\frac{1}{4}$

55. Calcule o 10º termo e o termo geral da progressão geométrica:

55.1. $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \dots$ **55.2.** $\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \dots$

55.3. 12; 6; 3; 1,5;...

56. Estude quanto à monotonia as p. g. do exercício 54.

Exemplo: Prove que é monótona a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{2}{3^n}$.

Resolução:

Trata-se de uma progressão geométrica pois:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

É uma progressão geométrica de 1º termo, $u_1 = \frac{2}{3}$ e razão $\frac{1}{3}$; logo, é uma sucessão monótona decrescente. Trata-se do caso $u_1 > 0$ e $0 < r < 1$.

▪ SOMA DE n TERMOS CONSECUTIVOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Consideremos $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ os n primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) de $r \neq 1$.

Seja S_n a soma desses n termos de (u_n) .

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad (1)$$

Multiplicando esta igualdade por r obtemos:

$$S_n r = u_1 r + u_2 r + u_3 r + \dots + u_n r \quad \text{que se pode escrever:}$$

$$S_n r = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n+1} \quad (2)$$

Subtraindo, membro e membro, as igualdades (1) e (2), resulta:

$$S_n - S_n r = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n - (u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow S_n - S_n r = u_1 - u_{n+1} \Leftrightarrow S_n (1 - r) = u_1 - u_1 r^n$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{u_1 (1 - r^n)}{1 - r}$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) é dada por:

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, r \neq 1$$

Nota: se $r = 1$, tem-se $S_n = n u_1$

Nota:

Como acontece nas progressões aritméticas também aqui, u_1 , não representa necessariamente, o primeiro termo da sucessão, mas o primeiro termo que queremos somar, n corresponde ao número total de termos que queremos somar.

Exemplo 1: Determine a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica em que o termo geral é $u_n = 3^n$.

Resolução

3, 9, 27 são alguns termos da sucessão.

O 1º termo é 3 e a razão é 3.

$$S_{10} = 3 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} \Leftrightarrow S_{10} = -\frac{3}{2}(1-59049) \Leftrightarrow S_{10} = 88572$$

Exemplo 2: Numa p. g. $S_5 = 1,21$ e a razão é -2.

Calculemos u_6 .

$$S_5 = u_1 \times \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} \Leftrightarrow 1,21 = u_1 \times \frac{1+32}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1,21 = u_1 \times 11 \Leftrightarrow u_1 = 0,11$$

$$u_6 = 0,11 \times (-2)^5 \Leftrightarrow u_6 = -3,52$$

Exemplo 3: Numa progressão geométrica de termos positivos:

$$u_3 = 208 \quad e \quad u_5 = 3328$$

Calcule a soma dos 5 termos consecutivos a partir do 8º, inclusive.

Resolução:

Calculemos a razão e o 8º termo:

$$u_5 = u_3 \times r^2 \Leftrightarrow 3328 = 208 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = 4$$

$$u_8 = u_5 \times r^3 \Leftrightarrow u_8 = 3328 \times 64 \Leftrightarrow u_8 = 212992$$

$$S_5 = u_8 \times \frac{1-r^5}{1-r} \Leftrightarrow S_5 = 212992 \times \frac{1-4^5}{1-4} \Leftrightarrow S_5 = 726302272$$

▪ **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Muitas situações da vida real podem ser traduzidas por modelos matemáticos que são progressões aritméticas (crescimento linear) ou progressões geométricas (crescimento exponencial). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo1: No dia 1 de Março, a D. Laura abriu a padaria “Pão Quente” e no final dos seis meses de actividade concluiu que:

- Durante o primeiro mês de negócio vendeu 5000 pães;

- Durante os cinco meses as suas vendas subiram em 500 pães por mês.

O equipamento que tem disponível permite-lhe produzir e vender 10 000 pães por mês.

1.1. Admitindo que o aumento de clientes continua com a mesma regularidade, quando terá necessidade de aumentar a sua capacidade de produção?

1.2. Quantos pães terá vendido no final dos seis primeiros meses de funcionamento?

Resolução:

1.1. 1º Passo: formular o modelo de crescimento

O texto refere que o número de pães vendidos aumenta de uma forma constante de 500 pães por mês e, portanto, estamos perante um modelo de crescimento linear (progressão aritmética). O número de pães é dado em milhares e o início da contagem é 1 de Março. Assim, seja P_n o número de pães, em milhares, vendidos n meses, após a abertura.

O número de pães vendidos aumentou 500 (0,5 milhares) por mês. Então: $P_{n+1} - P_n = 0,5$; $r = 0,5$

As vendas no 1º mês são de 5000 pães (5 milhares). Como $n = 0$ corresponde ao dia 1 de Março então $n = 1$ corresponderá ao dia 1 de Abril (um mês depois). $P_1 = 5$

Exercícios:

57. Calcule a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica de termo geral

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

58. Calcule:

58.1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{21}}$

58.2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{1536}$

59. A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 0,3 e $u_2 = 0,9$.

59.1. Escreva o termo geral da progressão.

59.2. Determine o termo de ordem 20.

59.3. Calcule a soma dos 20 primeiros termos.

60. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é 2186. Determine n , sabendo que a razão da progressão é 3 e o primeiro termo é 2.

61. A soma dos seis primeiros termos de uma p. g. (u_n) de razão $1/2$ é $63/8$.

61.1. Determine u_1 e u_{20} .

61.2. Escreva a expressão do termo geral.

61.3. Calcule a soma dos 10 termos consecutivos a partir do 20º termo, inclusive.

2º Passo: Escrever o termo geral

$$P_n = P_1 + (n-1) \times r$$

$$P_n = 5 + (n-1) \times 0,5 \Leftrightarrow P_n = 5 + 0,5n - 0,5$$

$$\Leftrightarrow P_n = 0,5n + 4,5$$

3º Passo: Responder à questão

Para fazermos uma previsão para as vendas de 10 000 pães, podemos usar o termo geral:

$$P_n = 0,5n + 4,5$$

$$10 = 0,5n + 4,5 \Leftrightarrow 5,5 = 0,5n \Leftrightarrow n = 11$$

$n = 11$ corresponderá ao dia 11º mês de laboração da padaria.

Em Janeiro do ano seguinte, após ter aberto a padaria, a D. Laura necessitou de ampliar a sua capacidade de produção.

1.2. Para responder a esta questão vamos aplicar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma p. aritmética.

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow S_6 = \frac{u_1 + u_6}{2} \times 6 \Leftrightarrow S_6 = \frac{5 + 7,5}{2} \times 6 \Leftrightarrow S_6 = 37,5$$

$$u_6 = 0,5 \times 6 + 4,5 = 7,5$$

Ao fim de 6 meses de laboração a padaria “Pão Quente” terá vendido 37 500 pães.

Exemplo 2: Sabe-se que numa reserva ecológica uma população de aves aumenta 20% ao ano. No ano 2000 a população de aves era de 120 aves.

Admitindo que o crescimento se processa sempre do mesmo modo qual terá sido a dimensão da população em 2005? E qual será a população em 2010?

Resolução:

1º Passo formular o modelo de crescimento

Pela situação descrita a população altera-se aumentando segundo um factor fixo (20%). Estamos perante um modelo de um crescimento exponencial (progressão geométrica).

Assim seja (P_n) o número de aves n anos após 2000.

