

TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS
9ª Classe - 1º Ciclo

MATEMÁTICA 9



MATEMÁTICA 9

TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

9ª Classe - 1º Ciclo

	Pág
UNIDADE 1 – NÚMEROS REAIS. INEQUAÇÕES	1
1.1. Os números irracionais. O conjunto dos números reais.	1
1.2. Intervalos de números reais	5
1.3. Inequações	9
1.4. Conjunção e disjunção de condições	11
UNIDADE 2 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES	13
2.1. Equações do 1º grau a duas incógnitas	13
2.2. Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas	15
2.3. Classificação de sistemas	18
2.4. Resolução de sistemas formando e resolvendo sistemas de equações	19
UNIDADE 3 – PROPORCIONALIDADE INVERSA	21
3.1. Proporcionalidade directa (revisão)	21
3.2. Proporcionalidade inversa	23
3.3. Função de proporcionalidade inversa	25
3.4. Leitura e interpretação de gráficos	27
UNIDADE 4 – CIRCUNFERÊNCIA E POLÍGONOS	29
4.1. Ângulos ao centro e arcos correspondentes	30
4.2. Ângulos inscritos	32
4.3. Propriedades	33
4.4. Rectas e circunferência. Tangente a uma circunferência	34
4.5. Polígonos inscritos. Ângulos de um polígono	36
4.6. Área de um polígono regular	39
UNIDADE 5 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU	41
5.1. Operações com polinómios. Casos notáveis da multiplicação de polinómios. Decomposição em factores (revisão)	41
5.2. Resolução de equações do 2º grau incompletas. Lei do anulamento do produto (revisão)	42
5.3. Resolução de equações do 2º grau completas. Fórmula resolvente	44
5.4. Resolução de problemas do 2º grau	46
UNIDADE 6 – TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RECTÂNGULO	48
6.1. Razões trigonométricas de um ângulo agudo	48
6.2. Resolução de triângulos rectângulos	50
6.3. Aplicações da trigonometria na resolução de problemas de matemática e da vida real	52
6.4. Relações entre as relações trigonométricas do mesmo ângulo	55

	Pág
UNIDADE 7 – ESPAÇO – OUTRA VISÃO	56
7.1. Sólidos geométricos (revisão)	56
7.2. Volume da esfera. Área da superfície esférica	58
7.3. Rectas e planos no espaço	59
7.4. Critérios de paralelismo e perpendicularidade	61
UNIDADE 8 – PROBABILIDADES	63
8.1. Linguagem das probabilidades	63
8.2. Cálculo das probabilidades de um acontecimento. Lei de Laplace	65
8.3. Frequência relativa e probabilidades	67

ANEXO 1 – Tabela trigonométrica	70
ANEXO 2 – Formulário de geometria	71

BIBLIOGRAFIA E IMAGENS	72
------------------------	----

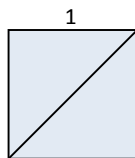
UNIDADE 1 – NÚMEROS REAIS. INEQUAÇÕES

1.1. Os números irracionais. O conjunto dos números reais.

Os teus conhecimentos acerca dos números têm vindo a ser alargados ao longo dos anos: começaste por tomar consciência dos números naturais, mais tarde dos números fraccionários e dos números negativos e assim foste aprendendo os vários conjuntos de números. Recorda:

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros relativos.
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais relativos.
 $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \text{números fraccionários}$

Julgaram os sábios da antiguidade que o problema da criação de novos números estava resolvido com o conjunto dos números racionais. Até que um dia surgiu um problema na escola de Pitágoras.



Qual é o número que representa a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1? Pelo do Teorema de Pitágoras, tem-se que: $d^2 = 1^2 + 1^2$
 $d^2 = 2 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{2}$; como se trata de uma medida de comprimento, virá: $d = \sqrt{2}$

Colocou-se então a questão: $\sqrt{2}$, que tipo de número é?

Como era possível existir um segmento e não existir um número que representasse o seu comprimento? Alguns séculos mais tarde este problema foi resolvido e admitiram-se novos números, como por exemplo $\sqrt{2}$.

O número $\sqrt{2}$, não é um número racional, pois não é possível escrevê-lo na forma de uma fracção $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

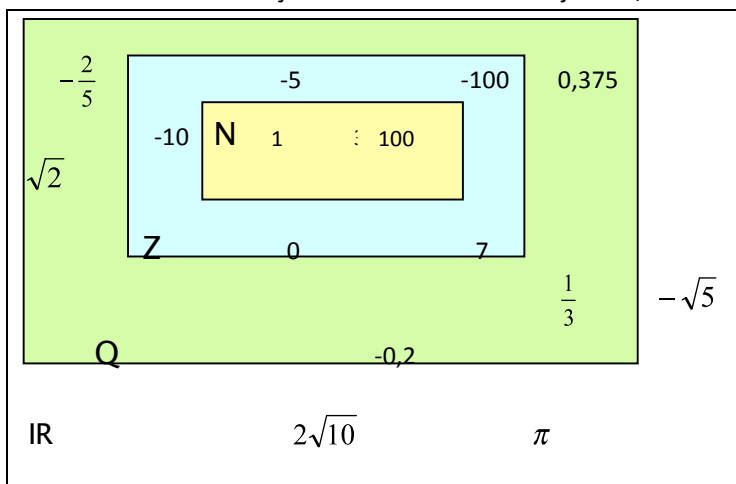
Diz-se por essa razão que $\sqrt{2}$ é um **número irracional**.

Também são exemplos de números irracionais, os números $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{10}$; π .

Se ao conjunto $\mathbb{Q}$ juntarmos os **números irracionais**, obtemos o **conjunto dos números reais** que se representa por $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$$

É fácil descobrires relações entre os vários conjuntos, se observares a figura de dentro para fora:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\subset \rightarrow$ lê-se "está contido em"

Podes observar que:

$$\begin{aligned} 3 \in \mathbb{N}; \quad 3 \in \mathbb{Z}; \quad 3 \in \mathbb{Q}; \quad 3 \in \mathbb{R} \\ -5 \notin \mathbb{N}; \quad -5 \in \mathbb{Z}; \quad -5 \in \mathbb{Q}; \quad -5 \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{5} \notin \mathbb{N}; \quad -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}; \quad -\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}; \quad -\frac{1}{5} \in \mathbb{R} \\ \sqrt{2} \notin \mathbb{N}; \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}; \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}; \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

E ainda agrupar os números, formando outros conjuntos que são **subconjuntos de IR**.

$$IR^+ = \{\text{números reais positivos}\}$$

$$IR^- = \{\text{números reais negativos}\}$$

$$IR_0^+ = \{\text{números reais não negativos}\}$$

$$IR_0^- = \{\text{números reais não positivos}\}$$

➤ Números reais e dízimas

Como já sabes, qualquer número racional pode ser representado por uma fracção cujos termos são números inteiros. Se dividirmos o numerador pelo denominador obtemos a **dízima** desse número.

Por exemplo, considera os seguintes números

racionais $\frac{7}{5}$ e $-\frac{2}{3}$:

Repara nas dízimas resultantes das respectivas divisões:

$$\begin{array}{r} 7,0 \overline{) 5} \\ 20 \quad 1,4 \\ 0 \end{array} \quad \frac{7}{5} = 1,4$$

Neste caso a **dízima é finita**.

Ao efectuar a divisão obtém-se resto zero.

$$\begin{array}{r} -2,000 \overline{) 3} \\ 20 \quad - \\ 0,666... \\ 20 \end{array} \quad \frac{2}{3} = -0,666...$$

Neste caso, obteve-se uma **dízima infinita**: por mais que se continue a divisão, o resto nunca é zero. Mas repara que a dízima apesar de **infinita é periódica**.

$-0,666...$ tem **período 6** e pode escrever-se abreviadamente **$-0,(6)$** .

Período é o algarismo ou conjunto de algarismos que se repetem sempre pela mesma ordem.

Em alguns números racionais é difícil observar-se o período por ele ser composto por muitos dígitos.

$\frac{19}{34} = 0,55882352941176470 \ 5882352941176470...$ O período desta dízima infinita periódica não se consegue observar nas calculadoras por ter 16 dígitos.

De um modo geral:

Um **número racional** pode ser representado por uma **dízima finita** ou por uma **dízima infinita periódica**.

Actividades de aplicação

3. Assinala com um X no quadrado respectivo sempre que o número pertença ao conjunto.

	IN	Z	Q	IR	IR ⁺	IR ⁻
8						
-4						
$\frac{1}{7}$						
0						
$\sqrt{3}$						
4π						
$-\sqrt{9}$						

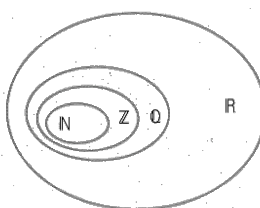
4. Completa, usando os símbolos de $\in, \notin, \subset, \not\subset, =$.

- 4.1. $3 \dots \dots IR$ 4.2. $\sqrt{7} \dots \dots Q$ 4.3. $\sqrt{16} \dots \dots IN$
 4.4. $-\frac{3}{7} \dots \dots Q$ 4.5. $-\frac{18}{2} \dots \dots Z$ 4.6. $\frac{5}{4} \dots \dots IR$
 4.7. $-13 \dots \dots Z^+$ 4.8. $0 \dots \dots IR^+$ 4.9. $Z^- \dots \dots Q$
 4.10. $IN \dots \dots IR^+$ 4.11. $Q \dots \dots IR$ 4.12. $Q \dots \dots IN$

5. Indica, de entre os seguintes números, quais os irracionais.

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\sqrt{3} + 1$ c) $\frac{25}{15}$ d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ e) $\frac{51}{11}$

6. Considera o seguinte diagrama.



- a) Dá um exemplo de um número que pertença a todos os conjuntos indicados.
 b) Indica um número que pertença a Q mas não pertença a Z .
 c) Indica um número que pertença a IR mas não a Q .

