

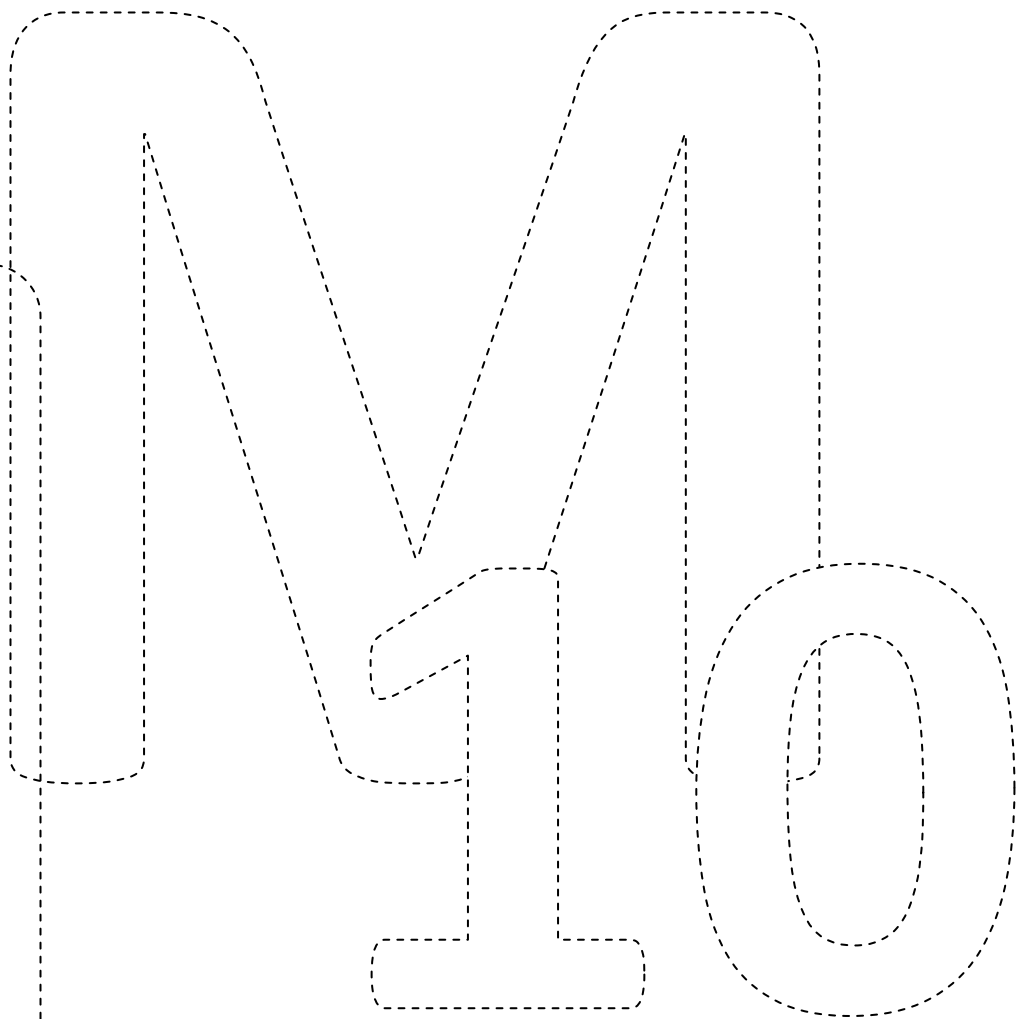
TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

10ª Classe – 2º Ciclo

MATEMÁTICA

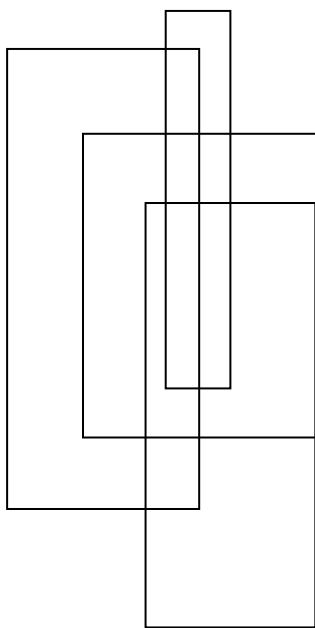


Ministério da Educação
Cultura e Formação



ÍNDICE

Tema 1 – Geometria	3
▪ Problemas Geométricos no Plano e no Espaço // Secções no Cubo	4
▪ Referenciais e Condições no Plano e no Espaço	10
▪ Vectores no Plano e no Espaço	20
▪ Rectas no Plano e no Espaço	25
 Tema 2 – Funções	 29
▪ Generalidades sobre Funções	30
▪ Função Afim	35
▪ Função Quadrática	36
▪ Função Módulo	43
▪ Transformações simples de Funções	45
▪ Funções Polinomiais. Polinómios	47
 Tema 3 – Estatística	 54
▪ Objecto da Estatística. Vocabulário Estatístico	55
▪ Organização e interpretação de dados	57
▪ Medidas de Localização	63
▪ Medidas de Dispersão	67
▪ Distribuições Bidimensionais	70
 Bibliografia	 73



TEMA 1

GEOMETRIA

INTRODUÇÃO

Um olhar atento sobre aquilo que nos rodeia é suficiente para identificarmos modelos construídos pelo Homem ou pela própria Natureza relacionados com a **geometria do plano** e com a **geometria no espaço**.



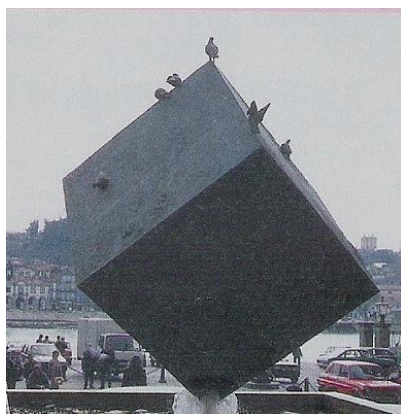
Forte – São Tomé



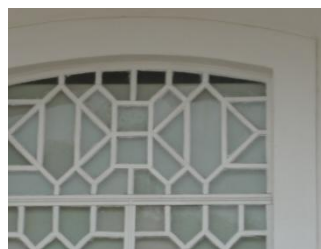
Esfera Armilar – São Tomé



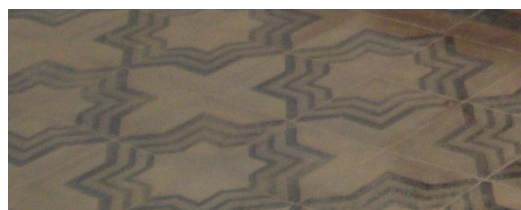
Museu do Louvre – Paris



Cubo da Ribeira – Porto



Banco Central de São Tomé e Príncipe – São Tomé



Roça Sundry - Príncipe

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS NO PLANO E NO ESPAÇO // SECÇÕES NO CUBO

PAVIMENTAÇÕES

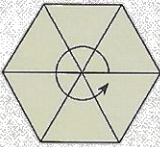
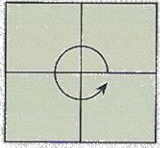
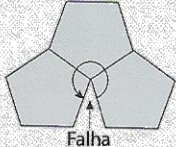
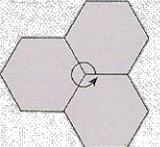
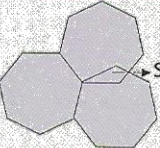
Uma pavimentação do plano é um conjunto de mosaicos que cobre completamente uma superfície, sem sobreposições nem espaços intermédios.

Para pavimentar uma superfície plana, usando figuras geométricas de modo a não existirem falhas e sobreposições, existem condições que têm que ser respeitadas. Em torno de cada vértice (ponto que converge mais de uma figura):

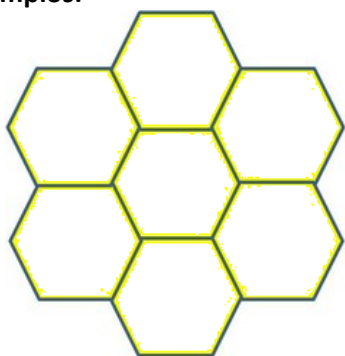
- a soma dos ângulos internos das figuras usadas tem que ser 360° ;
- têm que convergir 3 ou mais figuras geométricas.

Nota:

Polígono regular é uma figura geométrica com ângulos e lados iguais

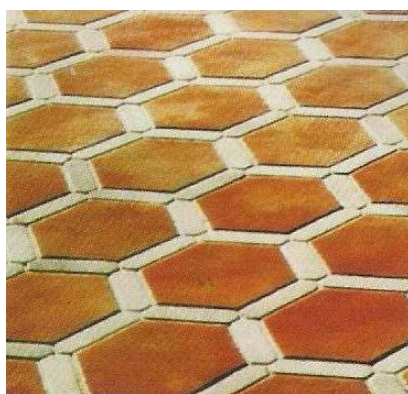
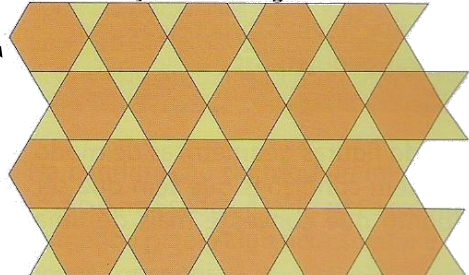
Polígono regular	Soma dos ângulos internos
Triângulo equilátero 	$6 \times 60^\circ = 360^\circ$ É possível
Quadrado 	$4 \times 90^\circ = 360^\circ$ É possível
Pentágono 	$3 \times 108^\circ = 324^\circ$ Não é possível pavimentar, devido à existência de uma falha
Hexágono 	$3 \times 120^\circ = 360^\circ$ É possível
Heptágono 	$> 360^\circ$ Não é possível pavimentar, devido à existência de uma sobreposição

Exemplos:

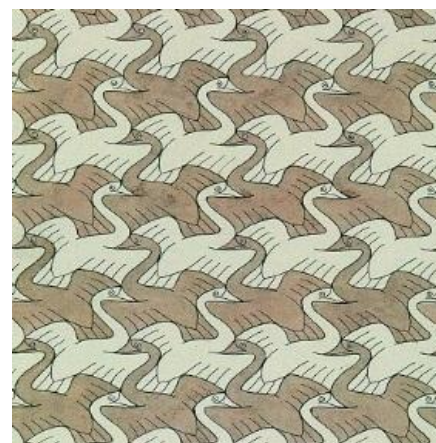


Pavimentação regular

Pavimentação semi-regular



Calçadas

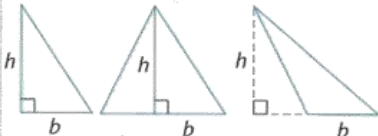
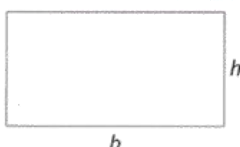
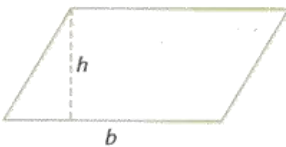
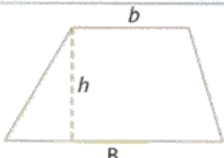
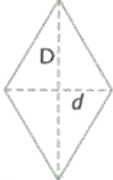


Mauritius C. Escher



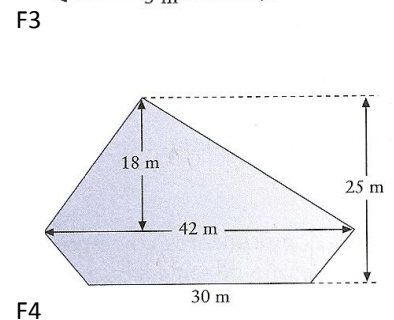
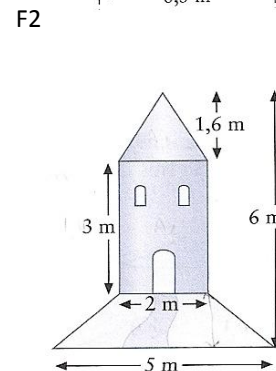
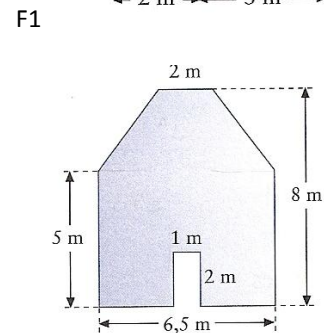
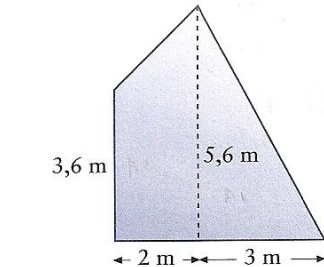
M.A.(1)

ÁREAS E PERÍMETROS

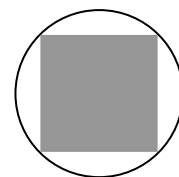
NOME	FIGURA	ÁREA
Triângulo		$A = \frac{b \times h}{2}$
Quadrado		$A = l \times l$
Retângulo		$A = b \times h$
Paralelogramo		$A = b \times h$
Trapézio		$A = \frac{B+b}{2} \times h$
Losango		$A = \frac{D \times d}{2}$
Polígono regular		$A = \frac{P}{2} \times a$ P — Perímetro
Círculo		$A = \pi r^2$

Exercícios:

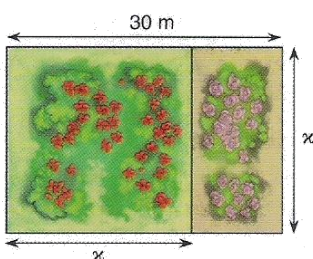
1. Calcule a área das seguintes figuras:



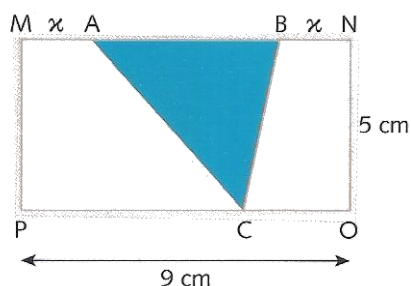
2. Se o círculo da figura tem área 2π , qual a área do quadrado nele inscrito?



3. Um jardim com 450m^2 de área está dividido em duas partes. Qual é a área da parte maior plantada?



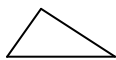
4. Determine o valor de x , sabendo que a área do triângulo é um terço da área do retângulo.



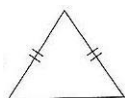
SEMELHANÇAS NO PLANO

Classificação de triângulos

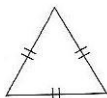
- Quanto aos lados



Escaleno: três lados diferentes

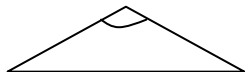


Isósceles: dois lados iguais

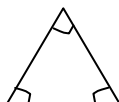


Equilátero: três lados iguais

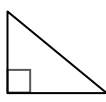
- Quanto aos ângulos



Obtusângulo: com um ângulo obtuso ($>90^\circ$)



Acutângulo: três ângulos agudos ($<90^\circ$)



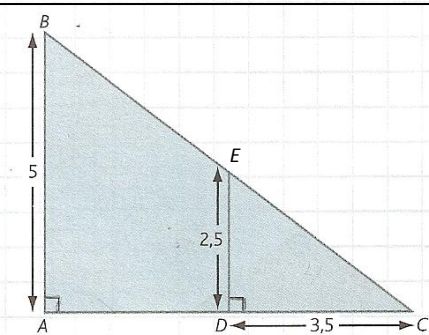
Rectângulo: com um ângulo recto ($=90^\circ$)

Exercícios:

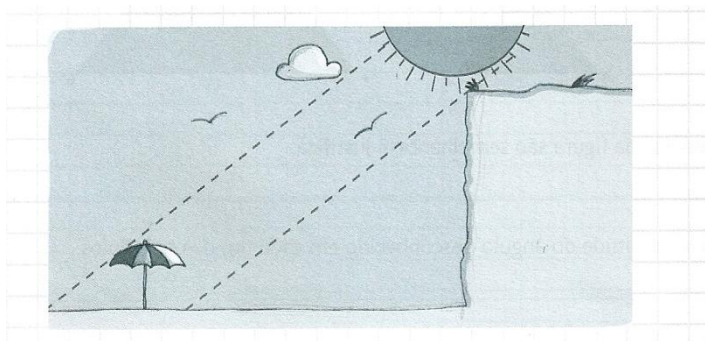
5. Considere a figura seguinte:

5.1. Justifique que os triângulos são semelhantes.

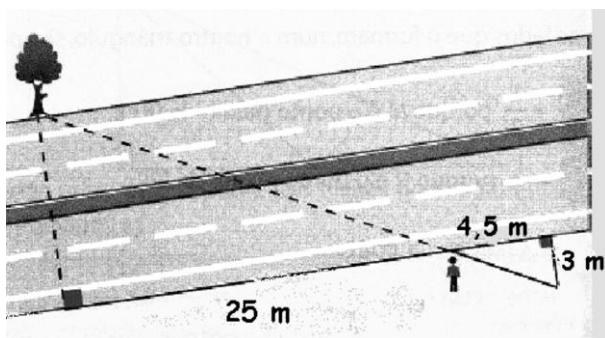
5.2. Determine $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



6. Calcule altura da falésia sabendo que o chapéu-de-sol tem 2 metros de altura, a sua sombra tem 2,6 metros de comprimento e a sombra da falésia tem 26 metros de comprimento.



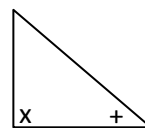
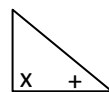
7. Utilizando o seguinte esquema calcule a largura da auto-estrada:



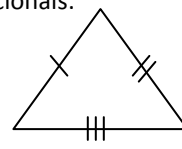
Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se tiverem:

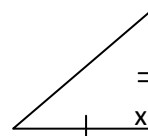
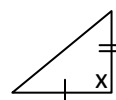
- dois ângulos iguais:



- os três lados proporcionais:



- dois lados proporcionais e o ângulo, formado por eles, igual:



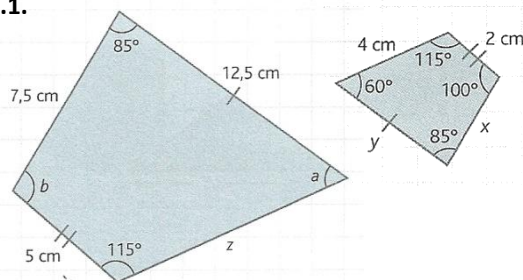
Polígonos semelhantes:

Dois polígonos com o mesmo número de lados dizem-se semelhantes quando têm de um para o outro:

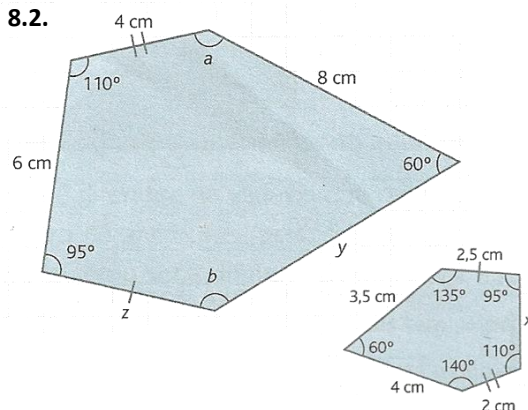
- ângulos geometricamente iguais;
- lados correspondentes proporcionais.

8. Sabendo que os seguintes polígonos são semelhantes, indique as medidas que faltam.

8.1.



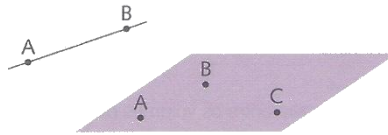
8.2.



▪ POSIÇÃO RELATIVA DE RECTAS E PLANOS

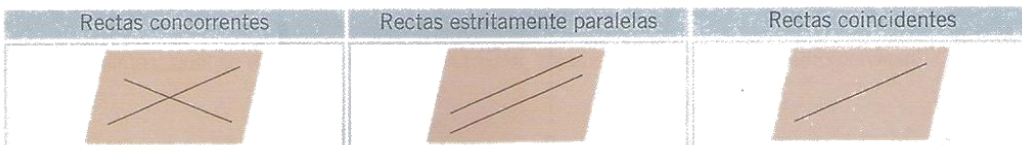
Definição de recta e de plano:

- Dois pontos distintos, A e B, definem a recta AB.
- Três pontos não colineares definem um plano.

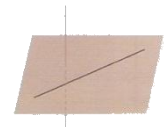


> Posição relativa de rectas:

Rectas complanares



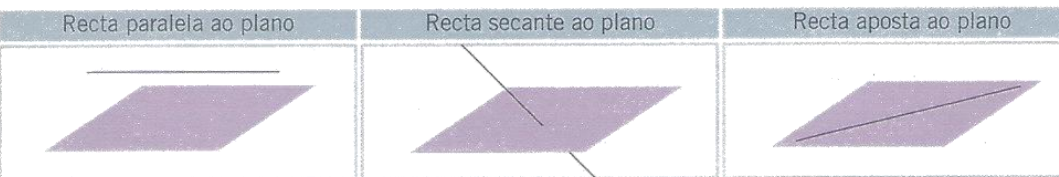
Rectas não complanares



> Posição relativa de planos:

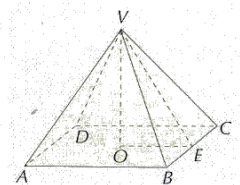


> Posição relativa de rectas e planos:



Exercício:

9. Considere a figura:



Indique duas rectas:

- 9.1. paralelas.
- 9.2. concorrentes.
- 9.3. perpendiculares.

Indique dois planos:

- 9.4. coincidentes.
- 9.5. concorrentes.

Indique uma recta:

- 9.6. perpendicular ao plano ABC.

▪ SÓLIDOS / SÓLIDOS PLATÓNICOS

Não Poliedros	Poliedros
Sólidos geométricos cujas faces não são todas planas. 	Sólidos geométricos cujas faces são figuras planas.

Irregulares	Regulares
Não regulares. 	Poliedros em que as suas faces são geometricamente iguais e nos seus vértices concorrem o mesmo número de faces e arestas.

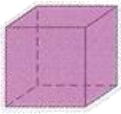
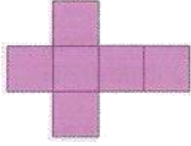
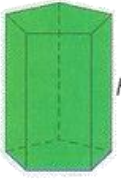
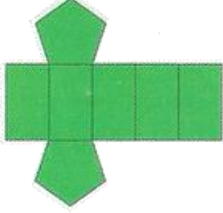
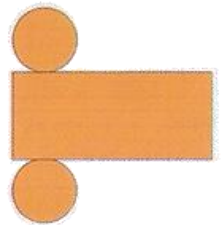
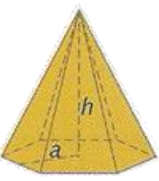
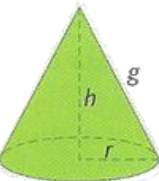
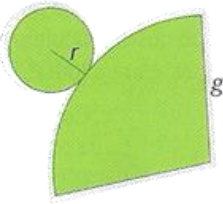
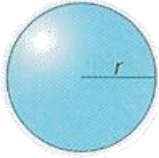
TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
4 faces, triângulos equiláteros	6 faces, quadrados	8 faces, triângulos equiláteros	12 faces, pentágonos regulares	20 faces, triângulos equiláteros

Sólidos Platónicos

Exercício:

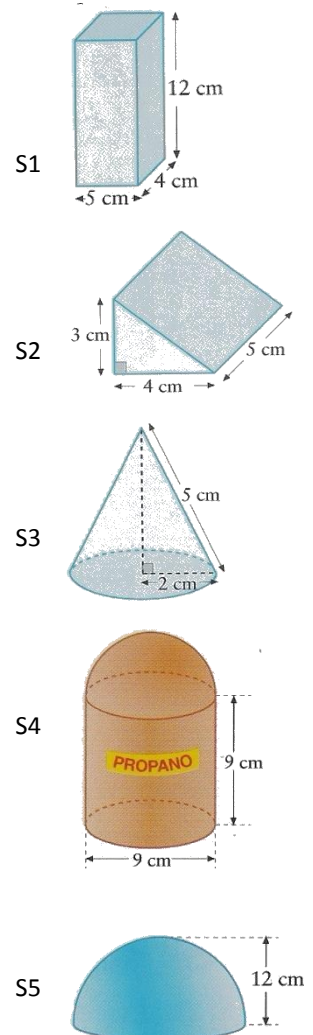
10. Porque é que existem apenas 5 sólidos platónicos?

▪ VOLUMES DE SÓLIDOS

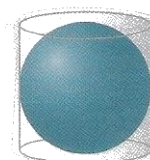
SÓLIDO	PLANIFICAÇÃO	ÁREA LATERAL	ÁREA TOTAL	VOLUME
 Cubo		$A_L = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
 Prisma		$A_L = P_b \times h$ P_b — Perímetro da base	$A_T = A_L + 2A_b$ A_b — Área da base	$V = A_b \times h$
 Cilindro		$A_L = P_b \times g =$ $= 2\pi r \times g$ g — Geratriz	$A_T = A_L + 2A_b =$ $= 2\pi r g + 2\pi r^2$	$V = A_b \times h =$ $= \pi r^2 \times h$
 Pirâmide		$A_L = \frac{P_b}{2} \times ap$ ap — Apótema	$A_T = A_L + A_b$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h$
 Cone		$A_L = \pi \times r \times g$	$A_T = A_L + A_b =$ $= \pi r g + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3} A_b \times h =$ $= \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$
 Esfera	—	—	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Exercícios:

11. Calcule o volume de cada um dos sólidos representados:



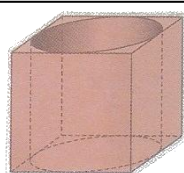
12. Na figura temos uma esfera inscrita num cilindro com altura de 10cm.



12.1. Calcule o volume de cada um dos sólidos.

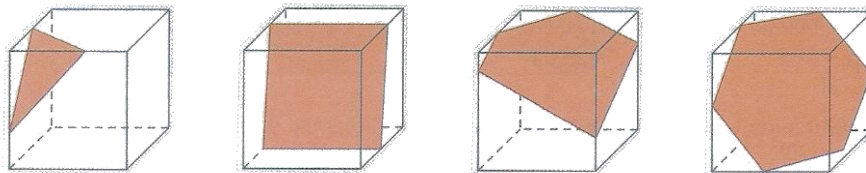
12.2. Qual a razão entre os seus volumes.

13. O sólido da figura é um cubo de aresta 10cm onde foi escavado um cilindro cuja base tem um raio de 5cm. Calcule o valor exacto do volume do sólido.



▪ SECÇÕES NO CUBO

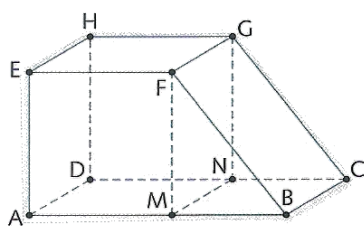
Quando se intersecta um cubo com um plano a secção que se obtém vai depender do número de faces do cubo que o plano intersecta, isto é, se o plano intersecta 3 faces a secção obtida será um triângulo, se intersecta 4 faces a secção obtida será um quadrilátero, se intersecta 5 faces a secção obtida será um pentágono e se intersecta 6 faces a secção obtida será um hexágono.



M.A.(3)

Exercícios:

14. Na figura estão representados um cubo com 8 cm de lado e um prisma triangular.



14.1. Utilizando as letras da figura, indique:

- uma recta perpendicular ao plano EFB.
- duas rectas estritamente paralelas.
- dois planos que se intersectam na recta EF.

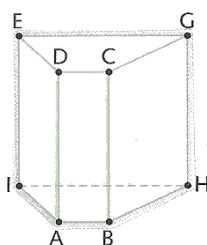
14.2. Sabendo que $\overline{AB} = 14$ cm determine:

- o volume do prisma.
- o volume do sólido.

14.3. Determine a área da secção obtida no cubo pelo plano:

- AFG.
- EGM.

15. A figura representa um prisma recto cujas bases são trapézios.



Indique as posições relativas de:

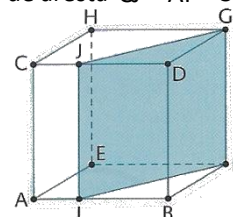
- EG e AB.
- BC e o plano HIE.
- plano AIE e plano ABI.
- plano HIE e plano ABC.

16. Na figura está representado um cubo com 9 cm de aresta $\overline{CJ} = \overline{AI} = 3$ cm.

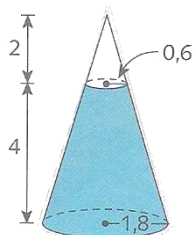
16.1. Calcule o comprimento exacto de [JG].

16.2. Determine o valor exacto do perímetro do quadrilátero [FGIJ].

16.3. O plano IJG divide o cubo em dois sólidos. Calcule a razão entre os seus volumes.

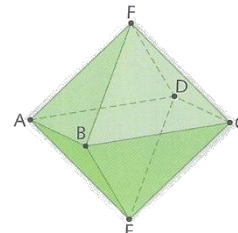


17.

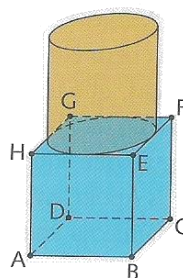


Determine o volume do tronco de cone representado na figura a sombreado. (apresente o resultado final arredondado as centésimas)

18. Determine a área da secção obtida no octaedro regular, com 5 cm de aresta, feita pela intersecção do plano BDE.



19.



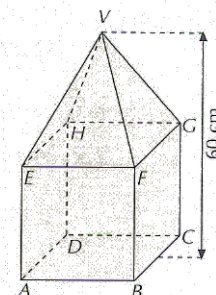
A figura é constituída por um cubo e um cilindro de base inscrita na face superior do cubo. A altura do cilindro é 8 cm e o seu volume é 200π cm³. Determine o volume do cubo.

20. O sólido representado na figura é constituído por um cubo, e por uma pirâmide com altura igual à do cubo.

20.1. Determine o volume do sólido.

20.2. Determine a área da secção produzida no sólido pelo plano:

- AHG.
- AFC.
- CGV.



REFERENCIAIS E CONDIÇÕES NO PLANO E NO ESPAÇO

REFERENCIAL CARTESIANO NO PLANO: COORDENADAS DE PONTOS E SEUS SIMÉTRICOS

O referencial cartesiano, que vamos utilizar no nosso estudo de geometria analítica, é constituído por dois eixos perpendiculares (ortogonais) e monométricos.

Coordenadas

A cada ponto corresponde um par ordenado de números: as coordenadas do ponto. A primeira coordenada diz respeito ao eixo horizontal (eixo Ox) e designa-se por abcissa e a segunda coordenada diz respeito ao eixo vertical (eixo Oy) e designa-se por ordenada.

A (3, 2)

Como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pares ordenados formados por números reais, também chamamos ao plano $\mathbb{R}^2$.

Em geometria algébrica a cada representação geométrica corresponde uma representação algébrica e vice-versa.

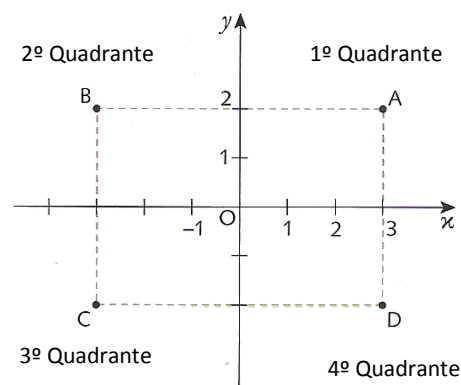
Simetrias

Considerando o ponto A, por exemplo, verifica-se que o seu simétrico:

- relativamente ao eixo Oy é B(-3, 2).
- relativamente ao eixo Ox é D(3, -2).
- relativamente à origem, O, é C(-3, -2).

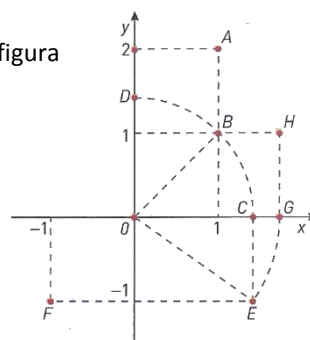
De uma forma geral, sendo P um ponto com coordenadas (a, b) com a e b reais temos:

- O simétrico de P relativamente ao eixo Ox tem como coordenadas (a, -b).
- O simétrico de P relativamente ao eixo Oy tem como coordenadas (-a, b).
- O simétrico de P relativamente à origem tem como coordenadas (-a, -b).



Exercício:

21. Considere a figura



21.1. Identifique as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H.

21.2. Indique as coordenadas do ponto simétrico

- a G relativamente ao eixo Oy .
- a E relativamente à origem do referencial.
- a B relativamente ao eixo Ox .

RECTAS PARALELAS AOS EIXOS COORDENADOS // BISSECTRIZES // SEMIPLANOS

Rectas horizontais	Rectas verticais	Bissectrizes dos quadrantes
A equação de uma recta horizontal é do tipo $y = b$. O eixo Ox tem equação $y = 0$.	A equação de uma recta vertical é do tipo $x = a$. O eixo Oy tem equação $x = 0$.	Bissectriz dos quadrantes ímpares: $y = x$ Bissectriz dos quadrantes pares: $y = -x$

Semiplanos: Uma recta divide o plano em dois semiplanos.

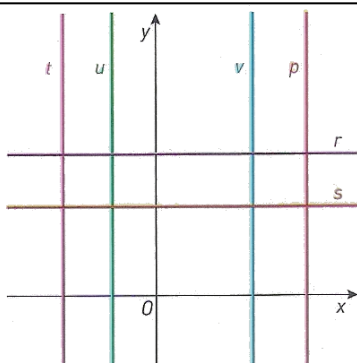
O semiplano sombreado na figura representa-se pela condição: $x \leq 1$	O semiplano sombreado na figura representa-se pela condição: $y > 3$	O semiplano sombreado corresponde ao conjunto de pontos do plano que têm ordenada menor do que abcissa. Pode por isso ser representado pela condição: $y < x$
Trata-se de um semiplano fechado porque a recta-limite também pertence ao semiplano.	Trata-se de um semiplano aberto porque a recta-limite não pertence ao semiplano.	

Exercícios:

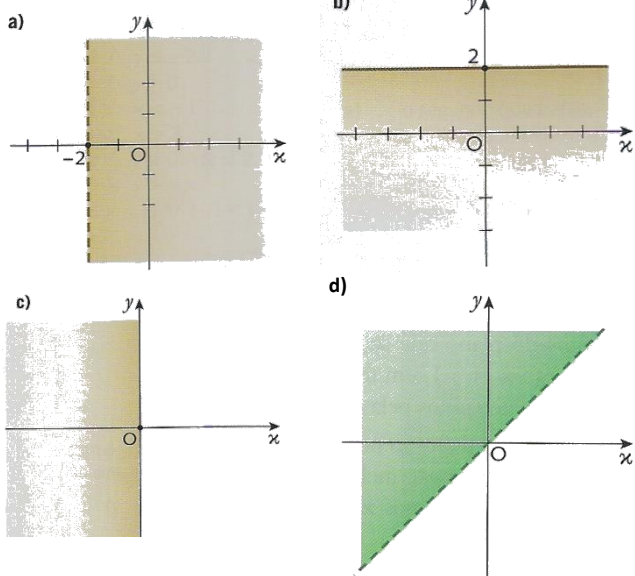
22. Observe a figura.

Corresponda cada uma das rectas a uma equação:

____ : $x = 2$ ____ : $x = \pi$
 ____ : $y = 2$ ____ : $x = -2$
 ____ : $y = 0$ ____ : $x = -1$
 ____ : $y = \pi$ ____ : $x = 0$



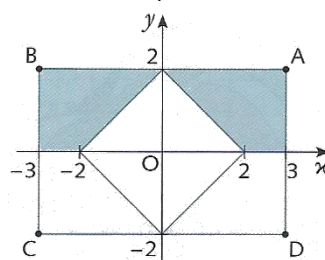
23. Escreva uma condição, em $\mathbb{R}^2$, que defina cada um dos semiplanos seguintes:



24. Considere o ponto $F(-4, 2)$. Escreva uma equação da recta que passa por F e é:

24.1. paralela ao eixo Ox .
24.2. paralela ao eixo Oy .

25. No referencial estão representados um rectângulo e um quadrado.



25.1. Indique as coordenadas dos vértices do rectângulo.

25.2. Qual é o simétrico de C em relação ao eixo das ordenadas?

25.3. Calcule a área sombreada.

26. Quanto ao quadrado [ABCD], sabe-se que o ponto A tem como coordenadas $(-2, 1)$ e que os seus vértices são simétricos, dois a dois, relativamente à origem do referencial. Represente o quadrado [ABCD] num referencial e indique as coordenadas dos outros vértices.

27. Indique o simétrico do ponto A de coordenadas $(-1, 4)$ relativamente à recta de equação:

27.1. $x = 3$ **27.2.** $y = 0$

28. Indique uma equação da recta...

28.1. ...paralela ao eixo das abcissas e que passa por $A(2, 5)$.

28.2. ...que passa por $B(3, -1)$ e é perpendicular à recta de equação $y = 4$.

28.3. ...CD em que $C(3, -2)$ e $D(1, -2)$

29. Represente o conjunto dos pontos do plano definidos por:

29.1. $x > 3$ **29.2.** $y \leq 0$

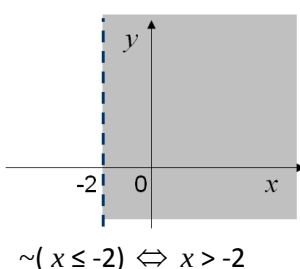
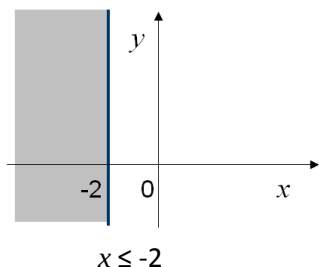
29.3. $y + x < 0$ **29.4.** $x \geq \frac{3}{2}$

▪ NEGAÇÃO, CONJUNÇÃO E DISJUNÇÃO DE CONDIÇÕES

Negação

Consideremos a condição $x \leq -2$.

A negação desta condição ou a condição contrária é $x > -2$.

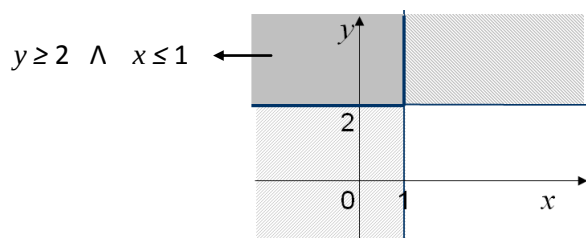


O símbolo “ $\sim$ ” lê-se “*negação de*”, e representa a operação lógica **negação** de uma condição.

Conjunção

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ as condições: $x \leq 1$; $y \geq 2$

A intersecção dos dois semiplanos é definida pela conjunção das condições que os definem.

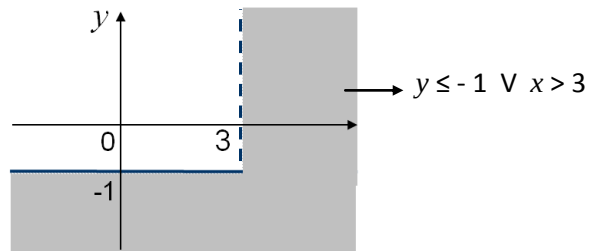


O símbolo “ $\wedge$ ” lê-se “e”, e representa a operação lógica **conjunção** de duas condições.

Disjunção

Consideremos em $\mathbb{R}^2$ as condições: $y \leq -1$; $x > 3$

A reunião dos dois semiplanos é definida pela disjunção das condições que os definem.



O símbolo “ $\vee$ ” lê-se “ou”, e representa a operação lógica **disjunção** de duas condições.

Exercícios:

30. Represente o conjunto dos pontos do plano definidos por:

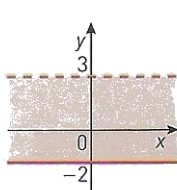
- 30.1.** $\sim(y < -4)$
30.2. $x < 3 \wedge y \leq -2$
30.3. $x > 1 \wedge x < -1$
30.4. $x > 1 \vee x > 3$
30.5. $y \leq x \wedge y \geq 0 \wedge x \leq 2$
30.6. $x < 0 \vee y > -x$
30.7. $(-1 < x < 1) \vee (-1 < y < 1)$
30.8. $|x| \leq 2$
30.9. $|y| > 3$

31. Escreva uma condição, em $\mathbb{R}^2$, que defina...

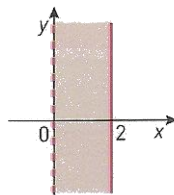
- 31.1.** ...o segundo quadrante.
31.2. ...o quarto quadrante.
31.3. ...a união do terceiro e do quarto quadrante.

32. Defina através de uma condição o conjunto de pontos assinalados no referencial:

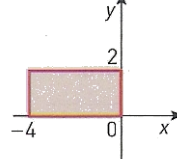
32.1.



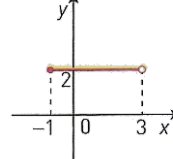
32.2.



32.3.



32.4.



33. Considere o conjunto:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -3 \wedge y \geq 4 \}$$

33.1. Represente o conjunto A num referencial.

33.2. Dê um exemplo de um ponto que:

- a)** pertença ao conjunto A.
b) não pertença a A.
c) pertença a A e à bissetriz dos quadrantes pares.
d) pertença à bissetriz dos quadrantes pares mas não pertença a A.
e) pertença ao 2º quadrante e a A.

34. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que:

34.1. O ponto $L(a - 1, 6)$ pertença à:

- a)** recta $x = 3$.
b) bissetriz dos quadrantes ímpares.

34.2. O ponto $M(a, a^2)$ pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

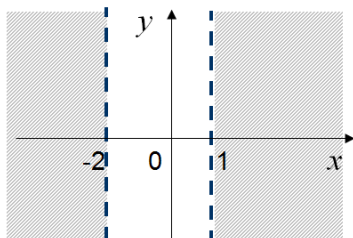
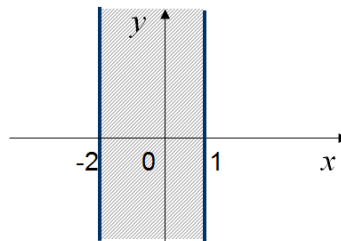
35. Escreva, uma condição em $\mathbb{R}^2$ que defina um quadrado de lado 2 em que dois dos vértices opostos têm como coordenadas $(1, -2)$ e $(3, 0)$.

LEIS DE MORGAN

Considere o domínio plano representado na figura.

Este domínio pode ser definido pela conjunção de duas condições:

$$x \geq -2 \wedge x \leq 1$$



A representação geométrica do conjunto de pontos que não fazem parte do domínio plano dado é a representada na figura ao lado.

Este domínio pode ser definido pela disjunção de duas condições:

$$x < -2 \vee x > 1$$

Comparando as duas situações, conclui-se que:

$$\sim(x \geq -2 \wedge x \leq 1) = x < -2 \vee x > 1$$

$$\sim(x < -2 \vee x > 1) = x \geq -2 \wedge x \leq 1$$

Nota Histórica:

Augustus de Morgan
(1806-1871)



Matemático inglês nascido na Índia onde o pai foi oficial. Foi professor na Universidade de Londres, onde evidenciou grande capacidade de ensino e de investigação. Gostava de enigmas, alguns dos quais reunidos pela viúva Sophia Elizabeth De Morgan no livro *Budget of Paradoxes*, publicado em 1882.

Quadro Resumo:

Num dado universo, são dadas duas condições $a(x)$ e $b(x)$, sendo A e B os respectivos conjuntos solução.

Condição	Conjunto solução
$a(x)$	A
$b(x)$	B
$a(x) \wedge b(x)$ (conjunção)	$A \cap B$
$a(x) \vee b(x)$ (disjunção)	$A \cup B$
$\sim a(x)$	$\bar{A}$ (complementar)
$\sim b(x)$	$\bar{B}$ (complementar)

Leis de De Morgan

$$\sim(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow \sim(a(x)) \vee \sim(b(x))$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\sim(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow \sim(a(x)) \wedge \sim(b(x))$$

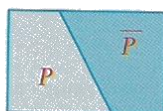
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Nota: $\bar{P}$ é o complementar de P .