Considere-se o valor inicial da população $P_0 = 120$

A população aumenta 20% ao ano. Então $r = 1,2$

2º Passo: Escrever o termo geral

$$P_n = P_0 \times r^{n-0} \Leftrightarrow P_n = 120 \times 1,2^n$$

3º Passo: Responder à questão

Cálculo da população em 2005 corresponde a P_5 :

$$P_5 = 120 \times 1,2^5 \Leftrightarrow P_5 = 298,6$$

A população de aves em 2005 será, aproximadamente, 299.

Cálculo da população em 2010 corresponde a P_{10} :

$$P_{10} = 120 \times 1,2^{10} \Leftrightarrow P_{10} = 743$$

A população de aves em 2010 será, aproximadamente, 743.

NOTA:

$$100\% + 20\% = 120\%$$

$$120\% = \frac{120}{100} = 1,2$$

Aumentar 20% é o mesmo que multiplicar por 1,2.

$$100\% - 30\% = 70\%$$

$$70\% = \frac{70}{100} = 0,7$$

Decrescer 30% é o mesmo que multiplicar por 0,7.

Exercícios:

62. Um mentiroso conta uma mentira a três amigos. Ao fim de 10 minutos cada um deles conta-a a outros três, por sua vez, a contam em 10 minutos a outros três (cada um). Quantas pessoas, incluindo o mentiroso, conhecem a mentira ao fim de uma hora?

63. Considere que, após a aquisição de um automóvel, este sofre uma desvalorização anual de 15%. O Sr. Fausto comprou recentemente um automóvel novo por 30 000€.

63.1. Determine uma expressão geral que traduza o valor do automóvel em função do número n de anos decorridos após a sua compra.

63.2. Calcule o valor aproximado, em euros, de quantia que poderá render o carro ao Sr. Fausto, caso este o venda daqui a 5 anos.

64. Num stand de automóveis um cliente comprou uma viatura usada nas seguintes condições:

- o pagamento é feito em 12 prestações;
- a primeira prestação tem o valor de 2 milhões de dobras;
- cada uma das restantes prestações tem um acréscimo de 20% sobre o valor pago na prestação anterior.

64.1. Qual o valor da 3ª prestação?

64.2. Seja (v_n) o valor da prestação de ordem n ($1 \leq n \leq 12$).

a) Escreva v_{n+1} em função de v_n .

b) Calcule v_7 .

c) Calcule o valor pago pela viatura.

65. Duas amigas foram passar férias aos Estados Unidos e resolveram trabalhar para ganharem algum dinheiro extra.

Teriam que trabalhar no mínimo 20 horas e só ao fim desse tempo receberiam o dinheiro correspondente ao trabalho.

Tinham três hipóteses para escolherem a forma de pagamento:

1ª H: 50 dólares por hora.

2ª H: a primeira hora 8 dólares e cada hora seguinte teria um aumento de 5 dólares relativamente à hora anterior.

3ª H: a primeira hora seria 0,005 do dólar e cada hora seguinte seria o dobro da anterior.

Qual a melhor hipótese? E a pior?

66. O Vítor tinha um mealheiro onde guardou 500 mil dobras e resolveu aí colocar todos os meses, 50 mil dobras. Se t é o total de dinheiro do mealheiro e n o número de meses, ao fim de quantos meses terá o Vítor 2650 mil dobras no mealheiro?

67. De uma pipa de vinho retira-se diariamente $1/4$ do seu conteúdo. Se a pipa tem 510 litros, qual é a quantidade de vinho que fica na pipa ao fim de 10 dias?

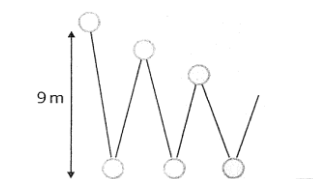
68. A população duma vila diminui 12% cada ano. Se em 1992 tinha 5000 habitantes, quantos terá no ano 2010?

69. Uma bola caiu de 9 m de altura e, cada vez que bate no chão, sobe 80% da altura máxima anterior.

69.1. Qual é a altura máxima que a bola atinge no 3º salto?

69.2. Que altura atinge a bola depois de bater n vezes no chão?

69.3. Quantas vezes já bateu a bola no chão para não subir mais de 1,80 m?



A SUCESSÃO DE TERMO GERAL $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

▪ APLICAÇÕES FINANCEIRAS

Normalmente nas aplicações financeiras que os bancos oferecem ao colocar dinheiro a prazo temos duas opções:

- juro composto (capitalização dos juros): os juros são reinvestidos e converge-se em novo capital com direito a juro.

- juro simples (sem capitalizações): os juros são colocados numa conta à parte e o capital a receber juro mantém-se.

Exemplo: A Ana depositou 1000 euros numa conta a juro composto de 5% ao ano. Quanto dinheiro terá na conta ao fim de 10 anos?

Resolução:

Como o juro é composto estamos perante uma situação de crescimento exponencial (progressão geométrica) com:

$$r = (100\% + 5\%) : 100 = 1,05 \quad \text{e} \quad a_0 = 1000$$

Ao fim de 10 anos a Ana terá:

$$a_{10} = a_0 \times r^{10} = 1000 \times 1,05^{10} = 1628,89 \text{ euros}$$

Podemos, no entanto, tentar definir uma fórmula que represente o capital acumulado ao fim de cada período de capitalização quando estamos perante uma situação de juro composto.

Exemplo anterior: Sendo C_n o capital ao fim de n anos, podemos escrever:

$$C_n = 1000 \times (100 + 5)^n \text{ ou ainda } C_n = 1000 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$$

▪ A SUCESSÃO DE TERMO GERAL $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Para resolver situações idênticas à anterior, surge a necessidade de estudar a sucessão $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Calculemos alguns dos seus termos para podermos perceber como esta sucessão se comporta.

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 2,25, \quad \dots, \quad u_{10} \approx 2,59, \quad \dots, \quad u_{50} \approx 2,69, \quad \dots, \quad u_{100} \approx 2,70, \quad \dots, \quad u_{1000} \approx 2,7169, \quad \dots, \quad u_{10000} \approx 2,7181, \quad \dots$$

Suspeitamos que estes termos tomem valores entre 2 e 3. Mais tarde será provado que esta sucessão é monótona crescente, em sentido estrito, minorada por 2 e majorada por 3, portanto limitada, ou seja:

$$2 \leq u_n < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

À medida que n aumenta, u_n aproxima-se cada vez mais de um valor numérico irracional, a que se dá o nome de número de Neper e que se designa por e , sendo:

$$e \approx 2,7182818284590$$

O número de Neper surge em imensas situações ligadas ao quotidiano.

Exercícios:

70. O Ivo decidiu colocar 6 milhões de dobras numa conta a prazo com um juro composto anual de 3%.

70.1. Quanto rendeu o dinheiro ao fim de 5 anos?

70.2. Indique o capital acumulado ao fim de 2, de 4 e de 8 anos.

71. O João depositou 1200€ no banco no início deste ano e pretende mantê-lo depositado durante um período de quatro anos. O banco oferece duas modalidades para rentabilizar o dinheiro: uma com taxa de juro anual de 2,5% com capitalização dos juros no final de cada ano e outra com 2,6% de taxa de juro anual, mas sem capitalizações.

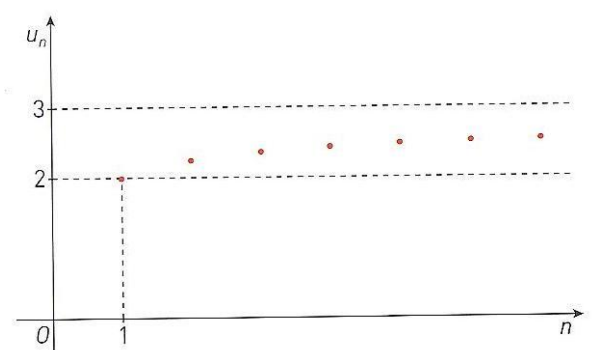
71.1. Qual das modalidades se torna mais rentável para o João?