Experimenta agora com a tua calculadora, determinar a **dízima** de cada um dos **números irracionais** $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{17}, \pi, \dots$

$$\sqrt{2} = 1,41423562\dots$$

$$\sqrt{5} = 2,2360679\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$$

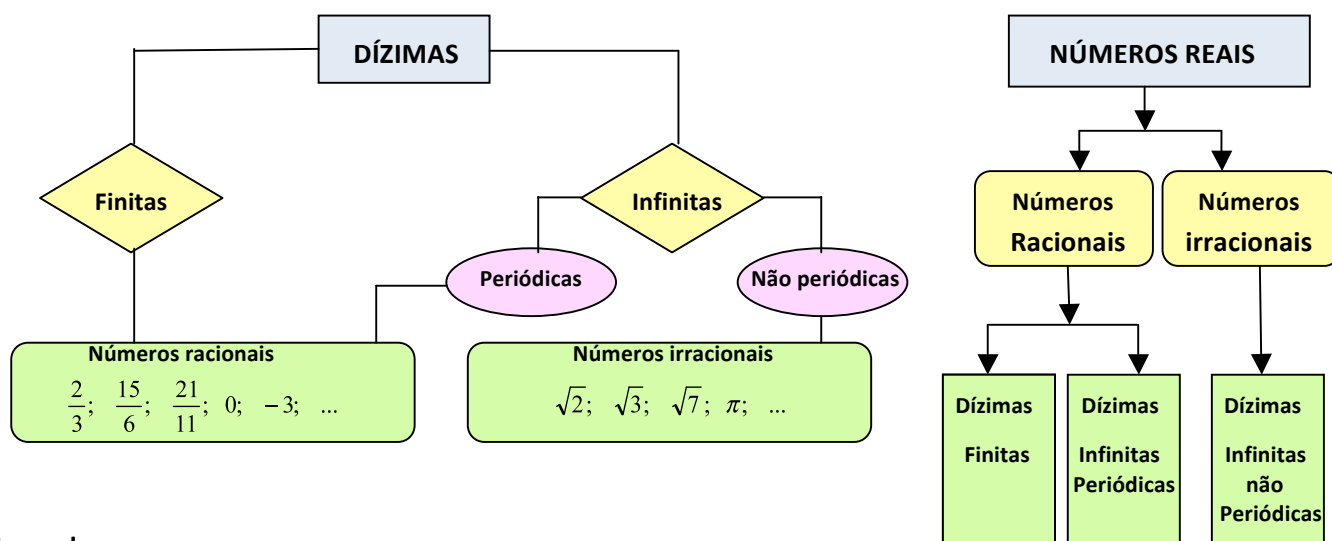
$$\pi = 3,141592653589\dots$$

Podes verificar que as dízimas que obtiveste para os números irracionais têm um número infinito de casas decimais e não se verifica a existência de período. Dizem-se **dízimas infinitas não periódicas**.

De um modo geral tem-se que:

Um **número irracional** pode ser representado por uma **dízima infinita não periódica**.

Em resumo:



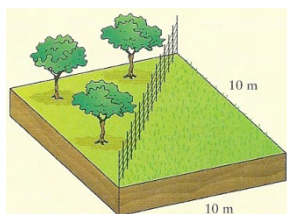
Exemplo

$$\frac{1}{5} = 0,2 \leftarrow \text{Dízima finita ou de período 0.}$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3) \leftarrow \text{Dízima infinita periódica de período 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi = 3,141592653\dots \\ \sqrt{3} = 1,732050807\dots \end{array} \right\} \leftarrow \text{Dízimas infinitas não periódicas}$$

➤ Valores exactos e valores aproximados



Quantos metros de rede precisamos de comprar para dividir, pela diagonal, um terreno com a forma de um quadrado com 10 m de lado?

Apresenta a resposta com um número inteiro de metros.

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 10^2 + 10^2 \Leftrightarrow d^2 = 100 + 100 \Leftrightarrow d^2 = 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{200} \vee d = -\sqrt{200}$$

Como se trata de um comprimento, considera-se a solução positiva, ou seja, $d = \sqrt{200}$.

$\sqrt{200} \text{ m}$ é o **valor exacto** da diagonal de um quadrado com 10 m de lado.

O número Pi

O número *pi* (representado habitualmente pela letra grega π) é o irracional mais famoso da história, com o qual se representa a razão constante entre o perímetro de qualquer circunferência e o seu diâmetro.

Se pensarmos que ao dar a volta à Lua seguindo um dos seus círculos máximos, percorremos aproximadamente 10920 Km e se dividirmos este valor pelo diâmetro da Lua que é 3476 Km iremos verificar que esta razão é de 3,14154200..., este número é-nos familiar, é aproximadamente 3,14.

Na realidade, como número irracional, *pi* é expresso por uma dízima infinita não periódica, que nos dias de hoje com a ajuda dos computadores já é possível determinar com centenas de milhões de casas decimais.

Aqui aparecem as primeiras cinquenta :

$\pi = 3,14159 \ 26535 \ 89793 \ 23846 \ 26433 \ 83279 \ 50288 \ 41971 \ 69399 \ 3751$

In, www.educ.fc.ul.pt

$\sqrt{200}$ é um número irracional. Os números irracionais normalmente não se utilizam na vida real. Não chegamos a uma loja e pedimos $\sqrt{200}$ m de rede. Normalmente, usam-se valores aproximados:



$\sqrt{200}$ é maior que 14 mas é menor que 15, por isso 14 m de rede não chegam e 15 m são demais. Como vamos comprar a rede para vedar totalmente a diagonal do terreno, devemos comprar 15 m, uma vez que a resposta ao problema terá que ser um número inteiro de metros.

Em muitos problemas, no próprio enunciado, é pedido o rigor com que se pretende a resposta.

$\sqrt{200} = 14,1$ (1 c. d.) ← valor aproximado por defeito a menos de uma décima (10^{-1}) ou com um erro inferior a uma décima.

$\sqrt{200} = 14,2$ (1 c. d.) ← valor aproximado por excesso a menos de uma décima (10^{-1}) ou com um erro inferior a uma décima.

$\sqrt{200} = 14,15$ (2 c. d.) ← valor aproximado por excesso a menos de uma centésima (10^{-2}) ou com um erro inferior a uma centésima.

Como se pode ver na recta:

$$14,1 < \sqrt{200} < 14,2 \text{ enquadramento às décimas.}$$

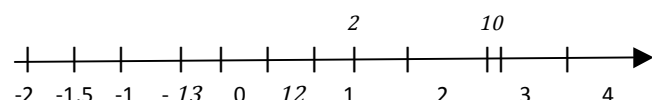
Lê-se “ $\sqrt{200}$ é maior que 14,2 e é menor que 14,3”.

➤ Recta real

Na **recta real**, a cada número real corresponde um ponto e a cada ponto corresponde um número real (a abcissa do ponto).

- Os números **reais positivos** (IR^+) estão representados à **direita de zero**.
- Os números **reais negativos** (IR^-) estão representados à **esquerda de zero**.
- Dados **dois números**, o **menor** está sempre representado **à esquerda**.

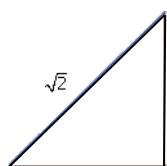
Observa:



Quando for necessário usamos a calculadora para determinar um valor aproximado do número. Por exemplo,

$$-\frac{1}{3} = -0,(3); \quad \sqrt{2} = 1,414...; \quad \sqrt{10} = 3,162...$$

Para encontrar os pontos correspondentes aos **valores exactos dos números irracionais**, utiliza-se o método seguinte, que se baseia no Teorema de Pitágoras.



Sobre a recta real traça-se um triângulo rectângulo com os catetos iguais a 1. A hipotenusa deste triângulo é igual a $\sqrt{2}$. Com o compasso, tira-se a

Actividades de aplicação

7. Escreve a dízima correspondente a cada um dos seguintes números e classifica-a (no caso dos números irracionais apresenta seis casas decimais).

- a) $\frac{17}{100}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) $\frac{13}{99}$ d) $-\frac{331}{45}$
e) $\sqrt{17}$ f) $\sqrt{40}$ g) $-\sqrt{0,9}$ h) $-\sqrt{13}$

8. Considera os números:

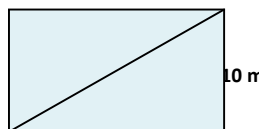
$$\sqrt{4900} \quad \sqrt{490} \quad \sqrt{49} \quad \sqrt{4,9} \quad \sqrt{0,49}$$

Quais dos números indicados são racionais e quais são irracionais?

9. Com a ajuda da calculadora indica os valores aproximados por defeito e por excesso a menos de 0,01 de:

- a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\frac{13}{3}$ d) $\pi + 2$
e) $\sqrt{8} - 1$ f) $\frac{\pi}{2}$ g) $\sqrt{5,3}$ h) $\frac{7}{15}$

10. Na figura está representado um rectângulo. Determina:



10.1. O valor exacto do comprimento da diagonal.

10.2. o comprimento da diagonal, com um erro inferior a uma décima.