$\bar{P}$ é formado por todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que não pertencem a P .

$$P \cap \bar{P} = \emptyset$$

$$P \cup \bar{P} = \mathbb{R}^2$$



Exercícios:

36. Sem utilizar o símbolo $\sim$, escreva as condições equivalentes a:

36.1. $\sim(x \geq 3)$ 36.2. $\sim(y < 1)$

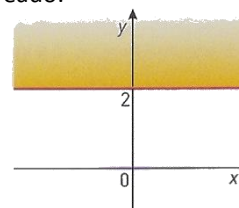
36.3. $\sim(x \leq 3 \wedge x \geq 2)$

36.4. $\sim(x > 7 \vee x \leq 5)$

36.5. $\sim(x \geq 2 \wedge y \leq 5)$

36.6. $\sim(x \geq -1 \wedge y \leq 3)$

37. Considere a região representada a sombreado:



Das seguintes condições, indique a que a define:

(A) $|y| \geq 2$ (B) $|y| > 2$

(C) $\sim(y < 2)$ (D) $\sim(y \leq 2)$

38. O conjunto de pontos definido pela condição

$$\sim(y > x \vee y < 0) \wedge x \leq 2 \text{ é:}$$

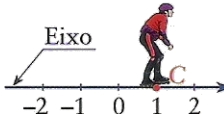
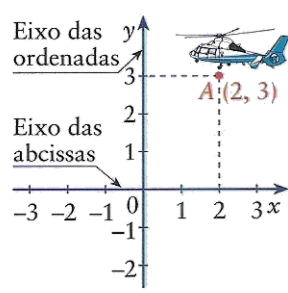
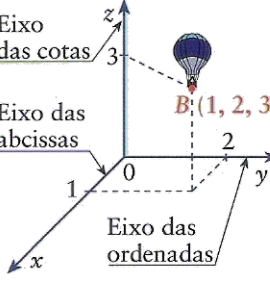
(A) um retângulo.

(B) um quadrado.

(C) um triângulo.

(D) um paralelogramo não retângulo.

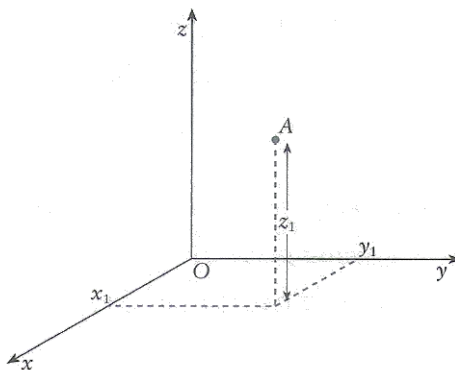
REFERENCIAIS CARTESIANOS NO ESPAÇO. COORDENADAS DE PONTOS

		
Num eixo um ponto fica definido conhecida a sua abscissa. C $\curvearrowright$ 1	No plano um ponto fica definido conhecidas as suas coordenadas: abscissa e ordenada. A $\curvearrowright$ (2, 3)	No espaço um ponto fica definido conhecidas as suas coordenadas: abscissa, ordenada e cota. B $\curvearrowright$ (1, 2, 3)

No espaço, um ponto é representado por três coordenadas.

A $\curvearrowright$ (x_1, y_1, z_1)
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 abscissa ordenada cota

Ox – eixo das abcissas
 Oy – eixo das ordenadas
 Oz – eixo das cotas

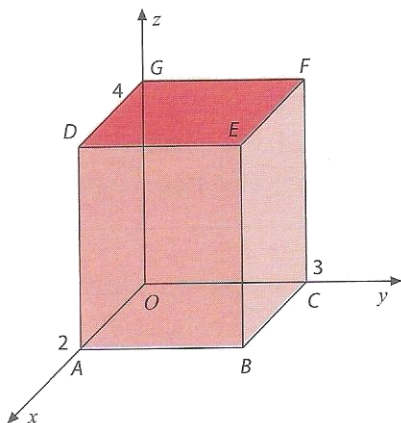


Os três eixos são perpendiculares dois a dois e considera-se a mesma unidade de comprimento para os três.

Existe uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}^3$ (conjunto dos ternos ordenados de elementos em $\mathbb{R}$) e o conjunto dos pontos do espaço.

Exemplo:

Considere o paralelepípedo representado na figura e indique as coordenadas dos vértices.

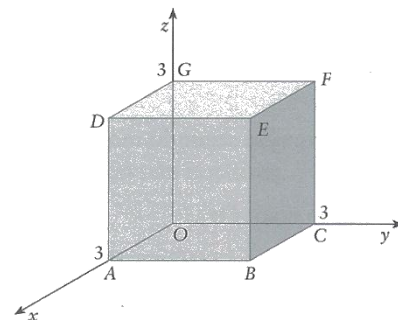


Resolução:

A (2, 0, 0)
 B (2, 3, 0)
 C (0, 3, 0)
 D (2, 0, 4)
 E (2, 3, 4)
 F (0, 3, 4)
 G (0, 0, 4)

Exercícios:

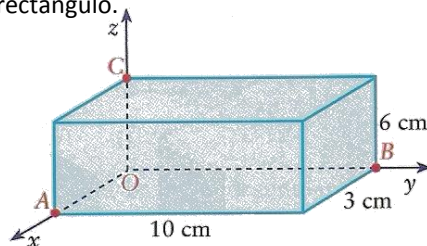
39. Indique as coordenadas dos vértices do cubo representado.



40. Indique o eixo a que pertence o ponto:

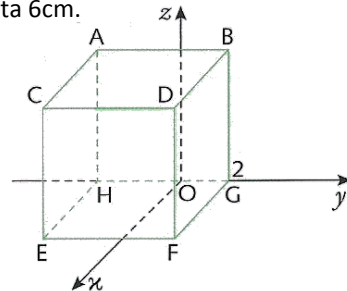
40.1. M (0, 3, 0) 40.2. N (0, 0, 5)
 40.3. R (-3, 0, 0) 40.4. P (0, -10, 0)

41. A figura representa uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo.



Indique as coordenadas dos pontos A, B e C.

42. A figura representada é um cubo de aresta 6cm.



Indique as coordenadas dos vértices.

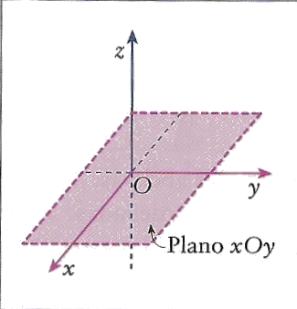
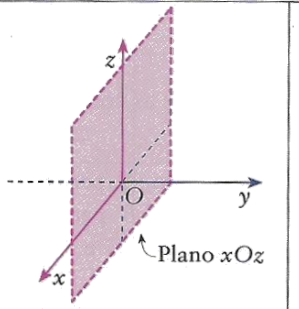
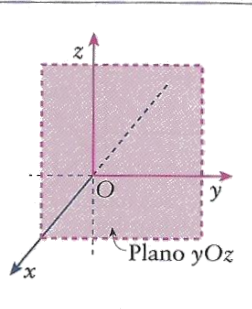
43. Uma aresta de paralelepípedo tem por extremos os pontos (0, 0, 0) e (3, 0, 0). Outra das arestas tem extremos em (0, 0, 0) e (0, 5, 0) e uma terceira aresta tem (0, 0, 0) e (0, 0, 2) os extremos.

Faça um esboço do sólido e indique as coordenadas dos outros 4 vértices do paralelepípedo.

PLANOS COORDENADOS. PLANOS PERPENDICULARES AOS EIXOS COORDENADOS

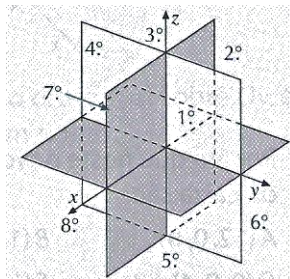
Planos Coordenados

Num referencial $Oxyz$ do espaço, os eixos Ox , Oy , e Oz definem dois a dois três planos.

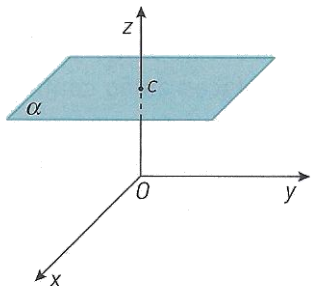
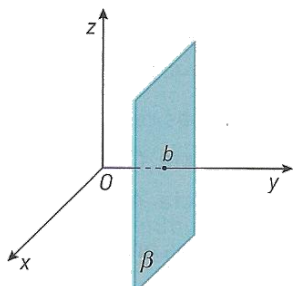
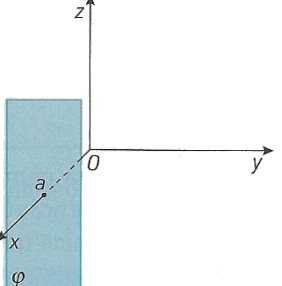
		
O plano xOy é formado por todos os pontos de cota nula. É definido pela condição: $z = 0$	O plano xOz é formado por todos os pontos de ordenada nula. É definido pela condição: $y = 0$	O plano yOz é formado por todos os pontos de abscissa nula. É definido pela condição: $x = 0$

Assim, xOy , yOz e xOz são os planos coordenados.

Os planos coordenados dividem os espaços em oito partes chamadas octantes.



Planos Perpendiculares aos Eixos Coordenados

Se um plano α é perpendicular ao eixo Oz , então todos os pontos de α têm a mesma cota.	Se um plano β é perpendicular ao eixo Oy , então todos os pontos de β têm a mesma ordenada.	Se um plano φ é perpendicular ao eixo Ox , então todos os pontos de φ têm a mesma abscissa.
		
O plano α é definido pela condição: $z = c$, $c \in \mathbb{R}$	O plano β é definido pela condição: $y = b$, $b \in \mathbb{R}$	O plano φ é definido pela condição: $x = a$, $a \in \mathbb{R}$

Exercícios:

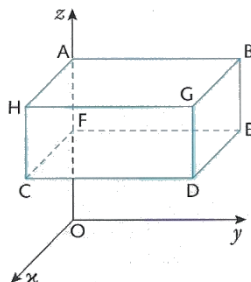
46. Sobre o sólido representado sabe-se que:

$\overline{AB} = 7$; $\overline{DE} = 4$; $\overline{BE} = 3$ e $A(0, 0, 7)$.

46.1. Indique as coordenadas dos outros vértices do prisma.

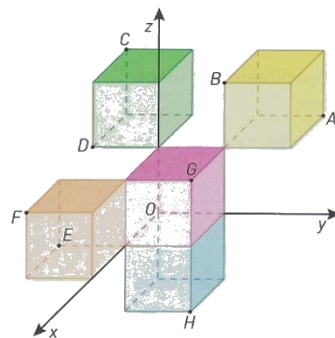
46.2. Escreva uma condição que defina o plano:

a) AHC b) CDE c) GBE d) HGD



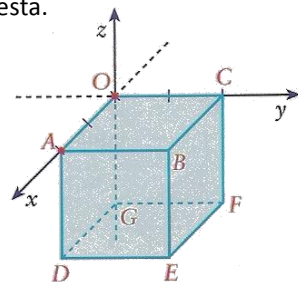
Exercícios:

44. Na figura estão representados 5 cubos de 1cm de aresta.



Indique as coordenadas dos pontos assinalados e o octante a que pertencem.

45. Considere o cubo [ABCDEFGO] com 2cm de aresta.



Indique as coordenadas dos vértices e se pertencem a algum plano coordenado.

▪ OUTROS LUGARES GEOMÉTRICOS NO ESPAÇO

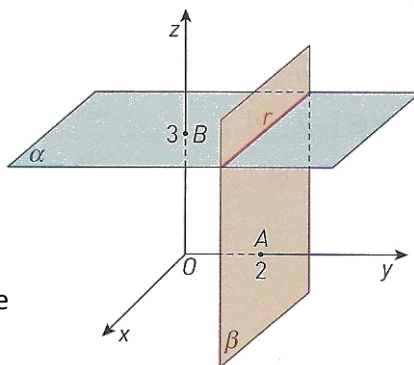
Recta

Na figura, em referencial o.m. $Oxyz$, estão representados dois planos α e β .

O plano α é definido pela condição $z = 3$.

O plano β é definido pela condição $y = 2$.

A recta r é a intersecção dos planos α e β e é definida pela condição $y=2 \wedge z=3$.



Segmento de Recta

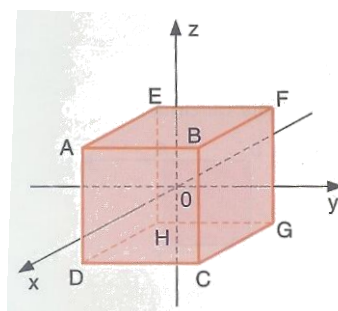
Considere o cubo de 4cm de aresta centrado na origem do referencial.

A recta FG pode ser definida pela condição:

$$x = -2 \wedge y = 2$$

A aresta [FG] está contida na recta quando a cota está compreendida entre -2 e 2.

Podemos então definir a aresta [FG] pela condição: $(x = -2 \wedge y = 2) \wedge -2 \leq z \leq 2$



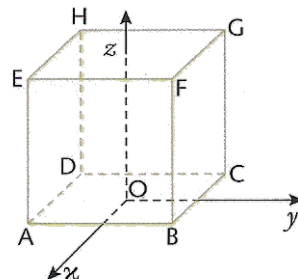
Os pontos do cubo têm abcissa, ordenada e cota compreendidas entre -2 e 2.

Podemos, por isso definir o cubo, neste referencial, pela condição:

$$-2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge -2 \leq z \leq 2$$

Exercício:

48. Na figura está representado o cubo [ABCDEFGH] com 8cm de aresta e em que O é o centro da face inferior.



48.1. Indique as coordenadas dos vértices.

48.2. Escreva uma condição que define o plano:

a) ADC b) HDC c) EHD

48.3. Indique uma condição em $\mathbb{R}^3$ que define:

a) a recta FG. b) a aresta [AB].
c) a aresta [HD]. d) a face [HEFG].
e) a face [FGCB]. f) a recta AD.
g) a face [HGCD]. h) o cubo.

▪ SIMETRIAS NO ESPAÇO

As simetrias no espaço podem ser estudadas de modo análogo ao estudo feito para as simetrias no quadro da geometria plana.

Simetrias relativamente aos eixos coordenados, planos coordenados e origem do referencial.

Considere a figura seguinte. O paralelepípedo é simétrico relativamente aos planos coordenados.

O vértice P tem coordenadas (1, 2, 3).

Podemos dizer que:

A(1, -2, -3) é simétrico de P em relação ao eixo Ox .

C(-1, 2, -3) é simétrico de P em relação ao eixo Oy .

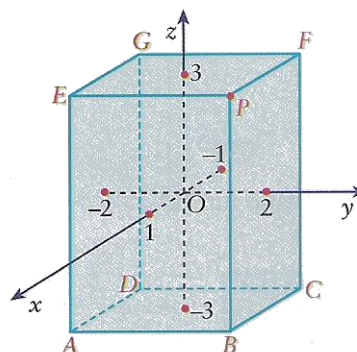
G(-1, -2, 3) é simétrico de P em relação ao eixo Oz .

D(-1, -2, -3) é simétrico de P em relação à origem O .

B(1, 2, -3) é simétrico de P em relação ao plano xOy .

E(1, -2, 3) é simétrico de P em relação ao plano xOz .

F(-1, 2, 3) é simétrico de P em relação ao plano yOz .



Exercícios:

49. Considere o cubo no exercício 45.

Indique as coordenadas do ponto simétrico de B relativamente...

49.1. ...ao plano yOz .

49.2. ...à origem O .

49.3. ...ao eixo Ox .

49.4. ...ao plano xOy .

50. Sendo P um ponto de coordenadas (3, -1, 5) identifique o simétrico de P relativamente...

50.1. ...ao plano yOz .

50.2. ...à origem O .

50.3. ...ao eixo Ox .

50.4. ...ao eixo Oy .

50.5. ...ao eixo Oz .

50.6. ...ao plano xOz .

Exercícios:

51. Na figura está representado num referencial o.m. $Oxyz$ um octaedro regular [ABCDEF].

Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao plano xOz .
- O ponto E tem coordenadas $(2, 2, 0)$.
- O ponto F tem coordenadas $(2, 2, 4)$.

51.1. A equação do plano ABC é:

- (A) $x=2$ (B) $y=2$
(C) $z=2$ (D) $z=1$

51.2. As coordenadas do ponto C são:

- (A) $(2, 4, 2)$ (B) $(4, 2, 2)$ (C) $(2, 2, 4)$ (D) $(4, 4, 2)$

52. Num referencial o.m. $Oxyz$ no espaço, a recta que passa pelos pontos $A(2, 0, 1)$ e $B(2, 3, 1)$ é definida pela condição:

- (A) $z=1$ (B) $y=0 \vee y=3$ (C) $x=2$ (D) $x=2 \wedge z=1$

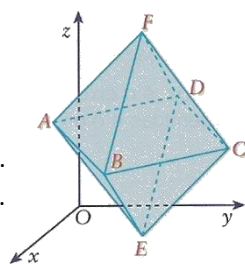
53. Num referencial o.m. $Oxyz$ no espaço o conjunto de pontos definidos pela condição

$$x = 11 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

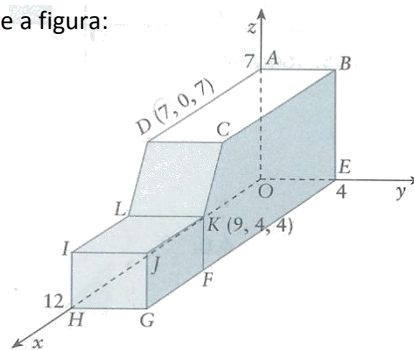
- é: (A) um rectângulo. (B) um paralelepípedo.
(C) um segmento de recta. (D) um ponto.

54. Num referencial o.m. $Oxyz$ no espaço, o simétrico do ponto $P(3, 4, 5)$ relativamente ao eixo Oz é:

- (A) $(3, 4, 5)$ (B) $(-3, -4, -5)$ (C) $(-3, -4, 5)$ (D) $(3, -4, -5)$



55. Observe a figura:



55.1. Indique as coordenadas dos vértices do sólido.

55.2. Escreva uma equação dos planos que contêm as faces:

- a) [IJKL] b) [CBEF] c) [IJGH]

55.3. Diga, de acordo com os dados da figura, qual é a recta de intersecção dos planos α e β de equações:

- a) $\alpha: z=7$ e $\beta: y=0$ b) $\alpha: z=0$ e $\beta: x=0$

56. Faça um esboço e descreva o conjunto de pontos do espaço que satisfaz cada uma das condições:

- 56.1.** $z = 2$
56.2. $x = 2 \wedge y < -3$
56.3. $x = -3 \wedge z = 0$
56.4. $y = 0 \wedge x = 0$
56.5. $x = 4 \wedge y = 0$
56.6. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0$
56.7. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z = 0$
56.8. $0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1$

▪ DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO E NO ESPAÇO

No plano

Exemplo:

Calcular a distância do ponto A ao ponto C é o mesmo que calcular $\overline{AC}$.

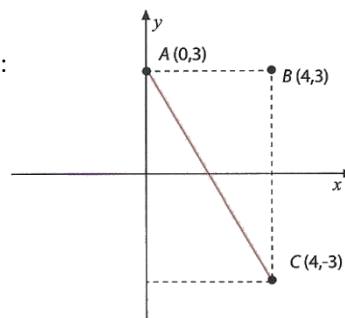
Usando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC}^2 = (4-0)^2 + (3+3)^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-3)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-6)^2}$$



De uma forma geral:

A distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

No espaço

Exemplo:

Calcular a distância do ponto A ao ponto F é o mesmo que calcular $\overline{AF}$.

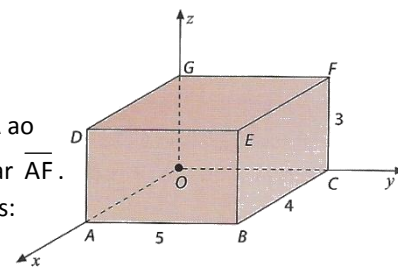
Usando o teorema de Pitágoras:

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\overline{AF}^2 = (4-0)^2 + (5-0)^2 + (3-0)^2$$

$$\overline{AF} = \sqrt{(4-0)^2 + (5-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$\overline{AF} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2}$$



De uma forma geral:

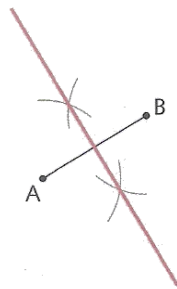
A distância entre dois pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

▪ MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO DE RECTA / PLANO MEDIADOR

Mediatriz

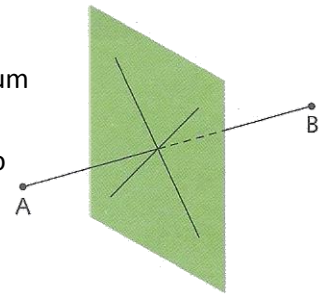
Chama-se mediatriz de um segmento de recta [AB] ao conjunto dos pontos equidistantes de A e B.



$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

Plano Mediador

Chama-se plano mediador de um segmento de recta [AB] ao conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A e B.



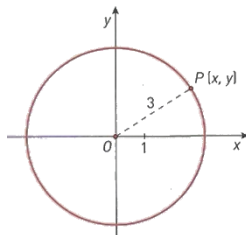
$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2$$

▪ CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO / SUPERFÍCIE ESFÉRICA E ESFERA

Circunferência

Exemplo:

A circunferência é o conjunto de pontos que estão a uma distância de 3 unidades da origem.

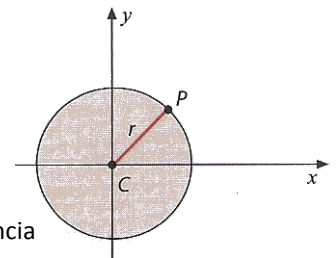


Uma circunferência de centro (a, b) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Círculo

O círculo é o conjunto de pontos que estão a uma distância máxima de r unidades da origem.



Um círculo de centro (a, b) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

Analogamente à circunferência e ao círculo, pode-se definir:

M.A.(4)

Superfície Esférica

Uma superfície esférica de centro (a, b, c) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Esfera

Uma esfera de centro (a, b, c) e raio r define-se por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2$$

Exercícios:

57. Determine o comprimento do segmento [AB] para:

57.1. A(0, 2) B(3, 2) 57.2. A(-1, 4) B(3, -1)

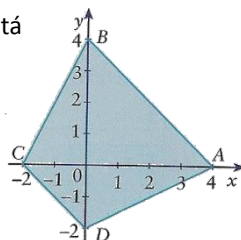
57.3. A(0, -2, 0) B(2, -3, 5)

58. No referencial o. m. Oxy está representado um quadrilátero.

Calcule o valor exacto do perímetro:

58.1. do triângulo [ABD].

58.2. do quadrilátero [ABCD].



59. Classifique, quanto ao comprimento dos lados o triângulo [MAR], sendo:

M(-2, 1) A(5, 1) R(5, 4)

60. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo. O vértice C é também a origem do referencial.

Sabe-se que: $\overline{AB} = 1,5\text{cm}$; $\overline{BC} = 2\text{cm}$; $\overline{CG} = 5\text{cm}$

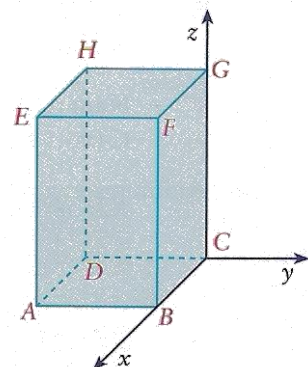
60.1. Indique as coordenadas dos vértices do sólido.

60.2. Usando as coordenadas dos vértices, calcule, apresentando o valor exacto:

a) $\overline{GA}$ b) $\overline{EC}$ c) $\overline{ED}$ d) $\overline{FA}$

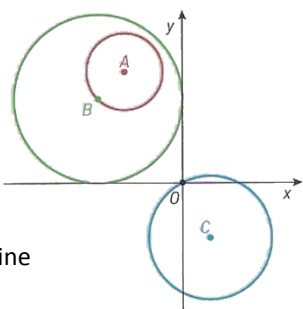
60.3. Escreva a equação para o plano mediador das arestas:

a) [DA] b) [AB] c) [HG]
d) [FA] e) [EG] f) [BE]



Exercícios:

61. No referencial xOy da figura estão representadas três circunferências centradas em $A(-2, 4)$, $B(-3, 3)$ e $C(1, -2)$.



61.1. Determine o raio de cada uma das circunferências.

61.2. Escreva a equação que define cada uma das circunferências.

62. Considere a circunferência definida pela equação:

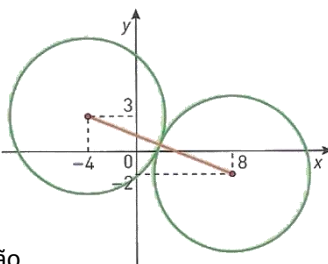
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9 \text{ e os pontos } A(-2, 4); B(-4, -1) \text{ e } C(-5, 0).$$

62.1. Determine a posição de cada um dos pontos relativamente à circunferência.

62.2. Indique uma equação que defina a circunferência de centro C e que passa por A .

62.3. Represente num referencial a circunferência dada.

63. No referencial da figura encontram-se representadas duas circunferências de igual raio, tangentes e centradas nos pontos: $A(-4, 3)$ $B(8, -2)$. Represente cada uma das circunferências por uma equação.



64. Represente, num referencial cartesiano, as seguintes condições:

64.1. $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$ **64.2.** $(x+1)^2 + (y-4)^2 < 9$

64.3. $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq -x$

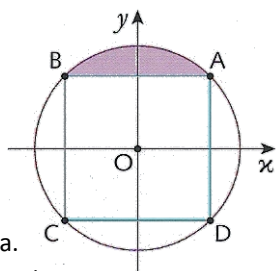
65. No referencial está representado um quadrado com 4cm de lado cujo centro é a origem do referencial.

65.1. Determine a equação da mediatriz de $[OB]$.

65.2. Escreva uma equação da circunferência representada na figura.

65.3. Indique uma condição que defina a região do plano sombreada.

65.4. Calcule a área da zona sombreada.



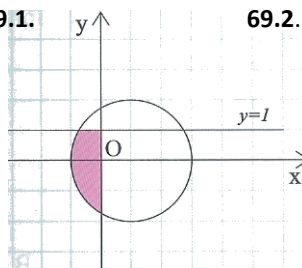
66. Identifique a secção que se obtém intersectando a esfera definida por: $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9$ com o plano $y = 3$.

67. Escreva uma condição que defina a esfera de centro C de coordenadas $(0, 2, 0)$ tangente ao plano $z = 4$.

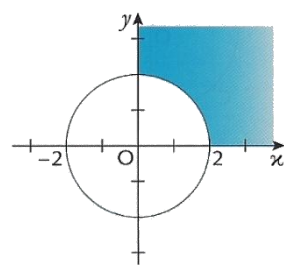
68. Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da superfície esférica de centro $C(-3, 2, 0)$ e raio 5 com o eixo Oy .

69. Represente, utilizando uma condição em $\mathbb{R}^2$, a região a sombreado de cada alínea.

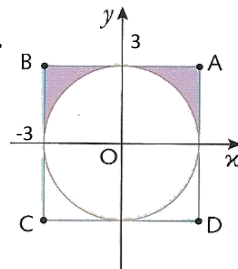
69.1.



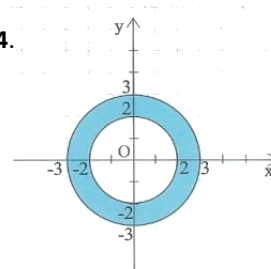
69.2.



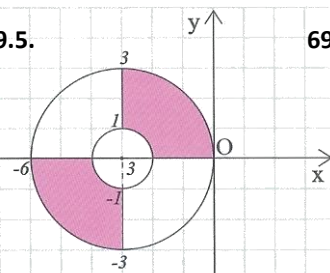
69.3.



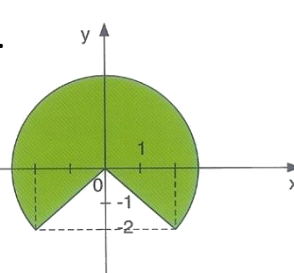
69.4.



69.5.



69.6.



70. Na figura estão representadas duas circunferências.

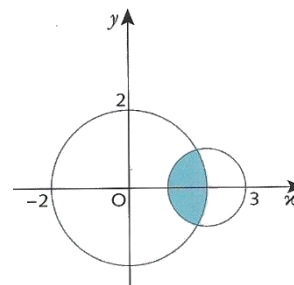
A região sombreada pode ser definida por:

(A) $x^2 + y^2 \leq 2 \wedge (x+2)^2 + y^2 \leq 1$

(B) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$

(C) $x^2 + y^2 \leq 4 \vee (x-2)^2 + y^2 \leq 1$

(D) $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 1$



71. Num referencial $Oxyz$, a condição $(x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2 \leq 16$ define uma esfera inscrita num cilindro. Sejam C o centro da esfera e h a altura do cilindro. Então:

(A) $C(-2, 0, 3)$ e $h = 4$

(B) $C(2, 0, -3)$ e $h = 4$

(C) $C(2, 0, -3)$ e $h = 8$

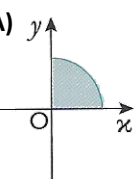
(D) $C(-2, 0, 3)$ e $h = 8$

72. O conjunto de pontos definido pela condição

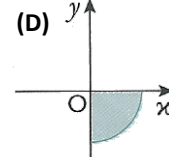
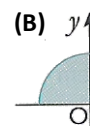
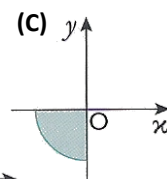
$$x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq 0$$

pode ser representado num referencial por:

(A)



(C)

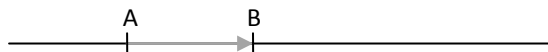


VECTORES NO PLANO E NO ESPAÇO

▪ VECTOR LIVRE

Segmento Orientado

Se ao segmento de recta $[AB]$ atribuirmos um sentido, passamos a ter um segmento de recta orientado.



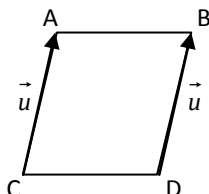
Na figura acima está representado o segmento orientado $[A, B]$. Assim, $[A, B]$ é o segmento orientado de origem A e extremidade B. $[B, A]$ é o segmento orientado de origem B e extremidade A.

Um segmento orientado é caracterizado por uma direcção, um sentido, um comprimento e uma origem.

Vector

Considere o quadrilátero $[ABCD]$.

$[C, A]$ e $[D, B]$ são dois segmentos orientados distintos, mas têm algo em comum: o comprimento, a direcção e o sentido.



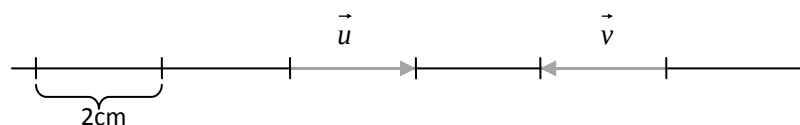
Diz-se que estes dois segmentos são equipolentes, ou seja, representam o mesmo vector, e escreve-se:

$\vec{CA} = \vec{DB}$ (ler: o vector CA é igual ao vector DB) ou $\vec{u} = \vec{CA} = \vec{DB}$.

Na prática identifica-se muitas vezes um vector com segmentos orientados diferentes que o representam.

Um vector (ou vector livre) é um ente matemático caracterizado por:
 - uma direcção - um sentido - um comprimento

Vectorios Simétricos e Norma de um Vector



Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direcção e o mesmo comprimento e sentidos opostos.

Os dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dizem-se simétricos e escreve-se:

$$\vec{u} = -\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = -\vec{u}$$

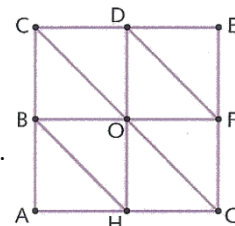
A medida do comprimento do vector $\vec{u}$ é 2, assim como do vector $\vec{v}$ e representa-se por:

$$\|\vec{u}\| = 2 \text{ e } \|\vec{v}\| = 2$$

Diz-se que são vectores de norma 2.

Exercícios:

73. Na figura seguinte estão representados quatro quadrados geometricamente iguais.



73.1. Indique dois segmentos orientados que representam o mesmo vector.

73.2. Indique dois vectores com:

- a) a mesma direcção e sentidos contrários.
- b) direcções diferentes e o mesmo comprimento.
- c) a mesma direcção e diferentes comprimentos.
- d) a mesma direcção e comprimento e sentidos contrários.

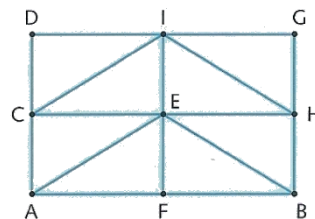
73.3. Sabendo que o lado dos quadrados pequenos mede 5cm, indique:

- a) $\|\vec{CA}\|$ b) $\|\vec{DE}\|$ c) $\|\vec{BH}\|$ d) $\|\vec{CG}\|$

74. Na figura estão representados oito triângulos geometricamente iguais.

74.1. Determine:

- a) $\vec{CD} + \vec{FB}$
- b) $\vec{A} + \vec{AC}$
- c) $\vec{DC} + \vec{BH}$
- d) $\vec{AE} + \vec{HG}$
- e) $\vec{HG} + \vec{GD}$
- f) $\vec{AE} - \vec{HG}$



74.2. Indique dois pares de vectores simétricos.

74.3. Sabendo que $\|\vec{AB}\| = 10$ e $\|\vec{BG}\| = 8$ indique:

- a) $\|\vec{CE}\|$ b) $\|\vec{CD}\|$ c) $\|\vec{AE}\|$

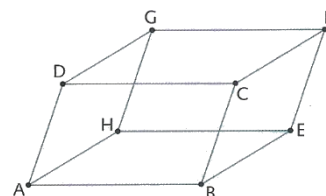
75. Considere o paralelepípedo.

75.1. Indique um vector equipolente a:

- a) $\vec{GF}$
- b) $\vec{GH}$

75.2. Determine:

- a) $\vec{HA} + \vec{AD}$
- b) $\vec{AB} - \vec{HE}$
- c) $\vec{GF} + \vec{BE}$
- d) $\vec{BA} + \vec{AF}$



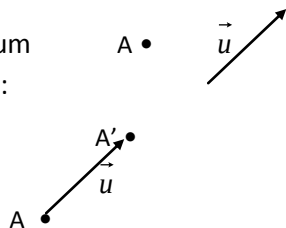
75.3. Indique um vector simétrico mas não coincidente a:

- a) $\vec{HB}$ b) $\vec{DG}$ c) $\vec{HC}$

SOMA DE UM PONTO COM UM VECTOR

A soma de um ponto A com um vector $\vec{u}$ é um novo ponto que se obtém da seguinte forma:

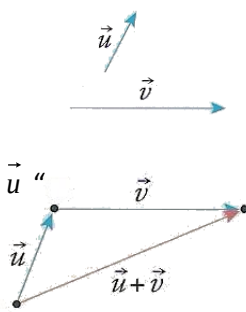
- "desloca-se o vector $\vec{u}$ até ao ponto A"
- "o resultado da soma é o ponto que está na extremidade do vector."



ADIÇÃO E SUBTRACÇÃO DE VECTORES

A soma de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representa-se por $\vec{u} + \vec{v}$ e é o vector que se obtém da seguinte forma:

- "desloca-se o vector $\vec{v}$ até à extremidade do vector $\vec{u}$ "
- "o vector soma $\vec{u} + \vec{v}$ resulta da união da origem do vector $\vec{u}$ à extremidade do vector $\vec{v}$ "



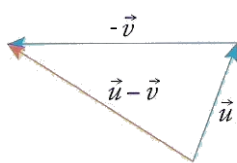
Propriedades da adição de dois vectores

Quaisquer que sejam os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estes gozam das seguintes propriedades:

- Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Existência de elemento neutro:
 $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- Existência de simétrico:
 $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

Subtracção

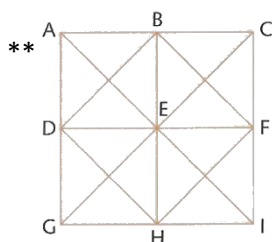
Como $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, cai-se novamente na adição de vectores.



VECTORES COLINEARES. MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UM VECTOR

Considere a seguinte figura:

De acordo com as condições da figura, temos que $\vec{AB} = \vec{BC}$, então podemos considerar que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AC} = 2\vec{AB}$



$2\vec{AB}$ é um vector com a mesma direcção e sentido e norma igual ao dobro da de $\vec{AB}$.

Por outro lado, como $\vec{CA} = -\vec{AC}$, podemos escrever também que $\vec{CA} = -2\vec{AB}$, significando que $\vec{CA}$ é um vector com a mesma direcção de $\vec{AB}$, sentido contrário de $\vec{AB}$ e norma igual ao dobro da de $\vec{AB}$.

Como têm a mesma direcção podemos dizer que $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são colineares assim como $\vec{AB}$ e $\vec{CA}$

Dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, se e só se, existe um número real $k \neq 0$, tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exercícios:

76. O sólido da figura é composto por três cubos geometricamente iguais.

Determine:

76.1. $\vec{AD} + \vec{DH}$

76.2. $\vec{A} + \vec{DC}$

76.3. $\vec{BC} + \vec{BJ}$

76.4. $\vec{EF} - \vec{DA}$

76.5. $\vec{H} + \vec{PG}$

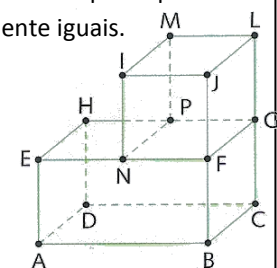
76.7. $\vec{EF} + \vec{GP}$

76.9. $\vec{EH} + \vec{CB}$

76.6. $\vec{E} - \vec{CA}$

76.8. $\vec{B} + \vec{NP}$

76.10. $\vec{AD} + \vec{EF} + \vec{GL}$



77. Considere a figura ** e determine:

77.1. $2\vec{CE} + \vec{EB}$

77.2. $2(\vec{CH} + \vec{IF})$

77.3. $-\frac{1}{2}\vec{IC} - \vec{DE}$

78. Na figura estão representados 16 quadrados iguais.

78.1. Determine:

a) $\vec{CD} - \vec{YO}$

b) $\vec{KA} + 2\vec{QR}$

c) $\vec{KG} - \vec{MC}$

d) $\vec{M} + \vec{WY}$

e) $\vec{UQ} - \vec{SM}$

78.2. Complete:

a) $\vec{AE} = __ \vec{GH}$

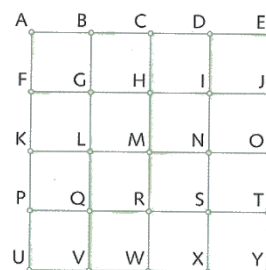
b) $\vec{PQ} = __ \vec{RT}$

c) $\vec{PS} = __ \vec{TS}$

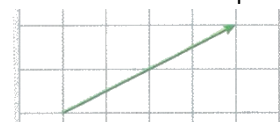
d) $\vec{DE} = __ \vec{ED}$

e) $\vec{QS} = __ \vec{SP}$

f) $\vec{AM} = __ \vec{YM}$



79. Considere o vector $\vec{u}$ representado.



Represente no seu caderno os vectores

$2\vec{u}$; $-\vec{u}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$; $-3\vec{u}$

De uma forma geral, dados um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$ o produto $k\vec{u}$ é um vector com:

- a mesma direcção de $\vec{u}$.
- o mesmo sentido de $\vec{u}$ se $k > 0$ e sentido contrário se $k < 0$.
- a norma igual à norma de $\vec{u}$ multiplicada por $|k|$, isto é,

$$\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$$

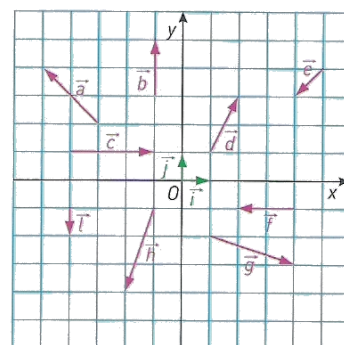
Propriedades da multiplicação de um número real por um vector

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores quaisquer e a e b dois números reais. Então:

- $0\vec{u} = \vec{0}$; $1\vec{u} = \vec{u}$; $-1\vec{u} = -\vec{u}$
- $a\vec{0} = \vec{0}$
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(b\vec{u}) = (a \times b)\vec{u}$
- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

Exercícios:

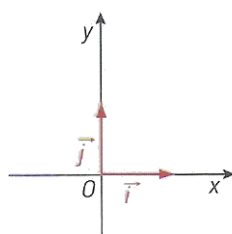
80. Com base no referencial da figura, identifique os vectores através das suas componentes e coordenadas.



COMPONENTES E COORDENADAS DE VECTORES

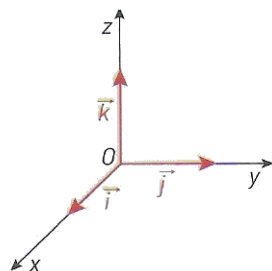
Se se fixarem na origem do referencial o. m. vectores unitários (norma 1) com direcção e sentido dos semieixos positivos, obtém-se um referencial ortonormado.

No plano:



Referencial ortonormado (o. n.)
(0, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

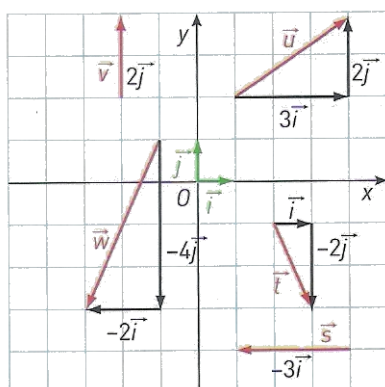
No espaço:



Referencial ortonormado (o. n.)
(0, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Qualquer vector $\vec{u}$ pode ser decomposto numa soma de vectores colineares com os vectores do referencial o. n..

Exemplo:



$$\vec{v} = 2\vec{j}$$

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{w} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\vec{t} = \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{s} = -3\vec{i}$$

componentes

$$\vec{v}(0, 2)$$

$$\vec{u}(3, 2)$$

$$\vec{w}(-2, -4)$$

$$\vec{t}(1, -2)$$

$$\vec{s}(-3, 0)$$

coordenadas

Igualdade entre vectores

- Os vectores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ de um plano são iguais se $u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2$.
- Os vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ do espaço são iguais se $u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3$.

81. Na figura está representado um prisma quadrangular regular.

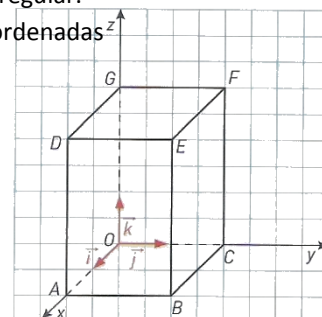
Indique as coordenadas dos vectores:

81.1. $\vec{OA}$

81.2. $\vec{CO}$

81.3. $\vec{BG}$

81.4. $\vec{BF}$



82. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam iguais.

82.1. $\vec{u}(k+1, 4-k^2)$ $\vec{v}(3, 0)$

82.2. $\vec{u}(k, 4)$ $\vec{v}(6-k, k^2-5)$

82.3. $\vec{u}\left(\frac{k+1}{2}, 0, -3\right)$ $\vec{v}(4-2k, 0, -3)$

83. No referencial o. n., encontram-se representados alguns pontos:

83.1. Indique as coordenadas de:

a) $\vec{AB}$

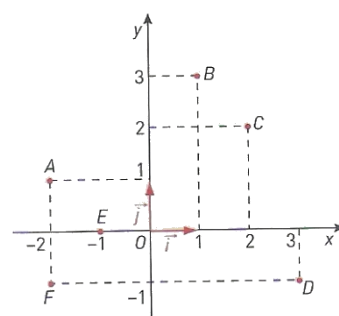
b) $\vec{BC}$

c) $\vec{DC}$

d) $\vec{DE}$

e) $\vec{DF}$

f) $\vec{FA}$



83.2. Verifique se $\vec{AB}$ e $\vec{CE}$ são iguais.

▪ VECTOR COMO DIFERENÇA DE DOIS PONTOS

Na figura está representado um referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Sejam A e B, tais que A(2, 4) e B(5, 2).

O vector $\vec{AB}$ pode ser escrito na forma:

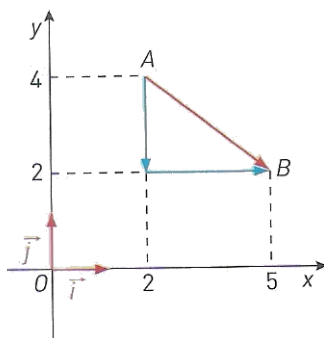
$$\vec{AB} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

As coordenadas de $\vec{AB}$ são (3, -2).