71.2. E no caso de deixar o dinheiro depositado durante cinco anos?

71.3. Explique em que condições cada uma das modalidades se torna mais rentável.

Sendo C o capital inicial e $k\%$ a taxa de juro anual, o capital C_n acumulado ao fim de n anos no regime de juro composto é:

$$C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{k}{100}\right)^n$$



LIMITES DE SUCESSÕES

■ INFINITAMENTE GRANDES

> Infinitamente Grande Positivo

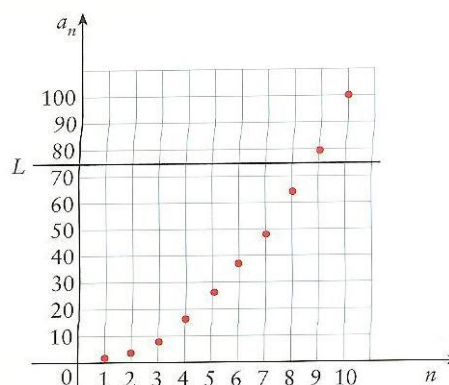
Consideremos a sucessão (a_n) definida por $a_n = n^2$.

A sucessão (a_n) tende para infinito porque, por muito grande que seja um número escolhido, a partir de determinada ordem todos os termos ultrapassam esse número. Por exemplo, se considerarmos o número 10 000, a partir do termo de ordem 100 todos os termos são superiores a 10 000.

Qualquer que seja o número real L , a partir de certa ordem todos os termos de (a_n) são maiores que L .

Diz-se que (a_n) é um infinitamente grande positivo e escreve-se:

$$\lim a_n = +\infty \text{ ou } a_n \rightarrow +\infty$$



Uma sucessão (v_n) diz-se um infinitamente grande positivo ($v_n \rightarrow +\infty$) se, para todo o número real L que se considere, existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores que L .

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow v_n > L.$$

Exemplo: Seja a sucessão (u_n) definida por $u_n = 5n - 2$.

1. Mostre que a sucessão (u_n) é monótona crescente.
2. Determine a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são superiores a 20 000.
3. Prove, usando a definição de infinitamente grande positivo, que $u_n \rightarrow +\infty$.

Resolução:

$$1. u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 2 - (5n - 2) = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5 > 0$$

Como $u_{n+1} - u_n > 0$, podemos concluir que a sucessão dada é monótona crescente.

$$2. u_n > 20000 \Leftrightarrow 5n - 2 > 20000 \Leftrightarrow n > \frac{20002}{5} \Leftrightarrow n > 4000,4$$

A partir da ordem 4000, todos os termos da sucessão são superiores a 20000.

3. Seja L um número real positivo qualquer:

$$5n - 2 > L \Leftrightarrow 5n > L + 2 \Leftrightarrow n > \frac{L+2}{5}$$

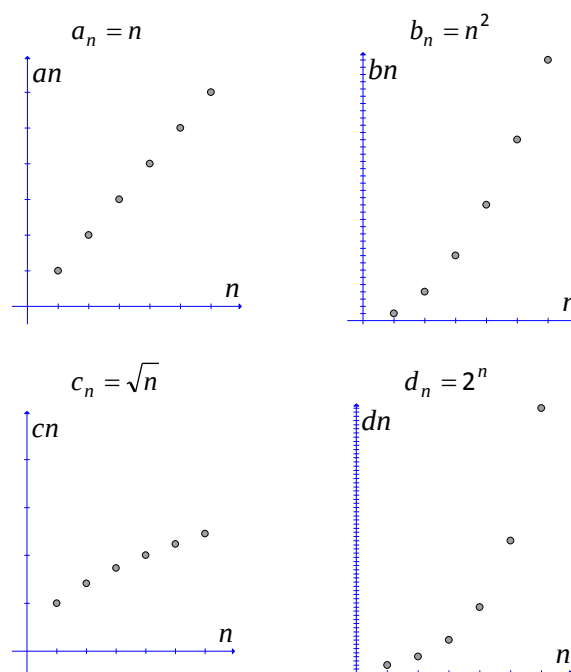
Portanto qualquer que seja o valor de L , existe uma ordem p a partir da qual $u_n > L$. Essa ordem é a parte inteira de $\frac{L+2}{5}$.

Logo é um infinitamente (u_n) grande positivo.

Nota:

Há sucessões que não são limitadas superiormente, isto é, o conjunto dos seus termos não é majorado e não são infinitamente grandes positivos.

Exemplos de infinitamente grandes de referência:



Exercícios:

72. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \frac{3n-1}{2} \text{ e } b_n = n^2$$

72.1. Determine uma ordem p a partir da qual se tenha: a) $a_n > 2500$ b) $a_n > 10^4$

c) $b_n > 2500$ d) $b_n > 10^4$

72.2. Qual das duas sucessões cresce mais rapidamente?

73. Considere a sucessão (v_n) definida por:

$$v_n = (-1)^n \times n + 3n$$

A sucessão é um infinitamente grande positivo? Justifique.

Teorema: Se a sucessão (v_n) é um infinitamente grande positivo e se, a partir de uma certa ordem p , $u_n \geq v_n$, então a sucessão (u_n) é um infinitamente grande positivo.

Exemplo: Mostre que a sucessão (a_n) de termo geral

$a_n = \sqrt{2n+3}$ é um infinitamente grande positivo.

Resolução:

Por comparação, tem-se: $2n+3 > n \Leftrightarrow \sqrt{2n+3} > \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Sendo $\sqrt{2n+3} > \sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$, conclui-se que:

$$\sqrt{2n+3} \rightarrow +\infty$$

> Infinitamente Grande Negativo

Considerando a sucessão $c_n = -a_n$, ou seja, $c_n = -n^2$, o gráfico da sucessão (c_n) é simétrico do gráfico da sucessão (a_n) , relativamente ao eixo das abcissas.

Qualquer que seja o número real L , a partir de certa ordem todos os termo de (c_n) são menores que L .

Diz-se que (c_n) é um infinitamente grande negativo e escreve-se:

$$\lim c_n = -\infty \text{ ou } c_n \rightarrow -\infty$$

Uma sucessão (v_n) diz-se um infinitamente grande negativo se e só se $(-v_n)$ é um infinitamente grande positivo.

$$v_n \rightarrow -\infty \text{ se e só se } -v_n \rightarrow +\infty$$

Exemplo: Seja a sucessão (v_n) definida por $v_n = 5 - 2n^3$.

1. Prove que: $v_n \rightarrow -\infty$.

2. Calcule a ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são inferiores a -500.

Resolução:

1. $v_n \rightarrow -\infty$ se e só se $-v_n \rightarrow +\infty$

Temos que provar que $-v_n = -5 + 2n^3$ é um infinitamente grande positivo.

$n^3 \rightarrow +\infty$: porque $n^3 > n^2$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $n^2 \rightarrow +\infty$, pois é um infinitamente grande de referência.

Assim, podemos concluir que: $2n^3 \rightarrow +\infty$ e também que:

$$2n^3 - 5 \rightarrow +\infty, \text{ provando que } -v_n \rightarrow +\infty.$$

Então $v_n \rightarrow -\infty$.