11. Completa:

11.1. Usando uma, duas e três casas decimais:

$$\underline{\quad} < \sqrt{20} < \underline{\quad}; \quad \underline{\quad} < \sqrt{20} < \underline{\quad}$$

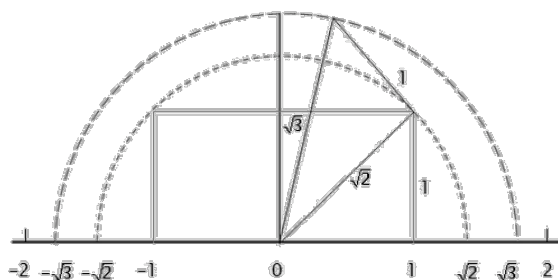
$$\underline{\quad} < \sqrt{20} < \underline{\quad}$$

11.2. Indica um valor aproximado de $\sqrt{20}$, por defeito, a menos de 0,1.

11.3. Indica um valor aproximado de $\sqrt{20}$, por excesso, a menos de 0,01.

medida de $\sqrt{2}$, centra-se o compasso em 0 e marca-se o ponto correspondente a $\sqrt{2}$. Como $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ são simétricos, marca-se a mesma distância à esquerda de zero.

Para marcar outros números irracionais procede-se da mesma forma.



Exemplo 1

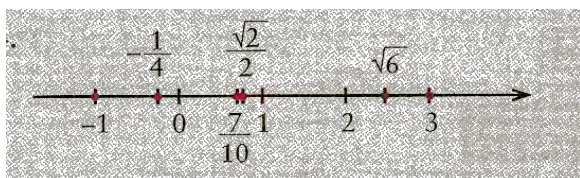
Representa na recta real e escreve por ordem decrescente

os seguintes números: $\frac{7}{10}$; $\sqrt{6}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3; -1.

Resolução

$$\frac{7}{10} = 0,7; \quad \sqrt{6} = 2,449...; \quad -\frac{1}{4} = -0,25; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707...$$

Calculam-se as dízimas.



Traça-se a recta real e marcam-se os pontos da recta correspondentes aos números. Em seguida é fácil verificar as relações de ordem entre os números reais dados. Por ordem decrescente:

$$3 > \sqrt{6} > \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{7}{10} > -\frac{1}{4} > -1$$

Repara que afirmar-se que $3 > \sqrt{6}$ equivale a afirmar que $\sqrt{6} < 3$.



Se o Abdulay é mais alto que o Izidoro e o Izidoro é mais alto que o Manuel, então o Abdulay é mais alto que o Manuel.

A propriedade que permite tirar a conclusão anterior chama-se **propriedade transitiva**.

Por exemplo: Sabendo que $\pi > 3$ e $3 > \sqrt{7}$, podemos concluir que $\pi > \sqrt{7}$.

De uma forma geral:

$a < b$ é o mesmo que $b > a$

Propriedade transitiva

Dados três números reais a , b e c :

- Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;
- Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.

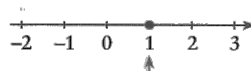
1.2. Intervalos de números reais

Se numa equação substituirmos o símbolo $=$ por um dos símbolos $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ obtemos uma inequação. Às **equações e inequações** chamamos **condições**.

Uma condição define um conjunto. Por exemplo a condição “ser divisor de 8” define

o conjunto dos divisores de 8: $D = \{1, 2, 4, 8\}$.

A equação $x = 1$ tem uma única solução: 1.



$>$ é maior do que
 $<$ é menor do que
 $\geq$ é maior ou igual a
 $\leq$ é menor ou igual a

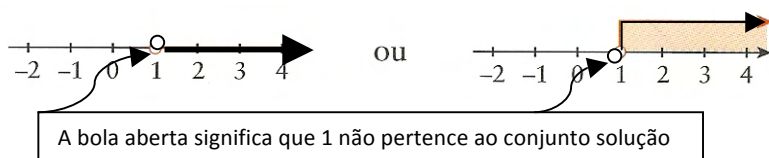
O seu conjunto-solução é $S = \{ \}$.

- Qual é, em $\mathbb{R}$, o conjunto definido pela condição $x > 1$?

A condição $x > 1$ traduz a seguinte pergunta: quais são os números reais maiores que 1?

O conjunto-solução, S , é constituído por uma infinidade de números reais. Pertencem ao conjunto-solução todos os números reais maiores que 1.

A representação de S na recta real, a que se chama a **representação geométrica**, é feita de uma das seguintes formas:



Repara que no ponto de abcissa 1 aparece uma “bola aberta”, para indicar que 1 não pertence ao conjunto-solução. Apenas pertencem ao conjunto-solução todos os números reais maiores que 1.

Outra forma de representar o conjunto solução consiste em usar **intervalos de números reais**. Os intervalos de números reais, estão definidos por dois números, os **extremos** ou **limites do intervalo**. Conforme os extremos pertencem ou não ao intervalo, temos tipos de intervalos diferentes.

A bola aberta corresponde à posição do parênteses $]$ e significa que o extremo não pertence ao conjunto-solução.

$S =]1, +\infty[$ ← **intervalo de números reais**
 $+\infty$ é o limite superior do intervalo
 1 é o limite inferior do intervalo

Este intervalo não é limitado à direita: por maior que seja o número real que consideremos, ele ainda pertence ao intervalo. Diz-se um intervalo ilimitado e para resolver esta situação criou-se o símbolo ∞ que se lê infinito.

Nota

$\infty + \infty$:

lê-se: $+$ infinito. É um símbolo (não é um número real) que indica que o intervalo é ilimitado à direita.

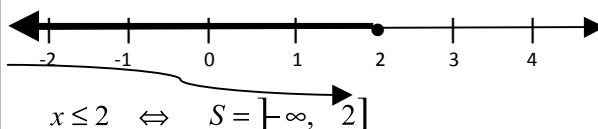
$\infty - \infty$

lê-se: ∞ infinito. É um símbolo (não é um número real) que indica que o intervalo é ilimitado à esquerda.

- Qual é, em $\mathbb{R}$, o conjunto definido para condição $x \leq 2$?

Neste caso pertencem ao conjunto-solução da condição todos os números reais menores ou iguais a 2.

A bola fechada em 2 corresponde à posição de parênteses $]$ e significa que o extremo pertence ao conjunto-solução.

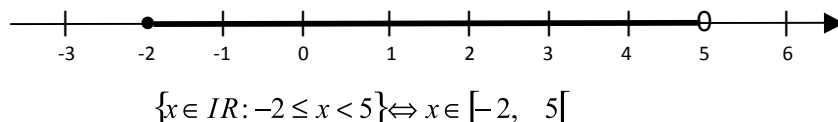


Este intervalo não é limitado à esquerda: por menor que seja o número real que consideremos, ele ainda pertence ao intervalo. É um intervalo ilimitado.

- Quais são os números reais maiores ou iguais a -2 e menores que 5?

Mais uma vez, entre -2 e 5 existe uma infinidade de números reais. Pode traduzir-se esta questão através da condição $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 5\}$. -2 pertence ao conjunto definido pela condição e 5 não pertence.

Lê-se: x pertence a $\mathbb{R}$ tal que x é maior ou igual a -2 e x é menor que 5.



Este intervalo é limitado à esquerda e à direita. É um intervalo limitado.

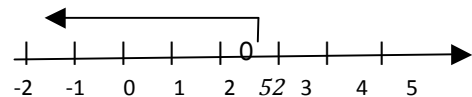
Na tabela seguinte mostram-se diversos tipos de intervalos e as respectivas representações geométrica, em condição e em intervalo. Em cada caso observa atentamente as posições dos parênteses e as bolas abertas ou fechadas.

Representação por condição	Representação geométrica	Representação por intervalo
$x \geq 3$		$[3, +\infty[$
$x > 3$		$]3, +\infty[$
$x \leq -1$		$]-\infty, -1]$
$x < -1$		$]-\infty, -1[$
$0 < x \leq \frac{1}{2}$		$]0, \frac{1}{2}]$
$100 < x < 300$		$]100, 300[$

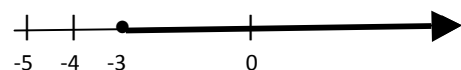
Exemplo 3

Escreve a condição que define cada um dos seguintes conjuntos representados na recta. Apresenta cada um dos conjuntos sob forma de um intervalo.

3.1.



3.2.



Resolução

3.1. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < \frac{5}{2} \right\}$ Como podemos ver na recta real

pertencem ao conjunto todos os números reais menores que 52.

$A =]-\infty, \frac{5}{2}[$ O intervalo é aberto em 52 porque este número não

pertence ao conjunto. Na recta real tem uma bola aberta no extremo 52.

3.2. $A = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq -3 \}$ Como podemos ver na recta real pertencem ao conjunto todos os números reais maiores ou iguais a -3.

$A = [-3, +\infty[$ O intervalo é fechado em -3 porque este número pertence ao conjunto.

Quadro Resumo

Condição	Recta real	Intervalo
$<$ ou $>$ O extremo $\notin$ ao conjunto	Bola aberta no extremo (○)	Aberto no extremo $] \quad [$
$\leq$ ou $\geq$ O extremo $\in$ ao conjunto	Bola fechada no extremo (●)	Fechado no extremo $[\quad]$ ou $[\quad [$ ou $] \quad]$
$-\infty$ é um símbolo que significa que o intervalo é ilimitado à esquerda, logo, junto deste símbolo o intervalo é sempre aberto.		

Actividades de aplicação

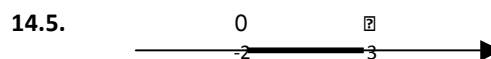
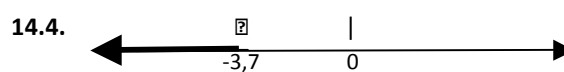
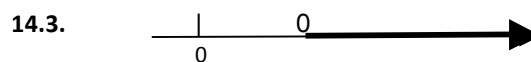
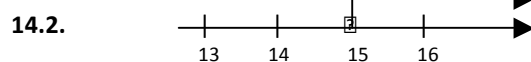
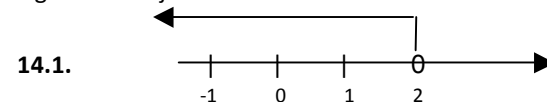
13. Representa na recta real e sob a forma de intervalo de números reais o conjunto definido por cada uma das seguintes condições.