Por outro lado tem-se:

$$A + \vec{AB} = B \Leftrightarrow \vec{AB} = B - A$$

$$\vec{AB} = (5, 2) - (2, 4) \Leftrightarrow \vec{AB} = (3, -2)$$



No plano: dados dois pontos A(a_1, a_2) e B(b_1, b_2) as coordenadas de $\vec{AB}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

No espaço: dados dois pontos A(a_1, a_2, a_3) e B(b_1, b_2, b_3) as coordenadas de $\vec{AB}$ são $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

▪ SOMA DE UM PONTO COM UM VECTOR

Exemplo:

Seja P(2, 1) e $\vec{u}$ (3, 4). O resultado de P + $\vec{u}$ é o ponto

$$P' = (2, 1) + (3, 4) = (2 + 3, 1 + 4) = (5, 6)$$

No plano: sejam o ponto A(a_1, a_2) e o vector $\vec{u}$ (u_1, u_2).

$$A' = A + \vec{u} = (a_1, a_2) + (u_1, u_2) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$$

No espaço: sejam o ponto A(a_1, a_2, a_3) e o vector $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3)

$$A' = A + \vec{u} = (a_1, a_2, a_3) + (u_1, u_2, u_3) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3)$$

▪ SOMA E SUBTRACÇÃO DE DOIS VECTORES

Exemplos:

1. Seja $\vec{u}$ (-1, 4) e $\vec{v}$ (0, 5). O resultado de $\vec{u} + \vec{v}$ é o vector:

$$\vec{w} = (-1, 4) + (0, 5) = (-1 + 0, 4 + 5) = (-1, 9)$$

2. Seja $\vec{u}$ (3, 5) e $\vec{v}$ (1, 6). O resultado de $\vec{u} - \vec{v}$ é o vector:

$$\vec{w} = (3, 5) - (1, 6) = (3 - 1, 5 - 6) = (2, -1)$$

No plano: sejam os vectores $\vec{u}$ (u_1, u_2) e $\vec{v}$ (v_1, v_2).

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

No espaço: sejam os vectores $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3) e $\vec{v}$ (v_1, v_2, v_3).

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

88. Considere num referencial o. n. do plano os pontos A(2, 3, 0), B(-1, 4, 5) e C(0, 0, -2) e o vector $\vec{u}$ (2, 5, -4). Determine as coordenadas de:

$$88.1. \vec{AB} + 2\vec{u} \quad 88.2. -3\vec{CB} - \vec{u} \quad 88.3. \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{u} + 4\vec{AC}$$

Exercícios:

84. Considere a figura do exercício 83.

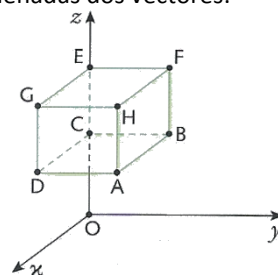
Sendo P $\left(3k - 1, \frac{m+3}{2}\right)$ determine os valores reais de k e m de forma a que os vectores $\vec{DB}$ e $\vec{FP}$ sejam iguais.

85. Sobre o paralelepípedo representado sabe-se que $\vec{HA} = 2$, $\vec{AB} = 4$, $\vec{GH} = 3$ e C(0, 0, 3). Determine as coordenadas dos vectores:

85.1. $\vec{GH}$

85.2. $\vec{FB}$

85.3. $\vec{AF}$



86. Considere num referencial o. n. do plano os pontos A(5, -1) e B(2, 7) e os vectores $\vec{u}$ (-2, 3) e $\vec{v}$ (0, -4). Determine as coordenadas de:

86.1. $\vec{u} + \vec{v}$

86.2. $\vec{BA} + \vec{u}$

87. Considere o paralelepípedo representado

Sendo E(2, 4, 3) e $\vec{u} = (-4, 3, -1)$ determine:

87.1. as coordenadas dos vectores:

a) $\vec{OE}$

b) $\vec{CG}$

c) $\vec{CD}$

d) $\vec{EC}$

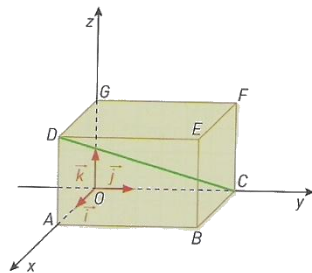
e) $\vec{AB}$

f) $\vec{OF}$

87.2. As coordenadas do ponto P tal que:

a) $\vec{EP} = \vec{u}$

b) $\vec{AP} = \vec{CG}$



▪ PRODUTO DE UM NÚMERO REAL POR UM VECTOR

Exemplo:

Seja $\vec{u}$ (3, 4). O resultado de $2 \times \vec{u}$ é o vector:

$$\vec{v} = 2\vec{u} = 2 \times (3, 4) = (2 \times 3, 2 \times 4) = (6, 8)$$

No plano: seja k um número real e $\vec{u}$ (u_1, u_2) um vector.

$$\vec{v} = k\vec{u} = k \times (u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$$

No espaço: seja k um número real e $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3)

$$\vec{v} = k\vec{u} = k \times (u_1, u_2, u_3) = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

Propriedade: $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ são colineares se e só se $a \times d = b \times c$

Ponto Médio

No plano, sendo $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ as coordenadas do ponto médio M do $[AB]$, são dadas por:

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

No espaço, sendo $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ as Coordenadas do ponto médio M do $[AB]$, são dadas por:

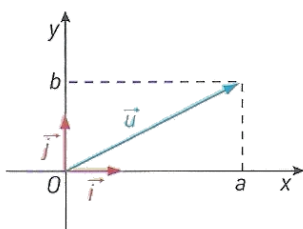
$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

▪ NORMA DE UM VECTOR

A norma de um vector $\vec{u}$ é a medida do seu comprimento e representa-se por $\|\vec{u}\|$.

Para obter a norma de um vector a partir das suas coordenadas num referencial o. n., podemos recorrer ao Teorema de Pitágoras.

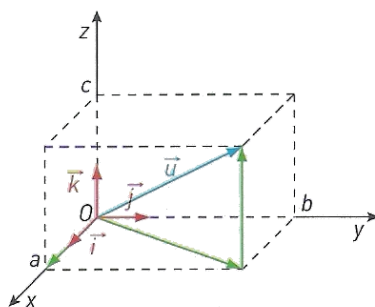
No plano



$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No espaço



$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

No plano: seja o vector $\vec{u}$ (u_1, u_2):

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

No espaço: seja o vector $\vec{u}$ (u_1, u_2, u_3):

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Exercícios:

89. Verifique se os seguintes pares de vectores são ou não colineares.

89.1. $\vec{u} = (-3, 6)$ e $\vec{v} = (1, -2)$

89.2. $\vec{u} = (-1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 8)$

89.3. $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, -2\right)$ e $\vec{v} = (-1, 6)$

89.4. $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$ e $\vec{v} = (\sqrt{2}, -1)$

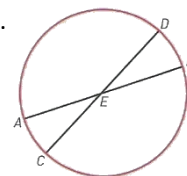
90. Determine as coordenadas do ponto médio de $[AB]$ em que:

90.1. $A(2, -1, 4)$ e $B(3, 2; -5; 6)$

90.2. $A\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ e $B(3, -3)$

91. Sabe-se que $[AB]$ e $[CD]$ são diâmetros de uma circunferência.

Sabendo que $A(-1, 3)$, $B(5, 5)$ e $C(1, 1)$,



91.1. mostre que o centro E tem coordenadas $(2, 4)$.

91.2. determine as coordenadas de D .

92. Considere no referencial o. n. os

vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{v} = (\sqrt{3}, a)$ e o ponto $A(-2, 1)$. **92.1.** Determine:

a) $\|\vec{u}\|$.

b) o vector paralelo a $\vec{u}$ e de norma 10.

c) o vector colinear com $\vec{u}$ e de norma 2.

d) $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\|\vec{v}\| = 2$.

92.2. Mostre que o ponto P que verifica a condição $\vec{AP} = \vec{u} + 2\vec{i}$ pertence à bissectriz dos quadrantes pares.

93. Considere a figura do exercício 83.

93.1. Determine:

a) $\|\vec{AB}\|$

b) $\|\vec{DE}\|$

c) $\|\vec{BC} - \vec{AC}\|$

d) $\|\vec{AD} - 2\vec{OC}\|$

93.2. Determine as coordenadas de P ,

sabendo que $\|\vec{BP}\| = 5$ e que P pertence ao eixo das abcissas.

RECTAS NO PLANO E NO ESPAÇO

▪ EQUAÇÃO VECTORIAL DA RECTA NO PLANO E NO ESPAÇO

Agora que sabemos um pouco mais sobre vectores e cálculo vectorial, podemos pensar na forma de representar analiticamente rectas de um plano ou do espaço.

Consideremos um ponto A de uma recta r e um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ dessa recta. Um ponto da forma $A + k\vec{u}$, como sabemos, está na recta r .



Dizemos que o vector $\vec{u}$ é um vector director da recta.

No plano: Uma **equação vectorial** da recta r que passa no ponto $A(a_1, a_2)$ e que tem a direcção do vector $\vec{u} (u_1, u_2)$ é:

$$P = A + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$$

ou $(x, y) = (a_1, a_2) + k(u_1, u_2), k \in \mathbb{R}$

No espaço: : Uma **equação vectorial** da recta r que passa no ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e que tem a direcção do vector

$\vec{u} (u_1, u_2, u_3)$ é: $P = A + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$

ou $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(u_1, u_2, u_3), k \in \mathbb{R}$

Exercícios:

94. Escreva uma equação vectorial da recta que passa por $A(-3, 7)$ e tem a direcção de $\vec{u} (-1, -1)$.

95. Considere num determinado referencial os pontos $A(2, -1, 0)$, $B(0, 1, 1)$ e $C(1, 2, 1)$.

95.1. Escreva uma equação vectorial da recta AB.

95.2. Averigúe se o ponto C pertence à recta AB.

96. Seja r a recta definida por

$$(x, y) = (-1, 4) + k(3, 1), k \in \mathbb{R}$$

96.1. Indique :

a) dois pontos da recta r .

b) dois vectores directores da recta r .

96.2. Determine o ponto da recta r que tem abcissa 5.

96.3. Averigúe se o ponto de coordenadas $(-4, 3)$ pertence à recta r .

96.4. Escreva uma equação vectorial da recta paralela a r e que passa pelo ponto $(0, 3)$.

97. Dados os pontos F e G de coordenadas $(-3, 4)$ e $(2, 5)$ respectivamente, determine uma equação vectorial:

97.1. da recta FG.

97.2. da semi-recta $\vec{FG}$.

97.3. do segmento de recta $[FG]$.

Exemplo:

Uma equação vectorial da recta que passa pelo ponto $A(-3, 1)$ e com vector director $\vec{u} (1, 1)$ é:

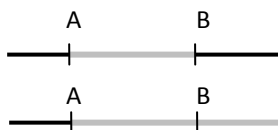
$$(x, y) = (-3, 1) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Nota:

Segmentos de recta e semi-rectas também podem ser definidos por equações vectoriais.

$[AB] : P = A + k\vec{AB}, k \in [0, 1]$

$\vec{AB} : P = A + k\vec{AB}, k \geq 0$



▪ EQUAÇÃO REDUZIDA DA RECTA NO PLANO

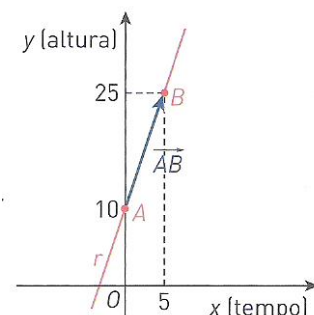
Consideremos a recta r representada com $A(0, 10)$ e $B(5, 25)$:

$$P = A + k\vec{AB}, k \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 10) + k(5, 15), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta.

Usando esta equação é possível obter outro tipo de equação:

$$(x, y) = (0, 10) + k(5, 15), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = (0 + 5k, 10 + 15k), k \in \mathbb{R}$$



Daqui resulta

$$\begin{cases} x = 5k \\ y = 10 + 15k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x}{5} \\ k = \frac{y-10}{15} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Pode-se igualar as duas expressões e resolvendo em ordem a y tem-se:

$$\frac{x}{5} = \frac{y-10}{15} \Leftrightarrow 3x = y-10 \Leftrightarrow \underbrace{y = 3x+10}_{\text{equação reduzida da recta } r}$$

Na equação $y = 3x + 10$, o coeficiente de x representa o valor do declive da recta (m) e pode ser calculado usando as coordenadas do vector director ou de dois pontos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 25) - (0, 10) = (5-0, 25-10) = (5, 15)$$

$$m = \frac{25-10}{5-0} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{ou} \quad m = \frac{15}{5} = \frac{u_2}{u_1} = 3$$

Por outro lado, 10 é a ordenada na origem (b), ou seja, o ponto de intersecção da recta com o eixo das ordenadas.

Chama-se **equação reduzida** de uma recta não vertical, à equação do tipo:

$$y = mx + b$$

onde m é o declive da recta e b é a ordenada na origem.

Exercícios:

98. Escreva a equação reduzida das seguintes rectas :

98.1. recta r : $(x, y) = (-2, 3) + k(2, 4)$, $k \in \mathbb{R}$

98.2. recta s : $(x, y) = (2, 1) + k(2, 4)$, $k \in \mathbb{R}$

99. Em relação a um referencial o. n. xOy considere os pontos $A(2, 2)$, $B(-3, 0)$ e $C(1, 4)$.

99.1. Determine a equação reduzida da recta:

a) AB b) AC c) BC

99.2. A recta r tem declive -3 e passa no ponto A. Determine a equação da recta r .

99.3. A recta s tem ordenada na origem 4 e passa no ponto B. Determine a equação reduzida da recta s .

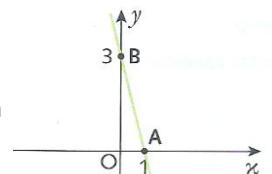
100. Determine a equação reduzida da recta...

a) ... de declive 2 e que passa no ponto $(0, -3)$.

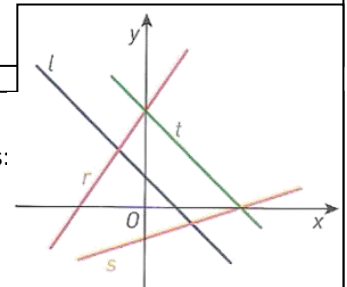
b) ... com direcção de $\vec{u}(4, 1)$ e que passa pelo ponto $(2, 2)$.

c) ... PQ em que $P(2, 4)$ e $Q(1, 2)$.

101. Determine a equação reduzida da recta AB representada na figura.



102. Represente num referencial a recta de equação $y = -x + 3$.



103. Investigue qual o declive das:

103.1. rectas horizontais.

103.2. rectas verticais.

103.3. bissectrizes dos quadrantes.

104. Considere as rectas representadas.

Faça corresponder a cada recta uma das seguintes opções:

I. $y = -x + 1$ II. $y = -x + 3$

III. $y = \frac{1}{3}x - 1$ IV. $y = \frac{3}{2}x + 3$

▪ RELAÇÃO DE DECLIVES ENTRE RECTAS PARALELAS E RECTAS CONCORRENTES

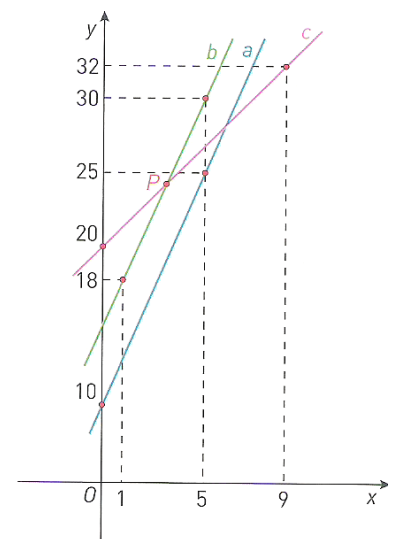
Considere as rectas a , b e c representadas no seguinte referencial:

As rectas a e b são paralelas, logo os seus vectores directores são colineares vejamos o que acontece aos seus declives:

$$m_a = \frac{25-10}{5-0} = \frac{15}{5} = 3 \quad m_b = \frac{30-18}{5-1} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{verificamos que: } m_a = m_b$$

As rectas a e b são paralelas porque têm o mesmo declive.

Não têm nenhum ponto em comum.



As rectas a e c são concorrentes, intersectando-se no ponto P.

$$m_a = 3, \quad m_c = \frac{32-20}{9-0} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \text{verificamos que: } m_a \neq m_c$$

As rectas a e c são concorrentes porque têm declives diferentes.

Têm um ponto em comum.

Como determinar as coordenadas do ponto de intersecção das rectas a e c ?

O ponto em que duas rectas se intersectam é comum a elas. Assim, para determinar as coordenadas do ponto de intersecção, basta igualar as duas equações da recta:

$$a: y = 3x + 10 \quad c: y = \frac{4}{3}x + 20$$

$$\begin{cases} y = 3x + 10 \\ y = \frac{4}{3}x + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ 3x + 10 = \frac{4}{3}x + 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ 9x + 30 = 4x + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ 5x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 10 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 28 \\ x = 6 \end{cases}$$

Coordenadas do ponto P: (6, 28)

Exercícios:

105. Determine as coordenadas do ponto de intersecção, caso exista, das seguintes rectas:

105.1. $y = 3x - 1$ e $y = -2x + 1$

105.2. $x + y = 2$ e $y = -x + 5$

105.3. $y = 2x - 4$ e $y = 3x - 1$

105.4. $y = x + 2$ e $y = 3x - 1$

Dadas duas rectas no plano, elas podem ser:

Paralelas:

> Estritamente paralelas : têm igual declive e diferentes ordenadas na origem.

> Coincidentes: têm o mesmo declive e iguais ordenadas na origem.

Concorrentes:

têm declives diferentes.

CONJUNTOS DEFINIDOS POR CONDIÇÕES

Podemos, agora, definir por condições em $\mathbb{R}^2$ semiplanos determinados por rectas não paralelas aos eixos coordenados.

Exemplo 1:

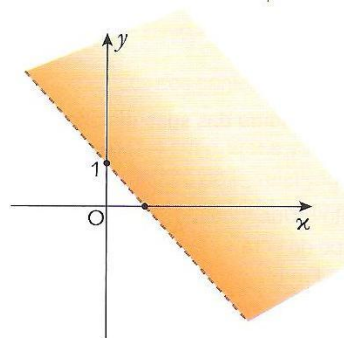
O semiplano pintado é limitado pela recta de equação $y = -x + 1$.

Como os seus pontos se encontram a cima da recta e é um semiplano aberto, caracterizamo-lo pela condição:

$$y > -x + 1$$

O semiplano abaixo da recta representa-se pela condição:

$$y < -x + 1$$



Exemplo 2:

A região pintada é limitada pela recta de equação $y = -x + 1$ e pela circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

À semelhança do exemplo anterior, queremos os pontos se encontram a cima da recta:

$$y > -x + 1$$

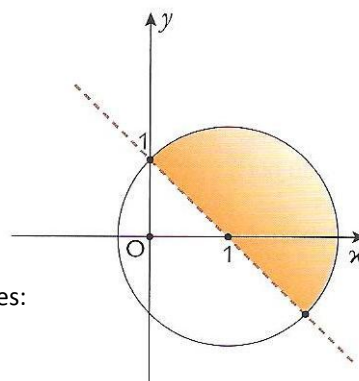
Relativamente à circunferência, interessam-nos os

pontos da circunferência e os que estão no seu interior:

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 2$$

A região sombreada resulta da conjunção destas duas condições:

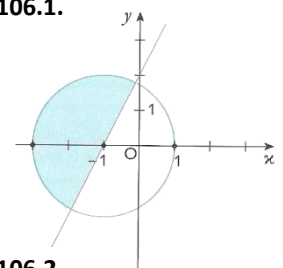
$$y > -x + 1 \quad \wedge \quad (x - 1)^2 + y^2 \leq 2$$



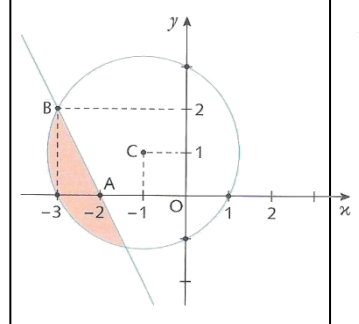
Exercício:

106. Defina analiticamente as regiões do plano representadas nas figuras:

106.1.



106.2.



Exercícios:

107. Escreva uma equação vectorial para cada uma das rectas apresentadas no exercício **105**.

108. Dos seguintes pares de rectas identifica as que são paralelas.

108.1. $r: y = -2x + 3$ $s: y = 2x - 3$

108.2. $r: 3x - y = 5$ $s: 2y = 6x + 1$

108.3. $r: (x, y) = (1, -2) + k(2, 4), k \in \mathbb{R}$ $s: y - 2x = 1$

109. Considere os triângulos [ABC] e [PQR] representados.

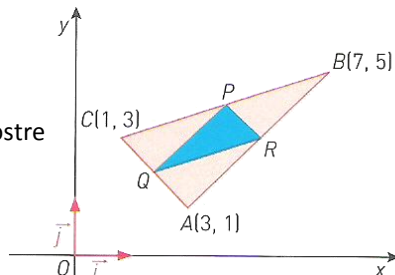
Os vértices do $\Delta[PQR]$ são os pontos médios dos lados do $\Delta[ABC]$.

Recorrendo aos declives, mostre que são paralelas as rectas:

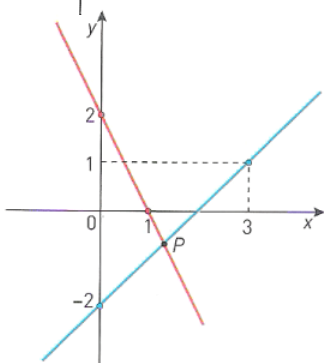
109.1. AB e PQ.

109.2. AC e PR.

109.3. BC e QR.



110. Atendendo aos dados da figura, determine as coordenadas do ponto P



111. Em relação a um referencial o. n. considere os pontos A(-1, 3) e B(2, 0).

111.1. Verifique se a recta AB é paralela à recta de equação $x + y - 2 = 0$

111.2. Determine k de modo que a recta de equação $2y - kx + 5 = 0$ seja paralela à recta AB.

112. Para os seguintes pares de equações da recta, indique as que são paralelas e as coordenadas do ponto de intersecção no caso de serem concorrentes.

112.1. $y = -x + 2$ e $2x + 2y - 3 = 0$

112.2. $2y = x$ e $2y + x = 1$

112.3. $x = 2$ e $x - y = 2$

112.4. $y = x$ e $\pi x - \pi y - 2 = 0$

113. Considere a família de rectas $y = mx + 2$.

Determine m de modo a obter uma recta que seja:

113.1. paralela à recta $2x - y = 1$.

113.2. concorrente com a recta $(x, y) = (-1, 2) + k(2, -3), k \in \mathbb{R}$.

114. Represente o conjunto de pontos do plano definido por:

114.1. $y > 2x + 4 \wedge y > 3$

114.2. $y > 3x \wedge y > 3x + 3$

114.3. $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y = \frac{2}{3}x$

114.4. $y < -x - 3 \wedge x > -5 \wedge y \geq 0$

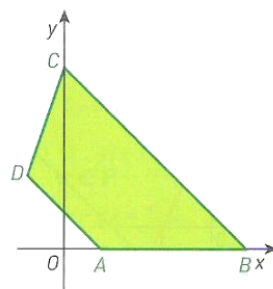
115. Na figura, em referencial o. n. xOy , está representado o trapézio [ABCD]:

Sabe-se que:

- o ponto B tem de coordenadas (5, 0)

- o ponto D tem de coordenadas (-1, 2)

- $y = -x + 1$ é a equação reduzida da recta AD



Determine:

115.1. as coordenadas do ponto A.

115.2. a equação da recta reduzida da recta BC.

115.3. as coordenadas do ponto G.

115.4. a equação reduzida da recta CD.

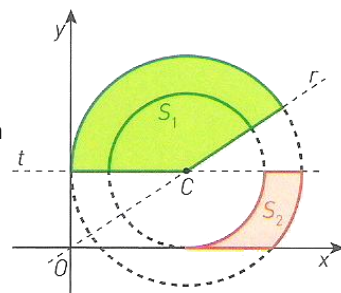
115.5. uma condição que defina o conjunto de pontos do trapézio que têm abcissa negativa.

116. No referencial o. n. xOy da figura estão representadas duas circunferências de centro no ponto C, sendo tangente ao eixo Oy e outra tangente ao eixo Ox . as rectas r e t são definidas respectivamente pelas equações $y=2$ e $y = \frac{2}{3}x$.

Defina por uma condição a região sombreada na figura representada por:

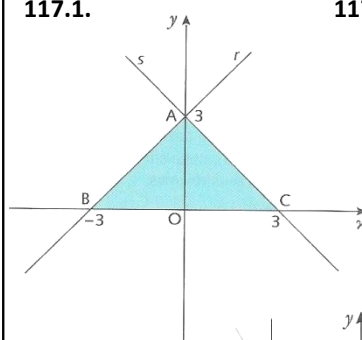
116.1. S_1

116.2. S_2

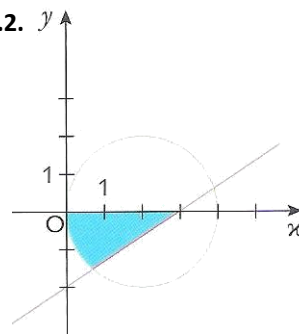


117. Defina analiticamente as regiões do plano representadas nas figuras:

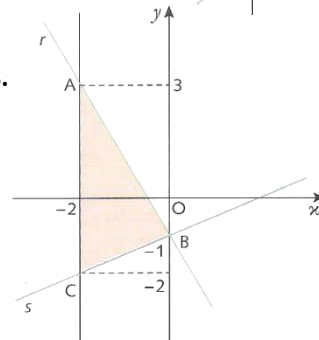
117.1.



117.2.



117.3.



TEMA 2

FUNÇÕES

INTRODUÇÃO

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes em matemática.

Referência Histórica

Desde o tempo dos babilónios (2000 a. C.) que se usam tabelas para representar a dependência entre duas variáveis.

Outras formas de usar funções foram experimentadas por Oresme (1323-1382) que utilizou o gráfico para representar numa direcção o tempo e, na outra direcção, a velocidade de um móvel.

Estas ideias que remontam ao século XIV evidenciam que os matemáticos do Ocidente tinham imaginação e rigor de pensamento; faltava-lhes, no entanto, os símbolos da álgebra, que surgiram com Viète, no final do século XVI.

Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) fizeram evoluir o conceito de função através da geometria analítica.

A utilização da simbologia algébrica veio revolucionar a matemática da época e contribuir de uma forma decisiva para a criação do conceito de função.

Leibniz (1646-1717) terá em 1673 introduzido pela primeira vez o termo “função” e Euler (1707-1783) terá utilizado pela primeira vez a expressão “ $f(x)$ ”.

O simbolismo algébrico foi aperfeiçoado por matemáticos dos séculos XVII e XVIII, entre os quais Descartes, Newton, Leibniz e Euler.



Descartes

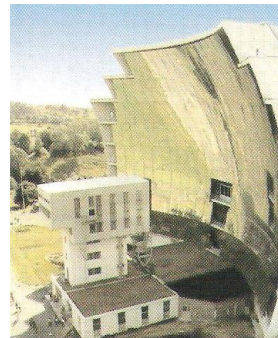


Euler



Leibniz

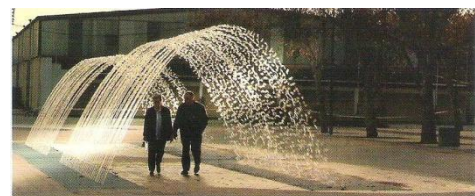
Há várias situações na vida real em que a configuração de arco de parábola, que corresponde ao gráfico da função quadrática, está presente.



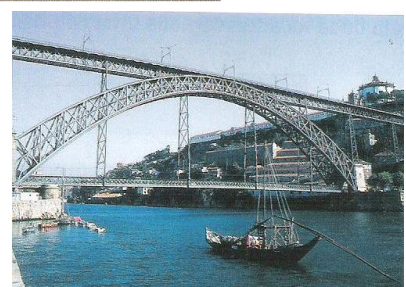
Four Solaire – Font Romeu



TVS – São Tomé



Parque das Nações
Lisboa



Ponte D. Luís - Porto

GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES

CONCEITO DE FUNÇÃO

Exemplo:

Suponhamos que um automóvel se desloca a uma velocidade constante de 60km/h.

Considerando e o espaço percorrido (em km) e t o tempo (em horas),

podemos deduzir a seguinte expressão: $e = 60t$

Atribuindo a t (objecto) valores, obtemos correspondentes valores de e (imagem).

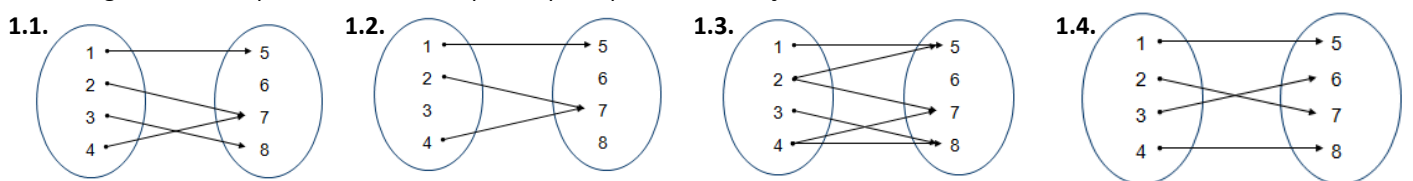
Ao tempo percorrido em viagem corresponde uma e uma só distância.

t	$e = 60t$
0	0
1	60
2	120
3	180

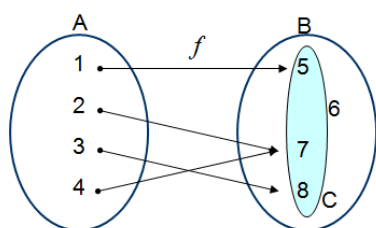
Podemos dizer que temos uma função porque existe uma correspondência unívoca, ou seja, a cada valor do tempo corresponde um e um só valor de espaço percorrido.

Exercício:

1. Das seguintes correspondências identifique as que representam funções.



Considere-se a função definida pelo diagrama seguinte:



À função chamou-se f .

A função f é uma função definida em A com valores em B.

Para além dos conjuntos A e B, existe ainda um conjunto bem definido (contido em B), o conjunto C.

- Ao conjunto A chama-se domínio da função f e representa-se por D_f

$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ O domínio de f é o conjunto dos objectos.

- Ao conjunto B chama-se conjunto de chegada da função.

- Ao conjunto C chama-se contradomínio da função f e representa-se por D'_f

$D'_f = \{5, 7, 8\}$ O contradomínio de f é o conjunto das imagens.

- O objecto 1 tem por imagem 5.

Simbolicamente, escreve-se $f(1) = 5$ (ler: f de um é igual a cinco)

Do mesmo modo, escreve-se:

$f(2) = 7$ $f(3) = 8$ $f(4) = 8$

Função

Uma função f de A com valores em B ($f: A \rightarrow B$) consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B, e uma regra que associa a cada elemento x (objecto) de A um e um só elemento $y = f(x)$ (imagem) de B.

Simbolicamente:

$f: A \rightarrow B$

$x \rightarrow y = f(x)$

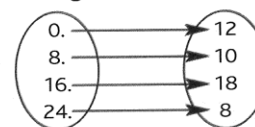
• Uma **expressão analítica**:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x+1$$

Uma função pode ser definida por:

• Um **diagrama**:

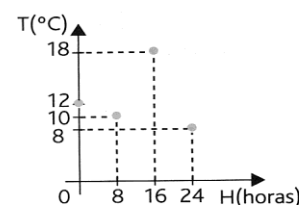


Horas (H) Temperaturas (°C)

• Uma **tabela**:

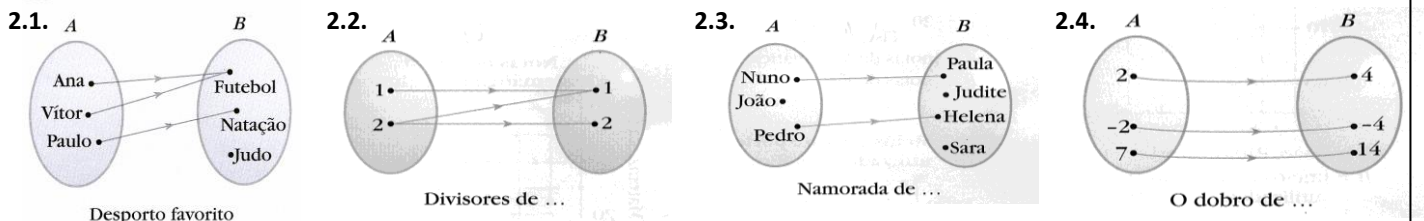
H (horas)	T (°C)
0	12
8	10
16	18
24	8

• Um **gráfico**:



Exercícios:

2. Para cada uma das seguintes correspondências diga se se trata ou não de uma função e em caso afirmativo indique o domínio, o contradomínio e o conjunto de chegada:



3. Considere os conjuntos $A = \{0, 2, \sqrt{3}\}$ e $\mathbb{N}$. 3.1. Dê um exemplo de uma correspondência de A para $\mathbb{N}$ que não seja função.
3.2. Construa uma função f de A em $\mathbb{N}$. 3.3. Construa uma função g de A em $\mathbb{N}$, sabendo-se que $g(0) = 7$ e $g(\sqrt{3}) = 10$.

■ PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES E DOS SEUS GRÁFICOS

> Gráfico de uma função

Se f é uma função com domínio A , então o gráfico de f é o conjunto dos pares ordenados $\{(x, f(x)), x \in A\}$

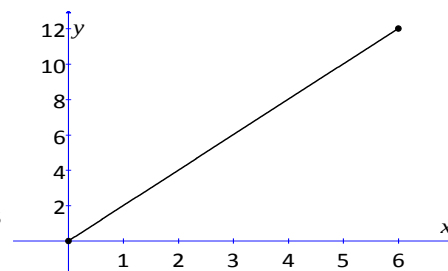
Exemplo:

Consideremos a função:

$$f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 2x$$

Podemos construir o gráfico de f se considerarmos o conjunto de pontos $(x, f(x))$, com $x \in [0, 6]$

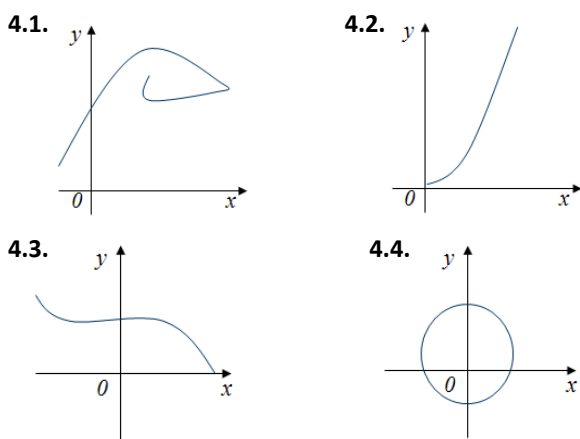


Propriedade: Teste da recta vertical

Uma curva representada num referencial é o gráfico de uma função se e só se qualquer recta vertical intersecta o gráfico, no máximo num ponto.

Exercícios:

4. Com base na propriedade anterior verifique se as seguintes curvas representam funções.



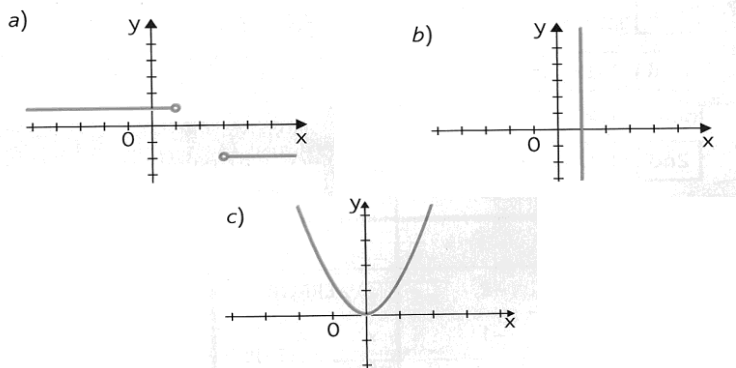
5. Considere a correspondência h definida por:

$$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \rightarrow x^2$$

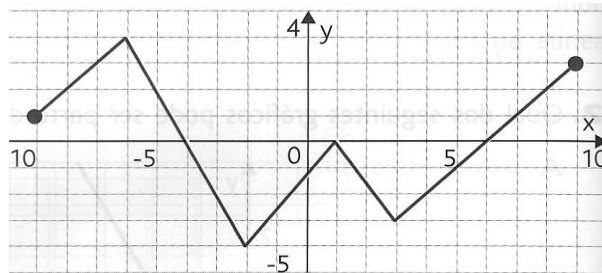
5.1. A correspondência h é uma função? Justifique.

5.2. Defina uma nova correspondência h' que seja uma função.

6. Considere as seguintes representações e indique, justificando, se se tratam de funções:



7. Observe a função j representada graficamente por:



Indique:

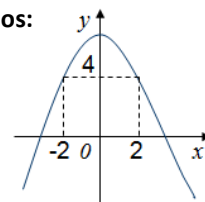
- 7.1. O domínio 7.2. O contradomínio
7.3. Os objectos que têm imagem zero 7.4. A maior imagem
7.5. A menor imagem;
7.6. $j(3)$ e $j(-10)$

> Função Injectiva

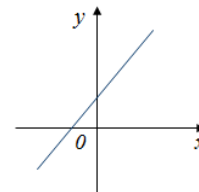
Uma função f de domínio A diz-se injectiva quando, para todos os elementos a e b pertencentes ao domínio, se a é diferente de b então $f(a)$ também é diferente de $f(b)$.

$$\forall a, b \in A, \text{ se } a \neq b \text{ então } f(a) \neq f(b)$$

Exemplos:



não injectiva



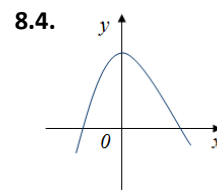
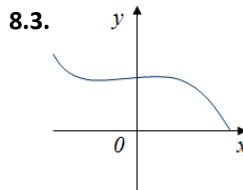
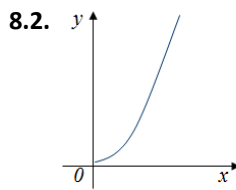
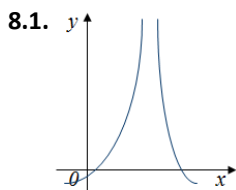
injectiva

Propriedade: Teste da recta horizontal

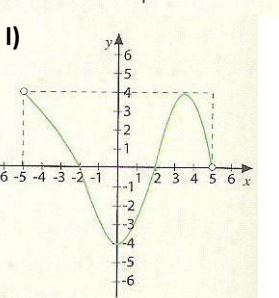
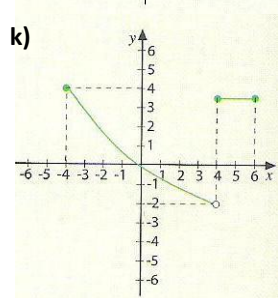
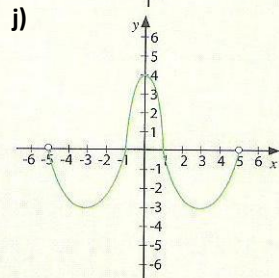
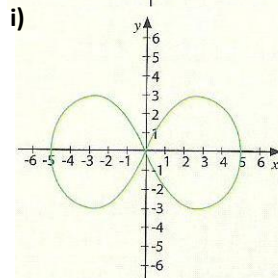
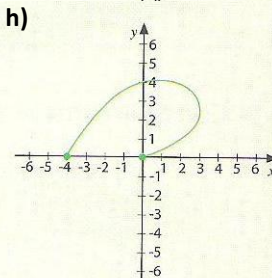
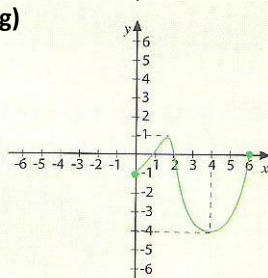
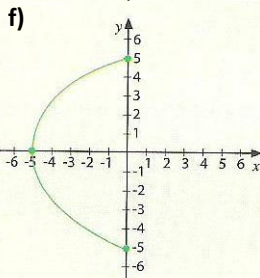
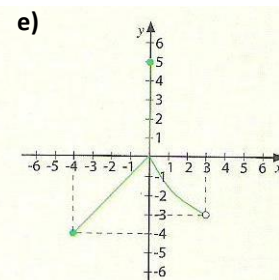
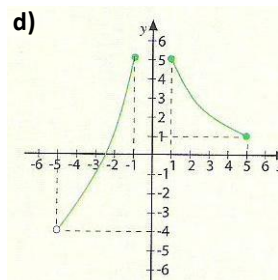
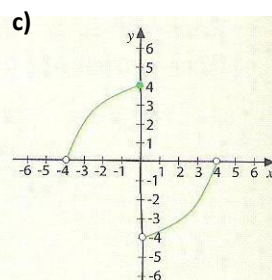
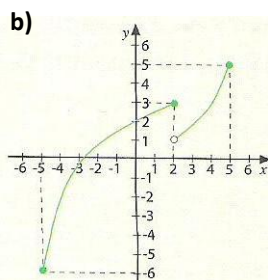
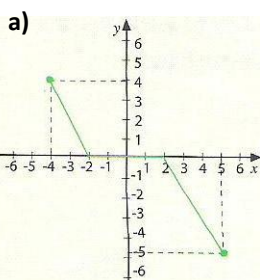
Uma curva representada num referencial é o gráfico de uma função injectiva se e só se qualquer recta horizontal intersecta o gráfico, no máximo num ponto.

Exercício

8. Com base na propriedade anterior verifique se as seguintes funções são injectivas representam funções.



9. Considere os seguintes gráficos.



9.1. Indique os que representam funções.

9.2. Para os gráficos que representam funções:

a) indique o domínio e o contradomínio.

b) indique quais são injectivas.

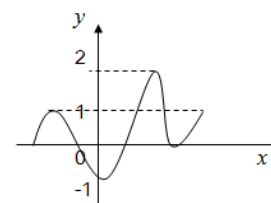
> Extremos de uma função

Seja f uma função de domínio D :

- $f(a)$ é o máximo absoluto de f se, para todo o x de D , $f(a) \geq f(x)$
a a dá-se o nome de maximizante
- $f(b)$ é o mínimo absoluto de f se, para todo o x de D , $f(b) \leq f(x)$
a b dá-se o nome de minimizante

Exemplo:

- 0 é mínimo relativo
- 1 é mínimo absoluto
- 1 é máximo relativo
- 2 é máximo absoluto



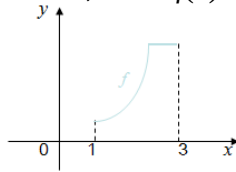
> Monotonia de uma função

Função crescente no sentido lato

Diz-se que f é crescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) \leq f(b)$.

Exemplo:

f é crescente em $[1,3]$

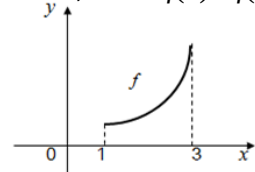


Função estritamente crescente

Diz-se que f é crescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

Exemplo:

f é estritamente crescente em $[1,3]$

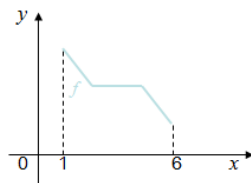


Função decrescente no sentido lato

Diz-se que f é decrescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) \geq f(b)$.

Exemplo:

f é decrescente em $[1,6]$

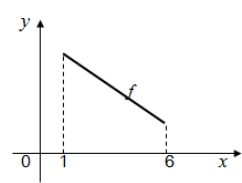


Função estritamente decrescente

Diz-se que f é decrescente em A quando para todos os números reais a e b de A , se $a < b$, então $f(a) > f(b)$.

Exemplo:

f é estritamente decrescente em $[1,6]$



Uma função é **monótona** num intervalo se for crescente ou decrescente nesse intervalo.

> Sinal de uma função

- Zero de uma função é todo o objecto que tem imagem nula.
- Diz-se que f é positiva em A quando para todos os números reais a de A , se $f(a) > 0$.
- Diz-se que f é negativa em A quando para todos os números reais a de A , se $f(a) < 0$.