2. $v_n < -500 \Leftrightarrow 5 - 2n^3 < -500 \Leftrightarrow -2n^3 < -505 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^3 > \frac{505}{2} \Leftrightarrow n > 6,32\dots$$

A partir da ordem 6, todos os termos da sucessão são inferiores a -500.

Exercícios:

74. Mostre que (u_n) é um infinitamente grande positivo, sendo

74.1. $u_n = 2n - 1$

74.2. $u_n = 3n^2$

74.3. $u_n = \frac{-3+5n}{2}$

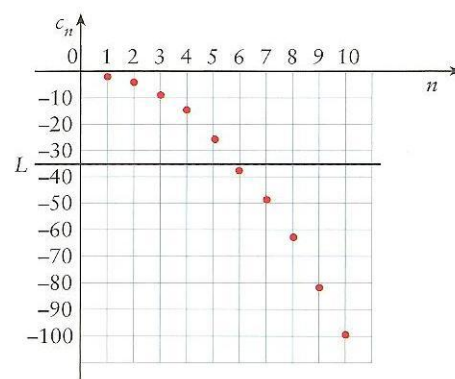
74.4. $u_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n < 10 \\ \sqrt{n-3} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$

75. Considere a sucessão (a_n) definida por:

$$a_n = \begin{cases} -4 & \text{se } n < 500 \\ 2n & \text{se } n \geq 500 \end{cases}$$

75.1. A sucessão (a_n) é monótona? Justifique.

75.2. (a_n) é um infinitamente grande positivo?



Exercícios:

76. Sabe-se que a sucessão $u_n = n$ é um infinitamente grande positivo.

76.1. Mostre que:

a) $(2n+5) \rightarrow +\infty$

b) $(n^2 + 2n) \rightarrow +\infty$

c) $n^3 \rightarrow +\infty$

76.2. A sucessão (v_n) é definida por:

$$v_n = n^2 - 10n - 2$$

a) Determine a ordem a partir da qual se tem $v_n > n$.

b) Justifique que (v_n) é um infinitamente grande positivo.

77. A sucessão (w_n) satisfaz a condição:

$$n^2 - w_n < 0, \forall n > 150$$

Justifique (w_n) que é um infinitamente grande positivo.

78. Mostre que a sucessão (u_n) é um infinitamente grande negativo sendo:

78.1. $u_n = 1 - n^2$

78.2. $u_n = -\sqrt{n+1}$

78.3. $u_n = \frac{4-n^2}{n+2}$

78.4. $u_n = \frac{3-\sqrt{n}}{5}$

78.5. $u_n = -n^2 - 10n$

78.6. $u_n = \frac{1-2n^3}{n^2}$

> Infinitamente Grande em Módulo

Considerando agora a sucessão (d_n) definida por:

$$d_n = (-1)^n \times n^2$$

Atendendo a que $d_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

a sucessão (d_n) não é um infinitamente grande negativo nem é um infinitamente grande positivo.

No entanto, como $|d_n| = n^2 \rightarrow +\infty$ diz-se que (d_n) é um infinitamente grande em módulo e escreve-se:

$$\lim d_n = \infty \text{ ou } d_n \rightarrow \infty$$

Uma sucessão (w_n) diz-se um infinitamente grande em módulo se e só se a sucessão $(|w_n|)$ é um infinitamente grande positivo.

$$w_n \rightarrow \infty \text{ se e só se } |w_n| \rightarrow +\infty$$

Exercício:

79. Mostre que são infinitamente grandes em módulo:

79.1. $u_n = (-1)^n n^2$

79.2. $u_n = (-2)^{3n} - 1$

79.3. $u_n = \frac{(-1)^n n^3}{n+1}$

79.4. $u_n = \left(-\frac{7}{3}\right)^n + 7$

■ INFINITAMENTE PEQUENOS OU INFINITÉSIMOS

Consideremos a sucessão (a_n) definida por $a_n = \frac{1}{n}$.

$$a_1 = 1 ; a_2 = \frac{1}{2} ; a_3 = \frac{1}{3} ; a_4 = \frac{1}{4} ; \dots$$

Como já vimos anteriormente, analisando alguns dos seus termos, verificamos que os termos se aproximam cada vez mais de zero, à medida que aumenta o valor da ordem, ou seja, a sucessão (a_n) tende para zero.

A representação gráfica e a intuição apontam para que, dado qualquer número real positivo δ , existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]0, \delta[$. Por muito pequeno que seja o valor de δ , existe uma ordem a partir da qual os termos da sucessão ficam na “faixa” limitada pelas rectas $y=\delta$ e $y=0$.

Diz-se que esta sucessão é um infinitamente pequeno ou infinitésimo e escreve-se: $\lim a_n = 0$ ou $a_n \rightarrow 0$

Uma sucessão (v_n) diz-se um infinitamente pequeno ou infinitésimo se e só se para qualquer número real positivo δ existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão, em valor absoluto, inferiores a δ .

$$v_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |v_n| < \delta$$

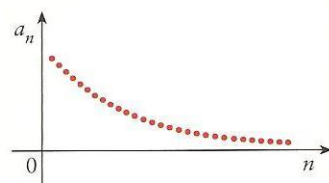
Teorema: Se a sucessão (v_n) é um infinitésimo e a partir de certa ordem $|u_n| \leq v_n$, então a sucessão (u_n) é um infinitésimo.

Exemplo: Mostremos que a sucessão (u_n) definida por

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2^n - 3} \text{ é um infinitésimo.}$$

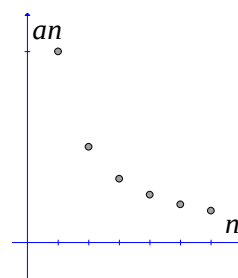
$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{2^n - 3} \right| = \frac{1}{2^n - 3}, \quad n \geq 2$$

Comparando os termos da sucessão $|u_n|$ com os termos do infinitésimo $n \rightarrow \frac{1}{n}$ tem-se:

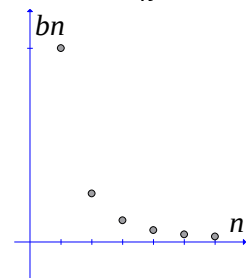


Exemplos de infinitésimos de referência:

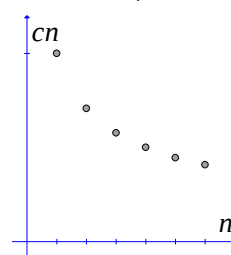
$$a_n = \frac{1}{n}$$



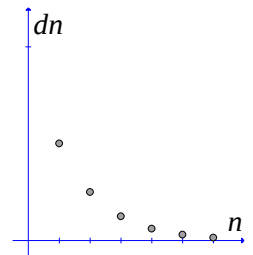
$$b_n = \frac{1}{n^2}$$



$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$



$$d_n = \frac{1}{2^n}$$



$$\frac{1}{2^n - 3} < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \wedge n > 2 \quad \text{ou seja, } n > 2 \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{n}.$$

Como a sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)$ é um infinitésimo, conclui-se que (u_n) também é um infinitésimo.

Teorema: Se (v_n) é um infinitamente grande com

$$v_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ então } \left(\frac{1}{v_n}\right) \text{ é um infinitésimo.}$$

Exemplo: Mostremos que as sucessões $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ e $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ são infinitésimos.