13.1. $x > \frac{3}{2}$ 13.2. $x < -5$ 13.3. $x > 6,3$

13.4. $x \leq -\frac{1}{3}$ 13.5. $x \geq 21,2$ 13.6. $x \leq 0$

13.7. $2 < x \leq 5$ 13.8. $-3 \leq x \leq 0$

14. Escreve a condição que define cada um dos seguintes conjuntos.



15. Representa na recta real e escreve uma condição que seja definida por cada um dos seguintes intervalos.

15.1. $]-\infty, 4]$ 15.2. $[14,3; +\infty[$

15.3. $]\frac{1}{2}, +\infty[$ 15.4. $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$

15.5. $]\sqrt{2}, 5]$ 15.6. $\left[-\frac{2}{5}, 1\right]$

$+\infty$ é um símbolo que significa que o intervalo é ilimitado à direita, logo, junto deste símbolo o intervalo é sempre aberto.

O conjunto $\mathbb{R}$ é um conjunto ilimitado: $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

➤ Intersecção e reunião de intervalos de números reais

Seja $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{3, 4, 5, 7\}$

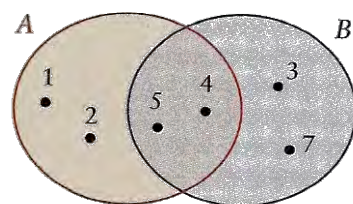
$$A \cap B = \{4, 5\}$$

Intersecção

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

Reunião

Um elemento que pertence à intersecção tem que pertencer simultaneamente aos dois conjuntos; para pertencer à reunião basta pertencer a um deles.



Os intervalos são conjuntos de números reais. A intersecção e a reunião de intervalos são, portanto, casos particulares da intersecção e da reunião de conjuntos.

Exemplo 4

Dados os conjuntos $A =]3, +\infty[$; $B = [1, +\infty[$; $C =]-\infty, 5]$; $D =]-\infty, 1]$; $F =]-\infty, 0[$

Representa na recta real e indica:

4.1. $A \cap B$ e $A \cup B$

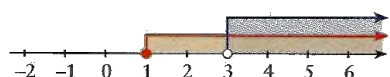
4.2. $A \cap C$ e $A \cup C$

4.3. $B \cap D$ e $B \cup D$

4.4. $A \cap F$ e $A \cup F$

Resolução

4.1. $A =]3, +\infty[$; $B = [1, +\infty[$



$$A \cap B =]3, +\infty[; A \cup B = [1, +\infty[$$

Conjunto intersecção: tem as duas linhas.

Conjunto reunião: tem pelo menos uma linha.

4.2. $A =]3, +\infty[$; $C =]-\infty, 5]$

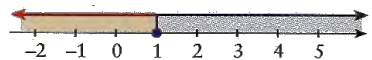


$$A \cap C =]3, 5]; A \cup C = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

Conjunto intersecção: tem as duas linhas.

Conjunto reunião: tem pelo menos uma linha.

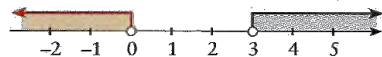
4.3. $B = [1, +\infty[$; $D =]-\infty, 1]$



$$B \cap D = \{1\}; B \cup D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

O número 1 pertence aos dois intervalos e qualquer número real pertence à reunião.

4.4. $A =]3, +\infty[$; $F =]-\infty, 0[$



$$A \cap F = \emptyset; A \cup F =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$$

Não há elementos comuns aos dois conjuntos.

➤ Monotonia da adição

Considera a seguinte desigualdade verdadeira: $5 > 1$

1º membro $\rightarrow 5 > 1 \leftarrow$ 2º membro

Repara que:

$$5 + 3 > 1 + 3 \Leftrightarrow 8 > 4 \quad \text{Adiciona-se 3 a ambos os membros}$$

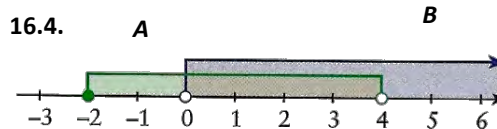
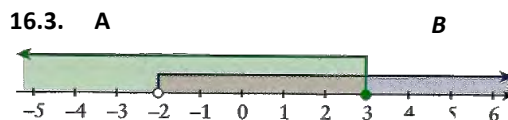
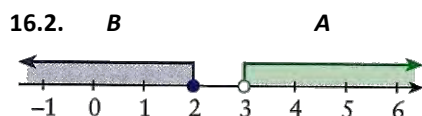
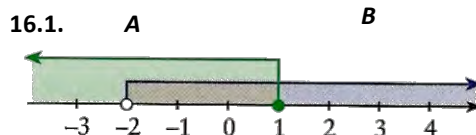
$$5 - 7 > 1 - 7 \Leftrightarrow -2 > -6 \quad \text{Adiciona-se -7 a ambos os membros}$$

A desigualdade mantém-se verdadeira quando adicionamos a ambos os membros o mesmo número.

Esta propriedade é aplicada na resolução de inequações.

Actividades de aplicação

16. Observa as representações dos intervalos A e B. Indica $A \cap B$ e $A \cup B$.



17. Determina o intervalo $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo:

17.1. $A =]3, +\infty[$; $B =]-\infty, 5]$

17.2. $A =]-2, +\infty[$; $B = [3, +\infty[$

17.3. $A =]-\infty, 3]$; $B = [3, +\infty[$

17.4. $A =]-\infty, 0[$; $B = [3, +\infty[$

17.5. $A =]-1, 6]$; $B = [0, +\infty[$

Monotonia da adição

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

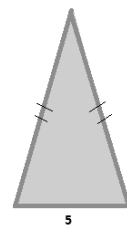
$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$$

Adicionando ou subtraindo a dois membros de uma inequação o mesmo número, obtém-se uma inequação equivalente à dada.

1.3. Inequações

Num triângulo isósceles o lado diferente mede 5 cm.

Qual será a medida de cada um dos outros lados, de modo que o perímetro seja superior a 11 cm?



Representando por x a medida dos lados desconhecidos, a expressão que representa o perímetro é $2x+5$. Como o perímetro tem de ser maior que 11, escreve-se $2x+5 > 11$.

A uma desigualdade deste tipo chama-se **inequação**.

Uma **inequação** é uma **desigualdade** onde surge uma ou mais variáveis.

Na inequação $2x+5 > 11$; $2x+5$ é o 1º membro e 11 é o 2º membro.

Para dar resposta ao problema é necessário resolver a inequação.

Resolver uma inequação é determinar todos os valores numéricos que a transformam numa desigualdade verdadeira. Estes valores são o **conjunto-solução da inequação**.

x poderá ser 1?

$$2 \times 1 + 5 > 11 \Leftrightarrow 7 > 11 \quad \text{Falso}$$

x não pode ser 1 mas pode ser 5.

x poderá ser 5?

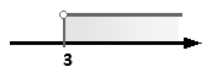
$$2 \times 5 + 5 > 11 \Leftrightarrow 15 > 11 \quad \text{Verdadeiro}$$

Para resolver a inequação pode proceder-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 2x + 5 &> 11 \Leftrightarrow && \text{Adiciona-se } -5 \\ 2x + 5 > 11 &\Leftrightarrow 2x + 5 - 5 > 11 - 5 \Leftrightarrow && \text{a ambos os membros} \end{aligned}$$

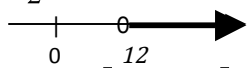
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2x &> 6 \Leftrightarrow && \text{Simplificam-se os membros. Dividem-se ambos} \\ \frac{2x}{2} > \frac{6}{2} &\Leftrightarrow x > 3 && \text{os membros pelo coeficiente de } x. \end{aligned}$$

$$S =]3, +\infty[\quad \text{Apresenta-se o conjunto-solução.}$$



Representação geométrica do conjunto-solução.

Na resolução de uma inequação procede-se quase sempre como na resolução de uma equação.

Equação	Inequação
$2 + 6x = 3 + 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6x - 4x = 3 - 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$	$2 + 6x > 3 + 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6x - 4x > 3 - 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$  $S = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$
$-\frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -6$ $S = \{-6\}$	$-\frac{1}{2}x > 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x > 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < -6$ <i>errado</i> Quando multiplicamos ambos os membros de uma inequação por um número negativo temos de inverter o sentido da desigualdade.

Monotonia parcial da multiplicação

Dada uma desigualdade verdadeira qualquer, poder-se-á multiplicar ambos os membros da desigualdade por um número qualquer, mantendo a desigualdade verdadeira?