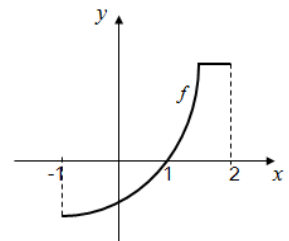
Exemplo:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

1 é zero de f

f é positiva em $]1, 2[$

f é negativa em $] -1, 1[$



Exemplo:

Estudemos a função f usando o seu gráfico:

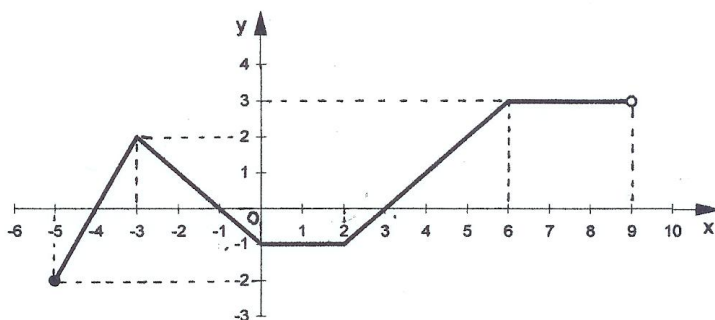


Tabela de variação da monotonia:

x	-5		-3		0		2		6		9
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-1	→	-1	↗	3	→	3

Quadro de estudo do sinal da função:

x	-5		-4		-1		3		9
$f(x)$	-2	-	0	+	0	-	0	+	3

$$D_f = [-5, 9] \quad D'_f = [-2, 3]$$

f é não injectiva

Extremos:

- máximo absoluto: 3
- mínimo absoluto: -2
- máximo relativo: 2
- mínimo relativo: -1

Intervalos de monotonia

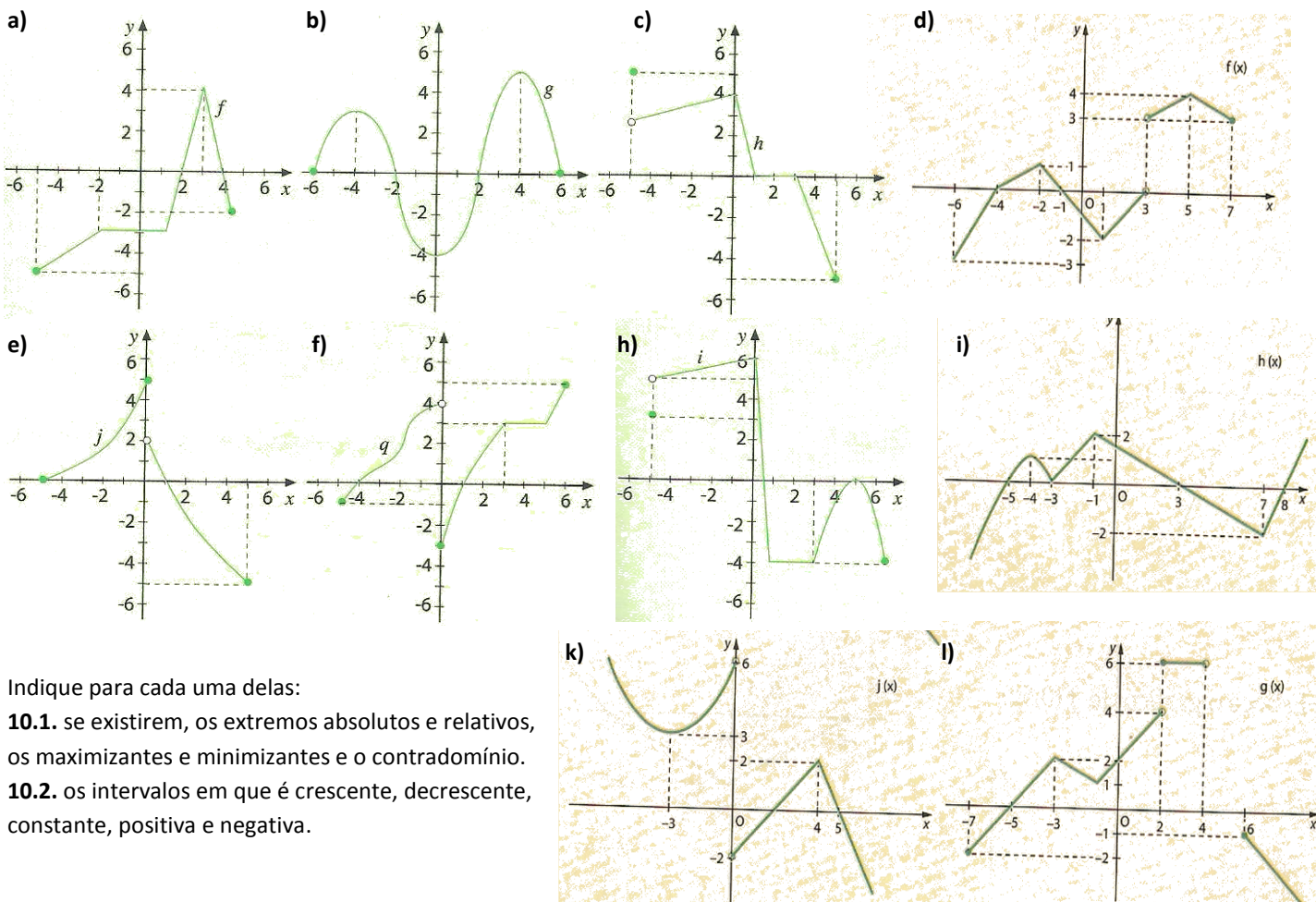
- f é estritamente crescente nos intervalos: $[-5, -3]$, $[2, 6]$
- f é estritamente decrescente no intervalo: $[-3, 0]$
- f é constante nos intervalos: $[0, 2]$, $[6, 9]$

Zeros e sinal

- zeros de f : -4, -1, 3
- f é positiva em: $]-4, -1[\cup]3, 9[$
- f é negativa em: $] -5, -4[\cup] -1, 3[$

Exercício:

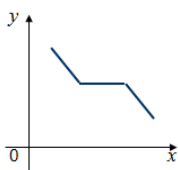
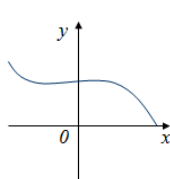
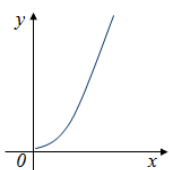
10. Considere os gráficos das funções seguintes.



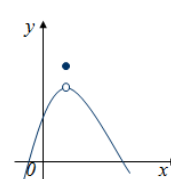
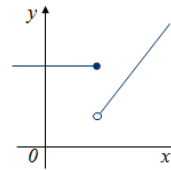
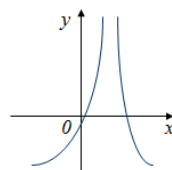
> Continuidade e descontinuidade de uma função

“Uma função f diz-se contínua se for possível traçar o seu gráfico sem levantar o lápis.”

Exemplos:



funções contínuas



funções descontínuas

> Paridade de uma função

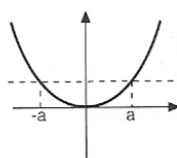
Função Par

Diz-se que uma função de variável real f é par se e só se

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Graficamente:

f , par:
 $f(-a) = f(a)$
 Gráfico simétrico em relação ao eixo vertical



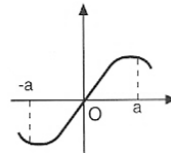
Função Ímpar

Diz-se que uma função de variável real f é ímpar se e só se

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Graficamente:

f , ímpar:
 $f(-a) = -f(a)$
 Gráfico simétrico em relação a O.



Exemplo: Calcule a paridade de cada uma das seguintes funções:

1. $f(x) = -x^3 - 3x$

$$f(-x) = -(-x)^3 - 3(-x) = x^3 + 3x = -f(x)$$

Como $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$ a função é ímpar.

2. $g(x) = -3x^2 - 2x + 1$

$$g(-x) = -3(-x)^2 - 2(-x) + 1 = -3x^2 + 2x + 1$$

$g(-x) \neq g(x) \wedge g(-x) \neq -g(x) \quad \forall x \in D_f$ a função não é par nem é ímpar.

Exercícios

11. Analisando os gráficos das funções do exercício 10, indique quais são contínuas.

12. Estude a paridade das seguintes funções: a) $f(x) = x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 5$ c) $h(x) = x^4 + x^2$ d) $j(x) = -2x^3 + x$

FUNÇÃO AFIM

Estudamos em geometria que, uma equação do tipo $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$ representa uma recta não vertical, onde m é o declive da recta e b é a ordenada na origem.

Dizemos que uma função real de variável real, é uma função afim, se é definida por uma expressão do tipo:

$$f(x) = mx + b, \text{ com } m, b \in \mathbb{R}$$

De um modo geral:

► declive da recta

dados dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ de uma recta, definimos **declive da recta** PQ por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

► domínio: $\mathbb{R}$

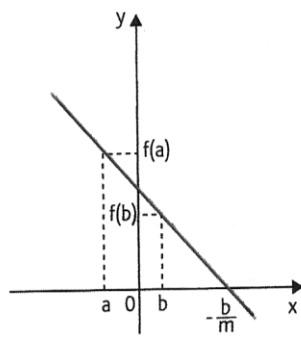
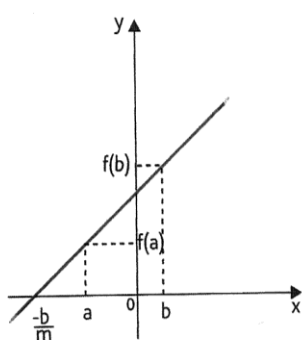
► contradomínio: $\mathbb{R}$

► zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$

► monotonia e sinal:

$m > 0$ Crescente

$m < 0$ Decrescente



Quaisquer que sejam, a e b e D_f ,

se $a < b$ então $f(a) < f(b)$

se $a < b$ então $f(a) > f(b)$

Quadro de sinal

x	$-\infty$	$-b/m$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Quadro de sinal

x	$-\infty$	$-b/m$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Exercícios

13. Estude as seguintes funções quanto à monotonia e sinal, indicando os respectivos pontos de intersecção dos seus gráficos com os eixos coordenados:

13.1. $f(x) = -\frac{1}{5}x + 4$

13.2. $g(x) = 0,4x - 10$

13.3. $h(x) = -2x$

13.4. $j(x) = -\frac{\sqrt{2}}{5}x - 8$

14. O gráfico de uma função afim f contém os pontos de coordenadas $(2,4)$ e $(5,7)$.

14.1. Escreva a expressão que define a função f .

14.2. Faça o esboço gráfico da função.

14.3. Indique a monotonia e sinal da função.

15. Considere a família de funções: $f(x) = \frac{k}{2}x + 3$, $k \in \mathbb{R}$.

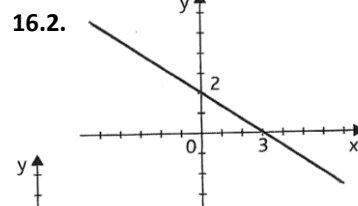
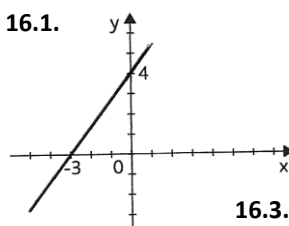
Indique um valor de k de modo que:

15.1. f seja crescente;

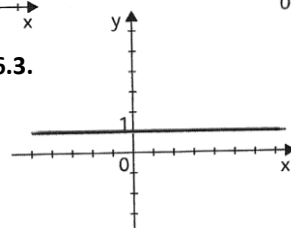
15.2. a função tenha um zero no ponto de abscissa 6;

15.3. o gráfico da função seja uma recta horizontal.

16. Calcule a expressão analítica de cada uma das funções afim representadas graficamente por



16.3.

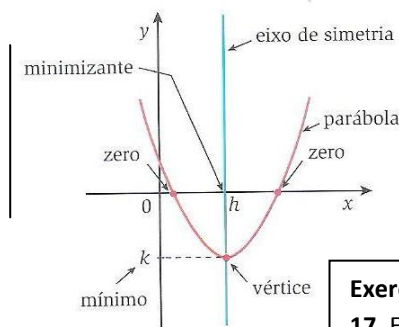


FUNÇÃO QUADRÁTICA

Função quadrática é toda a função do tipo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$



O seu gráfico

é uma parábola.

ZEROS E CONCAVIDADE

Os zeros da função quadrática $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$,

são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Muitas vezes tem interesse saber se uma função quadrática tem ou não zeros, independentemente de se conhecer o seu valor.

Calculando-se o sinal do binómio $b^2 - 4ac$ que se representa por Δ , tem-se:

- Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ a função não tem zeros reais
- Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ a função tem um zero real
- Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ a função tem dois zeros reais

Ao binómio Δ chama-se **binómio discriminante**, pois é pelo conhecimento do seu sinal que se pode discriminar quantas soluções tem a equação.

Exemplos:

Calculemos os zeros de cada uma das seguintes funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:

1. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Calculemos o valor de Δ .

$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$; como $\Delta > 0$, a função tem dois zeros.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 2 \quad \text{Os zeros da função são 2 e 3.}$$

2. $h(x) = x^2 + x + 2$

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a função h não tem zeros.

3. $m(x) = x^2 - 6x + 9$

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a função tem um zero,

$$x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Exercícios:

17. Estude a paridade e calcule os zeros de cada uma das seguintes funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:

17.1. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ 17.2. $g(x) = 4x^2 + 3$

17.3. $h(x) = -5x^2 + 10x$

17.4. $i(x) = x^2 - x - 2$

17.5. $j(x) = 4x^2 - 12x + 9$

18. Sem os calcular, determine o número de zeros de cada uma das seguintes funções:

18.1. $x \mapsto 2x^2 - 7x + 6$

18.2. $x \mapsto -3x^2 + 2x - 1$

18.3. $x \mapsto x^2 + 4x + 4$

19. Determine m de modo que a expressão $mx^2 - 4x + 2$ defina uma função quadrática com:

19.1. dois zeros 19.2. um zero

19.3. nenhum zero

O que define o sentido da concavidade da parábola do gráfico de uma função quadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$ é o sinal do valor de a :

- a parábola é voltada para cima se $a > 0$
- a parábola é voltada para baixo se $a < 0$

O quadro ao lado relaciona o sentido da concavidade com o número de zeros da função:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

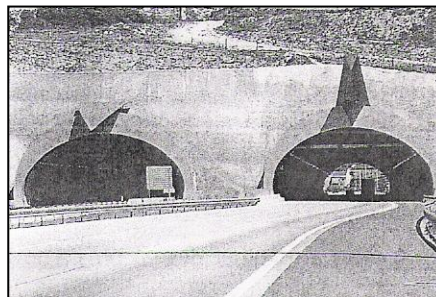
▪ VÉRTICE E EIXO DE SIMETRIA

Observe a figura ao lado.

A entrada do túnel tem a forma aproximada de parte de uma parábola que podemos considerar definida pela expressão:

$$m(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 6a)$$

1. Qual a largura da estrada?
2. Qual a altura máxima do túnel?



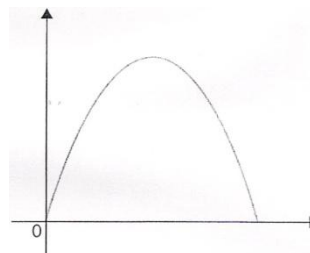
Resolução:

1. Consideremos a parábola desenhada num referencial cartesiano:

A largura da estrada corresponde à distância entre os zeros da função.

$$-\frac{1}{2}(a^2 - 6a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a(a - 6) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 6$$

A largura da estrada é 6 m.

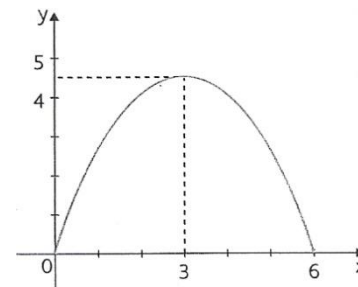


2. Como podemos observar, o eixo de simetria contém o vértice da parábola, logo a equação do eixo é $x = 3$.

Então, a abcissa do vértice é 3. Vamos calcular a sua ordenada.

$$m(3) = -\frac{1}{2}(3^2 - 6 \times 3) = 4,5$$

A altura máxima é 4,5 m. O maximizante da função é a média dos zeros da função (a concavidade da parábola está voltada para baixo).



De um modo geral, a representação gráfica de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma parábola de vértice no ponto:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad \text{onde, } \Delta = b^2 - 4ac. \text{ O eixo de simetria da parábola é a recta } x = -\frac{b}{2a}.$$

Exemplo: Seja a função $j(t) = t^2 - 2t - 3$

1. Indique os zeros da função.
2. Determine as coordenadas do vértice e o eixo de simetria.
3. Esboce o gráfico da função.
4. Indique o contradomínio.
5. Estude a função quanto à monotonia.

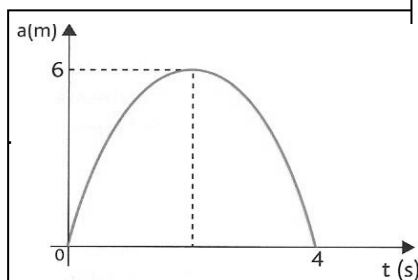
Resolução

$$1. b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2-4}{2} \vee x = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

$$2. V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{2}, -\frac{16}{4}\right)$$

$V(1, -4)$. O eixo de simetria é $x = 1$.



Exercícios:

20. Seja $f(x) = x^2 - 4x - 5$

- 20.1. Indique os zeros da função.
- 20.2. Determine as coordenadas do vértice.
- 20.3. Escreva a equação do eixo de simetria.
- 20.4. Esboce o gráfico da função.
- 20.5. Indique o contradomínio.
- 20.6. Estude a função quanto à monotonia.

21. O gráfico ao lado representa a altura (em metros) em função do tempo (em segundos), de uma bola lançada de baixo para cima e na vertical, com uma determinada velocidade inicial.

21.1. Depois de lançada, quanto tempo demorou a bola a chegar ao chão?

21.2. Qual a altura máxima atingida pela bola? Em que instante?

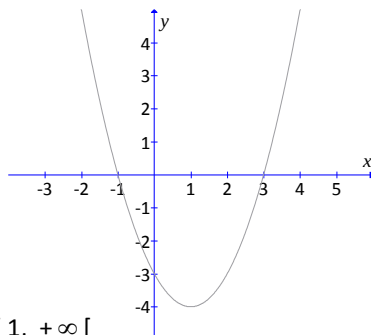
▪ CONTRADOMÍNIO E MONOTONIA

Resolução (continuação):

3. Para esboçar o gráfico da função, já temos o valor dos zeros, e do vértice, calculemos o valor da ordenada na origem:

$$j(0) = 0^2 - 4 \times 0 - 3 = -3$$

Com o valor dos zeros, do vértice e da ordenada na origem podemos traçar o esboço do gráfico.



4. Através da observação do gráfico concluímos que:

$$D'f = [-4, +\infty[$$

5. A função é monótona crescente: $[1, +\infty[$

A função é monótona decrescente: $] -\infty, 1]$

Exercícios:

22. Considere a função $i(r) = -r^2 + 4r - 5$

22.1. Indique os zeros da função.

22.2. Determine as coordenadas do vértice.

22.3. Escreva a equação do eixo de simetria.

22.4. Esboce o gráfico da função.

22.5. Indique o contradomínio.

22.6. Estude a função quanto à monotonia.

23. Determine, por via algébrica, os zeros e o mínimo da função h definida por $h(x) = x^2 - 3x$ e esboce o seu gráfico num referencial.

▪ VARIAÇÃO DO SINAL

Exemplo:

Observemos os gráficos das funções definidas por:

$$f(x) = x^2 + x - 2;$$

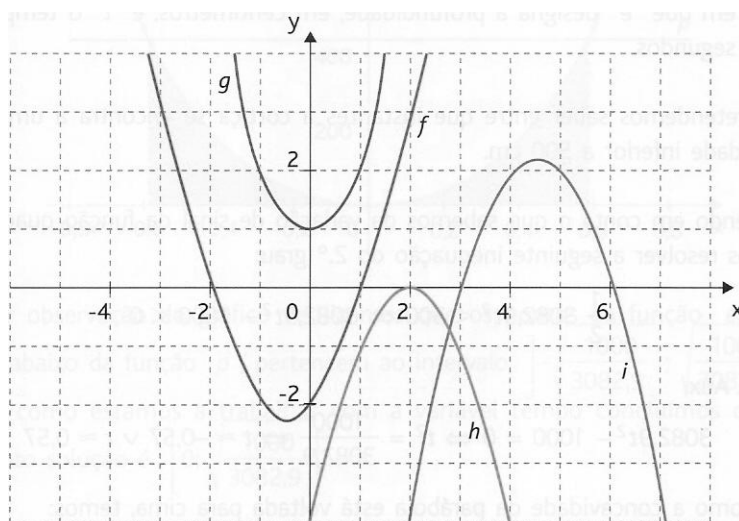
$$g(x) = x^2 + 1;$$

$$h(x) = -(x-2)^2;$$

$$i(x) = -x^2 + 9x - 18$$

Podemos concluir:

- f tem dois zeros e $a > 0$; é positiva no intervalo $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$, sendo negativa em $]-2, 1[$;
- g não tem zeros e $a > 0$; é positiva em $\mathbb{R}$;
- h tem um zero e $a < 0$; é negativa em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- i tem dois zeros e $a < 0$; é positiva no intervalo $]3, 6[$ e negativa em $]-\infty, 3[\cup]6, +\infty[$.



Exercício:

24. Tendo em conta os valores de a e de Δ , em cada caso, determine a variação de sinal de cada uma das seguintes funções:

24.1. $f(x) = -x^2 + 6x$

24.2. $g(x) = 2x^2 + 5x - 7$

24.3. $h(x) = -2x^2 + 3x - 1$

24.4. $i(x) = -(x-1)^2$

24.5. $j(x) = x^2 + 6x + 13$

Estudar a variação de sinal da função é determinar os intervalos onde a função é positiva e os intervalos onde é negativa.

▪ INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

Para iluminar uma operação de salvamento lança-se um foguete luminoso cuja altura h em relação ao nível do mar é dada aproximadamente pela lei:

$$h = 10 + 5t - t^2 \quad (h \text{ em metros, } t \text{ em segundos}).$$

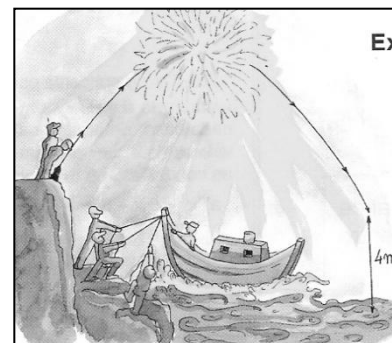
A luz só é útil desde que o foguete esteja a 4 m ou mais acima do mar.

Quanto tempo dura a luz útil de cada foguete?

Resolução: Queremos os valores de t para os quais $h \geq 4$, ou seja, $10 + 5t - t^2 \geq 4$.

Esta condição é uma inequação do 2º grau.

1º passo: colocar todos os termos no 1º membro: $10 + 5t - t^2 \geq 4 \Leftrightarrow -t^2 + 5t + 6 \geq 0$



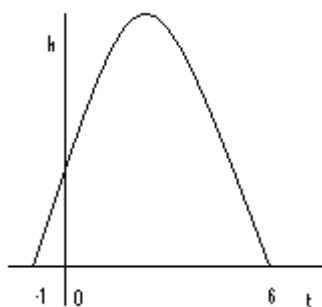
2º passo: estudar o sinal da função quadrática do 1º membro: $h(t) = -t^2 + 5t - 6$

Como $a = -1$, a concavidade é voltada para baixo.

$\Delta = 25 + 24 = 49$, logo a função tem dois zeros.

$$\text{Zeros: } t = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 6$$

Analisando o esboço do gráfico concluímos que a função é positiva no intervalo $] -1, 6[$



3º passo: analisar os dados obtidos no contexto do problema e dar resposta:

Mas neste problema só interessa $t > 0$, pelo que a luz é útil de zero a 6 segundos.

Resposta: A luz útil do foguete dura 6 segundos.

Mais Exemplos:

1. Resolva a seguinte inequação: $x^2 - 4x + 3 > 0$.

$$a > 0 \quad e \quad \Delta = 16 - 12 = 4$$

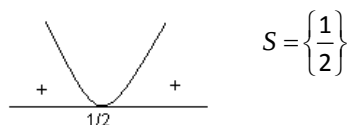
$$\text{Há dois zeros que são: } x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$



2. Resolva a inequação $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

$$a > 0 \quad e \quad \Delta = 16 - 16 = 0$$

Existe um zero, $x = \frac{1}{2}$, a inequação tem uma só solução:



3. Resolva a inequação $x^2 - 3x + 6 > 0$.

$$a > 0 \quad e \quad \Delta = 9 - 24 = -15$$

A inequação é uma **condição universal**, ou seja, todos os números reais são solução da inequação. $S = \mathbb{R}$



4. Resolva a inequação $-4x^2 + x - 3 > 0$.

$$a < 0 \quad e \quad \Delta = 1 - 48 = -47$$

Exercícios:

25. Determine o domínio das seguintes funções:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

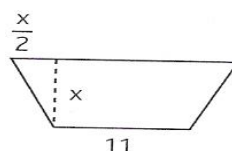
26. Resolva em $\mathbb{R}$:

$$26.1. x^2 - 3x - 4 < 0 \quad 26.2. 3 < 5x + 2x^2 \quad 26.3. x - 2 \leq \frac{(4x-3)(4x+3)}{6}$$

$$26.4. 3(x-1) > x^2 + 2$$

$$26.5. \frac{2x(x-1)}{3} < \frac{x^2 + 4}{2}$$

$$26.6. (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 1$$



27. A figura representa um jardim com a forma de um trapézio isósceles.

Atendendo aos dados:

27.1. Mostre que a área do trapézio é dada por $A(x) = 11x + \frac{x^2}{2}$

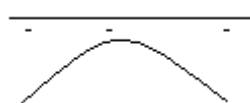
27.2. Entre que valores pode variar a altura do trapézio de modo que a área seja inferior a 120 m^2 ?

28. Um foguete é lançado. A altura, em metros, que atinge ao fim do tempo t , em segundos, é dada por $A(t) = -t^2 + 10t + 7$

28.1. A que altura está o foguete ao fim de 5 minutos?

28.2. Em que instante o foguete atinge o solo?

28.3. Durante quanto tempo se encontra o foguete a uma altura superior a 23 metros?



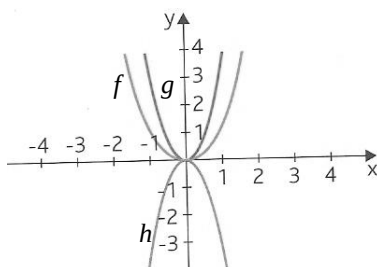
A inequação é **impossível**.

$$S = \{ \}$$

FAMÍLIAS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

> Funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= 4x^2 \\ h(x) &= -3x^2 \end{aligned}$$



M.A.(5)

Da análise feita aos casos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- o sinal do coeficiente a influencia o sentido da concavidade.
- o valor absoluto de a influencia a abertura da parábola. Quanto maior é o valor absoluto de a , menor é a abertura da parábola.
- qualquer uma das parábolas tem vértice no ponto $(0, 0)$ e o eixo de simetria é a recta $x = 0$, donde se conclui que são independentes de a .

	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	$x = 0$	$x = 0$
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Monotonia	Crescente em $\mathbb{R}^+$ Decrescente em $\mathbb{R}^-$	Crescente em $\mathbb{R}^-$ Decrescente em $\mathbb{R}^+$
Extremos	Mínimo absoluto em $(0, 0)$	Máximo absoluto em $(0, 0)$
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo

Exercício:

29. Corresponda cada uma das funções ao seu respectivo gráfico:

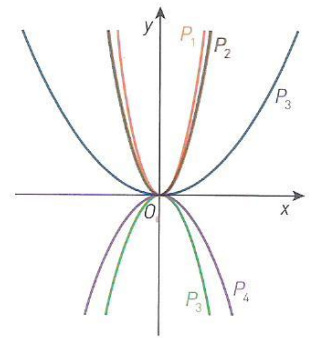
$$I : y = 2x^2$$

$$II : y = -0,5x^2$$

$$III : y = \sqrt{3}x^2$$

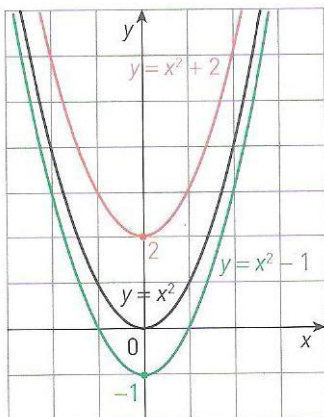
$$IV : y = -x^2$$

$$V : y = 0,2x^2$$



> Funções do tipo $y = ax^2 + k$ e $y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$

Considere as funções reais de variável real $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 1$ e os seus respectivos gráficos:



Da análise feita aos casos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- O gráfico de $y = x^2 + 2$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se duas unidades para cima. ($k > 0$, deslocação para cima)

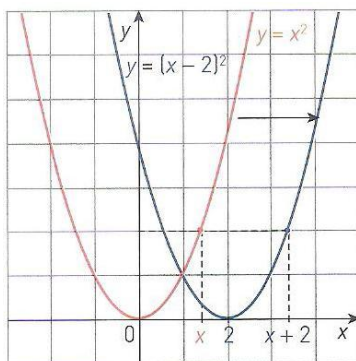
- O gráfico de $y = x^2 - 1$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se uma unidade para baixo. ($k < 0$, deslocação para baixo)

- Os efeitos das mudanças de k , nos gráficos das funções da família $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$ fazem-se sentir na localização do vértice da parábola sobre o eixo das ordenadas.

Vértice: $(0, k)$

Eixo de simetria: $x = 0$

Considere as funções reais de variável real $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$ e $y = (x + 3)^2$ e os seus respectivos gráficos:



Da análise feita aos casos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- O gráfico de $y = (x - 2)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se duas unidades para a direita. ($h > 0$, deslocação para a direita)

- O gráfico de $y = (x + 3)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se três unidades para a esquerda. ($h < 0$, deslocação para a esquerda)

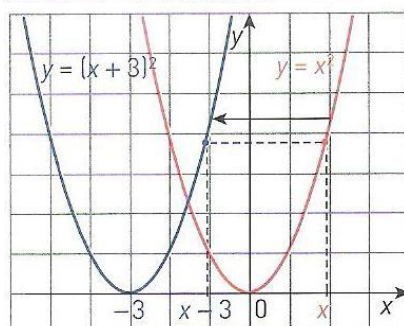
- Os efeitos das mudanças do parâmetro h , nos gráficos das funções da família

$y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$ fazem-se sentir na localização do vértice da parábola sobre o

eixo das abcissas.

Vértice: $(h, 0)$

Eixo de simetria: $x = h$



31. Represente, a partir da função definida por $f(x) = x^2$, as seguintes funções, indicando as coordenadas do vértice:

31.1 $g(x) = 2(x - 3)^2$

31.2 $h(x) = -x^2 + 2$

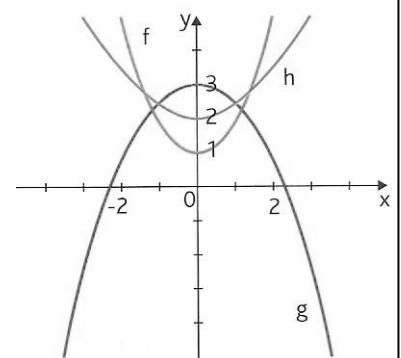
Exercícios:

30. Estabeleça a correspondência entre os gráficos dados e as seguintes funções:

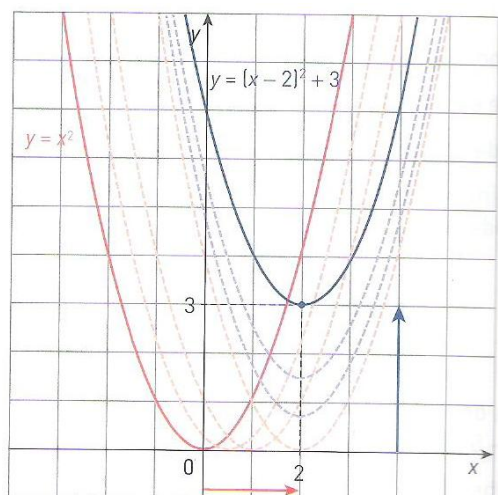
$$I : y = \frac{1}{3}x^2 + 2$$

$$II : y = x^2 + 1$$

$$III : y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$$



> Funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$



Considere as funções reais de variável real $y = x^2$ e $y = (x-2)^2 + 3$ e os seus respectivos gráficos:

Da análise feita aos gráficos apresentados, são intuitivas as seguintes informações:

- O gráfico de $y = (x-2)^2 + 3$ obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2$ deslocando-se duas unidades para a direita ($h = 2$) e três unidades para cima ($k = 3$).

- $y = (x-2)^2 + 3$ tem concavidade voltada para cima;

Vértice: $(2, 3)$

Eixo de simetria: $x = 2$

- O gráfico de uma função do tipo $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$ é uma parábola com as seguintes características:

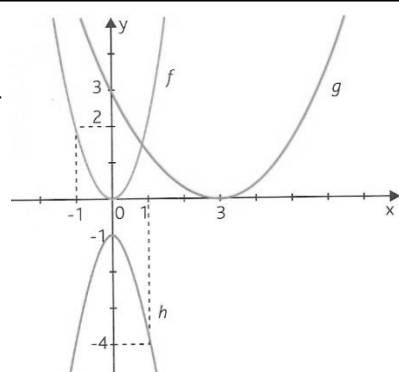
Vértice: (h, k)

Eixo de simetria: $x = h$

	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Monotonia	Crescente: $[h, +\infty[$ Decrescente: $]-\infty, h]$	Crescente: $]-\infty, h]$ Decrescente: $[h, +\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto em (h, k)	Máximo absoluto em (h, k)
Vértice	(h, k)	(h, k)
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo
Eixo de simetria	$x = h$	$x = h$

Exercício:

32. As representações gráficas seguintes foram obtidas a partir de $y = x^2$. Escreva a expressão analítica das funções quadráticas representadas.



Exemplo:

Seja a função f definida por $f(x) = 5x^2 - 10x - 1$

1. Escreva a expressão da função na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

2. Identifique as coordenadas do vértice e o eixo de simetria da parábola que é o gráfico de f .

Resolução:

1. Vamos calcular as coordenadas do vértice a partir da fórmula $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

$$\Delta = 100 - 4 \times 5(-1) = 120; \quad -\frac{b}{2a} = -\frac{(-10)}{2 \times 5} = 1; \quad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{120}{4 \times 5} = -6$$

Então $h = 1$; $k = -6$ e $a = 5$

Substituindo na expressão vem: $f(x) = 5(x - 1)^2 - 6$

2. $V(1, -6)$. A recta de equação $x = 1$ é o eixo de simetria da parábola.

Toda a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, pode escrever-se na forma $y = a(x - h)^2 + k$ e tem por gráfico uma parábola de vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ou $V(h, k)$. O eixo de simetria da parábola é a abcissa do vértice.

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exercícios:

33. Considere a função definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

33.1. Determine os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que a representa.

33.2. Escreva a expressão da função na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

33.3. Represente graficamente a função.

33.4. Estude a monotonia da função.

33.5. Resolva $f(x) \leq 1$

34. A parábola representativa de uma função quadrática f tem vértice no ponto de coordenadas $(1, -4)$ e intersecta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas $(-1, 0)$ e $(3, 0)$. Escreva a expressão que define a função na forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

35. Considere a função definida por $h(x) = -2x^2 - 4x + 3$

35.1 Estude a paridade da função.

35.2 Faça o estudo analítico da função indicando os zeros, o vértice, o eixo de simetria, o sinal, a monotonia, o contradomínio e os extremos.

35.3 Esboce o gráfico da função.

RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE PROBLEMAS DE 2º GRAU

Exemplos:

1. Do alto de um farol lança-se, de baixo para cima, um projectil cuja altura h , em relação à base do farol, é dada por $h = 20 + 20t - 5t^2$ (h em metros e t em segundos).

1.1. Esboce o gráfico da função para $t \geq 0$.

1.2. Ao fim de quanto tempo o projectil passa pela base?

1.3. Ao fim de quanto tempo cai no mar?

1.4. Qual a altura máxima atingida pelo projectil?

Resolução:

1.1.

$$h(0) = 20$$

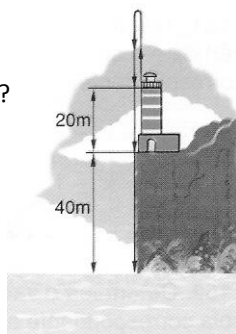
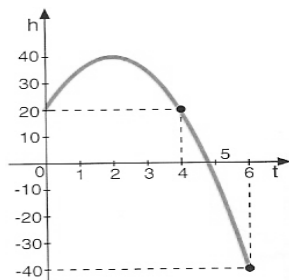
$$V(2, 40)$$

Zeros:

$$t \approx -0,8 \vee t \approx 4,8$$

$$h(4) = 20$$

$$h(6) = -40$$



1.2. Ao fim de aproximadamente 4,8 s que corresponde ao zero positivo da função.

1.3. O nível do mar está 40 m abaixo da base do farol o que na função corresponde a $h(6) = -40$. Ao fim de 6 segundos.

1.4. A altura máxima corresponde à ordenada do vértice (k) da parábola. A altura máxima é 40 m.

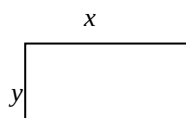
2. Um rectângulo tem de perímetro 20m.

2.1. Exprima a área A do rectângulo em função do comprimento x de um dos seus lados.

2.2. Represente graficamente a função A de x .

2.3. Entre que valores pode variar x ?

2.4. Para que valores de x a área é máxima?

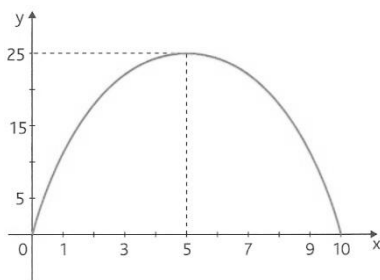


Resolução:

$$2.1. P = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

$$A = xy \Leftrightarrow A = x(10 - x) \Leftrightarrow A = 10x - x^2$$

2.2.



2.3. Os valores de x têm de estar compreendidos entre 0 e 10, pois se uma das dimensões for 0 ou 10 não existe rectângulo

2.4. Observando o gráfico verificamos que o máximo da função é a ordenada do vértice da parábola, donde se conclui que a área é máxima quando $x = 5$.

Exercícios:

36. Uma bola atirada de baixo para cima, na vertical, atinge a altura h , em metros, dada por $h = 14,7t - 4,9t^2$ ao fim de t segundos.

36.1. Ao fim de quantos segundos atinge a bola a altura máxima?

36.2. Qual é essa altura máxima?

37. Um rectângulo de área A tem menos 4 cm de largura do que de comprimento (C).

37.1. Exprima A em função de C .

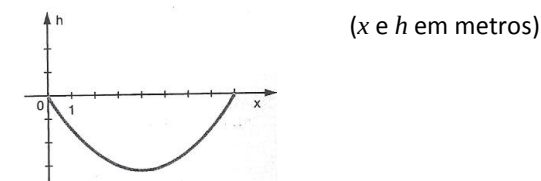
37.2. Sabendo que a área não pode exceder os 21 cm^2 qual o maior valor que C pode tomar?

38. Um dos catetos de um triângulo rectângulo tem mais 1 m do que o outro.

38.1. Exprima a área em função do cateto menor e determine o valor deste cateto para o qual a área é superior a 10 m^2 .

38.2. Determine o cateto menor sabendo que a hipotenusa tem mais 9 m que ele.

39. A secção transversal de uma piscina tem a forma de uma parábola sendo a equação dessa parábola definida por: $h = 0,2x(x - 8)$.



39.1. Calcule a largura e a profundidade máximas da piscina.

39.2. Para que valores de $x \in [0, 8]$ se tem $h \geq -1,4$?

40. Da varanda de uma casa, a 5m do solo, foi lançada, na vertical, uma bola para o ar. Após t segundos, a distância em metros, da bola ao solo é dada por $d(t) = 5 + 40t - 16t^2$

40.1. Calcule $d(0)$ e indique o significado destes valores.

40.2. Resolva a equação $d(t) = 5$. Qual é o significado da solução obtida?

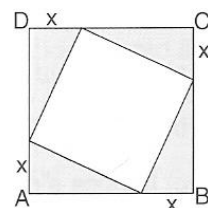
40.3. Qual será a altura máxima atingida pela bola? E em que momento é atingida essa altura?

41. Calcule as medidas dos catetos de um triângulo rectângulo de perímetro 24 cm e cuja hipotenusa mede 10 cm.

42. Considere a figura ao lado. O quadrado maior tem 100 m^2 de área.

42.1. Exprima em função de x a área de cada triângulo a sombreado.

42.2. Calcule os catetos desses triângulos se o quadrado menor tiver 90 m^2 .



Exercícios:

43. Num jogo de Basquetebol, um jogador converte um lançamento de três pontos. Tendo em conta que a altura (em metros) a que a bola se encontrava do solo em função do tempo que decorreu (em segundos) entre o instante em que a bola foi lançada e o instante em que atingiu o cesto é dada pela função f definida por $f(t) = -0,93t^2 + 2,32t + 2,1$ com $t \in [0, 2]$

43.1. Determine a altura a que a bola se encontrava do solo no momento do lançamento.

43.2. Determine a altura a que se encontra o cesto.

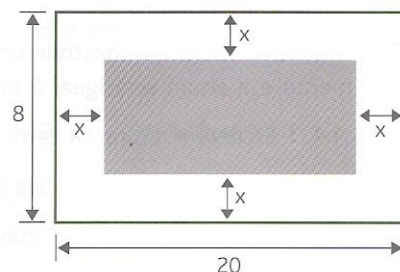
43.3. Qual foi a altura máxima atingida pela bola e em que instante a bola atingiu essa altura?

43.4. Se o jogador não tivesse acertado no cesto nem na tabela e a bola não tivesse sido interceptada, ao fim de quanto tempo a bola chegava ao solo?

44. Num terreno de 20×8 , pretende-se construir uma piscina com um passeio em seu redor de largura constante.

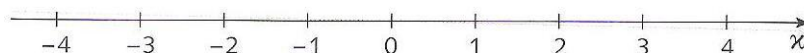
44.1. Escreva a expressão da área da piscina em função da largura do passeio.

44.2. Determine a largura do passeio de modo que a piscina, tenha um comprimento triplo da largura.



FUNÇÃO MÓDULO

Consideremos a recta real:



Módulo ou **valor absoluto** de um número a é a distância desse número à origem e representa-se por $|a|$.

Assim: $|2| = 2$ $|-3| = 3$ $|0| = 0$ $|-0,5| = 0,5$

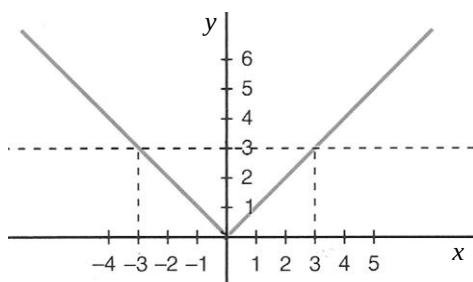
Dado $x \in \mathbb{R}$, chamamos módulo ou valor absoluto de x

ao número real definido por: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

À função definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x faz corresponder $|x|$ chama-se função módulo ou função valor absoluto.

Representemos graficamente a função:

x	$y = x $
-3	3
-1	1
0	0
1	1
3	3



Exercícios:

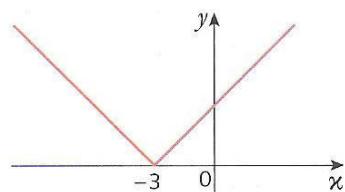
45. Defina analiticamente, sem utilizar o símbolo de módulo, as seguintes funções:

45.1. $f(x) = |x - 2|$ **45.2.** $g(x) = |1 - x|$

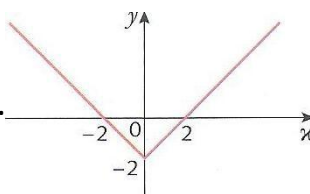
46. As funções representadas graficamente são do tipo $y = |x - b| + c$, ($b, c \in \mathbb{R}$).

Indique para cada uma, o valor de b e c .