Como foi referido anteriormente, as sucessões $(\sqrt{n})$ e (2^n) são infinitamente grandes positivos. Por aplicação do teorema anterior conclui-se que as sucessões inversas são infinitésimos.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

Teorema: Se (v_n) é um infinitésimo com $v_n \neq 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ então } \left(\frac{1}{v_n}\right) \text{ é um infinitamente grande.}$$

84. Das seguintes sucessões, indique os infinitésimos e os infinitamente grandes positivos.

84.1. $u_n = (1,3)^n$

84.2. $v_n = 3^{-n}$ **84.3.** $w_n = \frac{2^n}{2^{2n}}$ **84.4.** $t_n = \frac{(-1)^n}{3^{2n}}$

85. Considere a família de sucessões: $(u_n): n \mapsto (2k-1)^n$, $k \in \mathbb{R}$. Determine para que valores de k , (u_n) é um:

85.1. infinitésimo. **85.2.** infinitamente grande positivo.

Exercícios:

80. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = \frac{1}{3n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{1}{n+1}$$

80.1. Dado um número real positivo δ , determine a ordem a partir da qual $u_n < \delta$, se:

a) $\delta = 0,25$ **b)** $\delta = 0,01$

80.2. Determine quantos termos da sucessão (v_n) não satisfazem a condição $v_n < 0,05$.

81. Mostre que são infinitésimos:

81.1. $u_n = \frac{3}{n+1}$

81.2. $u_n = \frac{-2}{2+n}$

81.3. $u_n = 5n^{-1}$

81.4. $u_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

82. Sabendo que $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, mostre que:

82.1. $\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0$

82.2. $\left(\frac{1}{3n+1}\right) \rightarrow 0$

82.3. $\left(\frac{-1}{2n+1}\right) \rightarrow 0$

83. Considere as sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n) :

$$u_n = n^2 + 3 \quad v_n = 2^n + n \quad w_n = \frac{3}{2n+1}$$

83.1. Justifique que:

a) $(u_n) \rightarrow +\infty$ **b)** $(v_n) \rightarrow +\infty$ **c)** $(w_n) \rightarrow 0$

83.2. Quando $n \rightarrow +\infty$, qual o comportamento das sucessões:

a) $\left(\frac{1}{u_n}\right)$

b) $\left(\frac{1}{v_n}\right)$

c) $\left(\frac{1}{w_n}\right)$

■ LIMITES DE SUCESSÕES E CONVERGÊNCIA

> Noção de Limite Real

Seja a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

n	1	2	10	15	50	100	1000
u_n	3	2,5	2,1	2,067	2,02	2,01	2,001

Como $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ podemos concluir que: $\left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2$ Conclusão essa que é confirmada pela tabela de cima.

$$\text{Então } \lim u_n = 2 \Leftrightarrow \lim (u_n - 2) = 0$$

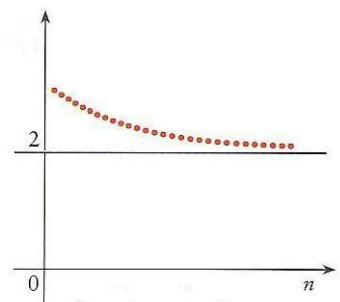
A leitura da tabela também nos sugere que, por exemplo, depois do 10º termo, todos os termos pertencem à vizinhança de centro 2 e raio 0,1, ou seja:

Se $n > 10$ então $|u_n - 2| < 0,1$.

Mas note-se que, por exemplo, a partir da ordem 1000, todos os termos pertencem à vizinhança de centro 2 e raio 0,001, ou seja:

Se $n > 1000$ então $|u_n - 2| < 0,001$.

Dizemos que (u_n) tende ou converge para 2, ou ainda que este valor é o limite da sucessão.



Uma sucessão (v_n) diz-se um convergente para o número real a se, qualquer que seja o número real positivo δ , existe uma ordem p a partir da qual se tem:

$$|v_n - a| < \delta.$$

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |v_n - a| < \delta$$

Representa-se por: $\lim(v_n) = a$ ou $v_n \rightarrow a$

Uma sucessão (v_n) diz-se um convergente para o número real a se a sucessão $(v_n - a)$ é um infinitésimo

$$\lim(v_n) = a \text{ se e só se } \lim(v_n - a) = 0$$

Exemplo: Seja a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{2n+1}{n}$.

1. Determine a ordem a partir da qual todos os termos da sucessão distam de 2 menos de 0,01.

2. Mostre (u_n) que converge para 2.

Resolução:

$$1. |u_n - 2| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1-2n}{n} \right| < 0,01$$

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{n} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 0,01 \Leftrightarrow n > 100$$

Conclui-se que a partir da ordem 100, todos os termos da sucessão distam de 2 menos de 0,01.

2. Mostrar que $(u_n) \rightarrow 2$ equivale a mostrar que $(u_n - 2) \rightarrow 0$.

1º processo: $(u_n - 2) \rightarrow 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |v_n - 2| < \delta)$$

$$|u_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} \text{ Para qualquer } \delta > 0 \text{ existe uma ordem } p \text{ que é igual}$$

ou superior ao maior número natural que não satisfaz a condição $n > \frac{1}{\delta}$.

$$\text{2º processo: } u_n - 2 = \frac{2n+1}{n} - 2 = -\frac{1}{n}$$

A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)$ é um infinitésimo de referência, logo por

comparação $\left(-\frac{1}{n}\right)$ também é um infinitésimo então conclui-se que $(u_n) \rightarrow 2$.

Notação: $V_\delta(a)$ lê-se vizinhança de centro a e raio δ .

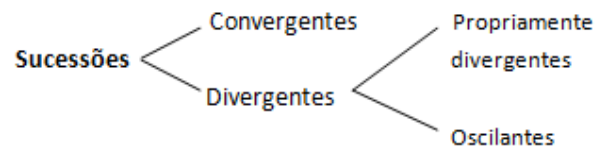
$$V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[$$

Teorema: Se uma sucessão (v_n) é convergente, então o limite para o qual converge é único.

Quando uma sucessão converge para um número real, diz-se que a sucessão é convergente.

Se a sucessão tender para $+\infty$ ou $-\infty$, diz-se que a sucessão é propriamente divergente.

A uma sucessão que não tenha que qualquer limite (finito ou infinito), ou que tenda para infinito sem sinal, chama-se oscilante.



Exercícios:

86. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = \frac{n+1}{2n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{3n+1}{n}$$

86.1. Determine a partir de que ordem se tem:

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| < 0,01$$

86.2. Determine a ordem a partir da qual $v_n \in]3 - \delta, 3 + \delta[$ se:

a) $\delta = 0,01$ b) $\delta = 0,002$ c) $\delta = 10^{-4}$

87. Considere a sucessão (v_n) definida por:

$$v_n = \frac{2n}{n+1}$$

87.1. Determine a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem:

a) ao intervalo $]2 - 0,1; 2 + 0,1[$ b) $V_{0,03}(2)$

87.2. Mostre que (u_n) é convergente para 2.

88. Considere a sucessão (v_n) de termo geral:

$$v_n = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

88.1. Calcule os três primeiros termos da sucessão.

88.2. A sucessão (v_n) é monótona?

88.3. Determine o número de termos que não pertencem à vizinhança $V_{0,15}(0)$.

88.4. Existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem a $V_{0,01}(0)$? Justifique.

88.5. A sucessão (v_n) converge para zero? Justifique.

89. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = \frac{n-2}{n+1} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{3}{2n-1}$$

89.1. Mostre que $(a_n) \rightarrow 1$.

89.2. Mostre que (b_n) é um infinitésimo.

> Convergência de Sucessões Monótonas e Limitadas

Consideremos a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{3n-1}{n}$.

$$\left(u_n = \frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n} \right)$$

Verifiquemos que a sucessão é monótona, limitada e convergente.