Seja $3 > 1$

$$2 \times 3 > 2 \times 1 \quad \text{Verdadeiro}$$

$$0 \times 3 > 0 \times 1 \quad \text{Falso}$$

$$-2 \times 3 > -2 \times 1 \quad \text{Falso}$$

$$-2 \times 3 < -2 \times 1 \quad \text{Verdadeiro}$$

Assim se conclui que:

☐ Multiplicando ou dividindo ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo, obtém-se uma desigualdade equivalente à dada.

$$a > b \text{ e } c > 0, \text{ então } ac > bc$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

☐ Multiplicando ou dividindo por um **número negativo** ambos os membros de uma desigualdade, obtém-se uma desigualdade equivalente à dada **invertendo o sinal da desigualdade**.

$$a > b \text{ e } c < 0, \text{ então } ac < bc$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$2 < 3 \text{ e } -2 > -3$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$7 > 5 \text{ e } -7 < -5$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

Vejamos, então, como resolver a inequação:

$-\frac{1}{2}x > 3$	Multiplicam-se ambos os membros por 2. Multiplicam-se ambos os membros por -1 e inverte-se o símbolo da desigualdade
$-x > 6$	
$x < -6$	

Logo, $S =]-\infty, -6[$

➤ Resolução de inequações

Exemplo 5

Resolve, em IR, cada uma das seguintes inequações:

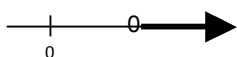
5.1. $2x - 3 > 0$ 5.2. $1 - 3x - 3 > 5$ 5.3. $2(1 - x) < -3(1 + x)$

5.4. $1 - \frac{x}{2} \geq -3x - (5 - 4x)$

Resolução

5.1. $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

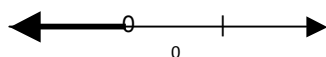


$$S = \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$$

5.2. $1 - 3x - 3 > 5 \Leftrightarrow -3x > 5 - 1 + 3$

Multiplicar ambos os membros por -1 e inverter o sinal da desigualdade.

$$\begin{cases} \Leftrightarrow -3x > 7 \\ \Leftrightarrow 3x < -7 \\ \Leftrightarrow x < -\frac{7}{3} \end{cases}$$

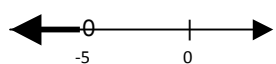


$$S = \left] -\infty, -\frac{7}{3} \right[$$

5.3. $2(1 - x) < -3(1 + x) \Leftrightarrow 2 - 2x < -3 - 3x$ Tirar os parênteses.

$\Leftrightarrow -2x + 3x < -3 - 2$ Passar os termos com incógnita para o 1º membro e os termos independentes para o 2º membro.

$\Leftrightarrow x < -5$ Reduzir os termos semelhantes.



$$S = \left] -\infty, -5 \right[$$

5.4. $1 - \frac{x}{2} \geq -3x - (5 - 4x) \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{2} \geq -3x - 5 + 4x$ Tirar os parênteses.

$\Leftrightarrow 2 - x \geq -6x - 10 + 8x$ Multiplicar ambos os membros por 2 e tirar os denominadores.

$\Leftrightarrow -x + 6x - 8x \geq -10 - 2$ Passar os termos com incógnita para o 1º membro e os termos independentes para o 2º membro.

$\Leftrightarrow -3x \geq -12$

Simplificar os termos.

↓

Multiplicar por -1 e inverter o sentido do sinal da desigualdade.

$\Leftrightarrow 3x \leq 12$

$\Leftrightarrow x \leq 4$

Dividir ambos os membros por 3.

$S = \left] -\infty, 4 \right]$

Apresentar o conjunto-solução.



Regras para a resolução de inequações

Duas **inequações** são **equivalentes** quando têm o **mesmo conjunto-solução**.

1ª. Propriedade da monotonia da adição

Podemos adicionar a ambos os membros de uma inequação um número, que obtemos uma inequação equivalente à dada.

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

É esta regra que permite passar um termo de um membro para o outro trocando o sinal.

2ª. Propriedade da monotonia parcial da multiplicação

Obtemos uma inequação equivalente à dada se multiplicarmos ambos os membros por um **número positivo**.

Se $a < b$ e $c > 0$, então $a \cdot c < b \cdot c$

Obtemos uma inequação equivalente à dada se multiplicarmos ambos os membros por um **número negativo e invertermos o sentido da desigualdade**.

Se $a < b$ e $c < 0$, então $a \cdot c > b \cdot c$

Actividades de aplicação

18. Resolve, em IR, cada uma das seguintes inequações e apresenta o conjunto-solução na recta real e sob a forma de um intervalo.

18.1. $x - 1 < 5$;

18.2. $8x - 2 \geq 20$;

18.3. $30 \leq 17 + 3x$;

18.4. $x - 5 > 3x - 1$

18.5. $-8x - 7 \leq -2x + 5$; 18.6. $\frac{1}{2} - 3x > -8x$; 18.7. $-(1 + 3x) + \frac{5}{2} \leq 0$; 18.8. $1 \leq 2 - \frac{x-1}{3} + 5x$

18.9. $20 - x(x-1) > -x^2$; 18.10. $6\left(2 - \frac{1}{3}x\right) < 2(8-x)$;

18.11. $(x-1)(x+1) - 5 > x(x-2)$

1.4. Conjunção e disjunção de condições

Sejam as condições $x > 0$ e $x \leq 3$.

Então:

$$x > 0 \wedge x \leq 3 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \rightarrow \text{Conjunção das condições dadas}$$

$\uparrow$ lê-se e $\uparrow$ sistema de duas inequações

$$x > 0 \vee x \leq 3 \rightarrow \text{disjunção das condições dadas}$$

$\uparrow$ lê-se

À **conjunção de condições** corresponde a **intersecção de conjuntos** e à **disjunção de condições** corresponde a **reunião de conjuntos**.

Condições		Conjuntos
Conjunção $\wedge$ (e)	corresponde $\longleftrightarrow$	Intersecção $\cap$
Disjunção $\vee$ (ou)	corresponde $\longleftrightarrow$	Reunião $\cup$

Exemplo 6

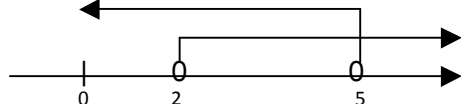
Representa na recta e sob a forma de intervalo.

6.1. $x > 2 \wedge x < 5$

6.2. $x > 2 \vee x < 5$

Resolução

6.1. $x > 2 \wedge x < 5$



À **conjunção de condições** corresponde a **intersecção de conjuntos**.

$$S =]2, +\infty[\cap]-\infty, 5[=]2, 5[$$

6.2. $x > 2 \vee x < 5$

À **disjunção de condições** corresponde a **reunião de conjuntos**.

$$S =]2, +\infty[\cup]-\infty, 5[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Exemplo 7

Resolve a seguinte sistema de inequações: $x-1 > 0 \wedge -2x > -8$

Resolução

Um sistema de inequações é uma **conjunção de condições**.

Também se pode representar da seguinte forma: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ -2x > -8 \end{cases}$

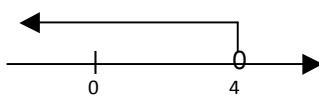
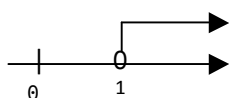
1.º Resolvem-se as inequações separadamente.

$$x-1 > 0$$

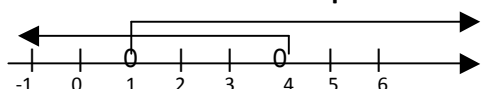
$$-2x > -8$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$$



2.º Na mesma recta real representam-se os dois conjuntos.



Nota

$-3 \leq x < 7$ é uma **conjunção de inequações** que se pode escrever da seguinte forma:

$-3 \leq x \wedge x < 7$ ou sob a forma de um sistema de inequações $\begin{cases} -3 \leq x \\ x < 7 \end{cases}$.

Actividades de aplicação

19. Indica o conjunto- solução de:

19.1. $\begin{cases} x > 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$;

19.2. $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 5 \end{cases}$

19.4. $x > 2 \vee x \leq 5$

19.5. $x > 0 \vee x < 1$

19.6. $(1 < x < 3) \vee x = 1$

19.7. $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x > 0 \end{cases}$

19.8. $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \frac{1-x}{2} = 0 \end{cases}$

20. Resolve, em $\mathbb{R}$:

20.1. $-5 \leq x-3 < \frac{1}{2}$

20.2. $x - \frac{1}{2}x > -3 \vee 1 - \frac{x-2}{3} > 0,1$

3.º Interpreta-se a representação geométrica. À conjunção corresponde a intersecção de conjuntos.

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ -2x > -8 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[\cap]-\infty, 4[\Leftrightarrow x \in]1, 4[$$

O conjunto-solução é $S =]1, 4[$

Exemplo 8

8.1. Resolve, em $\mathbb{R}$, a condição $x - \frac{x+1}{2} \leq 3x \vee 1 - \frac{1}{2}x > 0$

8.2. Determina o menor número inteiro que satisfaz a condição

$$1 - \frac{1}{2}x > 0$$

Resolução

8.1.

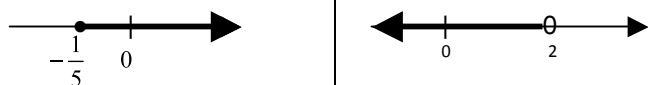
Vamos resolver, separadamente, cada uma das inequações.

$$x - \frac{x+1}{2} \leq 3x \vee 1 - \frac{1}{2}x > 0$$

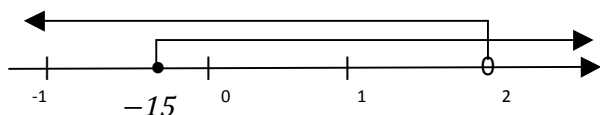
$x - \frac{x+1}{2} \leq 3x \quad (a)$ $\Leftrightarrow 2x - x - 1 \leq 6x$ $\Leftrightarrow 2x - x - 6x \leq 1$ $\Leftrightarrow -5x \leq 1 \quad (b)$ $\Leftrightarrow 5x \geq -1$ $\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$	$1 - \frac{1}{2}x > 0$ $\Leftrightarrow 2 - x > 0$ $\Leftrightarrow -x > -2 \quad (b)$ $\Leftrightarrow x < 2$
---	--

(a) o sinal ($-$) que se encontra antes da fracção afecta todos os termos do numerador.

(b) multiplicam-se ambos os membros da inequação por (-1) e inverte-se o sentido da desigualdade



Na mesma recta representam-se os dois conjuntos.



Interpreta-se a representação geométrica. À **disjunção** de condições corresponde a **reunião** de conjuntos.

$$x - \frac{x+1}{2} \leq 3x \vee 1 - \frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right[\cup]-\infty, 2[$$

$$S =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

8.2. O conjunto-solução da condição é $]1, 4[$

O menor número inteiro que satisfaz a condição é 1.