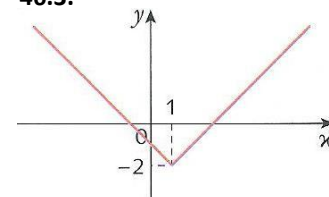
46.2.



46.1.



46.3.



Exemplo: Considere a função $g(x) = |x - 3|$.

1. Defina algebricamente $g(x)$, ou seja, defina a função sem usar o símbolo $|$.

2. Represente, graficamente, a função.

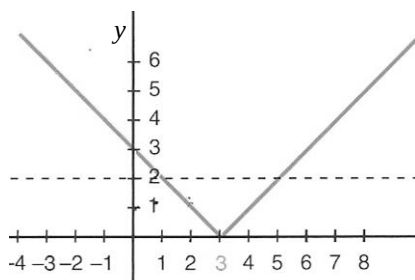
Resolução:

1.

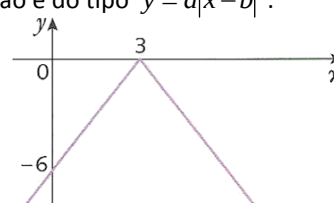
$$g(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

2.



Numa função módulo do tipo $f(x) = a|x - b| + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, o parâmetro a define a abertura do gráfico da função e os parâmetros b e c definem o valor do vértice do gráfico da função: $V(b, c)$

Exercícios: 47. Esboce o gráfico de: 47.1. $f(x) = - x+4$ 47.2. $g(x) = - x$ 47.3. $h(x) = x +2$ 47.4. $i(x) = x-3 +1$ 47.5. $j(x) = -3- x-1$	48. A função é do tipo $y = a x-b$. Indique o valor de a e b: 	49. De uma função f sabe-se que: $f(x) = a x-b +c$; $f(5) = 0$ $D'f =]-\infty, 1]$; f é crescente em $]-\infty, 3]$ 49.1. Esboce o gráfico de f. 49.2. Determine a, b e c.
---	--	--

▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES COM MÓDULOS

Exemplos:

- $|x| = 8 \Leftrightarrow x = 8 \vee x = -8$ $S = \{-8, 8\}$
- $|x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1$ $S =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
- $|x| \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 6 \wedge x \geq -6$ $S = [-6, 6]$
- $|x-8| = 2 \Leftrightarrow x-8 = 2 \vee x-8 = -2 \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 6$ $S = \{6, 10\}$
- $|x-1| > 3 \Leftrightarrow x-1 > 3 \vee x-1 < -3 \Leftrightarrow x > 4 \vee x < -2$
 $S =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$
- $|10-x| < 5 \Leftrightarrow |x-10| < 5 \Leftrightarrow x-10 > -5 \wedge x-10 < 5$
 $\Leftrightarrow x < 15 \wedge x > 5$ $S =]5, 15[$

Exercícios:

50. Resolva as equações:

- 50.1. $|x| = 4$ 50.2. $|2x| = -1$ 50.3. $|x-3| = 7$
- 50.4. $|1-4x| = 5$ 50.5. $|x-3| = |1-5x|$ (para terem o mesmo módulo, duas expressões são iguais ou simétricas)

51. Resolva as inequações:

- 51.1. $|7-x| < 1$ 51.2. $|2x-3| < 5$
- 51.3. $|1-x| > 2$ 51.4. $|3x| \leq 5$
- 51.5. $|8-2x| > 4$ 51.6. $|1-2x| \leq 5$

Propriedades do módulo de qualquer número real x :

- $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a, (a \geq 0)$ (se $a < 0$, a condição é impossível)
- $|x| < a \Leftrightarrow x < a \vee x > -a, (a > 0)$ (se $a \leq 0$, a condição é impossível)
- $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a, (a \geq 0)$ (se $a < 0$, a condição é universal)

▪ GRÁFICO DE $|f(x)|$ E DE $f(|x|)$

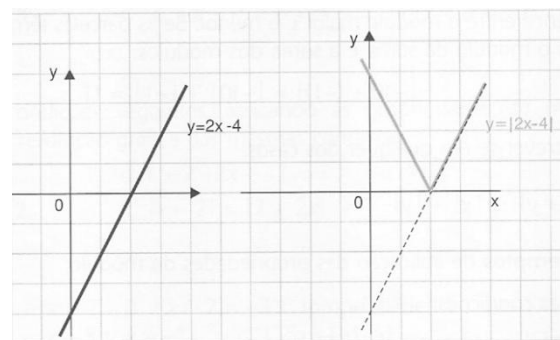
Conhecido o gráfico de $x \mapsto f(x)$ queremos determinar o de $x \mapsto |f(x)|$.

Nos pontos em que $f(x) \geq 0$ é $|f(x)| = f(x)$; e nos pontos onde $f(x) < 0$ é $|f(x)| = -f(x)$.

Exemplos

1. A partir do gráfico de $f(x) = 2x-4$ obter o gráfico de $g(x) = |f(x)| = |2x-4|$

Resolução



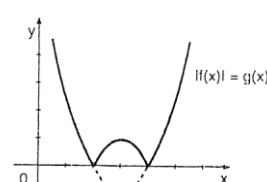
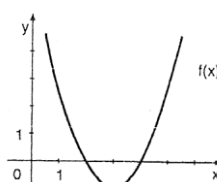
2. A partir do gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 8$ determinar o de $g(x) = |x^2 - 6x + 8|$.

Resolução

Como $f(x) = x^2 - 6x + 8$ é uma função quadrática com os zeros 2 e 4, temos:

- Com $x \leq 2 \vee x \geq 4$, $f(x) \geq 0$ e $g(x) = f(x)$
- Com $2 < x < 4$, $f(x) < 0$ e $g(x) = -f(x)$,

ou seja, quando f é positiva o gráfico de g é igual ao de f , quando f é negativa as ordenadas de g são simétricas das de f .



Basta desenhar acima de Ox o que está abaixo de Ox .

Conhecido o gráfico de $x \mapsto f(x)$ queremos determinar o de $x \mapsto f(|x|)$.

Nos pontos em que $x \geq 0$ é $f(|x|) = f(x)$; e nos pontos onde $x < 0$ é $f(|x|) = f(-x)$.

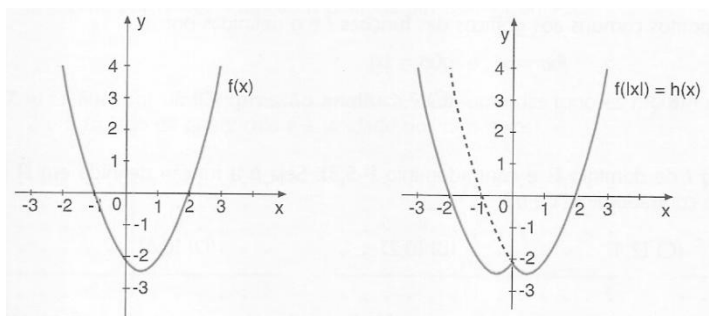
A função $f(|x|)$ é uma função par, ou seja $x=0$ é um eixo de simetria do seu gráfico.

Exemplos:

1. A partir do gráfico de $f(x) = x^2 - x - 2$ determinar o gráfico de $h(x) = f(|x|) = |x|^2 - |x| - 2$.

Resolução

Como $x \geq 0$ é $h(x) = f(x)$ e os gráficos são iguais; e, como h é função par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy.



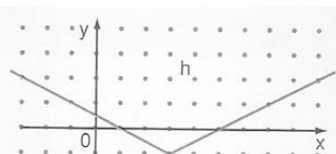
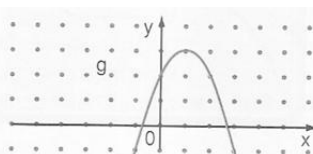
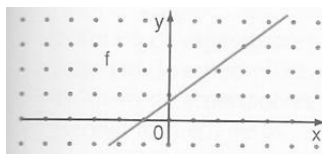
Exercícios:

52. Represente graficamente as seguintes funções:

52.1. $f(x) = |2x - 3|$ 52.2. $h(x) = |x^2 - 3|$

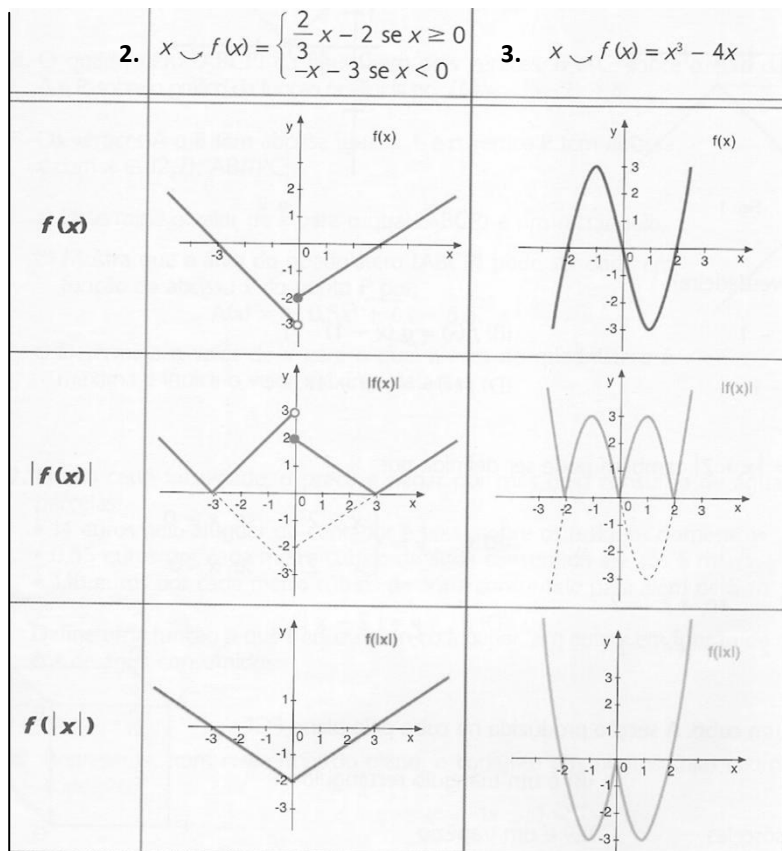
52.3. $g(x) = ||x| + 3|$ 52.4. $m(x) = |x^2 - x - 2|$

53. Considere as seguintes funções representadas:



53.1. Esboce o gráfico de $|f(x)|$, $|g(x)|$, $|h(x)|$.

53.2. Esboce o gráfico de $f(|x|)$, $g(|x|)$, $h(|x|)$.



TRANSFORMAÇÕES SIMPLES DE FUNÇÕES

No estudo da função quadrática, foram feitas algumas referências a transformações de funções e respectivos deslocamentos em termos gráficos.

A seguir, são sintetizados e generalizados algumas situações tendo por base exemplos intuitivos.

▪ $y = f(x) + a, a \in \mathbb{R}$ (TRANSLAÇÃO VERTICAL)

Exemplo:

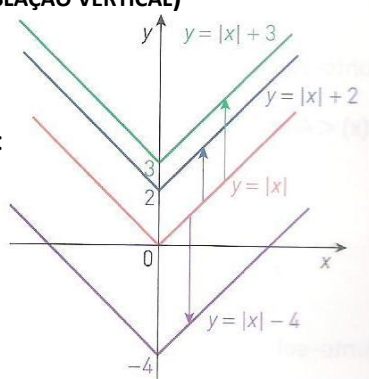
Seja f tal que $f(x) = |x|$.

Como obter os gráficos das funções:

$y = f(x) + 2 = |x| + 2$

$y = f(x) + 3 = |x| + 3$

$y = f(x) - 4 = |x| - 4$



Qualquer um dos gráficos das funções dadas pode ser obtido a partir do gráfico de f , efectuado um deslocamento na vertical – translação associada ao vector $(0, a)$.

▪ $y = f(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$ (TRANSLAÇÃO HORIZONTAL)

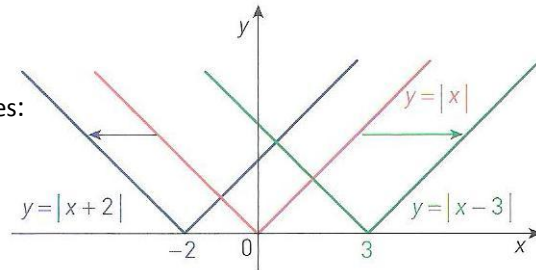
Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = |x|$.

Como obter os gráficos das funções:

$$y = f(x+2) = |x+2|$$

$$y = f(x-3) = |x-3|$$



Qualquer um dos gráficos das funções dadas pode ser obtido a partir do gráfico de f , efectuado um deslocamento na horizontal – translação associada ao vector $(a, 0)$.

▪ $y = f(-x)$ (SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO DAS ORDENADAS)

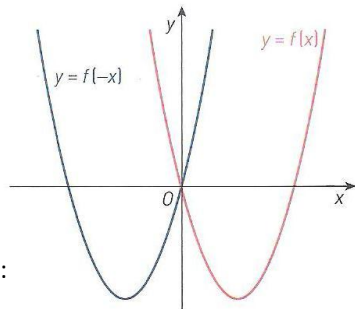
Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 4x$.

Se na expressão substituirmos x pelo seu simétrico, ou seja, $-x$, obtém-se a expressão $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 \times (-x) = x^2 + 4x$$

Graficamente:



Os gráficos das funções $f(x)$ e $f(-x)$ são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Conhecido o gráfico de f , para obter o gráfico de $y = f(-x)$ basta construir o gráfico simétrico de f em relação ao eixo Oy .

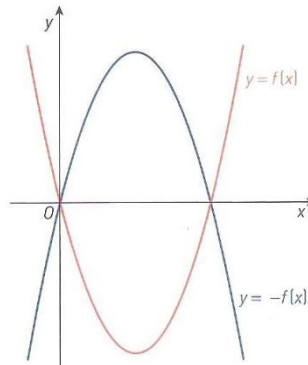
▪ $y = -f(x)$ (SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO DAS ABCISSAS)

Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 4x$.

Como obter o gráfico de

$$y = -f(x) = -(x^2 - 4x) = -x^2 + 4x$$



Os gráficos das funções $f(x)$ e $-f(x)$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas. Conhecido o gráfico de f , para obter o gráfico de $y = -f(x)$ basta construir o gráfico simétrico de f em relação ao eixo Ox .

▪ $y = af(x)$, $a \in \mathbb{R}$ (DILATAÇÃO/COMPRESSÃO NA VERTICAL)

$y = f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$ (DILATAÇÃO/COMPRESSÃO NA HORIZONTAL)

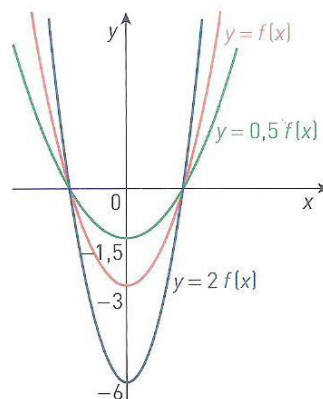
Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 3$.

Como obter os gráficos das funções:

$$y = 2f(x) = 2x^2 - 6$$

$$y = 0,5f(x) = 0,5x^2 - 1,5$$



- Se $|a| > 1$, diz-se que há uma dilatação vertical.

- Se $|a| < 1$, diz-se que há uma compressão vertical.

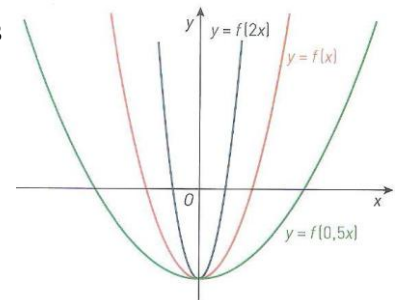
Exemplo:

Seja f tal que $f(x) = x^2 - 3$

Como obter os gráficos das funções:

$$y = f(2x) = 4x^2 - 3$$

$$y = f(0,5x) = 0,25x^2 - 3$$

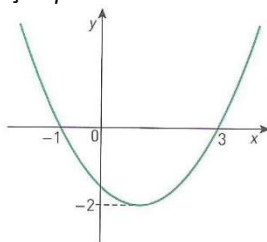


- Se $|a| > 1$, diz-se que há uma compressão horizontal.

- Se $|a| < 1$, diz-se que há uma dilatação horizontal.

Exercícios:

54. Uma representação gráfica da função f encontra-se na figura seguinte:



54.1. Indique o contradomínio da função h , sendo $h(x) = f(x) - 1$.

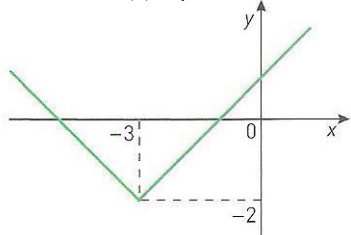
54.2. Determine $p \in \mathbb{R}$, de modo que $g(x) = f(x) + p$ não tenha zeros.

55. Considere a função f , definida por $f(x) = |x| - 2$.

55.1. Indique os zeros da função g sendo $g(x) = f(x + 1)$.

55.2. Estude o sinal da função h , sendo $h(x) = f(x - 4)$.

55.3. A função j tem a seguinte representação gráfica:



Indique o valor de k , sabendo que $j(x) = f(x + k)$

56. Considere a função f representada graficamente.

Em relação à função

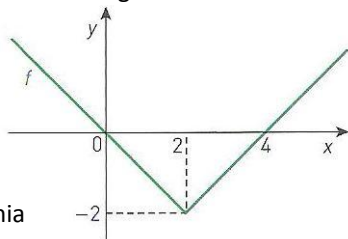
$y = f(-x)$, indique:

56.1. zeros.

56.2. extremos.

56.3. sinal.

56.4. intervalos de monotonia



57. Na figura encontra-se

representada a função h .

Esboce o gráfico da função:

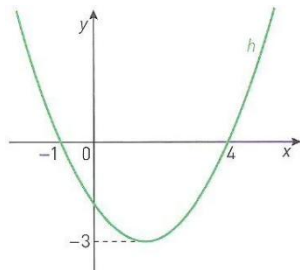
57.1. $h(x - 2)$

57.2. $h(x) + 3$

57.3. $|h(x)|$

57.4. $-h(x)$

57.5. $0,5 h(x)$



58. Observe a figura onde se encontra representada graficamente a função f e considere as funções definidas por:

$$g(x) = f(-x)$$

$$h(x) = f(x - 3)$$

$$i(x) = -f(x)$$

$$t(x) = |f(x)|$$

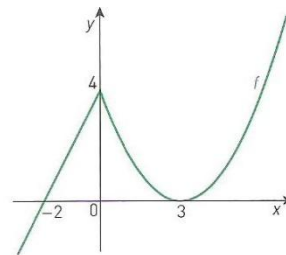
Indique:

58.1. os zeros de g .

58.2. o conjunto solução $h(x) < 0$.

58.3. os intervalos de monotonia da função i .

58.4. os extremos de t .



59. Considere a função f representada graficamente e

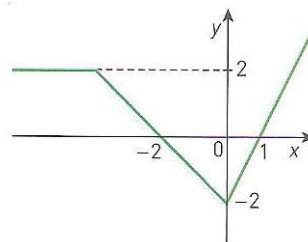
$$g(x) = f(3x)$$

$$h(x) = 3f(x)$$

59.1. Indique os zeros e o contradomínio de g e h .

59.2. Quantas soluções têm as seguintes equações:

a) $g(x) = -3$ b) $h(x) = -3$ c) $h(x) = 0$



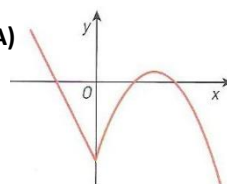
60. Considere os gráficos A, B e C e as funções tais que:

$$y = f(x)$$

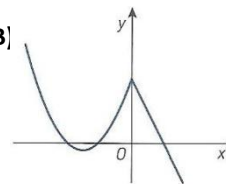
$$y = -f(x)$$

$$y = f(-x)$$

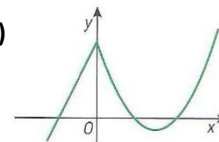
(A)



(B)



(C)



Faça a corresponder a cada gráfico a sua respectiva função.

FUNÇÕES POLINOMIAIS. POLINÓMIOS

POLINÓMIOS

Exemplos:

$A(x) = 4x^2 + 2x - 20$ (polinómio do 2º grau completo)

$B(x) = 4x + 10$ (binómio do 2º grau completo)

$C(x) = -6x^5$ (monómio do 5º grau)

$D(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ (polinómio do 3º grau incompleto, uma vez que lhe falta o termo independente)

$E(x) = 5x^2 - 3x + 4$ e $F(x) = 4 + 5x^2 - 3x$ são polinómios idênticos

$E(x) = 5x^2 - 3x + 4$ e $H(x) = -5x^2 + 3x - 4$ são polinómios simétricos

$C(x) = -6x^5$ e $J(x) = x^5$ são monómios semelhantes porque têm a mesma parte literal (x^5).

Um polinómio de grau n , na variável real x , é toda a expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_0$

Um polinómio com dois termos diz-se binómio.

Se o polinómio tem um só termo, diz-se monómio.

Um polinómio que apresenta todos os coeficientes iguais a zero diz-se polinómio nulo.

Um polinómio diz-se completo se e só se contiver todas as potências de x , desde x^n até ao termo independente.

Exercícios:

61. Calcule o valor de:

61.1. $t^2 - 6t + 10$, para $t = 2$ 61.2. $x^2 - 5x - 9$, para $x = -3$ 61.3. $m^3 - 9m$, para $m = -1$ e $m = 1$

62. Escreva por ordem decrescente das potências de x e indique o grau e os coeficientes dos vários termos:

62.1. $1 + 6x + 9x^2 - 8x^3$ 62.2. $3 - 9x^2 + 24x^4$ 62.3. $x^5 - 5x^3 - 6x^6 - 7x$

OPERAÇÕES COM POLINÓMIOS

> Adição

Basta reduzir os termos semelhantes (somar os monómios com igual parte literal).

Exemplo: Adicionemos os polinómios $A(x) = 5x^2 + 4x + 3$ e $B(x) = -2x^2 + 4x^3 - x - 5$

$$A(x) + B(x) = 5x^2 + 4x + 3 + (-2x^2 + 4x^3 - x - 5) = 4x^3 + 3x^2 + 3x - 2$$

> Subtracção

Para subtrair dois polinómios, adiciona-se ao polinómio aditivo o simétrico do polinómio subtrativo e, em seguida, reduzem-se os termos semelhantes.

Exemplo: Calculemos a diferença entre os polinómios $A(x)$ e $B(x)$ do exemplo anterior.

$$A(x) - B(x) = A(x) + (-B(x)) = (5x^2 + 4x + 3) + (2x^2 - 4x^3 + x + 5) = -4x^3 + 7x^2 + 5x + 8$$

> Multiplicação

Para multiplicar dois polinómios multiplica-se cada termo do primeiro polinómio pelo segundo polinómio e adicionam-se os produtos obtidos.

Exemplo: Efectuemos a multiplicação dos polinómios $A(x) = 2x^2 + 1$ e $B(x) = 3x^2 + 2x + 3$

$$A(x) \times B(x) = (2x^2 + 1)(3x^2 + 2x + 3) = 6x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x^2 - 2x - 3 = 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

O grau do produto de dois polinómios é a soma dos graus desses polinómios.

No exemplo $2 + 2 = 4$

Recorde:

Casos notáveis da multiplicação

Quadrado do binómio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1.º 2.º

Quadrado do 2.º

Dobro do produto do 1.º pelo 2.º

Quadrado do 1.º

Diferença de quadrados

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

1.º 2.º 1.º 2.º

Quadrado do 2.º

Quadrado do 1.º

> Divisão inteira de polinómios

No conjunto $\mathbb{N}$, efectuar a divisão inteira de um número **A** por um número **B** é encontrar um número natural **Q** (quociente) e um número natural **R** (resto), tais que

$$A = B \times Q + R, \text{ com } r < 0.$$

No conjunto dos polinómios tudo se passa de modo idêntico:

A divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$ consiste em determinar dois polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que:

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

sendo o grau de $R(x)$ menor que o grau de $B(x)$, ou $R(x) = 0$.

Quando $R(x) = 0$ diz-se que a divisão é exacta.

Exercícios:

63. Calcule e escreva o resultado na forma do polinómio reduzido e ordenado:

63.1. $(x^2 - 4x + 3) + (x - 2x^3 + 5x^2)$

63.2. $(x^2 - 4x + 3) - (x - 2x^3 + 5x^2)$

64. Efectue as operações indicadas e escreva o resultado na forma de polinómio ordenado e reduzido:

64.1. $(x+1)(x+3)$

64.2. $(2x-3)(x^2-5x)$

64.3. $(3x-1)(x^2+x+1)$

65. Indique o grau do polinómio produto de:

65.1. $x^3 - 5x^2 + 1$ por $x^2 - x - 3$

65.2. $x - 1$ por um polinómio do 5º grau.

65.3. um polinómio do 3º grau por um polinómio do 2º grau.

66. Sendo $A(x) = (x+2)(x+4)$ e

$B(x) = 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ determine o

polinómio $C(x)$ tal que:

66.1. $A(x) + C(x) = 2x - 1$

66.2. $B(x) = C(x) \times (x - 3)$

66.3. $A(x) = C(x) \times (x + 2)$

Nota:

Em $\mathbb{N}$: $38475 : 42 =$

$$\begin{array}{r} 38475 \quad | \quad 42 \\ -378 \quad \quad 914 \\ \hline 0067 \\ -42 \\ \hline 255 \\ -248 \\ \hline 007 \end{array}$$

$$38475 = 42 \times 914 + 7$$

Dividendo = divisor $\times$ quociente + resto

Algoritmo da divisão inteira

Exemplo:

Calculemos o quociente e o resto da divisão inteira do polinómio $A(x) = -3x^2 + 5x^4 + x - 1$ pelo polinómio $B(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r}
 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 -5x^4 - 10x^3 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 -10x^3 - 3x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 -10x^3 - 20x^2 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 17x^2 + x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 17x^2 + 34x \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 -33x - 1 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 33x + 66 \quad | \quad x + 2 \\
 \hline
 65
 \end{array}$$

1º) Ordenam-se os polinómios dividendo e divisor segundo as potências decrescentes de x , escrevendo também os termos nulos quando o dividendo não é um polinómio completo.

2º) Divide-se o termo de maior grau do polinómio dividendo pelo termo de maior grau do polinómio divisor. Obtemos o termo de maior grau do polinómio quociente.
 $5x^4 : x = 5x^3$

3º) Multiplica-se esse termo do quociente por cada um dos termos do polinómio divisor e escreve-se o simétrico do produto por baixo do monómio do mesmo grau que se encontra no dividendo.

$$\begin{array}{ll}
 2(5x^3) = 10x^3 & \text{simétrico } -10x^3 \\
 x(5x^3) = 5x^4 & \text{simétrico } -5x^4
 \end{array}$$

Em seguida adicionam-se os monómios do mesmo grau e obtém-se o primeiro resto parcial.

4º) Divide-se o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do polinómio divisor para obtermos o segundo termo do quociente.

$$-10x^3 : x = -10x^2 \quad \text{simétrico } 10x^2$$

O processo repete-se até que o polinómio resto tenha um grau inferior ao do polinómio divisor.

Portanto, $Q(x) = 5x^3 - 10x^2 + 17x - 33$ e $R(x) = 65$.

O grau do quociente é igual à diferença entre os graus do dividendo e do divisor.

O quociente é de grau 3: grau 4 (do dividendo) – grau 1 (do divisor).

Exercícios:

67. Calcule e escreva o resultado na forma do polinómio reduzido e ordenado:

67.1. $(x+1)^2 - 3x(-x+1)$

67.2. $(x^2+4) - (2-x)(2+x)$

67.3.

$$-(x-3)^2 - (x-1)(x+3)$$

68. Determine o quociente e o resto da divisão inteira de:

68.1. $3x^4 - 4x^3 - 5x + 10$ por $3x + 2$

68.2. $x^4 - 8$ por $x^2 + 2$

68.3. $x^4 - 8$ por $x^2 + x$

69. Determine o polinómio que:

69.1. dividido por

$x^2 + 3x - 1$ tem como quociente $3x - 2$ e resto $5x + 4$.

69.2. dividido por $x^3 - 1$

tem como quociente $x^2 - 1$ e resto $x - 1$.

69.3. dividido por $x - 1$ tem como quociente $x^2 + x + 1$ e resto zero.

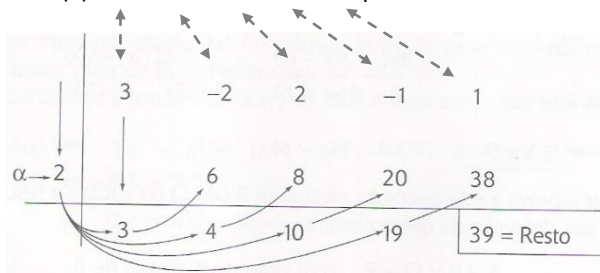
M.A.(6)

Regra de Ruffini

Quando, na divisão inteira de polinómios, o divisor é um polinómio de grau 1, em particular do tipo $x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, o procedimento exposto através do algoritmo da divisão dá lugar a um método simples denominado por Regra de Ruffini, que permite determinar os coeficientes do polinómio quociente e resto da divisão (grau zero).

Exemplo 1:

Dividir $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $x - 2$



$$Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 10x + 19$$

Sendo $A(x)$ um polinómio do 4º grau, o quociente da divisão por $x - 2$ é um polinómio do 3º grau.

Exercício:

70. Use a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto de cada uma das divisões:

70.1. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ por $x - 1$

70.2. $4x^4 - 5x^2 + 8$ por $x + 0,5$

70.3. $x^3 - 5x + 4$ por $x - 3$

70.4. $x^4 - 5x^2 + 4$ por $x + \sqrt{2}$

70.5. $3x^4 - 2x^2 + 1$ por $x + \frac{2}{3}$

Exemplo 2:

Use a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 - x^2 + 2x + 6$ por $2x + 4$
 Repare que $2x + 4 = 2(x + 2)$.

Então, se $P(x) = (x + 2) \times Q(x) + R$, será $P(x) = 2(x + 2) \times \frac{Q(x)}{2} + R$.

Ou seja, o quociente da divisão de $P(x)$ por $2x + 4$ é metade do quociente da divisão de $P(x)$ por $x + 2$; o resto é o mesmo

	1	-1	2	6
-2		-2	6	-16
	1	-3	8	-10

$$Q(x) = \frac{x^2 - 3x + 8}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 ; R(x) = -10$$

Em geral, para dividir $P(x)$ por $ax + b$, e tendo em atenção que

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right), \text{ divide-se } P(x) \text{ por}$$

$x + \frac{b}{a}$, depois divide-se o quociente obtido por a e o resto não se altera.

Exercício:

71. Use a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto de cada uma das divisões:

71.1. $x^3 - 3x^2 + x - 2$ por $2x - 6$ **71.2.** $x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 15$ por $3x - 1$

TEOREMA DO RESTO

Calculemos $P(2)$ para o exemplo 1 e $P(-2)$ para o exemplo 2:

Exemplo 1: $P(2) = 3 \times 2^4 - 2 \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 + 1 = 39$

Exemplo 2: $P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 2 \times (-2) + 6 = -10$

Verificamos que o valor do resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $P(a)$.

Teorema do resto:

O resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ é o valor numérico do polinómio $P(x)$ para $x = a$ e designa-se por $P(a)$.

Outras conclusões:

- Um número a diz-se raiz ou zero de um polinómio se $P(a) = 0$
- Dizer que a é raiz de um polinómio equivale a dizer que esse polinómio é divisível por $x - a$.

Exercícios:

72. Calcule sem efectuar a divisão o resto da divisão de $x^3 - 3x^2 - 4x + 6$ por:

72.1. $x - 3$

72.2. $x + 2$ **72.3.** $x - \sqrt{2}$

72.4. $2x - 4$ **72.5.** $x - \frac{1}{3}$

73. Sem efectuar a divisão determine para que valor de m :

73.1. $y^3 - my^2 + y + 6$ é divisível por $y + 2$.

73.2. $-6 - 2t + mt^2 + 5t^4$ dividido por $t - 1$ dá resto 4.

74. Sem efectuar as divisões:

74.1. Investigue se $2x^4 - 3x - 26$ é divisível por $x - 2$.

74.2. Determine o valor de k para o qual o polinómio $P(x) = x^3 - kx^2 - 2x - 4$ é divisível por $x + 2$.

74.3. Indique quais dos números $-2, 0, 1, 2$ e 3 são raízes do polinómio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

ZEROS E FACTORIZAÇÃO DE UM POLINÓMIO

O resultado anterior revela-se muito útil quando queremos decompor um polinómio em factores de primeiro grau. Estudemos alguns exemplos.

Exemplo 1: Decompor em factores o polinómio $P(x) = 3x^2 - x - 4$:

Como o polinómio é do 2º grau utilizemos a fórmula resolvente para calcular as suas raízes.

$$3x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -1$$

Como $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = \frac{4}{3}$, $P(x)$ é divisível por $x + 1$ e por $x - \frac{4}{3}$.

Então: $P(x) = 3(x + 1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$

Exemplo 2: Decompor o polinómio $A(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ sabendo que é divisível por $x + 1$.

Se o polinómio é divisível por $x + 1$, -1 é uma raiz do polinómio. Calculemos o quociente de $A(x)$ por $x + 1$ aplicando a regra de Ruffini:

-1	2	-7	-14	-5
	2	-9	-5	0

$$Q(x) = 2x^2 - 9x - 5$$

Podemos portanto escrever $A(x) = (x + 1)(2x^2 - 9x - 5)$. Mas como o segundo factor é um polinómio de grau 2, utilizamos a fórmula resolvente para determinar, se existirem, as raízes deste factor.

$$2x^2 - 9x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 11}{4} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Temos assim as raízes $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ e $\alpha_3 = 5$; $a_0 = 2$

$$A(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 5)$$

Exemplo 3: Decompor em factores o polinómio $B(x) = 3x^4 - 9x^2 + 6$ sabendo que -1 e 1 são raízes do polinómio.

Calculemos o quociente de $3x^4 - 9x^2 + 6$ por $x + 1$ e por $x - 1$ utilizando a regra de Ruffini.

-1	3	0	-9	0	6
	3	-3	3	6	-6
1	3	-3	-6	6	0
	3	0	-6	0	-6
	3	0	-6	0	0

$$Q(x) = 3x^2 - 6$$

Podemos portanto escrever $B(x) = (x + 1)(x - 1)(3x^2 - 6)$

Vamos agora determinar, se existirem, as raízes de $3x^2 - 6$

$$3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

O polinómio tem 4 raízes: $-\sqrt{2}$, -1 , 1 , $\sqrt{2}$ e $a_0 = 3$. Então: $B(x) = 3(x + \sqrt{2})(x + 1)(x - 1)(x - \sqrt{2})$

▪ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DE GRAU SUPERIOR A 2

Não dispondo de fórmulas resolventes, a resolução de equações e inequações do 3º e do 4º grau far-se-á pela lei do anulamento do produto, nos casos em que é fácil encontrar uma ou duas raízes algébricas, ou graficamente.

Exemplo 1: Sendo $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, resolver a equação $P(x) = 0$

É necessário “descobrir” uma raiz do polinómio. Como o termo independente é 2, é possível que o polinómio $P(x)$ seja divisível por $x - 2$. Vamos verificar utilizando a regra de Ruffini.

2	1	-2	-1	2
	1	0	-1	0

$Q(x) = x^2 - 1$ As raízes de $x^2 - 1$ são -1 e 1 .

Então $P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1)$. Agora que o polinómio está decomposto em factores, podemos resolver a equação $P(x) = 0$ através da lei do anulamento do produto.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2) = 0 \vee (x + 1) = 0 \vee (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \vee x = 1$$

Exercícios:

75. Decompõe em factores os polinómios seguintes:

75.1. $x^2 - 5x + 6$

75.2. $6x^2 - 19x + 10$ **75.3.** $66 + 5x - x^2$

75.4. $x^3 + 2x^2 + 5x$ **75.5.** $x^3 - 49x$

75.6. $x^3 + 2x^2 - x + 6$, sendo -3 uma das raízes.

75.7. $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$, sabendo que admite as raízes 1 e -1 .

75.8. $-x^3 + x^2 + x + 95$, sabendo que é divisível por $x - 5$

76. De um polinómio $P(x)$ de terceiro grau, sabemos que:

* -2 , 2 e 3 são os seus zeros

* $P(-1) = 1$

Determine $P(x)$.

77. Determine o polinómio $A(x)$ de quarto grau, sabendo que 2 e 1 são zeros de multiplicidade 2 e o resto da divisão de $A(x)$ por $x + 1$ é 3 .

Um polinómio tiver grau n poderá ter no máximo n raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

A sua decomposição será:

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Em que a_0 é o coeficiente do termo de mais alto grau

Exemplo 2: Resolver a equação $2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$ sabendo que uma das raízes é -2 .

Vamos dividir $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ por $x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 9 & 12 & 4 \\ -2 & & -4 & -10 & -4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^2 + 5x + 2$$

As raízes de $2x^2 + 5x + 2$ são -2 e $-\frac{1}{2}$

$$P(x) = 2(x+2)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Agora que o 1º membro da equação está decomposto num produto de factores podemos resolver a equação através da lei do anulamento do produto. Repara que o polinómio tem duas raízes -2 , ou seja, -2 é raiz dupla.

A raiz $-\frac{1}{2}$ é raiz simples.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \vee x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$$

Exemplo 3: Considere $P(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4$ e determine o conjunto de valores de x para os quais:

a) $P(x) = 0$ (equação biquadrada)

b) $P(x) > 0$ (inequação)

Resolução:

a) A equação $4x^4 - 15x^2 - 4 = 0$ é do 4º grau e tem nulos os termos do 3º grau e do 1º grau.

A esta equação chama-se equação biquadrada.

Para resolvermos uma equação biquadrada, fazemos uma

mudança de variável de modo a obter uma equação do 2º grau.

Se na equação $4x^4 - 15x^2 - 4 = 0$ substituirmos x^2 por y , vem

$$4y^2 - 15y - 4 = 0.$$

Calculemos as raízes desta nova equação.

$$y = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4 \times 4 \times (-4)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow y = \frac{15 \pm 17}{8} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = -\frac{1}{4}$$

Como $x^2 = y$, vem

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2 \quad \text{e} \quad x^2 = -\frac{1}{4} \text{ é impossível}$$

$$\text{Então } P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$S = \{-2, 2\}$$

b) Trata-se de resolver a inequação $P(x) > 0$

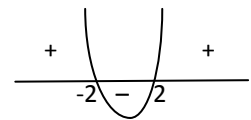
Decompondo o 1º membro em factores, vem

$$4\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) > 0$$

Visto que $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, temos que estudar

$$\left(x^2 - 4\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$



O conjunto das soluções é $S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Exemplo 4: Determine quais os números reais cujo cubo é menor que o próprio número.

Resolução:

$$x^3 < x \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) < 0$$

Neste caso qualquer dos factores pode ser positivo ou negativo, pelo que é conveniente organizar um quadro onde se registam os sinais de cada um dos factores.

O factor x anula-se para $x = 0$, e é do 1º grau; o factor $x^2 - 1$ anula-se para $x = \pm 1$, é do 2º grau e é positivo fora do intervalo das raízes.

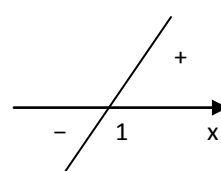
Marcam-se num eixo os valores que anulam cada um dos factores, por ordem crescente, e sob ele constrói-se o quadro de sinais.

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
1.º factor: x	-	-	0	+	+		
2.º factor: $x^2 - 1$	+	0	-	-	0	+	
Produto: $x(x^2 - 1)$	-	0	+	0	-	0	+

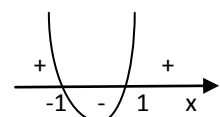
O produto é negativo para $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Os números reais que satisfazem esta condição são os desta reunião de intervalos.

Se a condição fosse $x^3 \leq x$, o conjunto das soluções seria $S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$x - 1$



$x^2 - 1$



Exercícios:**78.** Resolva as equações:

78.1. $p^4 - 13p^2 + 36 = 0$

78.2. $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

78.3. $16x^4 - 8x^2 - 1 = 0$

78.4. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, sabendo que tem as raízes 2 e 3. **78.5.** $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$, sabendo que tem a raiz 1

79. Resolva cada uma das equações depois de descobrir uma das raízes:

79.1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

79.2. $m^3 + 3m^2 - 4m - 12 = 0$

80. O polinómio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$ admite raízes que são divisores inteiros do termo independente.**80.1.** Decomponha $P(x)$ em factores.**80.2.** Resolva a equação $P(x) = 0$ **81.** Resolva as inequações:

81.1. $x^3 - 6x^2 + 8x \leq 0$

81.2. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$

81.3. $(x-2)^2 \times (x-1)^3 \geq 0$

81.4. $(x^2 - 9)(x+2) < 0$

81.5. $m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 8m - 4 \leq 0$

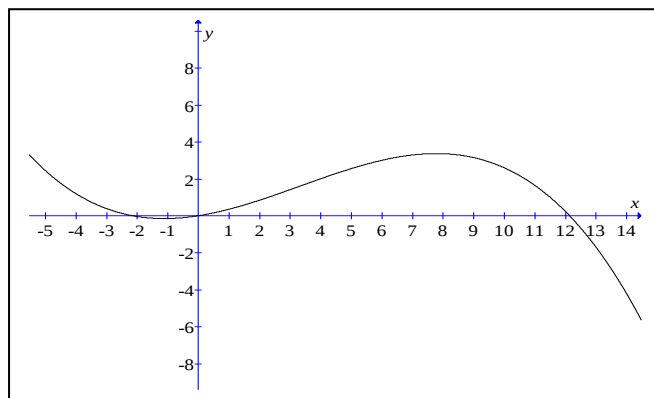
81.6. $(3-x)(x^2 - 100) \leq 0$

82. Considere o polinómio $P(x) = 3x^4 - ax^2 + 1$ com $a \in \mathbb{R}$.**82.1.** Determine a de modo que o polinómio seja divisível por $x + 1$.**82.2.** Considere $a = 2$ e, resolva a condição $P(x) \geq 0$ **83.** Determine os números reais tais que o seu quadrado é maior que o dobro do seu cubo.**▪ FUNÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU SUPERIOR AO 2º, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS****A acção de um medicamento**

O efeito de um medicamento $E(t)$, numa escala de 0 a 15, t em horas após a sua administração, é aproximadamente dado pela função:

$$E(t) = -0,01t^3 + 0,1t^2 + 0,26t$$

1. Passados 30 minutos qual o valor do efeito do comprimido?
2. Se o António tomou o medicamento às 12h 40min, a que horas o medicamento terá o seu máximo efeito?
3. A que horas o medicamento deixa de produzir efeito?

**O custo das acções**

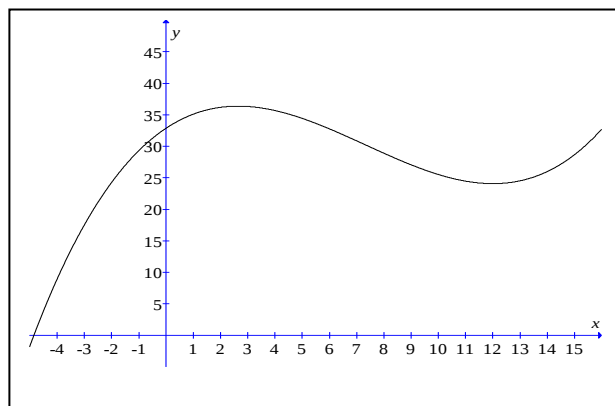
Um especialista em Bolsa de Valores concluiu que o custo de cada acção de uma dada empresa cotada na Bolsa é dada por:

$$c(t) = 0,03t^3 - 0,66t^2 + 2,87t + 32,8$$

 $c(t)$ em euros e t em dias ($0 \leq t \leq 14$) $t = 0$ corresponde a 1 de Abril de 2007

Suponha que em todos os dias do mês pode comprar e vender acções.

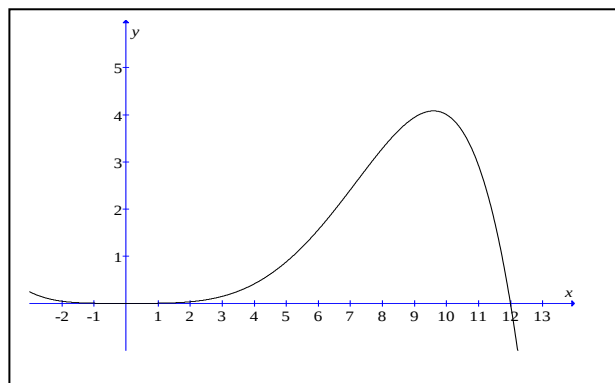
1. Se tivesse que vender acções durante a primeira quinzena de Abril, qual o dia em que o devia fazer? Porquê?
2. Se tivesse que comprar acções durante a primeira quinzena de Abril, qual o dia em que o devia fazer? Porquê?