Monotonia: $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{1}{n+1} - \left(3 - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

Como concluímos $u_{n+1} - u_n > 0$ que a sucessão é estritamente crescente.

Limitada: $u_n = 3 - \frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ (enquadramento de referência)

$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \rightarrow$ somando 3

$2 \leq 3 - \frac{1}{n} < 3 \rightarrow$ então: $2 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$

A sucessão é limitada.

Convergente: Sendo a sucessão estritamente crescente e 3 o menor dos majorantes, concluímos que (u_n) é convergente para 3. Verifiquemos:

$(u_n) \rightarrow 3 \Leftrightarrow (u_n - 3) \rightarrow 0 \quad (u_n - 3) = 3 - \frac{1}{n} - 3 = -\frac{1}{n}$

Como $\left(-\frac{1}{n} \right) \rightarrow 0$ fica provado que $(u_n) \rightarrow 3$

Teorema: Se uma sucessão (v_n) é monótona e limitada, então é convergente.

→ Toda a sucessão limitada é convergente?

Nem todas. Há sucessões limitadas não convergentes.

Por exemplo, a sucessão (a_n) definida por $a_n = (-1)^n$.

É limitada, uma vez que: $-1 \leq a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

No entanto, a sucessão não é convergente, uma vez que:

Se n é ímpar $\lim a_n = -1$ e se n é par $\lim a_n = 1$.

→ Toda a sucessão monótona é convergente?

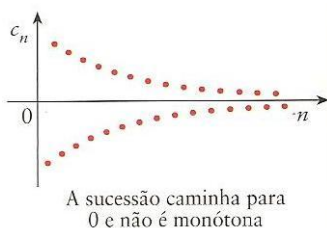
Nem todas. Basta pensar na sucessão mais simples das já referidas, a sucessão dos números naturais, $(u_n): n \mapsto n$, para se concluir que há sucessões monótonas não convergentes.

→ Uma sucessão pode ser convergente e não ser monótona?

Sim.

Por exemplo:

$(c_n): n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$



Exercícios:

90. Seja a sucessão (u_n) definida por: $u_n = \frac{4n+7}{2n+1}$

90.1. Mostre que $u_n = 2 + \frac{5}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

90.2. Estude (u_n) quanto à monotonia.

90.3. Indique um majorante e um minorante do conjunto dos termos da sucessão.

90.4. Mostre que $(u_n) \rightarrow 2$.

91. Dê exemplo de uma sucessão (v_n) que satisfaça as condições:

91.1. monótona não convergente.

91.2. monótona e limitada.

91.3. limitada e não convergente.

91.4. crescente e convergente para 4.

91.5. decrescente e convergente para 1.

91.6. não monótona e convergente para 3.

92. Considere a sucessão de termo geral: $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$

92.1. Estude (u_n) quanto à monotonia.

92.2. Prove que (u_n) é limitada.

92.3. Mostre que $(u_n) \rightarrow 3$.

93. Considere a sucessão de termo geral: $v_n = \frac{7n}{n+4}$

93.1. Estude (v_n) quanto à monotonia.

93.2. Justifique que a sucessão é limitada.

93.3. Mostre que $(v_n) \rightarrow 7$.

94. Dê exemplo de uma sucessão que verifique as condições:

94.1. é crescente e não é infinitamente grande positivo.

94.2. é não limitada e não é um infinitamente grande.

94.3. é infinitamente grande negativo e não é decrescente.

95. Seja (v_n) a sucessão de termo geral:

$$v_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

Justifique que (v_n) é convergente e não é monótona.

> Teorema das Sucessões Enquadradas

A propriedade que vamos estabelecer permitir-nos-á calcular limites de sucessões, por enquadramento.

Seja a sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{2n+3}{3n}\right)^n$.

$$\left(u_n = \left(\frac{2n+3}{3n}\right)^n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Determinemos o seu limite.

Visto que $\frac{2n+3}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n} > \frac{2}{3}$ porque $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e para $n \geq 4$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{n} \leq \frac{11}{12}$

então, $\frac{2}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{n} \leq \frac{11}{12}$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$

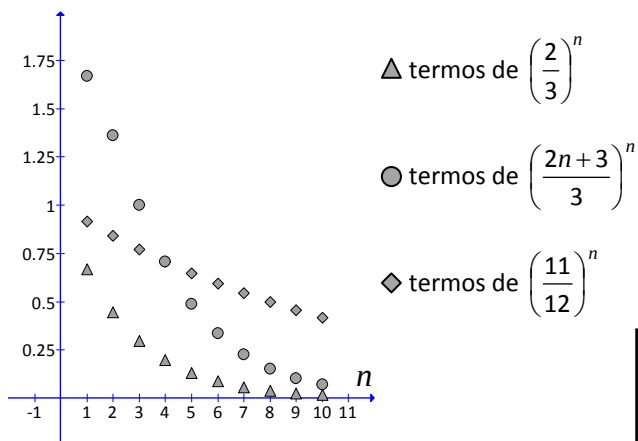
Como $\frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ e como $\frac{11}{12} < 1$, $\left(\frac{11}{12}\right)^n \rightarrow 0$.

Observando o gráfico seguinte, constatamos que para

$n \geq 4$, os termos da sucessão $\left(\frac{2n+3}{3n}\right)^n$ estão

compreendidos entre os termos das sucessões

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ e $\left(\frac{11}{12}\right)^n$ logo $\left(\frac{2n+3}{3n}\right)^n \rightarrow 0$.



O cálculo de limites efectuado deste modo é garantido pelo teorema ao lado.

Exercícios:

96. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) tais que:

$$u_n = 2 + \frac{5}{n} \quad \text{e} \quad v_n = 2 + \frac{4}{n}$$

Dê exemplo de uma sucessão (w_n) que satisfaça a condição $v_n \leq w_n \leq u_n$ para todos os valores de n a partir de uma certa ordem.

97. Recorrendo ao teorema das sucessões enquadradas, mostre que a sucessão de termo geral:

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} \text{ é um infinitésimo.}$$

98. Dada a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sabe-se que $2 < u_n < 3$, $\forall n > 1$.

Mostre que $\lim\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$.

99. Dada a sucessão de termo geral: $u_n = \frac{n}{4n+1}$

99.1. Prove que: $\frac{1}{5} \leq u_n < \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

99.2. Calcule $\lim u_n$.

Teorema das sucessões enquadradas

Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes para o mesmo limite a e se a partir de certa ordem (w_n) é tal que $u_n \leq w_n \leq v_n$ então $\lim(w_n) = a$.

■ PROBLEMAS DE LIMITES COM PROGRESSÕES

> Dada a sucessão (a_n) cujos primeiros termos são: 8, 11, 14, 17, ... e admitindo que o padrão se continua a verificar, qual será o seu limite?

Ao observar a sucessão dada constatamos que (a_n) é uma progressão aritmética de razão 3 e 1º termo 8.

Então tem termo geral: $a_n = 8 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow a_n = 3n + 5$

Assim:

$n \rightarrow +\infty$, é um infinitamente grande de referência.

$3n + 5 \rightarrow +\infty$, uma vez que $3n + 5 > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo:

$$\lim a_n = +\infty$$

Qualquer progressão aritmética (u_n) de razão positiva é um infinitamente grande positivo, se a razão é negativa é um infinitamente grande negativo.