Actividades de aplicação

21. Considera a expressão $\frac{1-x}{2}$. Determina

os valores de x que tornam a fracção:

21.1. não negativa;

21.2. positiva;

21.3. maior que 1 e menor que 5.

22. Considera a condição $-3 < x - 1 < 5$.

Indica:

22.1. Os números naturais que a satisfazem;

22.2. Os números inteiros relativos que a satisfazem;

22.3. Os números reais que a satisfazem.

23. Dados os conjuntos A e B , indica, sob a forma de intervalos de $\mathbb{R}$, $A \cup B$ e $A \cap B$.

23.1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2,3\}$$

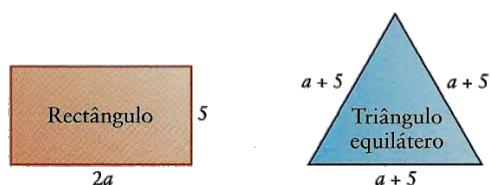
23.2. $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

23.3. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2} < -\frac{1}{3}\right\};$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2}x \geq 0\right\}$$

24. Observa a figura e determina a de modo que:



24.1. O perímetro do rectângulo seja igual ao perímetro do triângulo.

24.2. O perímetro do rectângulo seja menor ou igual ao perímetro do triângulo.

UNIDADE 2 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES

2.1. Equações do 1º grau a duas incógnitas

Consideremos a seguinte situação:

A distância da casa do Ailton à escola é dupla da distância da casa do Carlos à escola. A que distância fica da escola a casa do Ailton?



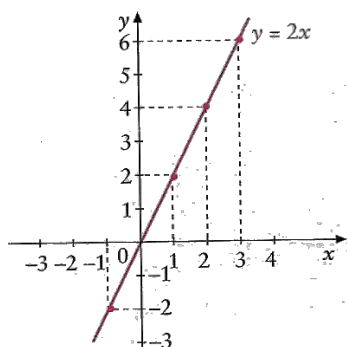
Seja x a distância da casa do Carlos à escola e seja y a distância da casa do Ailton à escola. A informação traduz-se pela equação:

$y = 2x$ ← obtivemos uma **equação do 1º grau com duas incógnitas**

$y = 2x$ ← é uma equação literal que está resolvida em ordem a y .

$y = 2x$ ← também é a expressão analítica de uma função afim cujo gráfico é uma recta.

x	y
1	2
2	4
3	6
⋮	⋮
-1	-2



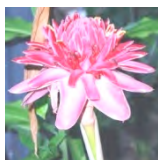
A equação $y = 2x$ tem uma infinidade de soluções.

A cada um dos pontos da recta corresponde um par ordenado que é solução da equação, mas nem todas as soluções da equação são solução do problema.

Por exemplo $(-1, -2)$ e $(0, 0)$ são soluções da equação $y = 2x$ mas não são soluções para o problema, porque x e y representam, na situação apresentada, números positivos uma vez que representam distâncias.

Exemplo 1

A D. Floripes vende ramos de flores. Ela leva 5000 dobras por fazer o ramo. Se cada rosa de porcelana custa 2000 dobras, tem-se:



Nota: Para facilitar os cálculos fazemos 1000 dobras = 1

Número de rosas	Custo do ramo
1	$5 + 2 = 7$
2	$5 + 2 \times 2 = 9$
3	$5 + 2 \times 3 = 11$
...	...
x	$y = 5 + 2x$

$y = 5 + 2x$ é uma **equação do 1º grau com duas incógnitas**. As incógnitas são x e y .

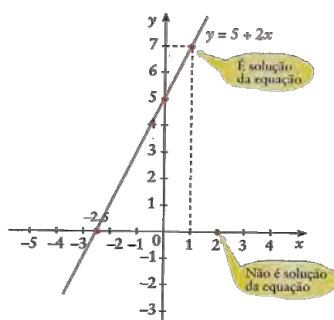
São soluções da equação os pares ordenados (x, y) que a satisfazem, isto é, que a transformam numa afirmação verdadeira, como por exemplo:

$(1, 7)$; $(2, 9)$; $(3, 11)$; $(4, 13)$; $(5, 15)$.

A equação tem um número infinito de soluções mas na situação apresentada só interessam os números positivos.

$$y = 5 + 2x$$

x	y
0	5
-1	3
-2,5	0



No referencial cartesiano, uma equação do 1º grau com duas incógnitas é representada por uma recta. Para desenhar uma recta basta conhecer dois dos seus pontos.

São soluções da equação todos os pares ordenados que correspondem a pontos da recta.

Exemplo 2

Observa a figura:



2.1. Seja:

x o custo, em dobras, de um pacote de bolachas;

y o custo, em dobras, de um sumo;

escreve uma equação, nas incógnitas x e y , sugerida pela figura.

2.2. Indica três soluções para a equação que escreveste.

2.3. Se um sumo custar 12.000,00 dobras, quanto custará um pacote de bolachas?

2.4. Se um pacote de bolachas custar 11.000,00 dobras, quanto custará um sumo?

Resolução

Nota: Para facilitar os cálculos fazemos 1 000,00 = 1

2.1. Seja x o custo de um pacote de bolachas, em dobras e y o custo de um sumo, em dobras.

$$4x + 2y = 64 \quad \text{Equação sugerida pela imagem}$$

2.2. Para mais facilmente encontrar soluções resolve-se a equação em ordem a uma incógnita.

$$4x + 2y = 64 \Leftrightarrow 2y = 64 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{64 - 4x}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 32 - 2x \Leftrightarrow y = -2x + 32$$

x	y
1	$-2 \times 1 + 32 = 30$
2	$-2 \times 2 + 32 = 28$
8	$-2 \times 8 + 32 = 16$

Por exemplo (1, 30); (2, 28) e (8, 16)

2.3. Na equação $y = -2x + 32$ substitui-se y por 12 e resolve-se esta em ordem a x :

$$y = -2x + 32 \Leftrightarrow 12 = -2x + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 32 - 12 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{2} \Leftrightarrow x = 10$$

Se cada sumo custar 12.000,00, cada pacote de bolachas custará 10.000,00.

2.4. Na equação $y = -2x + 32$ substitui-se x por 11 e resolve-se esta em ordem a y :

$$y = -2x + 32 \Leftrightarrow y = -2 \times 11 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -22 + 32 \Leftrightarrow y = 10$$

Se cada pacote de bolachas custar 11.000,00, cada sumo custará 10.000,00.

Actividades de aplicação

1. Considera a equação $2x + y = 4$

1.1. Dos seguintes pares ordenados (x , y) indica os que são solução da equação:

a) (0, 4); b) (2, 0); c) (-2, 10); d) (7, -10); e) (10, 14);

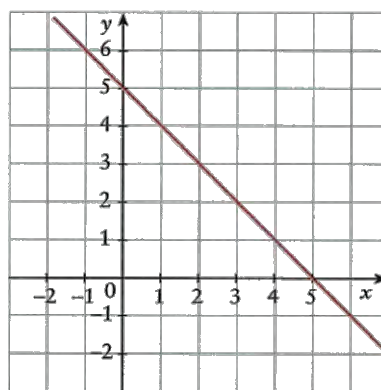
1.2. Resolve a equação em ordem a y .

1.3. Copia e completa a tabela representada abaixo.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

1.4. Representa graficamente a recta que a equação dada sugere.

2. No referencial abaixo está representada a recta de equação: $y = -x + 5$.



2.1. Dos seguintes pares ordenados quais são soluções da equação?

a) (5, 0); b) (0, 5);

c) (0, 0); d) (1, 4);

e) (2, 3); f) (-1, 6).

2.2. No mesmo referencial representa a recta de equação $y = x - 5$ e indica um par ordenado que seja simultaneamente solução das duas equações.

3. Resolve em ordem a y as seguintes equações:

3.1. $2x + y = 5$ **3.2.** $2x - y = 0$ **3.3.** $-x + \frac{y}{2} = 2$

3.4. $\frac{x+y}{2} = -3$ **3.5.** $1 - \frac{x-y}{2} = 3$ **3.6.** $-\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2}$

4. Representa graficamente as rectas de equação:

4.1. $y = x + 1$ **4.2.** $y = -2x$ **4.3.** $y = -2$

5. Na loja "Quá Tela", três pacotes de café e dois frascos de compota custam 265.000 dobras.

5.1. Seja:

x o custo, em dobras, de um pacote de café;

y o custo, em dobras, de um frasco de compota;

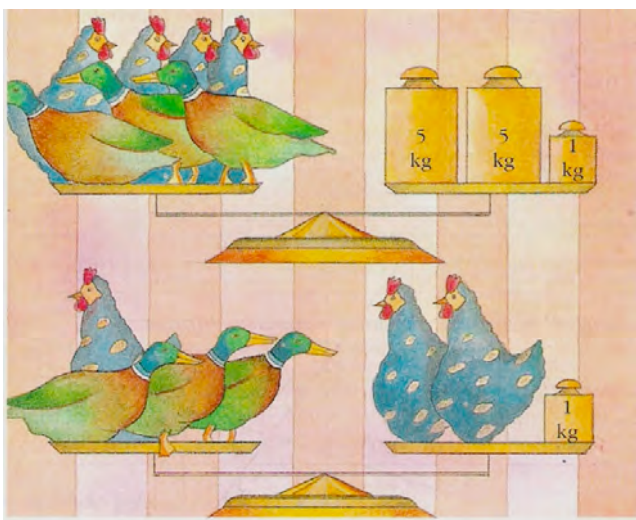
escreve uma equação, nas variáveis x e y , sugerida pela situação. (Para facilitar os cálculos faz 1000 dobras = 1)

5.2. Se um pacote de café custar 70.000 dobras, quanto custará um frasco do mesmo tipo de compota?

5.3. Se um frasco de compota custar 35.000 dobras, quanto custará um pacote de café?

5.4. Quanto custam 6 pacotes do mesmo tipo de café e quatro frascos do mesmo tipo de compota?

2.2. Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas



Observa a figura. Pretende-se saber o peso, em kg, de cada galinha e de cada pato. As duas balanças estão em equilíbrio.