**Uma composição matemática**

Às 12h e 30min um depósito de água estava vazio. t horas após a altura da água era dada em metros por:

$$h(t) = -0,02t^3 (0,01t^2 - 0,12t), \quad 0 \leq t \leq 12$$

Escreva um pequeno texto, usando o gráfico, onde explique o que aconteceu à altura da água do depósito durante as 12 horas que se seguiram às 12h e 30min.



TEMA 3

ESTATÍSTICA

INTRODUÇÃO

A **Estatística** é a ciência que se dedica à obtenção de informação e respectivo tratamento inicial, com a finalidade de, através da aplicação adequada do cálculo de probabilidades, inferir de uma amostra para a população, e eventualmente mesmo prever a evolução futura de um fenómeno (previsão).

Referência Histórica

Desde as antigas civilizações que existem registos históricos da presença de processos estatísticos em diversos domínios. Por exemplo, no Egipto, registos datados de 2900 a. C. fazem referência ao recenseamento da pessoas. Mais tarde, necessidades ligadas à mão-de-obra, à fiscalidade e a interesses militares levam a recenseamentos mais diversificados. Ao longo dos tempos a organização e a sofisticação dos registos foi intensificada.

No entanto, a estatística como ciência tem a sua origem no século XVIII por influência de duas correntes, uma na Alemanha e outra na Inglaterra.

Na corrente alemã destaca-se Gottfried Achenwall (1719-1772), considerado por alguns autores o “pai” da palavra estatística.

Na corrente inglesa destacam-se dois nomes, John Graunt (1620-1674) e William Petty (1623-1687). John Graunt usou as tábuas de mortalidade para fazer uma análise exaustiva do número de pessoas que morriam de várias doenças. Além disso mostrou que nasciam mais homens do que mulheres.

Em 1885 foi fundada na Holanda uma das mais antigas associações científicas internacionais – o Instituto Internacional de Estatística (ISI – International Statistical Institute) –, que reúne periodicamente, a cada dois anos.

Em Dezembro de 1998 foi criado o Instituto Nacional de Estatística (INE) em São Tomé e Príncipe.



Instituto Nacional de Estatística de São Tomé e Príncipe



John Graunt (1620-1674)



Sir William Petty (1623-1687)



International Statistical
Institute

OBJECTO DA ESTATÍSTICA. VOCABULÁRIO ESTATÍSTICO

▪ POPULAÇÃO E AMOSTRA

População ou universo estatístico é o conjunto dos elementos com uma ou mais características comuns, acerca da qual se pretende efectuar um estudo. A população sendo um conjunto de elementos, pode ser finita ou infinita.

Unidade estatística é a designação dada a cada elemento que constitui a população.

Mas, por exemplo, num estudo sobre os hábitos alimentares dos africanos não seria possível analisar todos os elementos da população, pois a sua dimensão é vastíssima.

Neste caso, é necessário recorrer a uma amostra representativa.

Amostra é um subconjunto finito da população, em que as características a estudar são, com a maior aproximação possível, iguais às da população inicial.

Para além das vantagens imediatas que o uso de uma amostra traz a um estudo estatístico: o custo do estudo diminui e torna-se mais rápido. É obrigatório o uso de uma amostra quando a dimensão da população é infinita e se a observação implicar a destruição das unidades estatísticas.

Exemplos:

- Fazer um estudo sobre a temperatura ambiente, numa cidade, a uma determinada hora. Não é possível conhecer a temperatura em todos os pontos da cidade. Neste caso, são seleccionados alguns pontos, onde será feito o registo da temperatura.
- Fazer um estudo sobre o valor nutritivo dos ovos produzidos num aviário. Neste caso não é viável analisar todos os ovos, pois implicaria a destruição de toda a produção.

No entanto, para que a amostra seja representativa da população em estudo temos que ter em conta alguns critérios: imparcialidade – todos os elementos da população devem ter igual probabilidade de ser seleccionados; representatividade – tem de ser definida no início do estudo e ser proporcional às características da população; dimensão – deve ser suficiente e necessária para que seja possível abranger toda a variedade de subgrupos da população.

▪ RECENSEAMENTO E SONDAGEM

Recenseamento ou censo é um estudo estatístico realizado sobre toda a população.

Exemplo: O IV Recenseamento Geral da População e da Habitação 2012 que decorreu em São Tomé e Príncipe.

Sondagem é um estudo estatístico realizado a partir de uma amostra.

Exercícios:

1. Observe o estudo sobre o número de estrangeiros que entraram em STP em 2006.

Número de estrangeiros que entraram em STP em 2006			
Motivo	Via:	Aérea	Marítima
Serviço		2875	116
Férias		3347	8
Turismo		3053	267
Visita		908	3
Negócios		589	19
Outros		1164	25
Total		11.936	438

Fonte: Serviço de Migração e Fronteiras

1.1. Quantos estrangeiros entraram em São Tomé e Príncipe em Turismo.

1.2. Qual a percentagem de estrangeiros que chegaram de avião a STP para fazer negócios.

2. Indique, justificando, em quais das situações seguintes é mais conveniente estudar toda a população ou apenas uma amostra:

- 2.1. a duração de uma marca de pilhas produzidas por uma fábrica.
- 2.2. a altura de todos os turistas estrangeiros durante o ano de 2009, em São Tomé e Príncipe.
- 2.3. o peso de cinco amigos.
- 2.4. a preferência clubística dos santomenses.
- 2.5. a disciplina preferida dos alunos de uma turma.

3. Pretende-se fazer um estudo sobre o número de irmãos dos alunos da 10ª classe do Liceu Nacional. Indique:

- 3.1. a população em estudo.
- 3.2. a unidade estatística.

4. Dê um exemplo de um estudo estatístico no qual deva ser utilizada:

- 4.1. apenas uma amostra.
- 4.2. uma amostra ou o universo estatístico.

5. Justifique se se trata de boas ou más amostras as que foram usadas nas seguintes situações:

- 5.1. Para saber a opinião sobre o desenvolvimento da indústria de restauração em São Tomé, auscultou-se a opinião das empresas de maior volume de vendas no último ano.
- 5.2. O canal televisivo TVS pediu aos telespectadores que no fim de um debate telefonassem para uma de duas linhas telefónicas, respondendo se concordavam com o convidado A ou com o convidado B.

▪ VARIÁVEL ESTATÍSTICA

Variável estatística ou carácter estatístico é o atributo ou a característica sobre a qual se pretende fazer o estudo.

Podemos, considerar vários tipos de variáveis que depois de observadas vão constituir os dados estatísticos.

> Variáveis qualitativas são as que exprimem uma qualidade, não podendo ser mensuráveis.

Exemplo: cor dos olhos

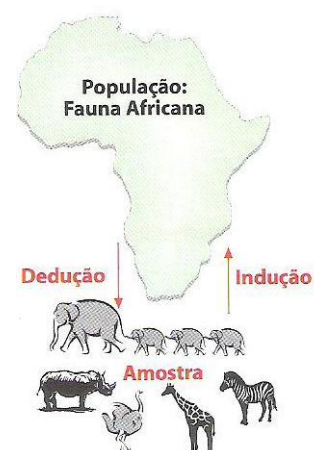
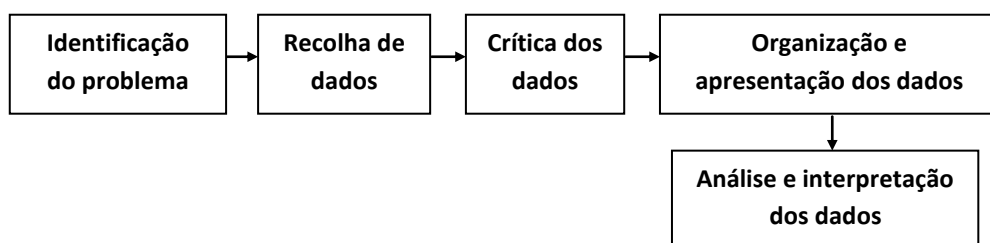
> Variáveis quantitativas são as mensuráveis e podem ser:

- discretas: assumem um número finito ou infinito numerável. **Exemplo:** idade
- contínuas: assumem um número infinito não numerável. **Exemplo:** peso

▪ ESTATÍSTICA DESCRITIVA, ESTATÍSTICA INDUTIVA

Estatística descritiva baseia-se essencialmente na recolha, organização, apresentação e interpretação de dados.

Etapas de um estudo estatístico:



Estatística indutiva tem como objectivo a inferência de conclusões para toda a população a partir do estudo da amostra.

Exercícios:

6. A empresa de telecomunicações CST tenciona por no mercado um novo telemóvel. Para descobrir qual seria a aceitação do produto, encomendou um estudo de mercado. São Tomé e Príncipe tem cerca de 165 000 habitantes e foram consultados telefonicamente, ao acaso, 1000 pessoas. Conclui-se que apenas 2% da população manifesta intenção de compra do referido produto.

6.1. Indique a população e a amostra deste estudo.

6.2. Indique, justificando, se a conclusão deste estudo é resultado de Estatística descritiva ou Estatística indutiva.

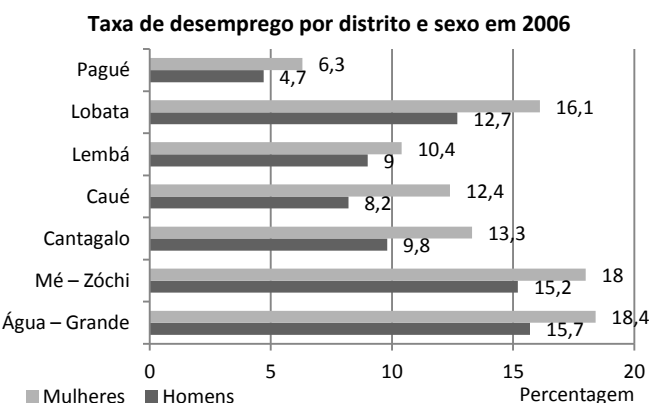
7. Das seguintes características de uma população, indique as que são qualitativas e as que são quantitativas.

- | | |
|--------------------------------|--|
| 7.1. naturalidade. | 7.2. classificação a Matemática. |
| 7.3. número de calçado. | 7.4. preferências desportivas. |
| 7.5. grau académico. | 7.6. actividades nos tempos livres. |

8. Das seguintes variáveis, indique as que são discretas e as que são contínuas:

- 8.1.** número de vizinhos.
- 8.2.** tempo gasto a ver televisão.
- 8.3.** capacidade das latas de refrigerante.
- 8.4.** idade (em anos) dos empregados de uma fábrica.

9. Observe o estudo sobre a taxa de desemprego da população de São Tomé e Príncipe em 2006.



9.1. Qual a percentagem de homens que se encontravam desempregados em 2006 no distrito de Lembá?

9.2. Qual é o distrito em que a taxa de desemprego é menor?

9.3. Em que distrito é que a diferença entre a taxa de desemprego entre os sexos é maior?

9.4. Indique os motivos da taxa de desemprego variar tanto do distrito de Pagué para o distrito de Água - Grande.

9.5. Porque será que a taxa de desemprego das mulheres é maior do que a dos homens em todos os distritos?

ORGANIZAÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE DADOS

Quando se realizam estudos estatísticos, a recolha de dados por si só não permite dar resposta a algumas questões. Na Generalidade dos casos, essas respostas passam a ser quase imediatas se os dados estiverem organizados, recorrendo a tabelas ou gráficos.

A forma de organizar e apresentar a informação depende, em grande parte, do tipo de variável em estudo.

■ TABELAS DE FREQUÊNCIAS

Num estudo estatístico, a variável assume determinados valores que se designam por x_i .

Frequência absoluta, n_i , é o número de vezes que um determinado valor x_i se regista na população estudada.

Se a variável assume k valores distintos, o número total de observações é igual a: $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Frequência relativa, f_i , de um valor ou modalidade é o quociente entre a frequência absoluta e o número total de observações. Deste modo, temos que $f_i = \frac{n_i}{N}$

Exemplo A – Variáveis discretas: A directora de uma turma da 9ª classe, resolveu fazer um estudo estatístico sobre o número de faltas dadas pelos alunos durante o 1º período e obteve os seguintes resultados:

0 0 1 2 1 4 3 2 0 4 0 2 1 0
1 1 2 2 1 3 4 2 1 2 2 1 5 1 3

Construiu a respectiva tabela de **frequências absolutas e relativas**

Nº de faltas x_i	Frequência absoluta n_i	Frequência relativa f_i
0	5	0,17 ou 17%
1	9	0,31 ou 31%
2	8	0,28 ou 28%
3	3	0,1 ou 10%
4	3	0,1 ou 10%
5	1	0,04 ou 4%
Total	$N = 29$	1,00 ou 100%

Por vezes torna-se útil estudar a **frequência absoluta acumulada** (N_i) ou a **frequência relativa acumulada** (F_i)

Nº de faltas x_i	Frequência absoluta n_i	Frequência relativa f_i	Frequência absoluta acumulada N_i	Frequência relativa acumulada F_i
0	5	0,17 ou 17%	5	17%
1	9	0,31 ou 31%	14	48%
2	8	0,28 ou 28%	22	76%
3	3	0,1 ou 10%	25	86%
4	3	0,1 ou 10%	28	96%
5	1	0,04 ou 4%	29	100%
Total	$N = 29$	1,00 ou 100%		

A frequência absoluta acumulada, N_i , e a frequência relativa acumulada, F_i , obtêm-se adicionando as frequências absolutas e relativas, respectivamente, até ao valor considerado da variável estatística.

Exercícios:

10. Perguntou-se a vinte pessoas o número de vezes que tinham ido à praia no último mês e obtiveram-se os seguintes dados:

3 5 4 4 2 3 3 3 5 3
2 6 1 2 3 3 6 5 4 4

10.1. Caracterize a variável estatística apresentada.

10.2. Organize os dados numa tabela de frequências.

10.3. Indique a percentagem de pessoas que foram à praia, pelo menos, três vezes.

11. O número de pães comprados pela Sra. Rosa em cada um dos dias ao longo de duas semanas, foi o seguinte:

12 10 10 10 8 24 0
12 10 10 8 12 24 0

Relativamente à variável número de pães comprados pela Sra. Rosa construa a tabela de frequências absolutas e relativas.

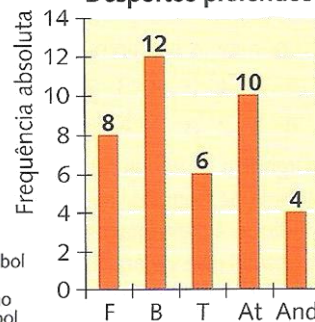
12. Os alunos de uma turma revelaram quais os seus desportos preferidos. No gráfico seguinte encontram-se representados os dados obtidos.

12.1. Quantos alunos responderam ao inquérito?

12.2. Qual a percentagem de alunos que preferem futebol? E ténis?

12.3. Construa a tabela de frequências associada.

Desportos preferidos



Legenda: F – Futebol
B – Basquetebol
T – Ténis
At – Atletismo
And – Andebol

Exercícios:	14. Construa a tabela de frequências de acordo com os dados da seguinte tabela:
13. O sexo de vinte pessoas escolhidas ao acaso foi:	
M F F M M M F F M M	
F M F F M M M M F M	
Construa a tabela de frequências associada.	

Qual a sua fruta preferida?	Jaca	Manga	Manga	Jaca
	Carambola	Banana	Manga	Jaca
	Carambola	Manga	Manga	Banana

Exemplo B – Variáveis Contínuas: Fez-se um estudo sobre as alturas, em metros, dos jogadores de uma equipa e os dados obtidos estão indicados abaixo:

1,60 1,70 1,62 1,80 1,83 1,82 1,71 1,68 1,68 1,65 1,62
1,64 1,80 1,81 1,78 1,76 1,69 1,64 1,63 1,67 1,68 1,83
1,70 1,71 1,69

Neste caso vamos optar por construir uma tabela com os dados agrupados em classes.

Como temos 25 dados vamos utilizar 5 classes uma vez que $2^4 < 25$ e $2^5 > 25$.

Agora, temos que calcular a amplitude da amostra calculando a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo dos dados:

$1,83 - 1,60 = 0,23$, e dividindo-a de seguida pelo número de classes obtemos a amplitude de cada classe: $0,23 : 5 = 0,46$.

Podemos definir para amplitude da classe 0,05 (5 cm) e escolher como limite inferior da primeira classe 1,60.

Classes	n_i	f_i	N_i	F_i
[1,60 ; 1,65[	6	0,24	6	0,24 ou 24%
[1,65 ; 1,70[	7	0,28	13	0,52 ou 52%
[1,70 ; 1,75[	4	0,16	17	0,68 ou 68%
[1,75 ; 1,80[	2	0,08	19	0,76 ou 76%
[1,80 ; 1,85[	6	0,24	25	1,00 ou 100%
Total	$N = 25$	1		

17. Considere o seguinte conjunto de dados discretos relativos a mensagens SMS, enviadas, a partir de um determinado telemóvel, durante 60 dias.

8 10 12 25 32 44 83 90 91 98 12 16 23 41 53
87 55 43 13 18 27 31 42 51 63 78 82 91 9 15
35 42 44 48 53 62 73 75 82 80 84 83 67 77 91
15 60 73 92 31 42 63 57 80 91 27 10 82 17 84

Faça uma redução de dados através de uma tabela de frequências absolutas e relativas simples e acumuladas.

Exercícios:

15. Um cientista estudou a altura de 21 plantas, em centímetros, 20 dias depois de terem sido semeadas. Os resultados foram os seguintes:

10 12 13 15 16 18 10 11 11 12 13
17 18 19 16 15 10 14 13 13 16

Faça uma redução de dados através de uma tabela de frequências absolutas e relativas simples e acumuladas.

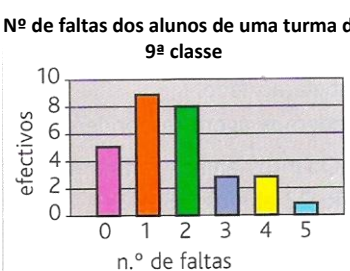
16. Uma amostra de 25 caixas de bombons foi seleccionada dum stock de 1000 caixas. O peso em gramas de cada caixa foi o seguinte:

93	100	106	104	98	97	98	104	
92	94	101	103	96	100	108	100	
108	97	103	100	94	104	95	101	102

16.1. Construa uma tabela de frequências, agrupando o peso das caixas em intervalos de amplitude 5g.

16.2 Determine, em percentagem a frequência relativa de cada classe.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

GRÁFICOS DE BARRAS	Descrição	Vantagens	Desvantagens
Nº de faltas dos alunos de uma turma da 9ª classe  (Exemplo A)	Apenas uma das dimensões da barra varia e varia em função das frequências dos valores da variável estatística. As barras devem estar todas separadas umas das outras por espaços iguais. O gráfico deve ter um título adequado. Mais exemplos: exercício 9 : Gráfico de barras agrupadas horizontais exercício 12 : Gráfico de barras simples verticais.	Permite estabelecer comparações facilmente. Tem forte impacto visual.	Só pode ser usado para transmitir informações simples.

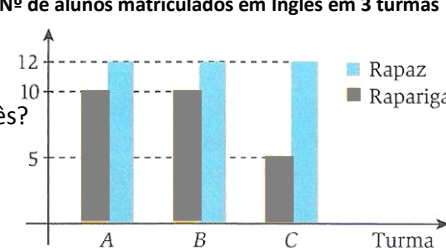
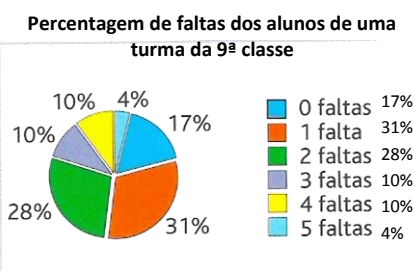
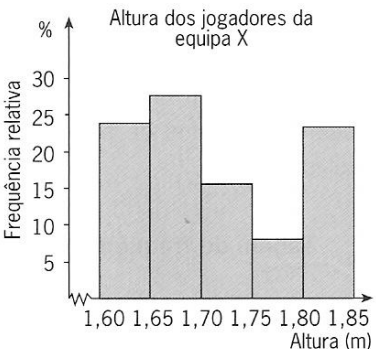
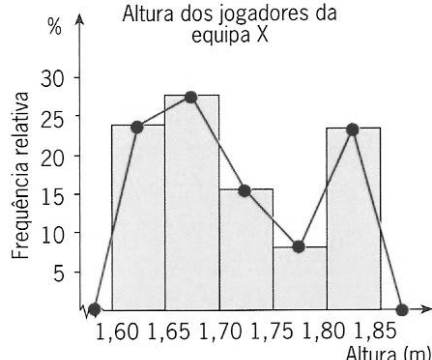
Exercícios: 18. Construa um gráfico de barras simples verticais para os dados dos exercícios: 10 e 14. 19. Construa um gráfico de barras simples horizontais para os dados dos exercícios: 11 e 13.	20. Considere o gráfico apresentado. 20.1. Quantas raparigas estão matriculadas no total em Inglês. 20.2. Qual a turma que tem mais alunos em Inglês? 20.3. Com os dados do gráfico apresentado, construa uma tabela de frequências absolutas e relativas simples para cada grupo.	N.º de alunos matriculados em Inglês em 3 turmas  <table border="1"> <caption>N.º de alunos matriculados em Inglês em 3 turmas</caption> <thead> <tr> <th>Turma</th> <th>Rapaz</th> <th>Rapariga</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>10</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>10</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>5</td> <td>12</td> </tr> </tbody> </table>	Turma	Rapaz	Rapariga	A	10	12	B	10	12	C	5	12
Turma	Rapaz	Rapariga												
A	10	12												
B	10	12												
C	5	12												

GRÁFICO CIRCULAR	Descrição	Vantagens	Desvantagens
Percentagem de faltas dos alunos de uma turma da 9ª classe  (Exemplo A)	A amplitude de cada sector é proporcional à frequência que representa. A legenda pode ser dispensada, inscrevendo-se os valores da variável e as suas frequências junto dos respectivos sectores circulares. Pode-se usar cores diferentes para os diferentes sectores e o gráfico deve ter um título adequado.	É útil quando a análise é mais importante do que o valor real. Tem um forte impacto visual.	Só pode ser usado quando a variável toma poucos valores. Um só gráfico não permite comparar dois grupos de dados.

Exercícios: 21. O Jorciley é aluno da Escola X e assumiu a responsabilidade de organizar um torneio desportivo entre os alunos da 7ª e 8ª classes. Para começar, analisou a seguinte informação: Desporto preferido dos 1000 alunos da 7ª classe  Desporto preferido dos 1500 alunos da 8ª classe 	O Jorciley propôs à Direcção da escola organizar um campeonato de futebol argumentando que esta modalidade tinha o mesmo número de praticantes nas duas classes. Explique porque é que o Jorciley está errado. 22. Realizou-se uma conferência internacional em São Tomé. Questionaram-se os 600 participantes sobre o meio de transporte utilizado e concluiu-se que 80% viajaram de avião, 5% viajaram de barco e 15% viajaram de carro. 22.1. Quantas pessoas viajaram de carro? E de avião? 22.2. Represente os dados através de um gráfico circular.
--	--

PICTOGRAMA	Descrição	Vantagens	Desvantagens
Meio de transporte utilizado pelos alunos da 8ª E para ir para a Escola A pé      Autocarro    Carro        = 6 alunos	Os dados são representados por símbolos ligados ao objecto de estudo. Deve-se utilizar sempre o mesmo símbolo, do mesmo tamanho e indicar no gráfico a que quantidade é que corresponde. Os símbolos devem ser desenhados em linhas ou colunas deixando um espaçamento igual entre todos eles. O gráfico deve ter um título adequado.	Muito atractivo. Grande impacto visual.	Dá pouca informação. Pouca precisão.

Exercícios: 23. A figura seguinte apresenta um pictograma representando a distribuição do número de empregados de uma empresa de construção civil durante quatro anos. 23.1. Quantos empregados tinha a empresa em 2000? E 2001? 23.2. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação: "A empresa reduziu o n.º de empregados em 25% entre 1999 e 2000" 23.3. Construa o gráfico de barras que represente a situação. 24. Construa um pictograma para os dados do exercício 12.	N.º de empregados de uma empresa   = 400 empregados <table border="1"> <caption>N.º de empregados de uma empresa</caption> <thead> <tr> <th>Ano</th> <th>N.º de empregados</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1999</td> <td>1600</td> </tr> <tr> <td>2000</td> <td>1200</td> </tr> <tr> <td>2001</td> <td>1200</td> </tr> <tr> <td>2002</td> <td>800</td> </tr> </tbody> </table>	Ano	N.º de empregados	1999	1600	2000	1200	2001	1200	2002	800
Ano	N.º de empregados										
1999	1600										
2000	1200										
2001	1200										
2002	800										

HISTOGRAMA	Descrição	Vantagens	Desvantagens
 (Exemplo B)	É um gráfico de barras em que os dados estão agrupados por classes (sejam contínuos ou discretos). Os diferentes valores estão representados no eixo horizontal que está dividido numa escala contínua como um eixo cartesiano. No eixo vertical estão representadas as frequências das classes. Não há espaço entre as barras.	Para determinadas situações é a única forma correcta de apresentar os dados. O histograma dá a ideia da forma como se distribuem os dados.	Difícil construção quando a amplitude dos intervalos é diferente. Com as calculadoras gráficas ou computadores este problema é ultrapassado.
POLÍGONO DE FREQUÊNCIAS	Descrição	Vantagens	Desvantagens
 (Exemplo B)	É um gráfico de linhas que se obtém unindo os pontos médios (marca da classe) na base superior dos rectângulos do histograma. Marca da 1ª classe: $\frac{1,60 + 1,65}{2} = 1,625$	Permite comparar histogramas utilizando apenas os respectivos polígonos de frequência no mesmo quadro.	Difícil construção manual. Usando tecnologia esse problema fica resolvido.

Exercícios:

25. No histograma estão representados os dados respeitantes ao peso, em quilos, de um grupo de alunos.

25.1. Quantos alunos tem a amostra seleccionada?

25.2. Qual a percentagem de alunos com peso superior a 85kg?

25.3. Construa a tabela de frequências associadas à distribuição.

26. Construa um histograma e respectivo polígono de frequências para as distribuições dos exercícios 15, 16 e 17.

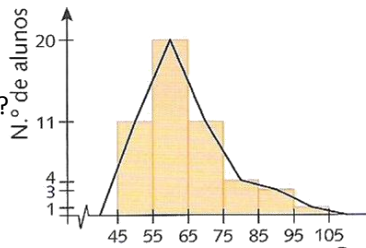


DIAGRAMA DE CAULE-E-FOLHAS	Descrição	Vantagens	Desvantagens
Nº de pães comprados pela Sra. Rosa durante 2 semanas <pre> 0 0 0 8 8 1 0 0 0 0 2 2 2 2 4 4 </pre> 2 4 significa 24 pães (Exercício 11)	Os dados são divididos em duas partes: o caule e as folhas. O caule encontra-se do lado esquerdo do traço vertical e as folhas do lado direito.	Todos os dados da amostra aparecem no gráfico. Dá uma interpretação visual sobre a forma como os dados se distribuem. Permite ordenar rapidamente a amostra. Facilita a leitura ou determinação de medidas estatísticas. É muito sugestivo para comparar duas amostras. Não é necessários construir previamente uma tabela de frequências.	Não é aconselhável quando há muitos ou poucos caules. Dá pouca informação no caso dos dados serem muitos dispersos.

Exercícios:										29. Aplicou-se um teste de inteligência a 35 alunos de uma escola e obtiveram-se os resultados representados no diagrama seguinte.									
27. A seguinte distribuição representa o número de veículos ligeiros que entrou em STP nos 12 meses de 2009 (<i>fonte INE</i>):										29.1. Qual a classificação mais elevada?									
34 35 42 28 40 45 43 31 25 43 34 58										8 1 1 1 1 4 5 8									
Utilize um diagrama de caule-e-folhas para representar os dados.										9 2 2 5 5 5 5 9 9									
28. Os dados referentes à altura, em centímetros, de 27 jovens são:										29.2. O Elvis teve classificação no intervalo [100, 105[. Quanto obteve neste teste?									
155 178 170 160 166 176 179 161 164 167										10 3 3 3 6 6 6 6									
151 163 176 164 154 165 173 168 169 158										11 0 0 0 3 4 4 7									
170 156 170 171 158 164 174										12 1 5 8									
28.1. Construa um diagrama de caule-e-folhas com os dados.										13 2 6 6									
28.2. Faça uma redução de dados através de uma tabela.										29.3. Qual a percentagem de alunos com classificação superior a 110?									

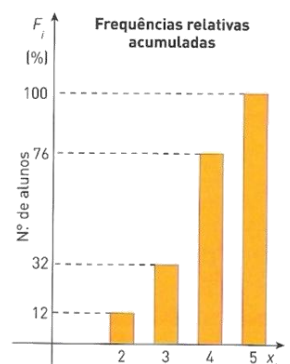
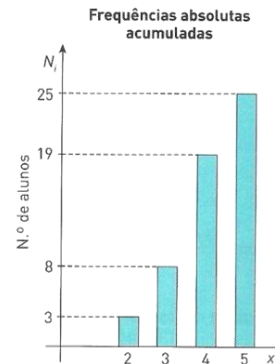
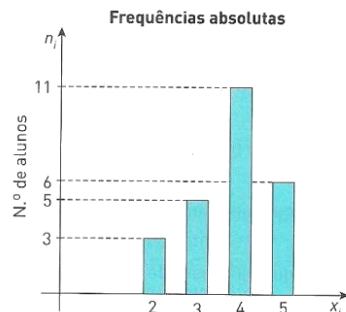
▪ FUNÇÃO CUMULATIVA

Associada a cada uma das frequências acumuladas, existe uma outra forma de representar a amostra. Trata-se de uma função real de variável real que designamos por função cumulativa.

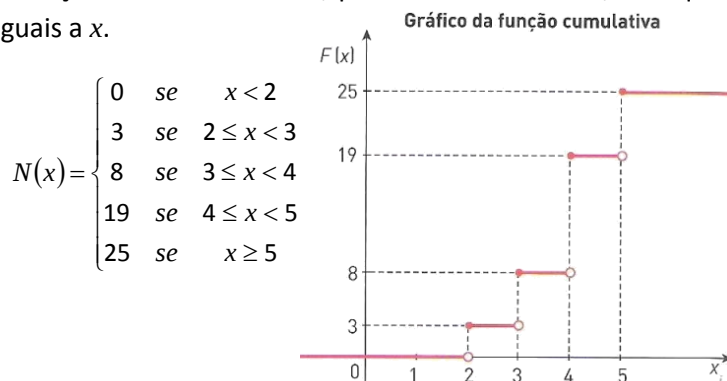
Exemplo C – Variáveis discretas:

A primeira parte de um teste da 10ª classe é de escolha múltipla. Após a correcção da primeira parte do teste, fez-se um estudo em relação ao número de respostas correctas dadas por cada aluno.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
2	3	0,12	3	0,12
3	5	0,2	8	0,32
4	11	0,44	19	0,76
5	6	0,24	25	1
Total	$N = 25$	1		



A função cumulativa indica, para cada valor real x , a frequência absoluta (ou relativa) de observações menores ou iguais a x .



Sendo x uma variável quantitativa discreta que toma os valores ordenados, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, e as respectivas frequências absolutas, $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k$, a função cumulativa é obtida fazendo:

$$N(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_0 \\ n_0 & \text{se } x_0 \leq x < x_1 \\ n_0 + n_1 & \text{se } x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \\ n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_k & \text{se } x \geq x_k \end{cases}$$

Exemplo D – Variáveis Contínuas:

A seguinte tabela representa a distribuição das alturas dos jogadores de uma equipa de basquetebol.

Alturas dos jogadores (m)	n_i	f_i	N_i	F_i
[1,75 ; 1,83[	3	0,17	3	0,17
[1,83 ; 1,91[	4	0,22	7	0,39
[1,91 ; 1,99[	6	0,33	13	0,72
[1,99 ; 2,07[	3	0,17	16	0,89
[2,07 ; 2,15[	2	0,11	18	1
Total	$N = 18$	1		

Exercícios:

30. Com base no gráfico da função cumulativa do exemplo C, responda às seguintes questões:

30.1. Qual foi o mínimo de respostas correctas dadas pelos alunos?

30.2. Quantos alunos acertaram menos de 4 respostas?

30.3. Quantos alunos acertaram menos de 5 respostas?

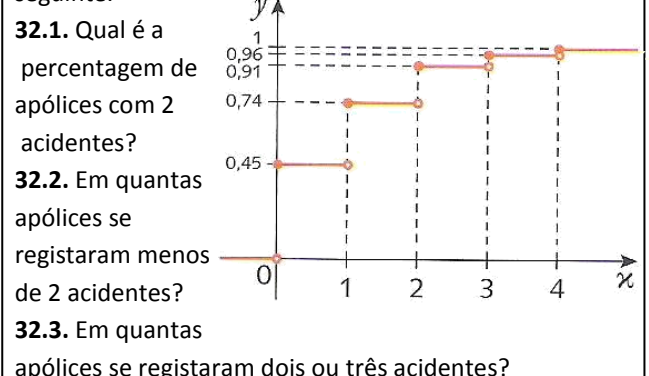
31. Com o objectivo de fazer um estudo sobre o número de recargas de 50.000 dbs comprados em 15 dias, fez-se uma sondagem, tendo-se organizado os resultados na seguinte tabela:

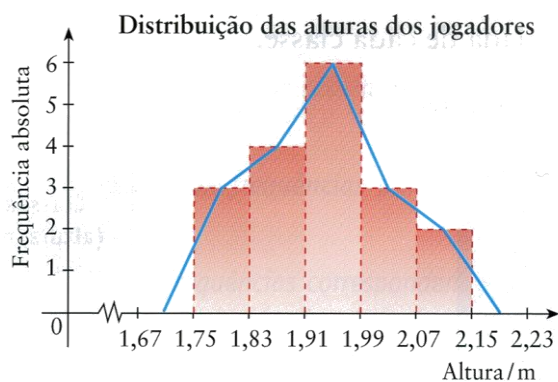
nº de recargas compradas (x_i)	frequência absoluta (n_i)
0	15
1	70
2	54
3	42
4	15
5	4

Desenhe o gráfico da função cumulativa de frequências absolutas.

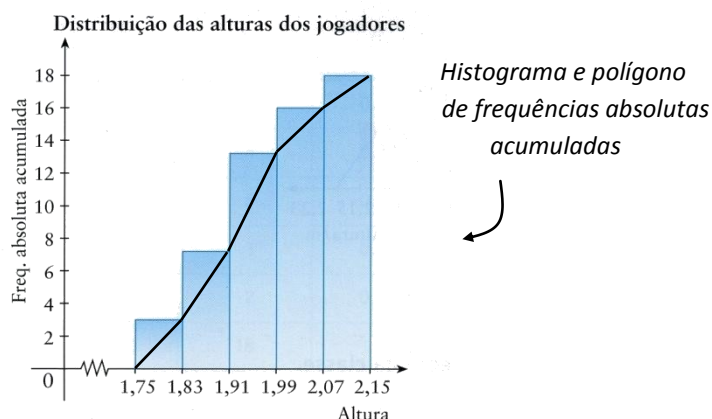
32. Uma companhia de seguros estudou, para uma amostra de 2500 apólices, o número de acidentes registados nos primeiros 5 anos de seguro.

As conclusões estão representadas na função cumulativa seguinte.





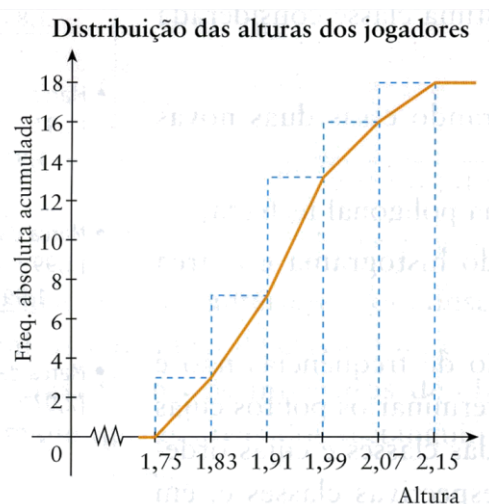
Histograma e polígono de frequências absolutas simples



Unindo o ponto inferior do primeiro rectângulo com os pontos superiores dos rectângulo do histograma de frequências absolutas acumuladas obtemos os polígono de frequências acumuladas.

Se prolongarmos os limites do polígono na horizontal obtemos o gráfico da função cumulativa.

Podemos ainda ajustar uma curva (desenhada à mão) que melhor se ajuste e passe pelos pontos assinalados.



De igual forma se define função cumulativa para as frequências relativas acumuladas que se representa por $F(x)$, quer para variáveis discretas ou contínuas.

Exercícios:

33. Num bairro da cidade de São Tomé inquiriu-se em cada casa quantos televisores possuíam. Foram obtidos os seguintes resultados:

33.1. Complete a tabela com a frequência relativa e as frequências acumuladas.

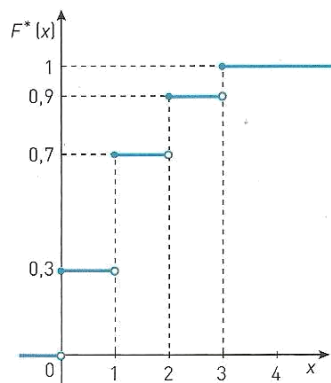
nº de TV (x_i)	n_i
0	16
1	10
2	3
3	3

33.2. Esboce o gráfico da função cumulativa.

33.3. Quantas casas têm menos de três tv's.

34. O gráfico da função cumulativa das frequências relativas representa o número de acidentes semanais que ocorreram numa estrada de São Tomé durante 40 semanas.

Construa o gráfico da função cumulativa das frequências absolutas simples



35. Num posto de abastecimento de combustível fez-se o registo da quantidade, em litros, do abastecimento efectuado por 50 viaturas:

35.1. Construa o histograma e o polígono de frequências absolutas referente à distribuição.

35.2. Elabore uma tabela de frequências acumuladas.

35.3. Construa o histograma e o polígono de frequências absolutas acumuladas.

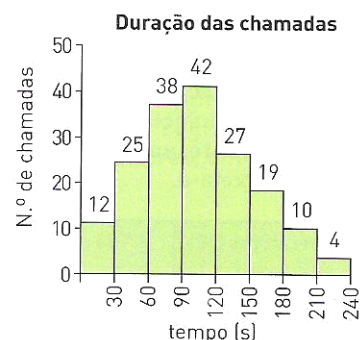
nº de litros	n_i
$[0, 7[$	15
$[7, 14[$	12
$[14, 21[$	10
$[21, 28[$	7
$[28, 35[$	4
$[35, 42[$	2

36. O histograma da figura representa o tempo das chamadas realizadas a partir de um telefone fixo de um escritório durante o mês de Janeiro deste ano.

36.1. Construa uma tabela de frequências correspondente ao gráfico apresentado.

36.2. Qual a percentagem de chamadas de duração inferior a 2 minutos?

36.3. Construa o gráfico da função cumulativa de frequências absolutas.



MEDIDAS DE LOCALIZAÇÃO

Num estudo estatístico, depois de recolhidos os dados, surge a fase de tirar conclusões através de medidas que possam, de alguma forma, sintetizar o estudo através do cálculo de alguns valores.

Nos anos anteriores já estudou algumas medidas de tendência central (média, moda e mediana) que vamos rever usando alguns exemplos.

Exemplo E: O Aguinaldo obteve, até ao momento, as seguintes classificações nos testes de Matemática:

12 14 12 11 12 11

▪ MODA

Chama-se moda, e representa-se por M_o , ao valor que ocorre com maior frequência.

No **exemplo E**: $M_o = 12$

Num conjunto de dados várias situações podem ocorrer:

Dados	Moda
5 2 5 3 2 3 5 4 1	5 (unimodal)
3 1 3 2 4 5 2 3 2	2 e 3 (bimodal)
4 2 3 1 2 1 3 4	Não tem moda (amodal)

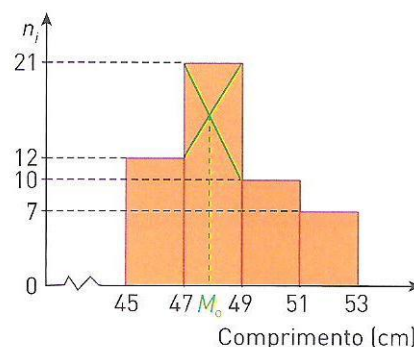
Esta medida é sobretudo usada para dados qualitativos (quando não é possível calcular a média aritmética e a mediana).

Quando os dados estão organizados em classes, identifica-se a classe modal, ou seja, a classe com maior frequência.

No entanto, uma localização aproximada da moda, na classe modal, pode ser feita geometricamente usando o histograma da distribuição com se mostra.

Unem-se os vértices superiores do rectângulo, correspondente à classe modal, aos vértices dos rectângulos adjacentes.

$M_o \approx 47,9$



▪ MÉDIA

Para uma amostra, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, constituída por n dados chama-se média amostral, ou simplesmente média, ao quociente entre a soma de todos os dados e a dimensão da amostra.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{ou} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

No **exemplo E**: $\bar{x} = \frac{12 + 14 + 12 + 11 + 12 + 11}{6} = \frac{72}{6} = 12$

A média das classificações obtidas pelo Aguinaldo é 12.

Exercícios:

40. Calcule a média das suas classificações do fim do 1º e 2º períodos.

40.1. Compare os dois valores obtidos apresentando os motivos que levaram a grandes diferenças se tal aconteceu no seu caso.

41. Os seguintes valores representam o número de alunos matriculados nos diferentes distritos de STP nas 7ª, 8ª e 9ª classes do ano lectivo 2007/2008.

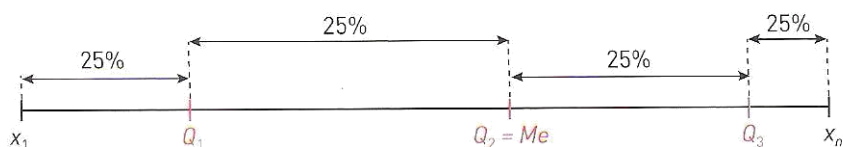
3745 1793 471 308 540 114 292

(fonte Ministério da E. C. J. e D.)

Determine o valor médio desta distribuição, interprete o seu resultado e explique a sua relevância.

■ QUARTIS. DIAGRAMA DE EXTREMOS E QUARTIS

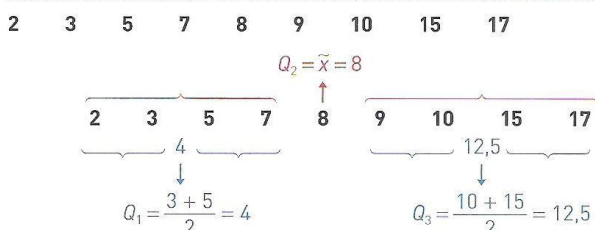
Dada uma população ou amostra de dimensão n , em que os n dados são previamente ordenados, sendo x_1 o valor mínimo e x_n o valor máximo, a determinação dos quartis permite separar os dados em quatro subconjuntos, contendo cada um deles 25% do total de dados com é sugerido no esquema seguinte.



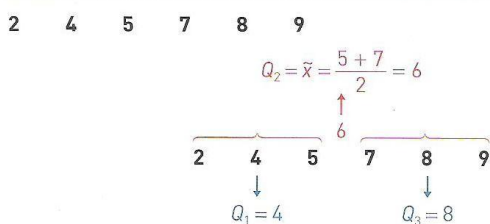
Q_1 representa o 1º quartil
 Q_2 representa o 2º quartil que coincide com Me
 Q_3 representa o 3º quartil

A seguir são apresentados alguns exemplos com conjuntos de dados já ordenados e de pequena dimensão para determinar Q_1 , Q_2 , Q_3 .