Designemos por S_n a sucessão cujo termo de ordem n é a soma dos n primeiros termos de (a_n) e calculemos o seu limite.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

$$\lim S_n = \lim \left[\frac{8 + (3n+5)}{2} \times n \right] = \lim \left(\frac{3n^2 + 13n}{2} \right) = \lim \left(\frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{2} \right)$$

Assim:

$n^2 \rightarrow +\infty$, é um infinitamente grande de referência.

$\frac{3n^2}{2} \rightarrow +\infty$, uma vez que $\frac{3n^2}{2} > n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{2} \rightarrow +\infty$, uma vez que $\frac{13n}{2} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e por isso $\frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{2} > \frac{3n^2}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo: $\lim S_n = +\infty$

O limite da soma de todos os termos de uma progressão aritmética (u_n) é um infinitamente grande positivo se a razão é positiva e um infinitamente negativo se a razão é negativa.

> Consideremos a sucessão (b_n) da qual se apresentam os seguintes termos: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ Qual será o seu limite?

Estamos perante uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, cujo termo geral será: $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Como: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, é um infinitésimo de referência.

Temos que: $\lim b_n = 0$

Seja S_n a sucessão cujo termo de ordem n é a soma dos n primeiros termos de (b_n) e calculemos o seu limite.

$$S_n = b_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\lim S_n = \lim \left[1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{Visto que: } \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$$

Então de uma forma geral, considerando (u_n) uma progressão geométrica de razão r , com $r \neq 1$, e designando-se por S a soma de todos os termos, ou seja o limite de S_n , vem:

$$S = \lim S_n = \lim \left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \right)$$

- se $|r| < 1$ então $r^n \rightarrow 0$:

$$S = \lim \left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \right) = u_1 \times \frac{1}{1-r} = \frac{u_1}{1-r}$$

Logo:

$$S = \frac{u_1}{1-r}$$

- se $|r| > 1$, o limite de S_n depende do sinal do primeiro termo, bem como da razão da progressão geométrica ser inferior a -1 ou superior a 1.

	$u_1 > 0$	$u_1 < 0$
$r > 1$	$S_n \rightarrow +\infty$	$S_n \rightarrow -\infty$
$r < -1$	$S_n \rightarrow \infty$	$S_n \rightarrow \infty$

Exercícios:

100. Calcule a soma de todos os termos das seguintes progressões aritméticas:

100.1. $\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}, \frac{19}{2}, \dots$ **100.2.** -10, -6, -2, 2, 6, ...

101. Numa progressão geométrica o primeiro termo é 64 e o quarto termo é 1.

101.1. Escreva uma expressão para o termo geral da progressão.

101.2. Calcule a soma de todos os seus termos.

102. Considere a progressão: $p_n = \frac{2^n}{5^{n-1}}$

102.1. Prove que (p_n) é uma p. g..

102.2. Determine a soma dos 10 primeiros termos.

102.3. Determine a soma de todos os termos da progressão (p_n) .

103. Uma bola é largada de uma altura de 6 metros. Sabendo que cada vez que a bola bate no solo e volta a saltar, atinge $\frac{3}{4}$ da altura anterior, determine a soma das alturas que a bola atingiu.

104. Conta-se que um príncipe do oriente quis recompensar o seu súbdito Sessa pela invenção do Xadrez. O inventor ao ser questionado sobre a recompensa, respondeu:

"O tabuleiro de Xadrez está dividido em 64 quadrados: quero apenas um grão de trigo no primeiro quadrado, 2 no segundo, quatro no terceiro, oito no quarto e assim sucessivamente, até ao último."

104.1. Determine o número de grãos de trigo que Sessa pediu.

104.2. E se o tabuleiro tivesse um número infinito de casas?

O que é Matemática?

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”

Galileu Galilei

“A matemática (do grego μάθημα, transl. máthēma, "ciência"/"conhecimento"/"aprendizagem"; e μαθηματικός, transl. mathēmatikós, "apreciador do conhecimento") é a ciência do raciocínio lógico e abstrato. A Matemática estuda quantidades, medidas, espaços, estruturas e variações. Um trabalho matemático consiste em procurar por padrões, formular conjecturas e, por meio de deduções rigorosas a partir de axiomas e definições, estabelecer novos resultados.”

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica>

“A matemática é a ciência do raciocínio lógico e abstrato. Ela envolve uma permanente procura da verdade. É rigorosa e precisa. Embora muitas teorias descobertas há longos anos ainda hoje se mantenham válidas e úteis, a matemática continua permanentemente a modificar-se e a desenvolver-se.”

http://pt.wikiversity.org/wiki/Portal:Forma%C3%A7%C3%A3o_B%C3%A1sica/Matem%C3%A1tica/O_que_%C3%A9_Matem%C3%A1tica_%3F

“A matemática não é sobre símbolos e contas. Estas são apenas ferramentas do ofício (...). A matemática é sobre ideias. Em particular, é sobre a forma como diferentes ideias se relacionam entre si. Dada uma certa informação, que mais necessariamente se segue?”

<http://www.srcoronado.com/smf/index.php?topic=15.0>

“A Matemática oferece-nos um conjunto singular de ferramentas poderosas para compreender e mudar o mundo. Estas ferramentas incluem o raciocínio lógico, técnicas de resolução de problemas, e a capacidade de pensar em termos abstractos.”

<http://www.e-escola.pt/canal.asp?nome=matematica>

Bibliografia utilizada na compilação:

COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda, **Novo Espaço, Matemática A 11º Ano**, Porto Editora 2011

DUARTE, Teresa Olga; FILIPE, Jaime Pinheiro; GOUVEIA, Ana e FERNANDES, Carlos, **Matemática Onze, Matemática 11º Ano**, Lisboa Editora, 2011

FERREIRA NEVES, Maria Augusta; GUERREIRO, Luís e MOURA, Ana, **Matemática A 11º Ano**, Porto Editora, 2004

FERREIRA NEVES, Maria Augusta; SILVA, M. Carlos; GUERREIRO, Luís e PEREIRA, Albino, **Matemática B 11**, Porto Editora, 2009

LIMA, Yolanda e GOMES, Francelino, **Xeq Mat, Matemática - 11º Ano**, O Livro

NEGRA, Cristina e MARTINHO, Emanuel, **Projecto Desafios, Matemática A 11º Ano**, Santillana Constância, 2011

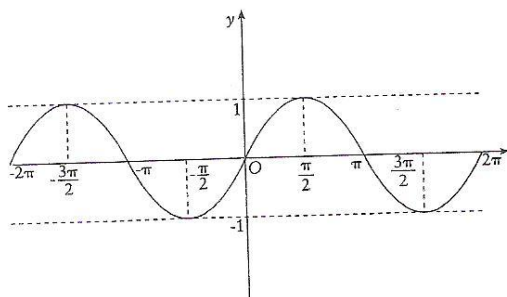
ST. AUBYN, Marinela Cabral; BRITO, Cristina e MARTINS, Ana Cristina, **Mat 11, Matemática A 11º Ano**, Lisboa Editora, 2009

SOVERAL, Ana Arede e SILVA, Carmen Viegas, **Matemática B, Matemática 10º Ano**, Texto Editores, 2005

VIEGAS, Cristina; LIMA, Yolanda e GOMES, Francelino, **XEQMAT 11, Matemática A - 11º Ano**, Texto Editores, 2011

1 Função seno

Uma forma de obter o gráfico da função real de variável real $y = \sin x$ consiste em considerar os valores x para os quais conhecemos o valor de $\sin x$.