Seja:

- x o peso, em kg, de cada galinha;
- y o peso, em kg, de cada pato.

Tem-se:

$$4x + 3y = 11 \quad \text{equação sugerida pela 1ª balança}$$

$$x + 3y = 2x + 1 \quad \text{equação sugerida pela 2ª balança}$$

Pretende-se determinar o par ordenado (x, y) que é simultaneamente solução das duas equações, ou seja, é solução da conjunção de condições:

$$4x + 3y = 11 \text{ e } x + 3y = 2x + 1$$

Diz-se que pretendemos resolver o **sistema de equações**:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ x + 3y = 2x + 1 \end{cases} \quad \text{Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas}$$

ou $4x + 3y = 11 \wedge x + 3y = 2x + 1$ ($\wedge$ lê-se e – é o símbolo da conjunção de duas condições)

- Será solução do sistema o par ordenado $(0,5; 3)$?

$$\begin{cases} 4 \times 0,5 + 3 \times 3 = 11 & (\text{verdade}) \\ 0,5 + 3 \times 3 = 2 \times 0,5 + 1 & (\text{falso}) \end{cases}$$

O par $(0,5; 3)$ não é solução do sistema das duas equações porque é solução da 1ª mas não é solução da 2ª.

- Será solução do sistema o par $(2, 1)$?

$$\begin{cases} 4 \times 2 + 3 \times 1 = 11 & (\text{verdade}) \\ 2 + 3 \times 1 = 2 \times 2 + 1 & (\text{verdade}) \end{cases} \quad \text{O par } (2, 1) \text{ é solução do sistema e serve a solução do problema e, por isso,}$$

cada galinha pesa 2 kg e cada pato pesa 1 kg.

A solução do sistema é o par ordenado que satisfaz simultaneamente as duas equações.

Resolver um sistema de duas equações é encontrar os pares ordenados que verificam simultaneamente as duas equações. Vejamos alguns métodos utilizados na resolução de sistemas de duas equações.

➤ Resolução gráfica

A cada uma das equações de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas corresponde, geometricamente, uma recta. Consideremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \text{Para desenhar uma recta basta conhecer dois dos seus pontos.}$$

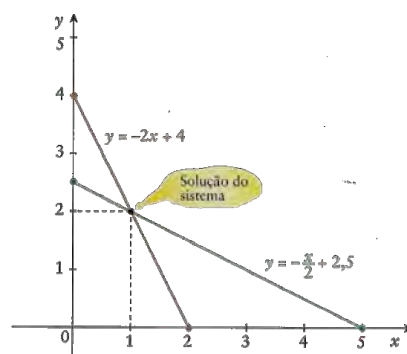
Resolvendo cada uma das duas equações em ordem a y :

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= -2x + 4 \end{aligned}$$

x	y
0	4
2	0

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2y &= -x + 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{x}{2} + 2,5 \end{aligned}$$

x	y
0	2,5
5	0



As rectas intersectam-se no ponto $(1, 2)$.

À conjunção de duas equações com duas incógnitas chama-se **sistema de duas equações** com duas incógnitas.

A solução do sistema é o par ordenado $(1, 2)$, o que significa que $x = 1$ e $y = 2$.

➤ Resolução analítica

Vamos resolver analiticamente o sistema, usando o **método da**

substituição:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x + 2(-2x + 4) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x - 4x + 8 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ -3x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \times 1 + 4 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

O sistema dado já está na forma canónica.

Resolve-se a 1ª equação em ordem a y .

Mantém-se a 1ª equação. Na 2ª equação substitui-se y pela expressão que o representa na 1ª equação.

Mantém-se a 1ª equação. Resolve-se a 2ª equação em ordem a x .

Determina-se o valor de x .

Substitui-se o valor de x na 1ª equação e calcula-se o valor de y .

A solução do sistema é o par ordenado $(x, y) = (1, 2)$.

Exemplo 3

Resolve gráfica e analiticamente o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 5 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$$

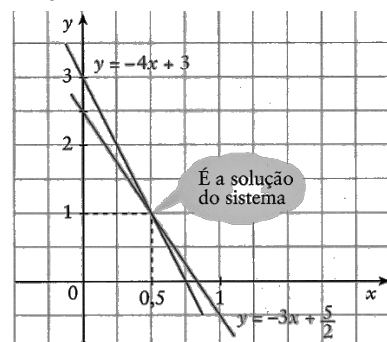
Método gráfico

$$y = -4x + 3 \quad y = -3x + \frac{5}{2}$$

Resolvem-se as duas equações em ordem a y e calculam-se as coordenadas de dois pontos de cada uma das rectas.

x	y	x	y
1	-1	0,5	1
0,5	1	1	-0,5

Traça-se o referencial e as rectas.



Como se pode observar, graficamente, as rectas intersectam-se no ponto de coordenadas $(0,5, 1)$, o que significa que este par ordenado é a solução do sistema. Na resolução analítica obtivemos a mesma solução: $(x, y) = (0,5, 1)$

Verificação

Para $x = 1$ e $y = 2$, vem:

$$2x + y = 4$$

$$x + 2y = 5$$

$$2 \times 1 + 2 = 4 \checkmark$$

$$1 + 2 \times 2 = 5 \checkmark$$

Quando um sistema nas incógnitas x e y é apresentado na forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

em que a, b, c, a', b' e c' representam números reais quaisquer, diz-se que está escrito na **forma canónica**.

Para resolver um sistema utilizando o **método da substituição** pode seguir-se os seguintes passos:

1. Reduz-se o sistema à forma canónica.
2. Resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas.
3. Substitui-se a expressão desta incógnita na outra equação, obtendo-se uma equação com uma só incógnita.
4. Resolve-se esta equação.
5. O valor obtido substitui-se na outra equação.
6. Escreve-se a solução do sistema.

Método da substituição

$$\begin{cases} 6x + 2y = 5 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$$

O sistema dado já está na forma canónica.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 5 \\ y = -4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2(-4x + 3) = 5 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$$

Resolve-se uma equação em ordem a uma incógnita. Neste caso resolveu-se a 2ª equação em ordem a y e substituiu-se na 1ª.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 8x + 6 = 5 \\ y = -4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 5 - 6 \\ y = -4x + 3 \end{cases}$$

Resolve-se a 1ª equação.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -1 \\ y = -4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -4 \times \frac{1}{2} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Conhecido x , determina-se y na 2ª equação.

Exemplo 3

Resolve o sistema de equações.

$$\begin{cases} x - \frac{x-y}{2} = 0 \\ 2\left(x - \frac{y}{2}\right) = x + 4 \end{cases}$$

Começa-se por escrever um sistema equivalente cujas equações não tenham parênteses nem denominadores.

$$\begin{cases} x - \frac{x-y}{2} = 0 \\ 2\left(x - \frac{y}{2}\right) = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x + y = 0 \\ 2x - y = x + 4 \end{cases}$$

Reduz-se o sistema à forma canónica.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Resolve-se o sistema pelo método da substituição

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ (-y) - y = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -(-2) \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Solução: $(x, y) = (2, -2)$ ou $x = 2$ e $y = -2$.

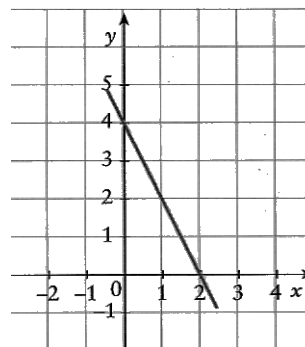
Actividades de aplicação

6. Mostra, por substituição, que o par ordenado (x, y) indicado é solução do sistema dado.

6.1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad (, 1)$ 6.2. $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 3x + 2y = 20 \end{cases} \quad (, -2)$

6.3. $\begin{cases} 10x + 5y = 40 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (, 6)$

7. Na figura está representada a recta de equação $2x + y = 4$



7.1. Considera a equação $y = -3x + 5$.

a) Completa o quadro.

$$y = -3x + 5$$

x	0	1
y		

b) No mesmo referencial desenha a recta da equação $y = -3x + 5$

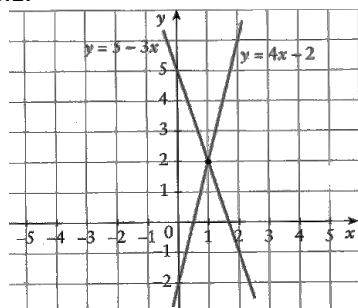
7.2. Indica a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

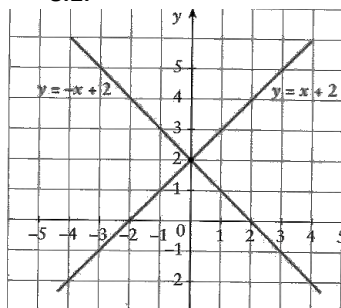
8. Para cada uma das situações:

- Indica a solução do sistema;
- escreve o sistema e resolve-o analiticamente.

8.1.



8.2.