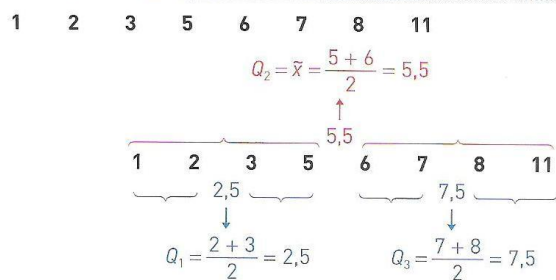
Exemplo 1



Exemplo 2



Exemplo 3



A localização do 1º e do 3º quartis pode ser dada por aplicação das seguintes fórmulas:

	$k \in \mathbb{N}$	Q_1	$p \in \mathbb{N}$	Q_3
n par	$\frac{n+2}{4} = k$	x_k	$\frac{3n+2}{4} = p$	x_p
	$k < \frac{n+2}{4} < k+1$	$\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$p < \frac{3n+2}{4} < p+1$	$\frac{x_p + x_{p+1}}{2}$
n ímpar	$\frac{n+1}{4} = k$	x_k	$3 \times \frac{n+1}{4} = p$	x_p
	$k < \frac{n+1}{4} < k+1$	$\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	$p < 3 \times \frac{n+1}{4} < p+1$	$\frac{x_p + x_{p+1}}{2}$

Exercício:

42. Uma empresa de construção irá construir um prédio constituído por 58 apartamentos com as seguintes características: Considere a distribuição das áreas dos apartamentos.

42.1. Indique:

- a moda e a mediana.
- os 1º e 3º quartis.
- a média das áreas dos apartamentos.

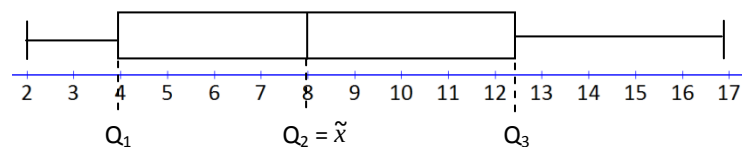
42.2. Construa o diagrama de extremos e quartis.

Tipo	Área (m²)	N.º de apartamentos
T0	55	5
T1	80	10
T2	95	23
T3	112	7
T4	180	13

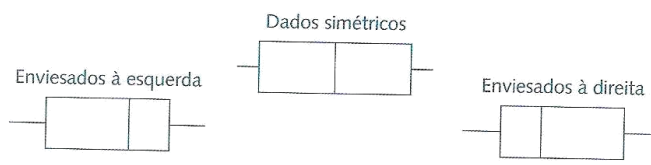
O diagrama de extremos e quartis é uma forma esquemática de representar os valores extremos de uma distribuição e os quartis. A visualização desse diagrama permite tirar algumas conclusões quanto à forma como os dados se distribuem.

Para construir o diagrama de extremos e quartis marca-se sobre um eixo graduado os pontos correspondentes aos extremos do conjunto de dados. A partir destes pontos constrói-se um diagrama como o do exemplo seguinte.

Exemplo 1



Facilmente, por observação de um diagrama de extremos e quartis, se reconhecem as simetrias ou assimetrias de uma amostra.



▪ MEDIANA E QUARTIS EM DADOS AGRUPADOS EM CLASSES

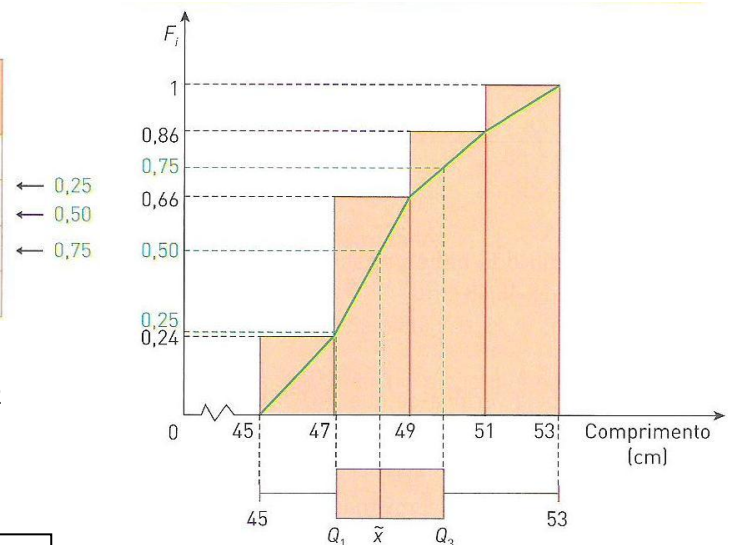
Para localizar a mediana e os quartis começa-se por determinar as frequências relativas acumuladas e construir o histograma e respectivo polígono de frequências.

De seguida procuram-se os valores correspondentes a 25%, 50% e 75%, como é sugerido a seguir.

Exemplo:

Comprimento (cm)	Marca da classe x_i	n_i	f_i	F_i
[45, 47[	46	12	0,24	0,24
[47, 49[	48	21	0,42	0,66
[49, 51[	50	10	0,20	0,86
[51, 53[	52	7	0,14	1

$$\begin{aligned} Q_1 &\approx 47,1 \\ Q_2 = \tilde{x} &\approx 48,2 \\ Q_3 &\approx 49,9 \end{aligned}$$



Exercícios:

43. Os pesos, em quilos de 24 pessoas são:

68,5 34,2 47,5 39,2 47,3 79,2 46,5 58,3
80 63,4 58,6 50,2 60,5 70,8 30,5 42,7
48,6 56,8 72 60 58,7 39,3 62,5 59,4

43.1. Agrupe os dados em intervalos de amplitude 10.

43.2. Quantas pessoas pesam menos de 50kg?

43.3. Determine a média, utilizando todos os dados e utilizando o representante de cada classe.

43.4. Identifique a classe modal e construa o histograma para encontrar um valor aproximado da moda.

43.5. Construa, agora, o histograma de frequências relativas acumuladas e respectivo polígono de frequências para encontrar um valor aproximado da mediana e dos 1º e 3º quartis.

44. Considere o conjunto de dados: 23 17 19 x y 16

Sabendo que a $\bar{x} = 20$ e a $M_0 = 23$, determine os valores de x e y .

45. Os seguintes dados ordenados: 10 17 a 19 21 b 25 têm como média, mediana e moda 19.

Qual é o valor de a e de b ?

46. Considere os seguintes conjuntos de dados:

a) 28 30 31 33 34 b) 6 3 4 6 8 9 6

c) 3 4 5 6 7 8 9 10

d) 5 7 4 5 6 3 5 6 3 5 6 4 6 4 3 6

e) 39 36 37 38 40 39 37 39

46.1. Indique a mediana de cada conjunto.

46.2. Determine o valor dos quartis.

46.3. Constrói o diagrama de extremos e quartis de cada conjunto.

47. Considere os dados: 10 12 15 16 17 38

47.1. Determine a moda, a média e mediana da distribuição.

47.2. Se mudarmos o último dado para 20, quais são as medidas de tendência central mais afectadas com essa mudança.

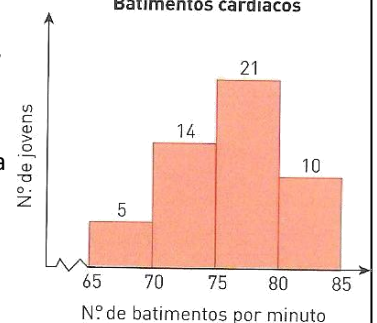
48. Considere o histograma relativo à distribuição de frequências absolutas dos batimentos cardíacos, por minuto, de um grupo de 50 jovens.

48.1. Construa uma tabela de frequências absolutas simples e acumuladas.

48.2. Identifique a classe modal.

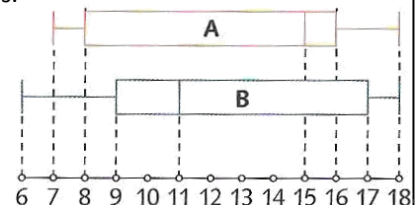
48.3. Verifique se a média do número de batimentos por minuto pertence à classe modal.

48.4. Construa um pictograma que represente a distribuição apresentada.



49. Uma professora de Matemática aplicou o mesmo teste às suas duas turmas, a turma A com 28 alunos e a turma B com 24 alunos.

Resolveu resumir os dados construindo um diagrama de extremos e quartis para cada turma.



49.1. Quantos alunos da turma A obtiveram nota superior ou igual a 15?

49.2. Na turma B, quantos alunos obtiveram nota inferior ou igual a 9?

49.3. No seu entender, qual das turmas demonstrou um melhor desempenho neste teste? Justifique a sua resposta.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Um factor muito importante para a interpretação de uma distribuição é a maior ou menor “dispersão” dos dados em torno dos valores centrais (média, moda e mediana).

Exemplo F: Consideremos as notas da Aline e do Cosme nas disciplinas de Português, Biologia, Inglês e Matemática.

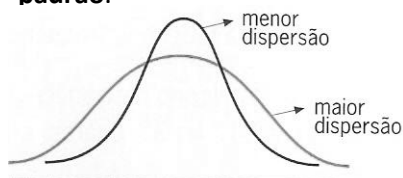
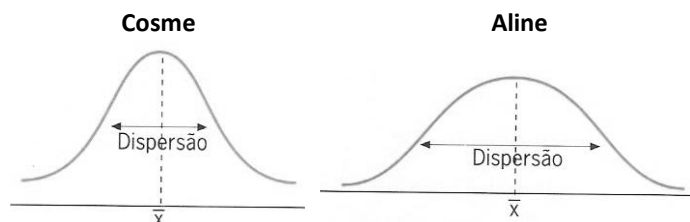
Nomes	Português	Biologia	Inglês	Matemática
Aline	10	16	18	8
Cosme	12	13	13	14

Calculemos as médias:

$$x_A = \frac{10 + 16 + 18 + 8}{4} = 13 \quad e \quad x_C = \frac{12 + 13 + 13 + 14}{4} = 13$$

Ambos têm a mesma média mas o Cosme é um aluno mais regular. No que diz respeito à Aline, os valores são mais dispersos em relação à média:

As distribuições não têm os dados igualmente distribuídos em torno da média. Para uma informação mais completa acerca da “forma” da distribuição, vamos estudar outras medidas estatísticas: a **amplitude**, a **variância** e o **desvio padrão**.



A amplitude, a variância e o desvio padrão são normalmente conhecidos como **medidas de dispersão**.

■ AMPLITUDE TOTAL E AMPLITUDE INTERQUARTIS

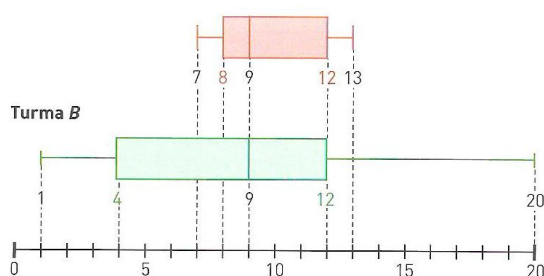
No **exemplo F** as notas da Aline nas disciplinas de Português, Biologia, Inglês e Matemática foram: 10, 16, 18, 8. O maior destes valores é 18 e o menor é 8. A amplitude do conjunto de dados é: $18 - 8 = 10$.

A amplitude total, ou apenas amplitude, de um conjunto de dados quantitativos é a diferença entre o maior e o menor valor da variável.

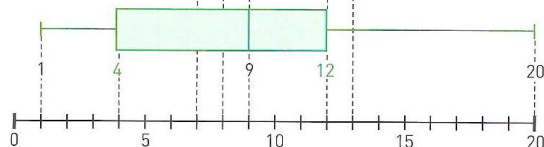
Se os dados estão agrupados em classes, a amplitude é a diferença entre o limite superior de última classe e o limite inferior da primeira classe.

Exemplo: Os seguintes diagramas de extremos e quartis representam os resultados de um teste de Português em duas turmas.

Turma A



Turma B



No caso da turma A, tem-se: $Q_1 = 8$ e $Q_3 = 12$

sendo a amplitude interquartis dada por: $Q_3 - Q_1 = 12 - 8 = 4$

Esta informação significa que, num intervalo de amplitude 4, estão 50% dos resultados.

No caso da turma B, tem-se: $Q_1 = 4$ e $Q_3 = 12$

sendo a amplitude interquartis dada por: $Q_3 - Q_1 = 12 - 4 = 8$

Esta informação significa que, num intervalo de amplitude 8, estão 50% dos resultados.

Quanto mais pequena for a amplitude interquartis, maior é a concentração de, pelo menos, 50% dos dados.

Amplitude interquartis é a diferença entre o 3º e o 1º quartis.

Exercício:

50. O Judeley e a Tatiana obtiveram até ao momento as seguintes classificações à disciplina de Biologia:

Judeley: 10 14 14 14 18

Tatiana: 4 12 16 20 18

50.1. Determine a média das classificações de cada um.

50.2. Qual deles tem as classificações mais dispersas?

50.3. Determine a amplitude total e a amplitude interquartil?

▪ DESVIO MÉDIO

A medida de dispersão mais utilizada é o desvio padrão. Para obtermos o desvio padrão determinamos primeiro o desvio médio e a variância.

Consideremos o **exemplo F**, as notas da Aline são: $x_1 = 10$; $x_2 = 16$; $x_3 = 18$; $x_4 = 8$. A média é 13.

Tomando a média como “centro”, o desvio dos números relativamente à média é: $x_i - \bar{x}$.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $
10	$10 - 13 = -3$	$ -3 = 3$
16	$16 - 13 = 3$	$ 3 = 3$
18	$18 - 13 = 5$	$ 5 = 5$
8	$8 - 13 = -5$	$ -5 = 5$
$n = 4$	0	16

$$\text{Desvio médio} = \frac{16}{4} = 4$$

A soma dos desvios obtidos é sempre zero.

Chama-se desvio médio à média aritmética do valor absoluto da diferença entre cada valor e a média.

▪ VARIÂNCIA

A variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios e representa-se por S^2 , quando $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ representam uma amostra e por σ^2 , quando $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ representam a população.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

No caso de dados organizados em tabelas de frequências, com k valores distintos e em que N é o número total de dados, tem-se:

$$\sigma^2 = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

No **exemplo F** relativamente às notas da Aline, temos:

$$\sigma^2 = \frac{(10-13)^2 + (16-13)^2 + (18-13)^2 + (8-13)^2}{4} = \frac{9+9+25+25}{4} = \frac{68}{4} = 17.$$

A variância é 17.

Nota: usou-se σ porque trabalhamos com a população: as notas da Aline.

▪ DESVIO-PADRÃO

O desvio-padrão é uma das medidas estatística mais utilizadas para medir a variabilidade de um conjunto de dados quantitativos em relação à média. Representa-se por S , quando $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ representam uma amostra e por σ , quando $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ representam a população.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

No caso de dados organizados em tabelas de frequências, Com k valores distintos e em que N é o número total de dados, tem-se:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

No **exemplo F** relativamente às notas da Aline, temos:

$$\sigma = \sqrt{17} \approx 4,12$$

O desvio-padrão é 4,12.

- O desvio-padrão é sempre não negativo.
- Quanto maior é o desvio padrão maior é a dispersão dos dados em relação à média.
- Se o desvio-padrão é igual a zero é porque não existe variabilidade, isto é, os dados são todos iguais.

M.A.(8)

▪ DESVIO MÉDIO, VARIÂNCIA E DESVIO-PADRÃO EM DADOS AGRUPADOS EM CLASSES

Tal como acontece para o cálculo da média, se os dados estão agrupados em classes, calcula-se a marca da classe de cada classe e aplicam-se as fórmulas já fornecidas. Obtemos valores aproximados para as medidas de dispersão.

Exercícios:

51. Calcule a média e o desvio padrão de cada uma das distribuições:

51.1.

x_i	14	15	16	17	18	19
n_i	1	2	3	2	1	1

51.2.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
n_i	6	18	36	25	14	5

51.3.

x_i	234,5	254,5	274,5	294,5
n_i	5	4	3	2

52. Na tabela seguinte está registado o número de golos marcados em 20 jogos de futebol.

52.1. Calcule:

N.º de golos	0	1	2	3
Frequência	6	8	4	2

a) a média.

b) o desvio-padrão.

52.2. Construa um pictograma e um gráfico de barras para a distribuição.

53. Para avaliar o fenómeno do absentismo (faltas ao trabalho) na empresa LISARTE, estudou-se uma amostra de 143 indivíduos de ambos os sexos e avaliou-se o número de horas de ausência.

N.º de horas em falta	N.º de ind. com absentismo
0 – 15	30
15 – 30	90
30 – 45	11
45 – 60	12

53.1. Classifique a variável em estudo.

53.2. Calcule a média, a moda e a mediana.

53.3. Calcule a variância e o desvio padrão, indicando qual destas medidas é a mais utilizada e porquê.

54. Um médico pediatra fez o registo do peso de 30 crianças nascidas, num dado hospital, numa semana. A tabela seguinte representa essa informação.

54.1. Determine:

a) a classe modal e um valor aproximado da moda.

b) a classe mediana.

c) a média.

d) o desvio-padrão

54.2. Construa o histograma que representa a distribuição.

Peso (Kg)	Frequência
[2,0; 2,5[	2
[2,5; 3,0[	3
[3,0; 3,5[	9
[3,5; 4,0[	13
[4,0; 4,5[	2
[4,5; 5,0[	1
	$n = 30$

55. Considere os seguintes conjuntos de dados relativos às classificações dos alunos de duas turmas, A e B, obtidas num teste de Matemática:

Turma A: 10 10 12 13 15 8 6 15 17 15 12 14
13 13 14 9 4 11 10 10 9 18 8 14

Turma B: 15 16 12 13 14 8 11 15 14 16 12 14
8 13 14 9 9 16 10 10 9 16 12 14

55.1. Organize os dados da turma A numa tabela de frequências simples e construa um gráfico de barras com essa informação.

55.2. Identifique a média e a mediana dos dados da turma B.

55.3. Indique o valor lógico da afirmação:

“A turma que tem maior média é a que tem maior amplitude.”

55.4. Calcule a amplitude interquartis dos dados da turma B.

56. Num trabalho prático de electricidade, os alunos tiveram de medir um fio eléctrico.

Os resultados das medições, em centímetros, foram os seguintes: 10,4 10,3 9,8 10,2 10 10,2

10,1 9,8 9,9 10 10,2 9,7

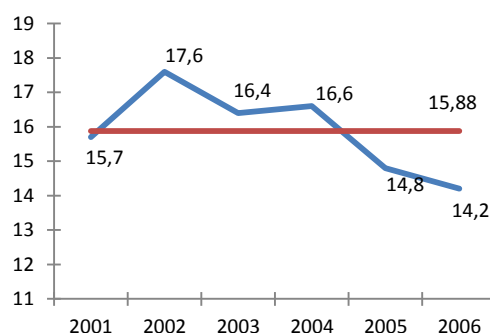
56.1. Qual a amplitude das medições?

56.2. Calcule a média, a variância e o desvio-padrão das medições efectuadas.

56.3. Compare os valores da média e da mediana. O que pode concluir.

57. Observe o gráfico que representa as taxas do desemprego em STP de 2001 a 2006 e a sua média.

Taxa de desemprego em STP



Fonte: São Tomé e Príncipe em Números 2006 - INE

57.1. Dê exemplo de um ano em que o desvio em relação à média seja:

a) negativo. b) positivo.

57.2. Indique em que ano o valor absoluto do desvio foi:

a) maior. b) menor.

57.3. Calcule a variância e o desvio-padrão da distribuição.

57.4. Tente encontrar os motivos que fizeram aumentar a taxa de 2001 para 2002 e diminuir a partir daí.

DISTRIBUIÇÕES BIDIMENSIONAIS

Muitos estudos estatísticos referem-se a dois atributos estatísticos da mesma população visando investigar em que medida é que estes se relacionam, ou seja, de que forma é que a variação de um influencia a variação do outro.

Há variáveis que se relacionam de uma forma evidente, como, por exemplo: a distância, d , percorrida por um motard, a uma velocidade v constante e o tempo, t : $d(t) = v \times t$. Estas relações são chamadas de *relações funcionais*.

Mas, nem sempre a existência de uma relação entre duas variáveis é do tipo funcional, assumindo a estatística, nestes casos, um papel fundamental ao permitir determinar valores aproximados de uma das grandezas conhecida a outra grandeza.

Exemplo G: Na tabela seguinte estão representadas as horas de estudo de uma amostra de 10 alunos de uma turma na semana anterior a um teste de Matemática e as respectivas classificações obtidas.

	Nº de horas de estudo x	Classificação obtida y
aluno 1	7	16
aluno 2	6	13
aluno 3	3	10
aluno 4	4	12
aluno 5	8	16
aluno 6	2	8
aluno 7	4	13
aluno 8	6	15
aluno 9	7	18
aluno 10	2	10

Neste estudo, a população é formada por um conjunto de pares ordenados (x, y) , em que x e y representam as horas de estudo e classificação obtida, respectivamente.

A variável (x, y) designa-se por variável estatística bidimensional.

Repare que qualquer relação que possa existir entre as variáveis não é do tipo funcional. Basta observar que ao número de horas de estudo 2 corresponde mais do que um valor (8 e 10).

Os elementos da população podem ser representados por:

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$$

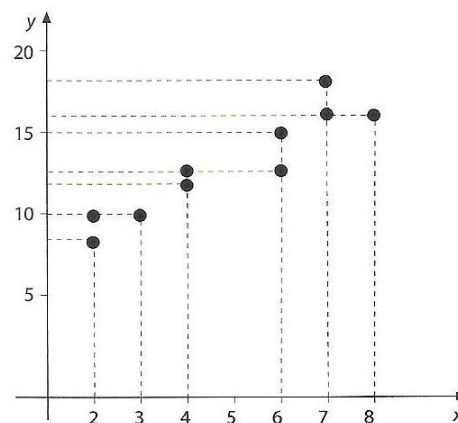
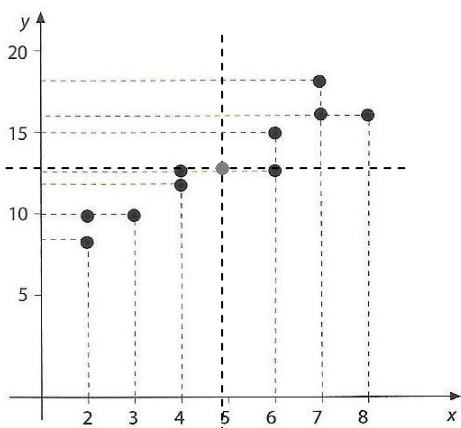
■ DIAGRAMA DE DISPERSÃO

Os pares ordenados (x_i, y_i) podem ser representados a partir de um sistema de eixos coordenados marcando-se os pontos correspondentes às horas de estudo e classificação obtida.

A este tipo de representação gráfica dá-se o nome de diagrama de dispersão ou nuvem de pontos.

Verificamos que quanto mais horas de estudo, maior a classificação obtida.

Neste caso dizemos que as duas variáveis estão positivamente correlacionadas ou que há uma correlação positiva.

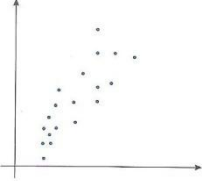
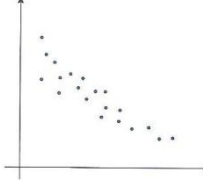
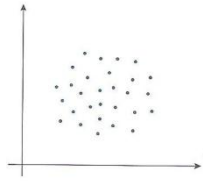


Chama-se ponto médio (ou centro de gravidade) da nuvem de pontos ao ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, em que $\bar{x}$ representa a média das horas de estudo e $\bar{y}$ a média das classificações.

No **exemplo G**: $\bar{x} = 4,9$ horas e $\bar{y} = 13,1$ valores

Assim, o ponto médio (ou centro de gravidade) é dado por:

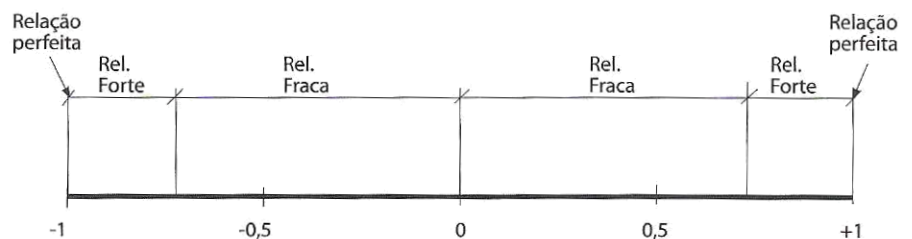
$$(\bar{x}, \bar{y}) = (4,9; 13,1)$$

Correlação positiva 	Correlação negativa 	Correlação nula 
As variáveis evoluem no mesmo sentido. - se uma cresce a outra tende a crescer. - se uma decresce a outra tende a decrescer.	As variáveis evoluem em sentido contrário. - se uma cresce a outra tende a decrescer. - se uma decresce a outra tende a crescer.	Não há qualquer influência de uma variável na outra.

▪ COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

O coeficiente de correlação, que se representa por r e toma valores no intervalo $[-1, 1]$, permite estabelecer o grau de correlação existente entre as variáveis.

- se $r < 0$, a correlação é negativa.
- se $r > 0$, a correlação é positiva.
- se $r = 0$, a correlação é nula



Exercícios:

58. Identifique as situações onde poderá existir uma correlação e o seu sinal.

58.1. Altura (em cm) e peso (kg) dos homens.

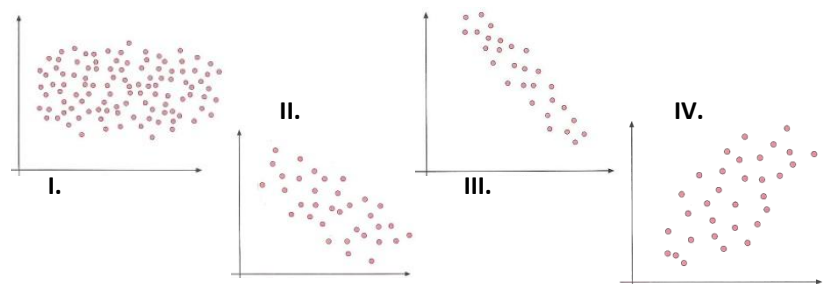
58.2. O número de trabalhadores a executar uma obra e o tempo de execução.

58.3. O rendimento mensal do agregado familiar e os gastos em lazer.

58.4. O número do calçado e o número de irmãos.

58.5. O lado do quadrado e a sua área.

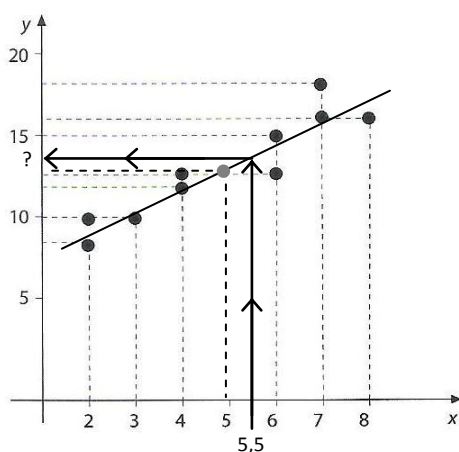
59. Atribua como lhe pareça mais correcto, os coeficientes de correlação, - 0,9; - 0,6; 0,01 e 0,6 a cada um dos diagramas de dispersão.



▪ RECTA DE REGRESSÃO

A recta de regressão é útil quando queremos prever o valor de uma variável quando conhecemos o valor da outra.

Há processos matemáticos para a determinação da equação dessa recta. Prova-se que essa recta passa pelo ponto médio da nuvem de pontos, o declive tem sinal igual ao do coeficiente de correlação e ajusta-se da “melhor” forma aos pontos da nuvem.



No exemplo G:

Depois de construir o diagrama de dispersão e marcar o ponto médio, traça-se uma recta que “melhor” se ajuste à nuvem de pontos.

Encontra-se assim uma recta que nos permite fazer estimativas.

Imagine que gostaríamos de prever a classificação de um aluno que estudasse 5h30min.

Por observação do gráfico conclui-se que a ordenada do ponto da recta de regressão que tem abcissa 5,5 é aproximadamente 14 valores.

Exercícios:

60. A tabela seguinte mostra as temperaturas médias registadas numa cidade africana durante um semestre.

		J	F	M	A	M	J
T. máx.	x	16	17	19	19	21	25
T. mín.	y	7	10	12	13	15	19

60.1. Construa o diagrama de dispersão das variáveis x e y .

60.2. Calcule o ponto médio.

60.3. Desenhe uma recta de regressão que se ajuste à nuvem.

60.4. Que temperatura mínima se pode esperar quando a máxima é de 20°C .

60.5. Estime a temperatura máxima quando a mínima é de 14°C .

61. Na tabela seguinte estão alguns dados relativos à estatura do Esmael.

61.1. Represente a nuvem de pontos associada aos dados.

61.2. Indique o sinal da correlação.

61.3. Determine o ponto médio e trace uma recta de regressão.

61.4. Determine os valores aproximados da:

a) estatura do Esmael quando tinha 10 anos.

b) idade do Esmael quando a estatura era de 150 cm.

Idade (anos) x	Estatura (cm) y
2	78
3	84
4	92
6	110
8	120
12	145
15	160

62. A antiguidade (x) de seis automóveis em anos e o seu número de quilómetros (y), em milhares, estão resumidos na tabela.

Antig. x	1	2	4	5	6	7
Km y	15	15	40	50	65	70

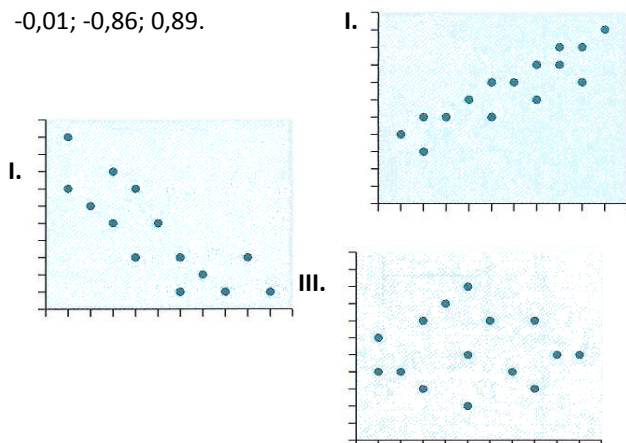
62.1. A correlação é positiva ou negativa?

62.2. Represente a nuvem de pontos e classifique a correlação quanto à intensidade.

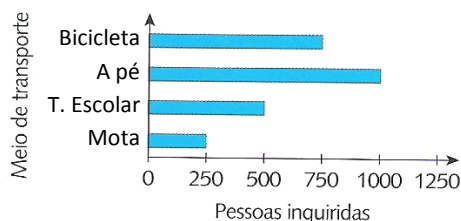
62.3. Calcule a média de quilómetros que estes seis automóveis fizeram.

63. Observe as seguintes nuvens de pontos e corresponda a cada uma um dos coeficientes de correlação:

-0,01; -0,86; 0,89.



64. Interrogaram-se 2500 estudantes sobre o meio de transporte utilizado diariamente para se deslocarem para a escola. Os resultados foram registados no seguinte gráfico.



A percentagem de pessoas que vai a pé para a escola é:

(A) 50% (B) 40% (C) 30% (D) 35%

65. Qual a mediana, arredondada às unidades, do seguinte conjunto de dados?

329 440 440 493 521 602 602 602

(A) 521 (B) 504 (C) 493 (D) 507

66. Em que conjunto de dados, a média, a mediana e a moda coincidem?

(A) 3 4 5 9 10 11 (B) 6 3 4 6 8 9 6

(C) 3 4 5 6 7 8 9 (D) 1 2 3 4 5 5 5

67. A amplitude de um conjunto de dados é 8. Se o menor valor desse conjunto é 27,035, quanto será o maior valor do conjunto?

(A) 35,035 (B) 19,035 (C) 31,035 (D) 21,5175

68. A variância, do seguinte conjunto de dados

10523 11209 9326 13661

é aproximadamente:

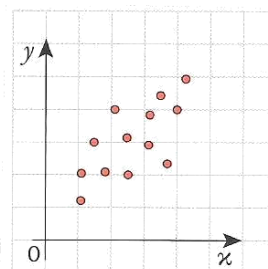
(A) 11180 (B) 1583 (C) 2506292 (D) 10866

69. Indique um valor aproximado do desvio-padrão dos dados:

3 4 5 9 1

(A) 2,5 (B) 2,65 (C) 4,4 (D) 5

70. Relativamente à nuvem de pontos representada, qual dos números seguintes pode ser o coeficiente de correlação das duas variáveis?



(A) -0,4

(B) -0,9

(C) 0,4

(D) 0,9

71. Procure em revistas ou jornais os dados de um estudo estatístico e de seguida analise e comente o valores observados.

72. Escolha duas variáveis estatísticas quantitativas e estude-as na sua turma. Faça um estudo completo para cada das variáveis e o estudo bidimensional para averiguar a sua correlação.

M.A.(9)

Grandes Matemáticos:

THALES DE MILETO (646-546 a.C.) – “Semelhança de triângulos”

PITÁGORAS (580 a.C.) – “Escola Pitagórica” ; “Teorema de Pitágoras”

PLATÃO (427-347 a.C.) – “Sólidos Platónicos”

EUCLIDES (360-295 a.C.) – “Elementos”

ERATÓSTENES (276-194 a.C.) – Primeiro cálculo do comprimento de um meridiano terrestre

ARQUIMEDES (287-212 a.C.) – Várias invenções mecânicas resultados matemáticos ligados à Geometria

LEONARDO FIBONACCI (1170~1250) – Representação gráfica com duas direcções

NICOLAU DE ORESME (~1323-1382) – Representação gráfica com duas direcções

NICOLÁS COPÉRNICO (1473-1543) – Conseguiu que fosse aceite a teoria do movimento da Terra em torno do Sol

GIROLAMO CARDANO (1501-1576) – Resolução de equações completas de 3º grau ; “Ars Magna”

PEDRO NUNES (1502-1578) – Relacionou a matemática com a arte de Navegar

FRANÇOIS VIÉTÉ (1540-1603) – Utilização de linguagem simbólica e letras para representar números

JOHANNES KEPLER (1571-1630) – A aplicação das cónicas no movimento de translação dos Planetas

GALILEU GALILEI (1584-1642) – Primeiros estudos sistemáticos do movimento uniformemente acelerado; “Lei dos corpos”

RENÉ DESCARTES (1596-1650) – “La Geometrie”

JOHN GRAUNT (1620-1674) – Trabalhos estatísticos sobre a natalidade e mortalidade

WILLIAM PETTY (1623-1687) – “Aritmética Política”

ISAAC NEWTON (1642-1727) – “Física Experimental” ; “Física Matemática”

LEIBNIZ (1646-1716) – Introdução da palavra função e representação de uma função por uma letra

LEONHARD EULER (1707-1783) – Contribuições no campo da terminologia e notação, como a noção de uma função matemática

GASPARD MONGE (1746-1818) – Estudos desenvolvidos no âmbito da Geometria Descritiva

PAOLO RUFFINI (1765-1822) – “Regra de Ruffini”

AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871) – “Leis de Morgan”

HERMAN GRASSMANN (1809-1877) – Desenvolvimento do cálculo vectorial ; “Teoria das correntes e marés”

Colaboração:

Para a elaboração do Tema 3 – Estatística contou-se com a colaboração dos professores Adelino Freitas e Gueitt Almeida (INE).

Bibliografia utilizada na compilação:

COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda, **Espaço 10A, Matemática 10º Ano**, Edições Asa 2007

COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda, **Novo Espaço, Matemática A 10º Ano**, Porto Editora 2010

DUARTE, Teresa Olga e FILIPE, Jaime Pinheiro, **Matemática Dez, Matemática 10º Ano**, Lisboa Editora, 2010

FERREIRA NEVES, Maria Augusta; GUERREIRO, Luís; LEITE, António e SILVA, Jorge Nuno, **Matemática A 10º Ano**, Porto Editora, 2010

FERREIRA NEVES, Maria Augusta e GUERREIRO, Luís, **Exercícios de Matemática A 10º Ano**, Porto Editora

FERREIRA NEVES, Maria Augusta e GUERREIRO, Luís, **Matemática - 8º Ano**, Porto Editora

NEGRA, Cristina e MARTINHO, Emanuel, **Sem Limites, Matemática A 10º Ano**, Santillana Constância, 2007

PASSOS SOUSA, Ana Paula e TORRÃO COUTINHO, Maria de Piedade, **Matemática A 10º Ano – Exercícios**, Lisboa Editora, 2007

RIBEIRO, Jorge Tavares e SANTOS, Jorge, **Matemática 10, Matemática A 10º Ano**, Edições Asa 2007

SOVERAL, Ana Arede e SILVA, Carmen Viegas, **Matemática B, Matemática 10º Ano**, Texto Editores, 2005

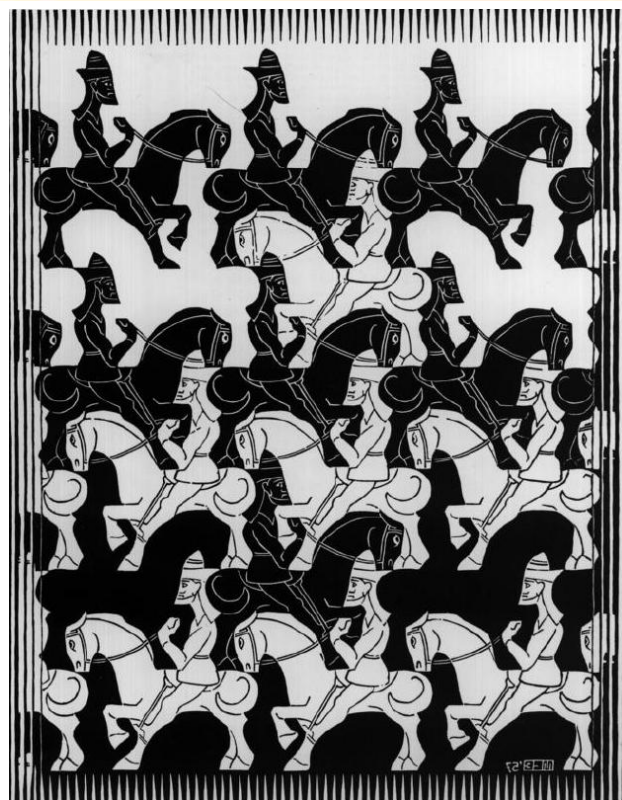
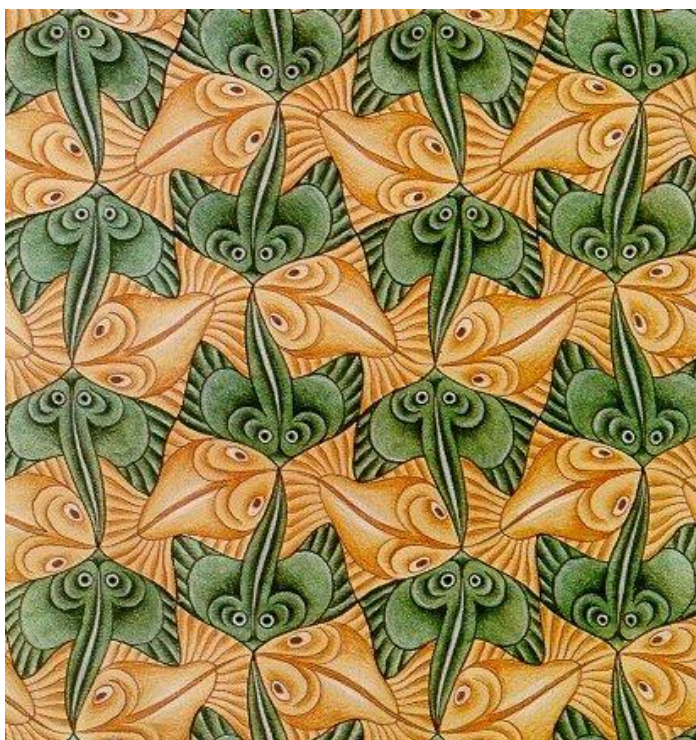
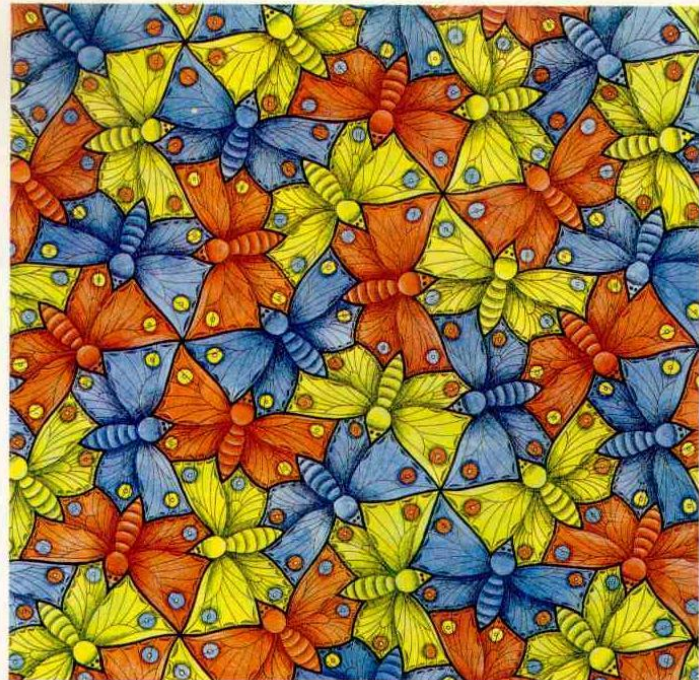
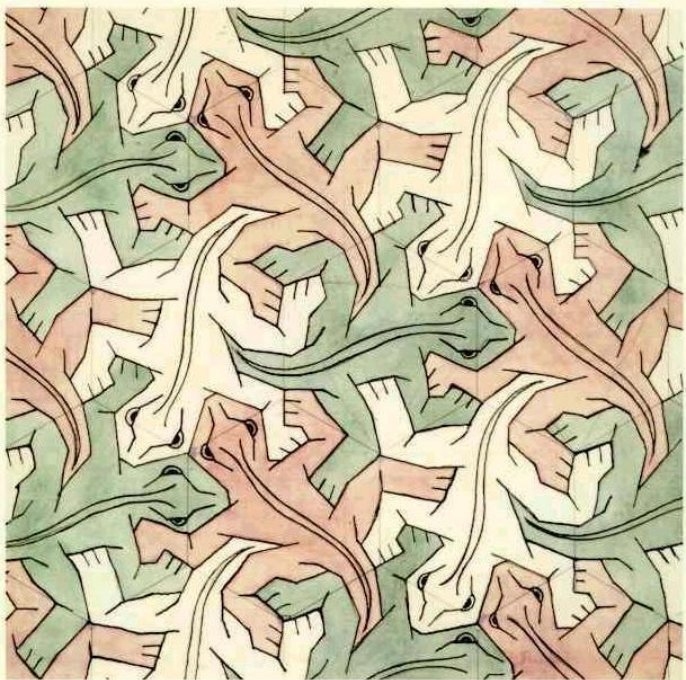
Nota Histórica:

Maurits Cornelis Escher (1890-1972)

O Holandês Maurits Cornelis Escher, (ou M. C. Escher, como é mais conhecido), é primordialmente reconhecido pelo seu incrível talento artístico em misturar elementos de surrealismo com elementos de matemática. Gostava de trabalhar desenhos com Ilusões de Espaço e Formas, Prédios Impossíveis e Mosaicos Geométricos Infinitos.