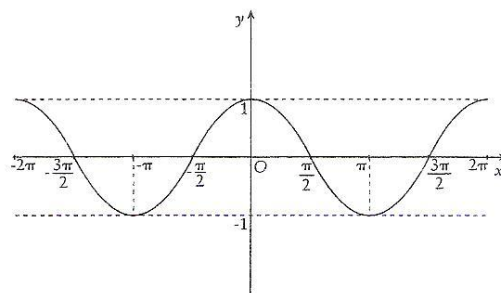


Considerando a função $f: x \mapsto y = \sin x$ temos:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = [-1, 1]$
- $\sin(2\pi + x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$, diz-se que a função seno é periódica, de período 2π .
- A função seno é uma função ímpar
 $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.
(O seu gráfico é simétrico relativamente à origem.)
- A função seno é estritamente crescente, por exemplo, em:
 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.
- A função seno é estritamente decrescente, por exemplo, em:
 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$.
- A função seno tem valor máximo 1 para:
 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- A função seno tem valor mínimo -1 para:
 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- A função seno tem zeros para:
 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2 Função co-seno

Se num referencial consideramos θ a abcissa e $\cos \theta$ a ordenada obtém-se o gráfico da função definida por $y = \cos x$.

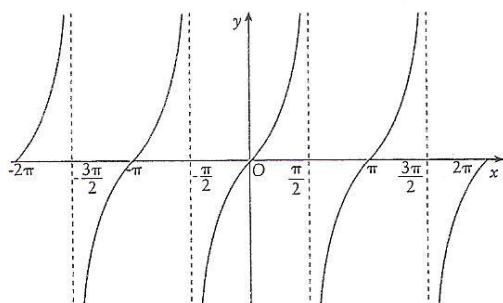


Considerando a função $f: x \mapsto y = \cos x$, temos:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = [-1, 1]$
- $\cos(2\pi + x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$, diz-se que a função é periódica de período 2π .
- A função co-seno é uma função par
 $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.
(O seu gráfico é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.)
- A função co-seno é estritamente crescente, por exemplo, em:
 $[-\pi, 0]$ e em $[\pi, 2\pi]$.
- A função co-seno é estritamente decrescente, por exemplo, em:
 $[0, \pi]$ e em $[2\pi, 3\pi]$.
- A função co-seno tem o valor máximo 1 para:
 $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- A função co-seno tem o valor mínimo -1 para:
 $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- A função co-seno tem zeros para:
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3 Função tangente

Se num referencial se considerar θ a abcissa e $\tan \theta$ a ordenada, obtém-se o gráfico da função definida por $y = \tan x$.



Considerando a função $f: x \mapsto y = \tan x$ temos:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $D'_f = \mathbb{R}$

- A função é ímpar
 $\tan(-x) = -\tan(x), \forall x \in D_f$.
- A função tangente é crescente em todos os intervalos do tipo:
 $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.
- A função é periódica de período π :
 $\tan(\pi + x) = \tan(x), \forall x \in D_f$.
- A função tem zeros para:
 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Método de adição ordenada

Por vezes a resolução de um sistema fica facilitada se se recorrer à seguinte propriedade:

Num sistema de equações, se for substituída uma equação pela que se obtém, adicionando-lhe, membro a membro, outra equação do sistema, obtém-se um sistema equivalente.

Quando um sistema é resolvido com a aplicação desta propriedade, diz-se que é utilizado o **método de adição ordenada**. Muitas vezes, a resolução de um sistema é feita com recurso aos métodos de adição ordenada e de substituição (**método misto**), como a seguir se exemplifica.

Exemplo

Resolução do sistema de equações:
$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$$

Observa-se que os coeficientes de y na 1.ª e na 3.ª equação são simétricos. Se adicionarmos estas duas equações, membro a membro, elimina-se o y . Isto é, obtém-se a equação $5x + 2z = 2$. Esta equação vai substituir, no sistema, a 1.ª equação ou a 3.ª. Fazamos a substituição, por exemplo, da 3.ª equação.

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = -1 \\ + 3x + y + z = 3 \\ \hline 5x + 0 + 2z = 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2z = 2 \end{cases}$$

De seguida, uma estratégia possível é eliminar y entre a 1.ª e a 2.ª equação, de modo a obter uma nova equação apenas com as incógnitas x e z .

Multiplicam-se ambos os membros da 1.ª equação por 3. De seguida, substitui-se, por exemplo, a 1.ª equação pela equação que resulta da adição ordenada da 1.ª com a 2.ª.

$$\begin{array}{r} (\times 3) \quad 2x - y + z = -1 \\ \Leftrightarrow 6x - 3y + 3z = -3 \\ + \quad -x + 3y - 2z = 0 \\ \hline 5x + 0 + z = -3 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y + 3z = -3 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + z = -3 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2z = 2 \end{cases}$$

Repetindo os procedimentos anteriores em relação às 1.ª e 3.ª equações, obtém-se o valor de z .

$$\begin{cases} -5x - z = 3 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 2z = 2 \end{cases}$$

Conclui-se a resolução do sistema substituindo os valores à medida que são calculados, conforme se indica a seguir.

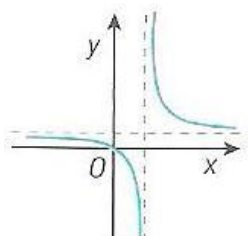
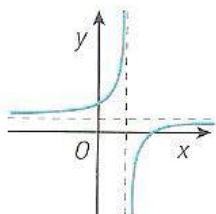
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ -x + 3y = 10 \\ x = -\frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ y = \frac{14}{5} \\ x = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

A solução do sistema é o terno ordenado:

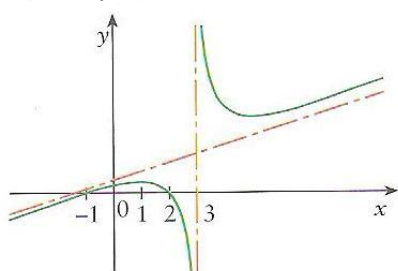
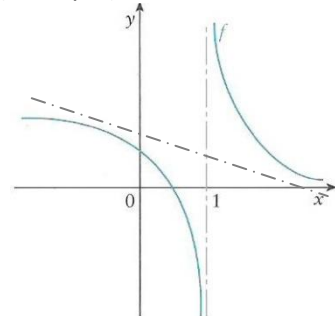
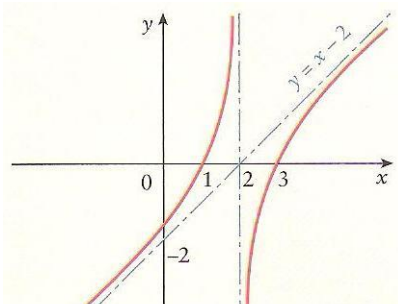
$$(x, y, z) = \left(-\frac{8}{5}, \frac{14}{5}, 5\right)$$

Representação gráfica de funções da família: $y = mx + a + \frac{b}{cx + d}$

- $y = a + \frac{b}{cx + d} \quad (m = 0)$

$\frac{b}{c} > 0$	Gráfico: 	Variação: A função é decrescente nos intervalos: $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[\text{ e } \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$
$\frac{b}{c} < 0$	Gráfico: 	Variação: A função é crescente nos intervalos: $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[\text{ e } \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$

- $y = mx + a + \frac{b}{cx + d}$

	$m > 0$	$m < 0$
$\frac{b}{c} > 0$	Gráfico (exemplo): 	Gráfico (exemplo): 
$\frac{b}{c} < 0$	Gráfico (exemplo): 	Gráfico (exemplo): 