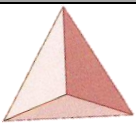
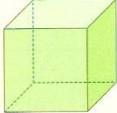
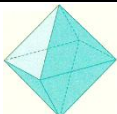


Alguns dos seus trabalhos:



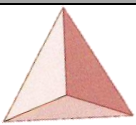
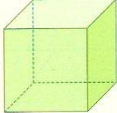
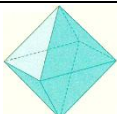
Actividade:

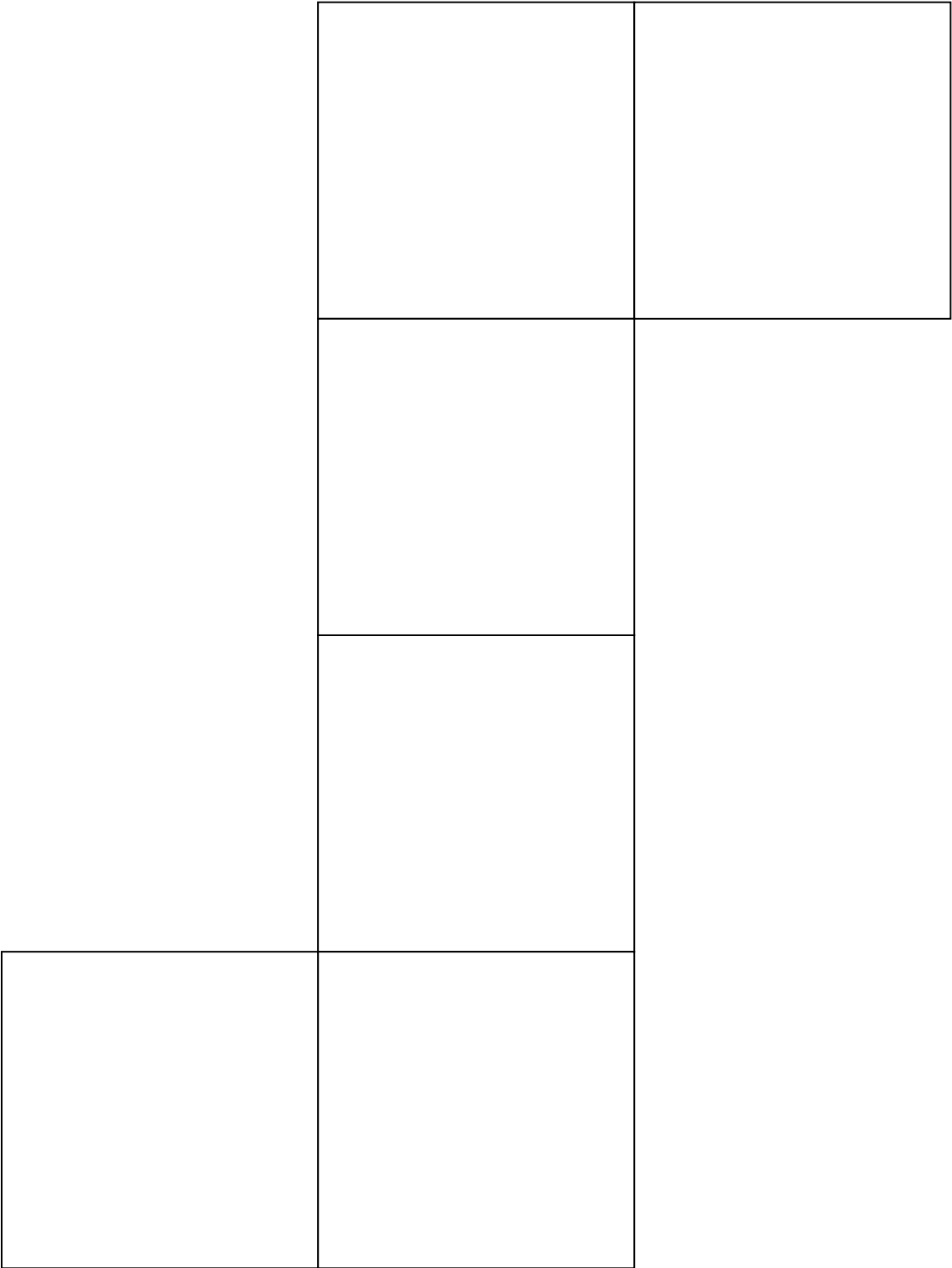
Construa o sólido da planificação fornecida e de seguida complete a tabela usando o sólido como exemplo.

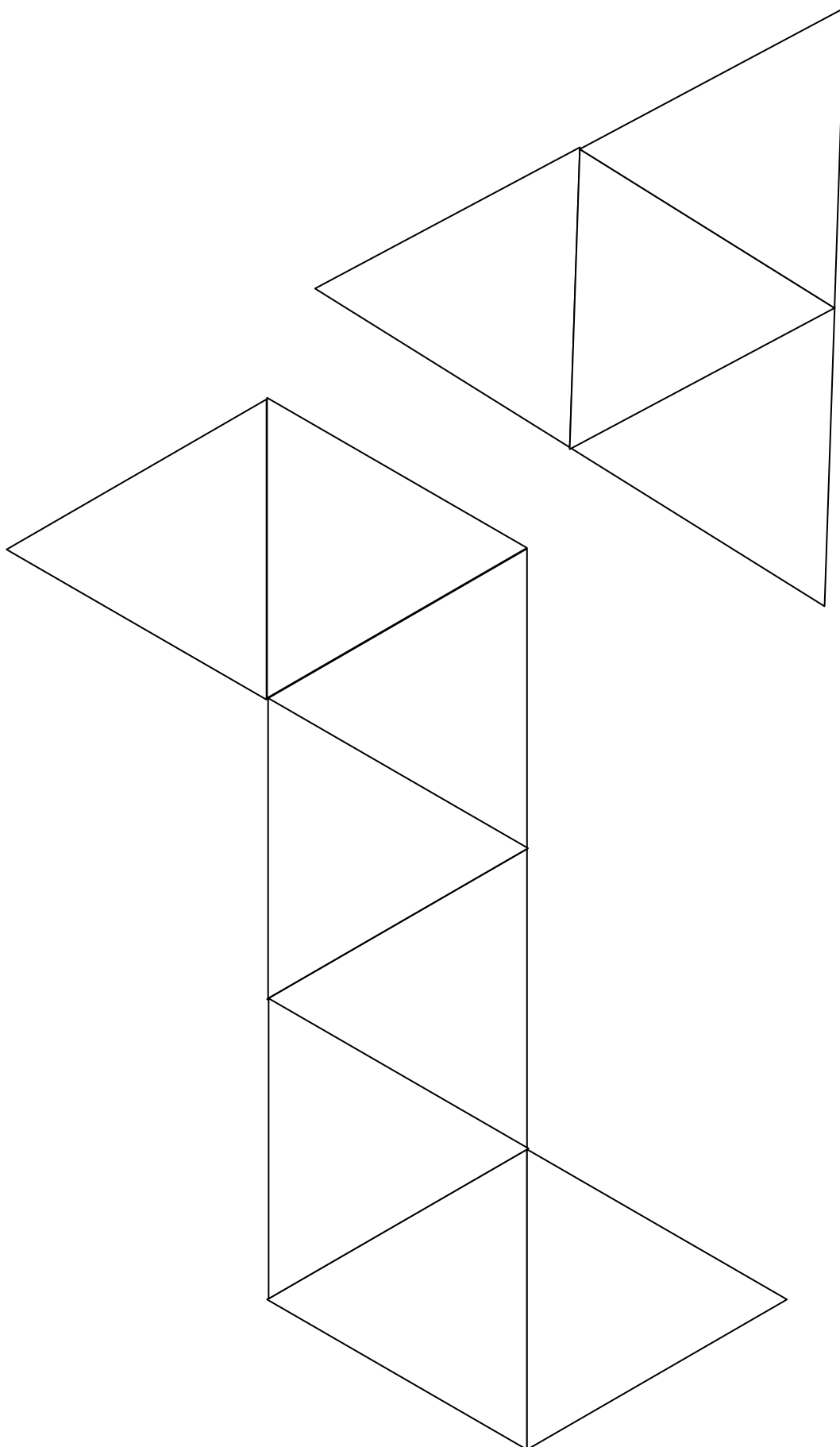
POLIEDRO	Nº de faces (F)	Nº de vértices (V)	Nº de arestas (A)	$F + V = A + 2$
Tetraedro 				
 Cubo				
Pirâmide pentagonal 				
 Octaedro				

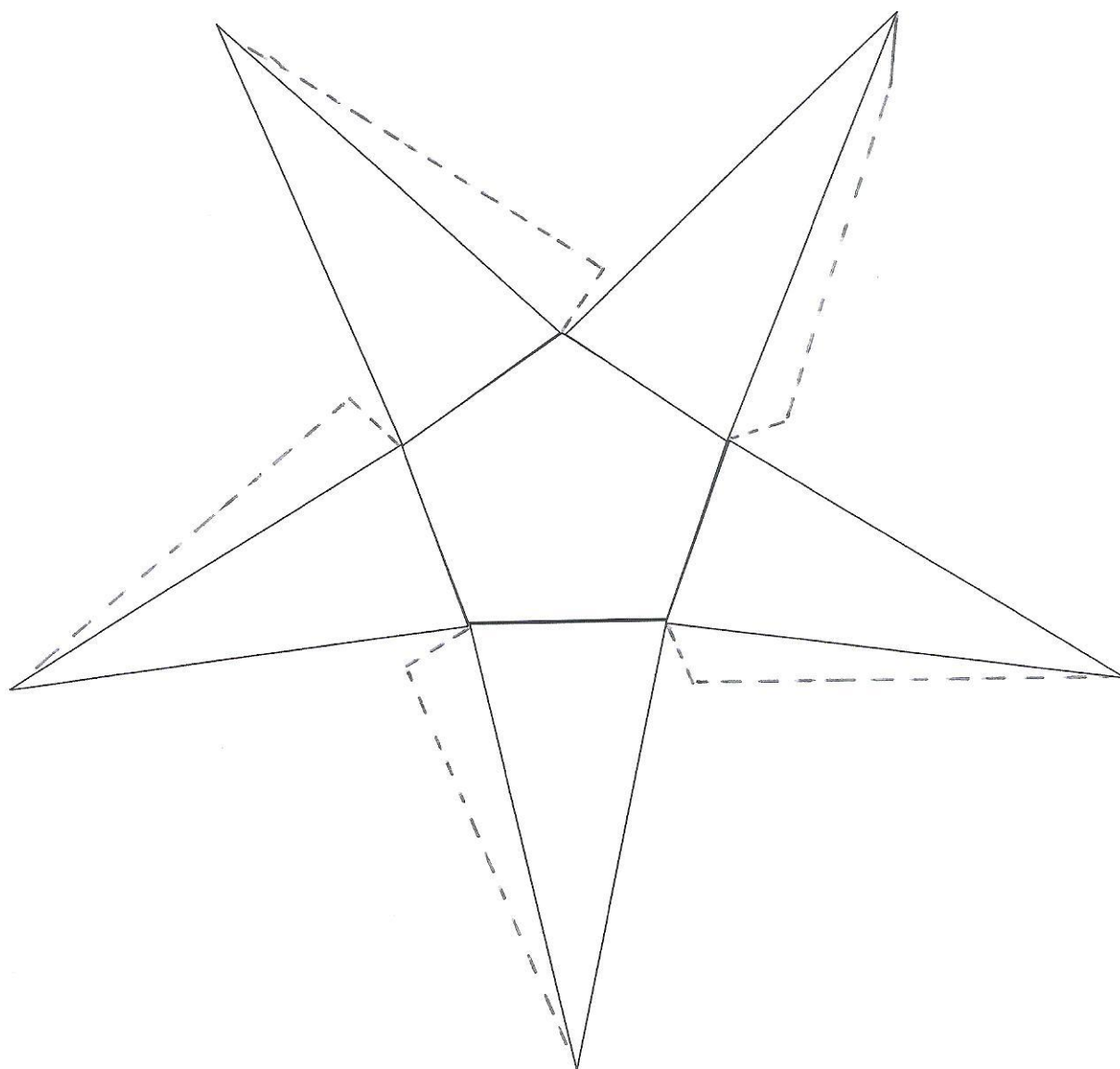
Actividade:

Construa o sólido da planificação fornecida e de seguida complete a tabela usando o sólido como exemplo.

POLIEDRO	Nº de faces (F)	Nº de vértices (V)	Nº de arestas (A)	$F + V = A + 2$
Tetraedro 				
 Cubo				
Pirâmide pentagonal 				
 Octaedro				







2 cubos coloridos de cartolina com os cortes apresentados no texto de apoio da página 8.

Existem 3 conjuntos.

Há um conjunto de curvas que são designadas por cónicas e que são obtidas intersectando uma superfície cónica com um plano.

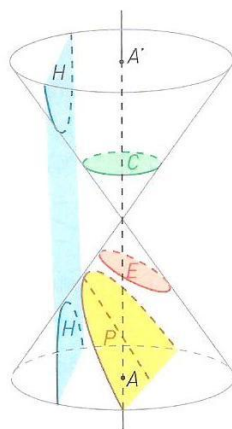
Das intersecções desse tipo podem resultar:

C – **Circunferência** se o plano é perpendicular ao eixo AA' .

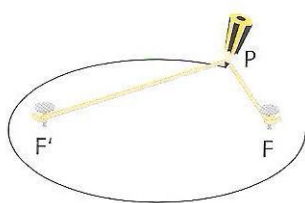
E – **Elipse** se o plano é oblíquo em relação ao eixo e intersecta todas as geratrizes.

P – **Parábola** se o plano é paralelo a uma geratriz.

H – **Hipérbole** se o plano é paralelo a duas geratrizes distintas e não passa pelo vértice.



A construção de uma elipse pode ser obtida do seguinte modo:



Numa superfície, espetamos dois pregos unidos por uma corda. Prendemos um lápis à corda e, mantendo esticada, traçamos a curva. Este método é conhecido por “método do jardineiro”, por ser o processo utilizado pelos jardineiros para traçar canteiros elípticos.

Nota Histórica:

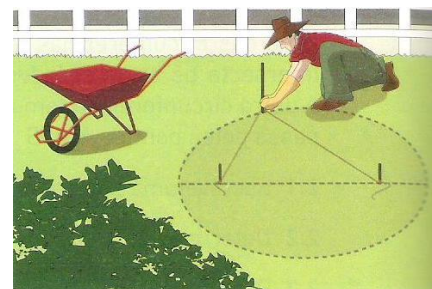
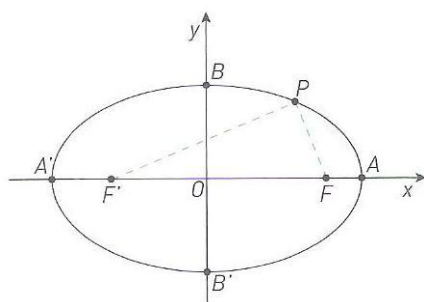
Johannes Kepler (1571-1630)



Johannes Kepler descobriu que todos os planetas do Sistema Solar descrevem órbitas elípticas e que o Sol se situa num dos focos.



Elipse é um conjunto de pontos do plano P em que a soma das distâncias a dois pontos fixos, F e F', chamados focos, é constante.



Método do Jardineiro

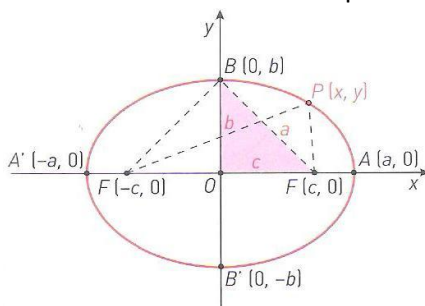
Elementos da Elipse

Em relação a um referencial o.m xOy considere-se uma elipse centrada na origem do referencial e com os focos pertencentes a Ox .

Observe que:

$$a > b$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Focos: F e F'

Distância focal: $\overline{FF'} = 2c$

Vértices: A, A', B, B'

Eixo maior: $[AA'] = 2a$

Eixo menor: $[BB'] = 2b$

Equação reduzida da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sendo a e b semieixos da elipse.

Onde podemos encontrar:

Todos os anfiteatros romanos tinham uma forma elíptica em que a parte central, a arena, também tinha a forma de elipse.

Acredita-se que os arquitectos romanos conheciam a propriedade reflectora da elipse, que permite, entre várias coisas, que duas pessoas situadas, cada uma delas num dos focos da elipse conseguem manter uma conversa, independentemente do barulho que haja à sua volta.



Coliseu de Roma



Vista aérea do Coliseu

1. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$a(x) = x^2 \quad ; \quad b(x) = 2x^2 \quad ; \quad c(x) = \frac{x^2}{2} \quad ; \quad d(x) = -2x^2$$

2. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$b(x) = 2x^2 \quad ; \quad f(x) = 2x^2 + 2 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 1$$

3. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$a(x) = x^2 \quad ; \quad i(x) = (x+3)^2 \quad ; \quad j(x) = (x-5)^2$$

4. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$a(x) = x^2 \quad ; \quad h(x) = (x+3)^2 + 2 \quad ; \quad k(x) = (x-5)^2 - 1$$

Bom Trabalho

1. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$a(x) = x^2 \quad ; \quad b(x) = 2x^2 \quad ; \quad c(x) = \frac{x^2}{2} \quad ; \quad d(x) = -2x^2$$

2. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$b(x) = 2x^2 \quad ; \quad f(x) = 2x^2 + 2 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 1$$

3. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$a(x) = x^2 \quad ; \quad i(x) = (x+3)^2 \quad ; \quad j(x) = (x-5)^2$$

4. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$a(x) = x^2 \quad ; \quad h(x) = (x+3)^2 + 2 \quad ; \quad k(x) = (x-5)^2 - 1$$

Bom Trabalho

1. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$a(x) = x^2 \quad ; \quad b(x) = 2x^2 \quad ; \quad c(x) = \frac{x^2}{2} \quad ; \quad d(x) = -2x^2$$

2. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

$$b(x) = 2x^2 \quad ; \quad f(x) = 2x^2 + 2 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 1$$

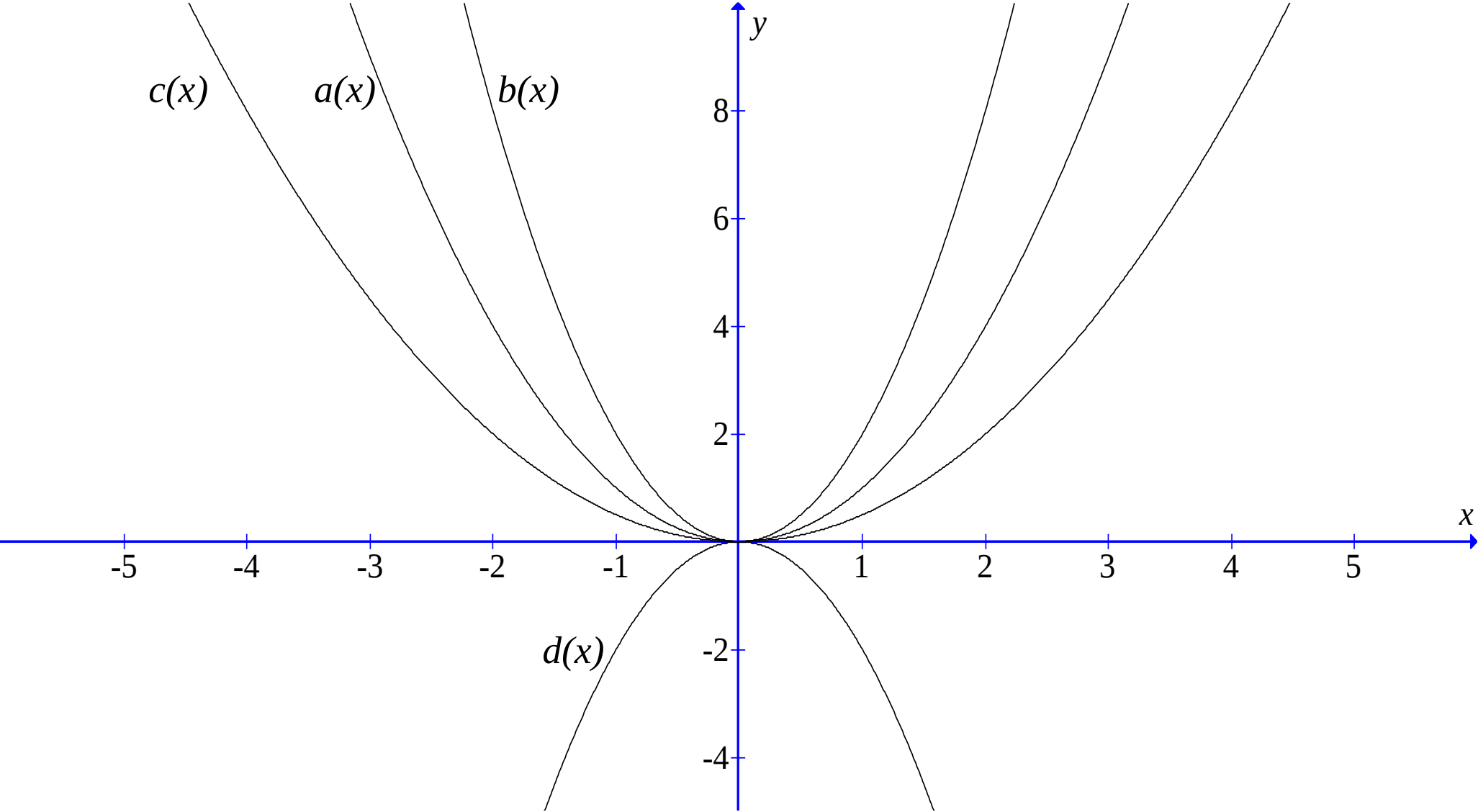
3. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

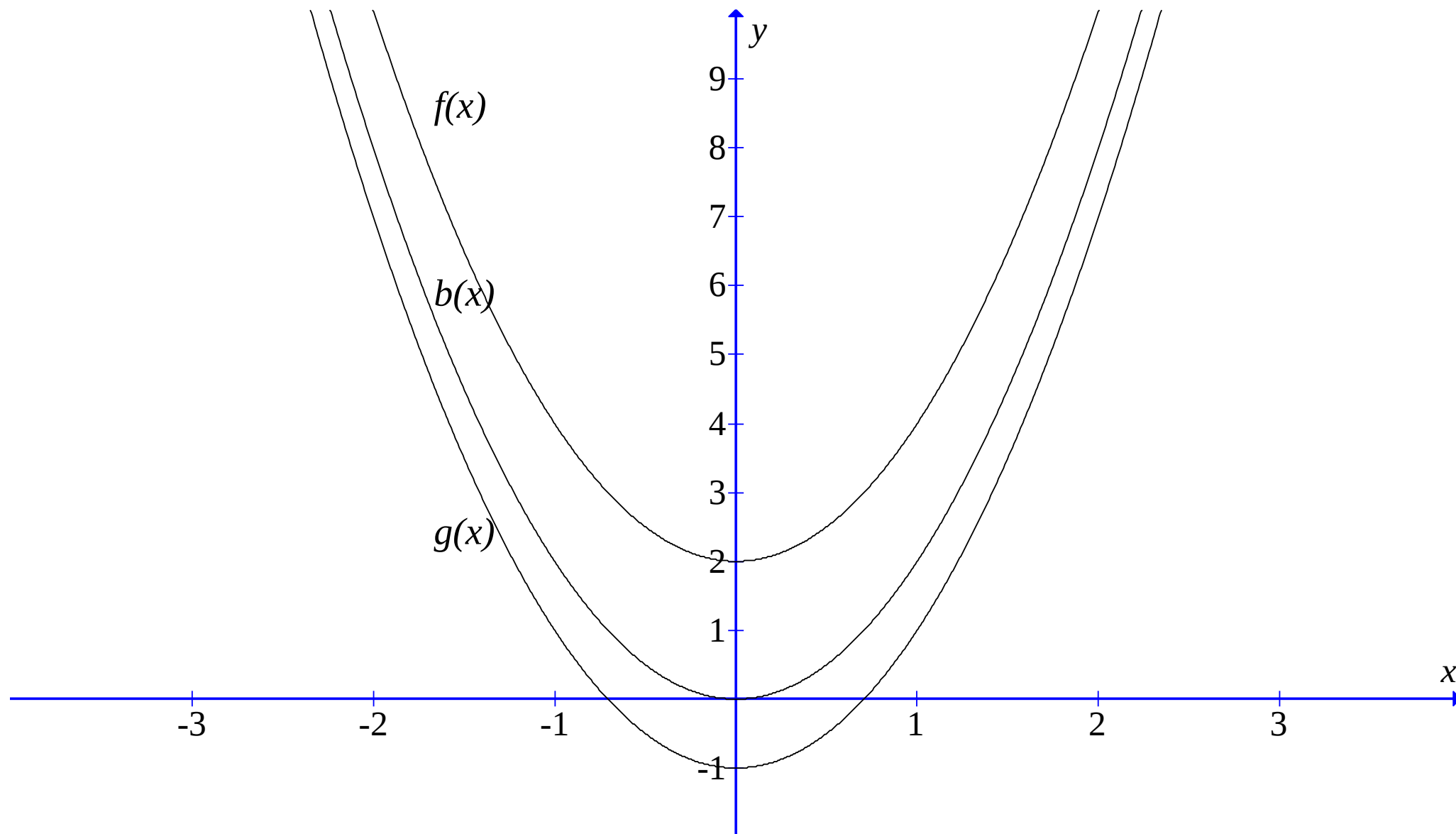
$$a(x) = x^2 \quad ; \quad i(x) = (x+3)^2 \quad ; \quad j(x) = (x-5)^2$$

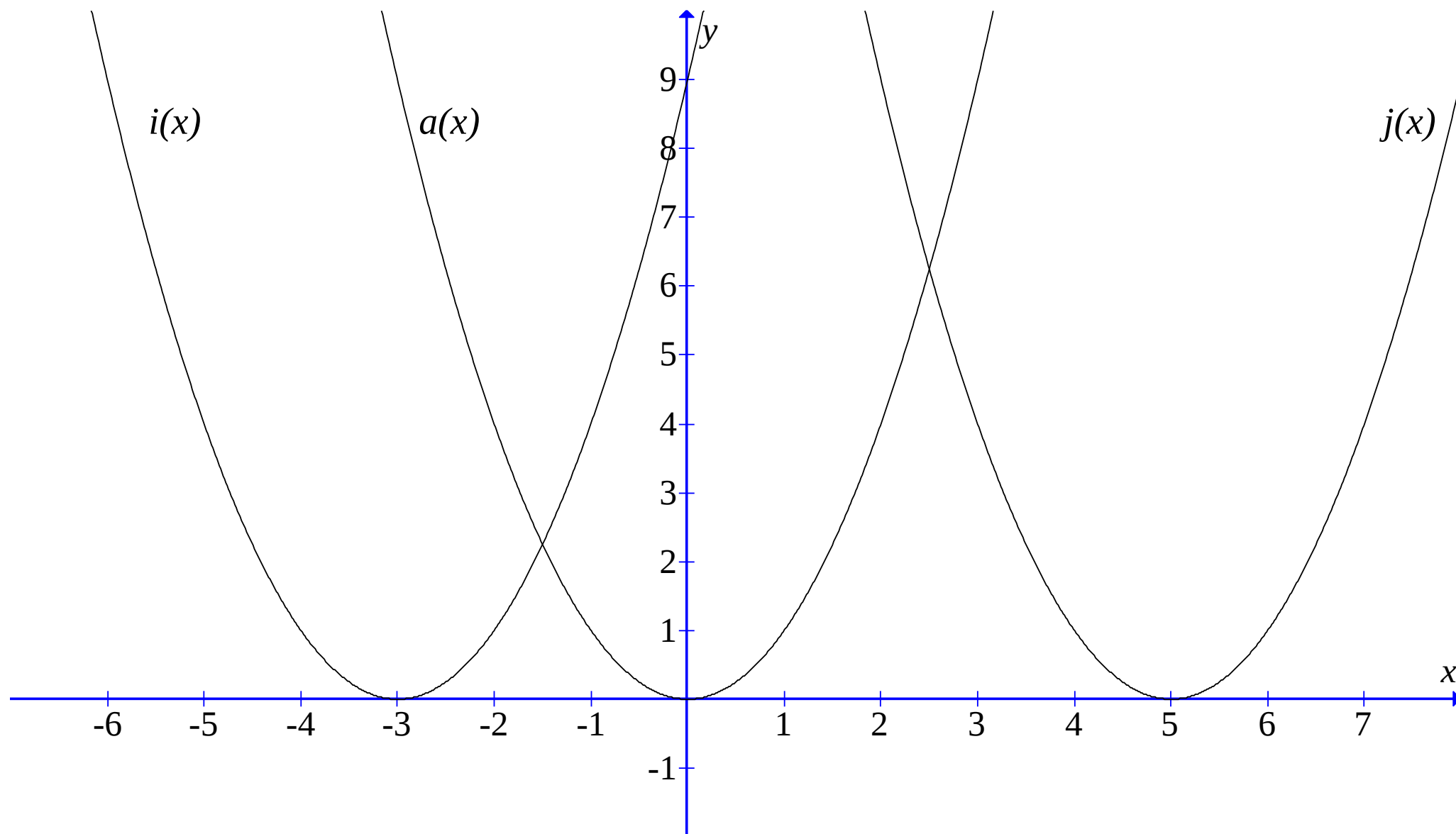
4. Representa no mesmo referencial os gráficos das seguintes funções.

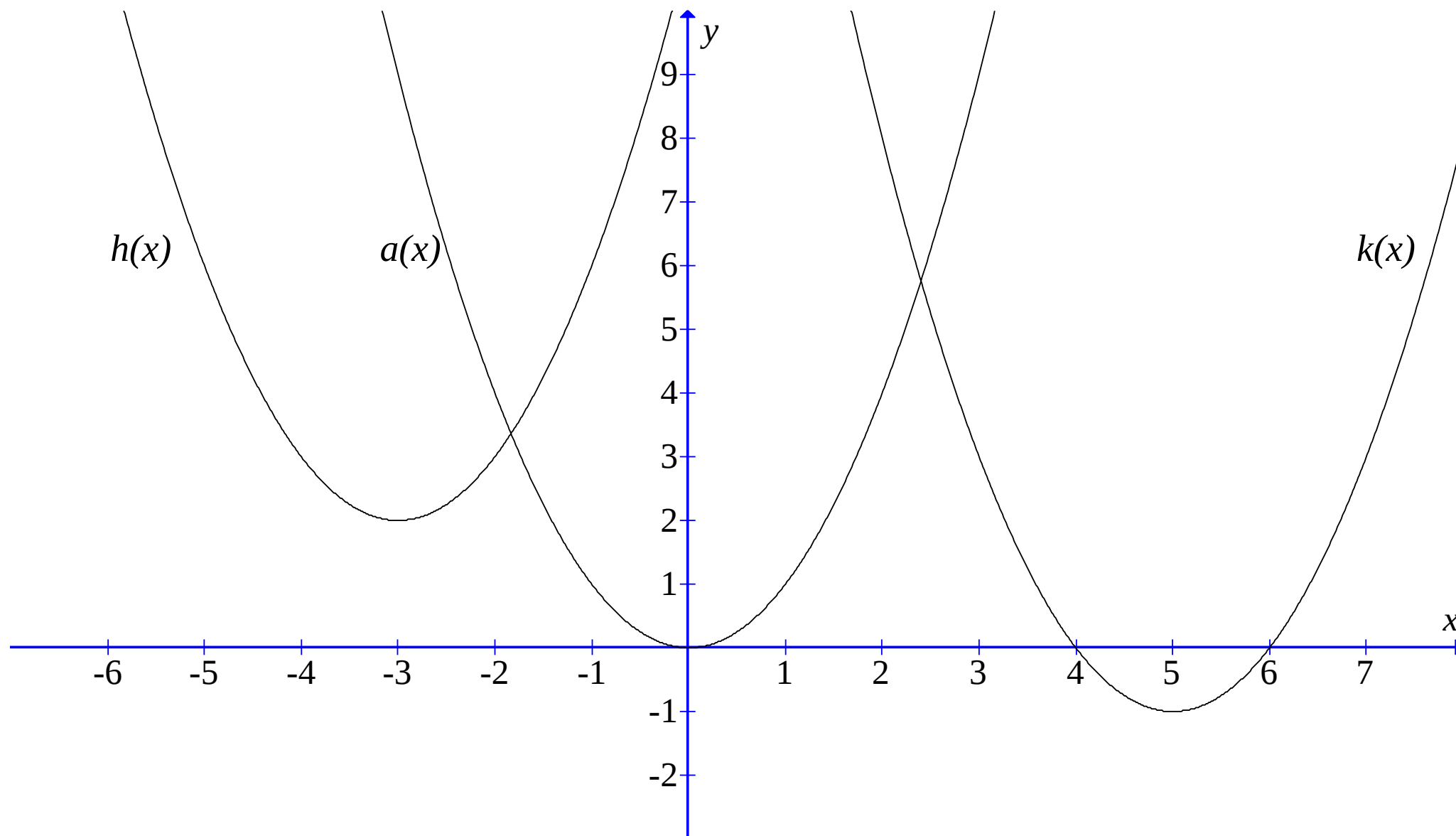
$$a(x) = x^2 \quad ; \quad h(x) = (x+3)^2 + 2 \quad ; \quad k(x) = (x-5)^2 - 1$$

Bom Trabalho









Método dos coeficientes indeterminados

Considerem-se os polinómios $M(x)$ e $N(x)$ tais que:

$$M(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 \quad \text{e} \quad N(x) = x + 1.$$

Sejam $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente, os polinómios que representam o quociente e o resto da divisão inteira de $M(x)$ por $N(x)$.

O grau de $M(x)$ é 3 e o grau de $N(x)$ é 1. Então, o grau de $Q(x)$ é 2, o que corresponde à diferença entre os graus de M e de N ($3 - 1$).

Como o resto tem grau inferior ao grau do divisor, conclui-se que o grau do resto é 0.

Assim, os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ são do tipo:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{e} \quad R(x) = r.$$

Atendendo à igualdade $M(x) = Q(x) \times N(x) + R(x)$, tem-se:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = (ax^2 + bx + c)(x + 1) + r.$$

Efectuando os cálculos no 2.º membro da igualdade, obtém-se:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = ax^3 + ax^2 + bx^2 + bx + cx + c + r.$$

Reduzindo os termos semelhantes,

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c + r.$$

Polinómios idênticos

Dois polinómios na mesma variável são idênticos (ou iguais) se e só se os coeficientes dos termos de igual grau são iguais.

Atendendo à definição de polinómios idênticos, tem-se:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c + r.$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -3 \\ b + c = 5 \\ c + r = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 10 \\ r = -8 \end{cases}$$

Conhecidos os coeficientes a , b , c e r , passam a estar conhecidos os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$.

$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 10 \quad \text{e} \quad R(x) = -8.$$

Referências Históricas:

François Viète
(1540-1603)



François Viète, apesar de ter sido um prestigiado advogado, dedicou-se à criptografia, à astronomia e, sobretudo, à Algebrá.

Foram vários os contributos dados no domínio de Matemática de tal importância que ficou conhecido como matemático.

Estabeleceu fórmulas que relacionam os coeficientes das raízes de um polinómio e foi dos primeiros, de forma sistematizada, a utilizar linguagem simbólica e letras para representar números.

Paolo Ruffini (1765-1822)



Paolo Ruffini, italiano, licenciou-se em Matemática, Filosofia e Medicina. A sua excepcional versatilidade reflectiu-se no facto de, simultaneamente, exercer Medicina e ser professor e pesquisador em Matemática, numa época em que já existia especialização científica.

Ruffini fez várias descobertas, sendo uma das mais importantes a da impossibilidade de resolver, por via algébrica, equações de grau superior a quatro.

A regra que tem o seu nome além de simples e prática, proporcionou alguma facilidade na resolução de certas equações de grau superior a dois, desde que conhecidas algumas das suas raízes.

O senhor Alegre, dono da fábrica "PintAlegre," está satisfeito! Os negócios vão tão bem que precisa de contratar mais um operário.

Eis uma fotografia com todos os funcionários da fábrica. Lá está a direcção, constituída pelo Sr. Alegre, seu irmão, e os seus 5 filhos e a força laboral formada por 3 capatazes, um motorista e 10 operários.

Jovial foi o candidato escolhido. O Sr. Alegre está a entrevistá-lo.

Aqui pagamos muito bem. O salário médio mensal é 150 000\$00! Durante o período de experiência receberá apenas 35 contos mensais, mas depressa será aumentado.

Ao fim de alguns dias, Jovial foi falar com o patrão.

O senhor enganou-me! Falei com todos os operários e nenhum ganha, por mês, mais de 70 000\$00. Como pode ser 150 mil escudos o salário médio mensal?

Não se zangue Jovial! O salário médio mensal é 150 000\$00 e vou provar-lho!

Neste quadro estão todos os salários discriminados. Eu ganho 600 000\$00, o meu irmão 450 000\$00, cada um dos meus filhos 200 000\$00, os capatazes 105 000\$00 cada um, o motorista 85 000\$00 e cada operário 70 000\$00.

	Em milhares de esc.
Sr. Alegre	600
Irmão	450
5 filhos a 200 "cada"	1000
3 capatazes 105 "cada"	315
Motorista	85
10 operários a 70 "cada"	700
Total	3150

Certo! Tem razão. A média aritmética dos salários mensais é 150 mil escudos. Contudo o valor "médio" da tabela não é esse!...

Então você não percebeu nada!... Se dispusesse os ordenados por ordem crescente, o salário "médio" central seria 85 000\$00, mas isso não é a média, é a mediana.

Então e o salário de 70 000\$00 o que é?

Esse é a moda. É o salário ganho pelo maior número de trabalhadores.

$\bar{x} = \frac{3150}{21} = 150$

Sabe, o seu problema é não saber a distinção entre média, mediana e moda.

No caminho para casa, Jovial encontrou a sua amiga Felizarda, a quem contou o sucedido.

Na tua empresa, qual é o salário médio, o salário mediana e o salário moda?

Nunca pensei nisso!

Agora já sei e peço a demissão...

Deixa ver... Há a D. Maricota, 3 estilistas, uma chefe de pessoal (eu), 2 mestras e 14 costureiras e ganham por mês, respectivamente 450, 220, 170, 165 e 110 mil escudos cada uma.

Então a média, a mediana e a moda serão...
 $\bar{x} =$
 $\tilde{x} =$
 $Mo =$

Curioso, o salário é igual ao da fábrica PintAlegre. No entanto, o ordenado dos operários é muito inferior ao das costureiras!...

Propriedades da média:

Se a todos os dados de uma distribuição com média $\bar{x}$ adicionarmos o mesmo valor k , obtemos uma nova distribuição com média

$$\bar{y} = \bar{x} + k$$

Demonstração

Seja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a colecção de dados observados, a média desta distribuição é então:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Adicionando a todos os dados a constante k , obtemos uma nova distribuição cuja colecção de dados é $x_1 + k, x_2 + k, x_3 + k, \dots, x_n + k$. Então, a média da nova distribuição é dada por:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + k) + (x_2 + k) + (x_3 + k) + \dots + (x_n + k)}{n}$$

Como a adição de números reais é comutativa e associativa, podemos escrever a igualdade anterior na forma:

$$\bar{y} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + (k + k + k + \dots + k)}{n}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + nk}{n} = \\ &= \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{n} + \frac{nk}{n} \end{aligned}$$

obtendo, assim, $\bar{y} = \bar{x} + k$, c. q. d. (como queríamos demonstrar).

Se multiplicarmos todos os dados de uma distribuição com média $\bar{x}$ pelo mesmo valor a , obtemos uma nova distribuição com média

$$\bar{y} = a\bar{x}$$

Propriedades do desvio-padrão:

Quando estudamos as propriedades da média, verificamos que, se adicionarmos uma constante k a todos os elementos de um conjunto com média a , passamos a ter um conjunto com média $a + k$.

— Se o desvio-padrão do conjunto inicial for σ , qual será o desvio-padrão do novo conjunto?

A resposta a esta questão é evidente. Se pensarmos nos elementos representados sobre a recta real, quando a todos eles adicionamos a mesma constante, fazemos com que estes se desloquem sobre a recta no mesmo sentido e, exactamente, a mesma distância, inclusive a média, pelo que os desvios, em relação à média, se mantêm iguais, ou seja, o desvio-padrão continua a ser σ .

Se a todos os elementos de um conjunto com desvio-padrão σ adicionarmos o mesmo valor k , o desvio-padrão não se altera.

Também é válida a seguinte propriedade para o desvio-padrão:

Se multiplicarmos todos os elementos de um conjunto com desvio-padrão σ por uma mesma constante a , obtemos um novo conjunto com desvio-padrão $a\sigma$.

Actividade: Com o objectivo de confirmar as propriedades apresentadas responda às seguintes questões:

x_i	2	3	4	5	6
n_i	1	3	5	7	8
$x_i + 2$	4	5			
$2x_i$	4	6			

1. Complete a tabela apresentada.

2. Compare a média e o desvio-padrão de x_i , $x_i + 2$, $2 \times x_i$

Sugestões para a elaboração de um inquérito

Antes de começar um estudo estatístico é muito importante ter ideias claras sobre os dados que necessitamos e como os vamos utilizar. Deves registar esta informação de forma clara.

Podem investigar-se diferentes assuntos utilizando um inquérito, mas quando o fores construir, tem em atenção os seguintes aspectos:

- Recolher toda a informação necessária. Demasiada informação torna-se difícil de tratar mas a falta de informação pode impedir-te de tirar conclusões.
- Um questionário não deve ser muito longo.
- Inquirir um número grande de pessoas. Quanto maior for a amostra mais significativos serão os resultados.
- As questões devem ser claras e objectivas. Não devem permitir diferentes interpretações.
- Fornecer à partida um conjunto de respostas possíveis para evitar que cada pessoa dê uma resposta diferente o que torna difícil o tratamento estatístico.

Exemplo: Qual o género de filme que prefere?

A resposta deve ser fechada: *(Uma resposta fechada só permite escolher entre as opções dadas).*

Drama..... Acção..... Comédia..... Outro.....

- As possíveis respostas também devem ser claras.

Evitar: Acção..... Policial..... *(Os policiais também são filmes de acção).*

- O conjunto de respostas a escolher deve ser o mais completo possível.

Foi esta a razão de colocar a opção: Outro.

- No entanto o número de hipóteses de resposta não pode ser demasiado pequeno para que se possam tirar algumas conclusões, nem demasiado grande porque dificulta o tratamento estatístico *(4 escolhas já permitem tirar conclusões).*
- As questões devem ser directas e não devem pedir às pessoas que façam julgamentos de valor.

Exemplo: É jovem?..... *(a noção de jovem é relativa; é preferível perguntar a idade.)*

- Vai ao cinema frequentemente?..... *(frequentemente é subjectivo!)*

É preferível: Quantas vezes vai ao cinema por mês:

0 ou 1..... 2 a 4... 5 a 8..... mais de 8.....

- Pode colocar-se uma ou mais questões, no inquérito, para verificar a representatividade da amostra.

Exemplo: Se pretender estudar a opinião dos portugueses face às diferentes religiões, devem ser colocadas questões acerca das suas próprias convicções religiosas.

É frequente colocar questões, como; idade, sexo, profissão, habilitações literárias, área de residência, para verificar se a amostra é significativa, pois permite-nos eliminar alguns elementos da amostra de modo a torná-la mais representativa.

Sugestões para a elaboração de um inquérito

Antes de começar um estudo estatístico é muito importante ter ideias claras sobre os dados que necessitamos e como os vamos utilizar. Deves registar esta informação de forma clara.

Podem investigar-se diferentes assuntos utilizando um inquérito, mas quando o fores construir, tem em atenção os seguintes aspectos:

- Recolher toda a informação necessária. Demasiada informação torna-se difícil de tratar mas a falta de informação pode impedir-te de tirar conclusões.
- Um questionário não deve ser muito longo.
- Inquirir um número grande de pessoas. Quanto maior for a amostra mais significativos serão os resultados.
- As questões devem ser claras e objectivas. Não devem permitir diferentes interpretações.
- Fornecer à partida um conjunto de respostas possíveis para evitar que cada pessoa dê uma resposta diferente o que torna difícil o tratamento estatístico.

Exemplo: Qual o género de filme que prefere?

A resposta deve ser fechada: *(Uma resposta fechada só permite escolher entre as opções dadas).*

Drama..... Acção..... Comédia..... Outro.....

- As possíveis respostas também devem ser claras.

Evitar: Acção..... Policial..... *(Os policiais também são filmes de acção).*

- O conjunto de respostas a escolher deve ser o mais completo possível.

Foi esta a razão de colocar a opção: Outro.

- No entanto o número de hipóteses de resposta não pode ser demasiado pequeno para que se possam tirar algumas conclusões, nem demasiado grande porque dificulta o tratamento estatístico *(4 escolhas já permitem tirar conclusões).*
- As questões devem ser directas e não devem pedir às pessoas que façam julgamentos de valor.

Exemplo: É jovem?..... *(a noção de jovem é relativa; é preferível perguntar a idade.)*

- Vai ao cinema frequentemente?..... *(frequentemente é subjectivo!)*

É preferível: Quantas vezes vai ao cinema por mês:

0 ou 1..... 2 a 4... 5 a 8..... mais de 8.....

- Pode colocar-se uma ou mais questões, no inquérito, para verificar a representatividade da amostra.

Exemplo: Se pretender estudar a opinião dos portugueses face às diferentes religiões, devem ser colocadas questões acerca das suas próprias convicções religiosas.

É frequente colocar questões, como; idade, sexo, profissão, habilitações literárias, área de residência, para verificar se a amostra é significativa, pois permite-nos eliminar alguns elementos da amostra de modo a torná-la mais representativa.