9. Resolve geométrica e analiticamente cada um dos seguintes sistemas:

9.1. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ 9.2. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x + y = -3 \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} 7x + y = 7 \\ 2y = 14 \end{cases}$ 9.4. $\begin{cases} x + y = -5 \\ -x + y = -3 \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + y = 7 \end{cases}$ 9.6. $\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$

9.7. $\begin{cases} 5x + y = -3 \\ x - y = -3 \end{cases}$ 9.8. $\begin{cases} -2x + 3y = -7 \\ x + y = -4 \end{cases}$

10. Para cada um dos seguintes sistemas, reduz-os à forma canónica e, em seguida, resolve-os analiticamente.

10.1. $\begin{cases} 2(x - y) + 3(x + 3) = 5 \\ 2 - (x - y) = 5 \end{cases}$

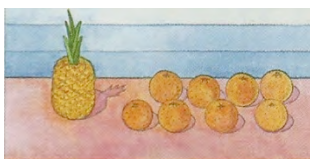
10.2. $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{y+2}{6} = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} - y = 4 \\ x + 2y = 3(x + y) \end{cases}$

11. Observa o par de imagens, onde se pode ver ananases, cajamangas e o seu custo.



140.000 Dbs



100.000 Dbs

11.1. Forma um sistema de equações e resolve-o.

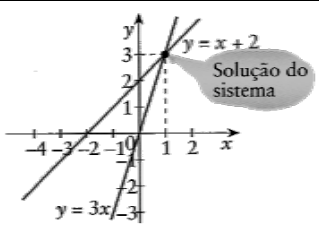
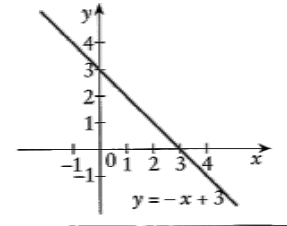
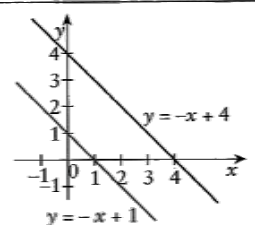
11.2. Interpreta a solução obtida no contexto da situação apresentada.

2.3. Classificação de sistemas

A solução de um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas é dada pelas coordenadas dos pontos de intersecção das rectas que representam as equações.

Por outro lado, no plano, duas rectas podem ser estritamente paralelas, coincidentes ou concorrentes. A cada uma das posições relativas das rectas corresponde uma classificação para o sistema.

Vejamos como se classificam os sistemas de acordo com o número de soluções.

Resolução analítica	Resolução gráfica	Tipo de sistema
$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = 3x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$ Solução do sistema: (1, 3)		As duas rectas têm um único ponto comum. O sistema tem uma só solução. O sistema é possível e determinado.
$\begin{cases} y = -x + 3 \\ 2y + 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x + 3$		As duas rectas são coincidentes (têm todos os pontos em comum). O sistema tem um número infinito de soluções. O sistema é possível e indeterminado.
$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ -x + 4 = -x + 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ 0x = 3 \end{cases} \leftarrow \text{equação impossível}$		As duas rectas são estritamente paralelas (não têm nenhum ponto em comum). O sistema é impossível.

Os sistemas classificam-se de acordo com o número de soluções:

Sistemas

Possíveis

(com soluções)

Impossíveis

(sem soluções)

Determinados

(uma só solução)

Indeterminados

(um número infinito de soluções)

Exemplo

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ solução: (1, -2). O sistema tem uma **única solução**.

Sistema possível e determinado.

$\begin{cases} y = x + 2 \\ 0x = 0 \end{cases}$ A 2ª equação é indeterminada.

São soluções do sistema todos os pares ordenados que verifiquem a equação $y = x + 2$. Tem um **número infinito de soluções**. Sistema

possível e indeterminado.

$\begin{cases} 0x = 1 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$ A 1ª equação é impossível.

Como a 1ª equação é impossível, não existe nenhuma solução para o sistema. **Sistema impossível**.

Actividades de aplicação

12. Para cada um dos sistemas seguintes, acompanha a respectiva resolução analítica com a resolução geométrica e classifica o sistema:

12.1. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = y \end{cases}$ 12.2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$

13. Resolve e classifica cada um dos seguintes sistemas:

13.1. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = -2 - y \end{cases}$ 13.2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = -2y \end{cases}$

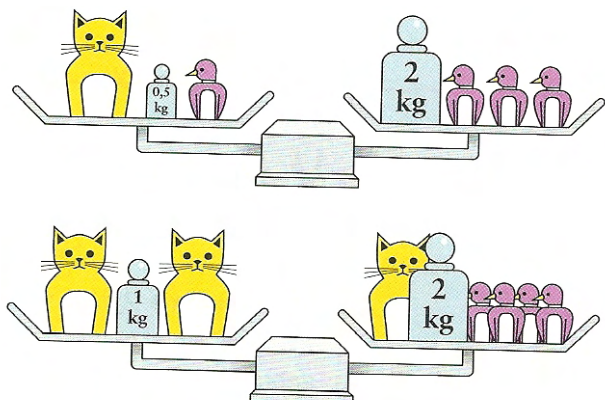
13.3. $\begin{cases} 1 - x = y \\ x + y = 1 \end{cases}$ 13.4. $\begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = y \\ x - (y+1) = 7 \end{cases}$

13.5. $\begin{cases} -2(x + y) = -10 \\ \frac{x + y}{2} - 1 = 0,5 \end{cases}$

13.6. $\begin{cases} 5y + x = -9 \\ \frac{x+5}{5} = -5y \end{cases}$

2.4. Resolução de problemas formando e resolvendo sistemas de equações

As figuras seguintes representam balanças em equilíbrio. Observa a situação e determina o peso de cada “gato” e o peso de cada “pássaro”.



Resolução

Vamos identificar as incógnitas:

$x \rightarrow$ o peso de cada “gato”

$y \rightarrow$ o peso de cada “pássaro”

Agora que as incógnitas estão identificadas vamos escrever as equações relativas às relações apresentadas na figura:

$$\begin{cases} x + 0,5 + y = 2 + 3y & \text{Equação que traduz a situação da 1ª balança} \\ 2x + 1 = x + 2 + 4y & \text{Equação que traduz a situação da 2ª balança} \end{cases}$$

Resolve-se o sistema.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 0,5 + y = 2 + 3y \\ 2x + 1 = x + 2 + 4y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3y = 2 - 0,5 \\ 2x - x - 4y = 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1,5 \\ x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1,5 \\ 2y + 1,5 - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1,5 \\ 2y - 4y = 1 - 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1,5 \\ -2y = -0,5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1,5 \\ y = \frac{-0,5}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 0,25 + 1,5 \\ y = 0,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0,25 \end{cases} \end{aligned}$$

Agora que o sistema foi resolvido há que interpretar a solução e adaptá-la ao enunciado. Como, (x) é o peso de cada “gato” e (y) o peso de cada “pássaro”, então, cada “gato” pesa 2kg e cada “pássaro” 0,25 kg (250 g).

Exemplo 4

Numa turma há 29 alunos. Se na turma houvesse menos duas raparigas, o número de rapazes seria o dobro do número de raparigas. Quantos rapazes e quantas raparigas há na turma?

Resolução

Seja:

$x \rightarrow$ o número de raparigas

$y \rightarrow$ o número de rapazes

Da leitura do enunciado tiramos duas informações distintas:

- Na turma há 29 alunos $\rightarrow x + y = 29$
- Se tirarmos duas raparigas, o número de rapazes fica o dobro do das raparigas $\rightarrow y = 2(x - 2)$

Considerando as duas informações simultaneamente, obtemos um sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ y = 2(x - 2) \end{cases}$$

Resolve-se o sistema.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 29 \\ y = 2(x - 2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 29 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x - 4 = 29 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 33 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 2 \times 11 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, na turma há 11 raparigas e 18 rapazes.

Nota

Na **resolução de problemas**, formando e resolvendo um **sistema de equações**, é conveniente seguir os seguintes passos:

1. ler muito bem o enunciado e tomar nota dos dados;
2. identificar as incógnitas;
3. escrever as equações relativas às relações existentes;
4. resolver o sistema;
5. interpretar a solução adaptando-a ao resultado.

Actividades de aplicação

14. A soma de dois números é 40 e a diferença é 14. Quais são os números?

15. A soma de dois números é 36. Um deles é o dobro do outro. Quais são os números?

16. A diferença entre o comprimento e a largura de um parque rectangular é 20 m. O perímetro do parque é 160 m. Calcula, em metros quadrados, a área do parque.

Exemplo 5

Cinco amigos foram ao café no final da tarde. Pediram três cafés e dois sumos naturais. Conversaram mais um pouco e pediram mais dois cafés e três sumos. A primeira conta foi de 85 mil dobras e a segunda de 90 mil dobras.

Quanto custou cada café e cada sumo?

Resolução

$x \rightarrow$ o custo, em dobras, de um café;

$y \rightarrow$ o custo, em dobras, de um sumo natural.

Do enunciado do problema retiramos duas informações:

- Três cafés e dois sumos custaram 85 000,00
- dois cafés e três sumos custaram 90 000,00

Traduzindo as informações algebricamente vem:

(para facilitar os cálculos fazemos 1 000,00 = 1)

$$3x + 2y = 85 \quad \wedge \quad 2x + 3y = 90$$

Resolvendo este sistema, temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 85 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 85 \\ x = \frac{90 - 3y}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{90 - 3y}{2}\right) + 2y = 85 \\ x = \frac{90 - 3y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 270 - 9y + 4y = 170 \\ x = \frac{90 - 3y}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -100 \\ x = \frac{90 - 3y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = \frac{90 - 3 \times 20}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, cada café custou 15 mil dobras e os sumos custaram 20 mil dobras cada um.

Exemplo 6

A diferença entre os perímetros dos dois círculos representados na figura é de 9,42 cm. Sabendo que um dos raios é o dobro do outro, calcula:

6.1. O comprimento de cada um dos raios.

6.2. A área da coroa circular.

Resolução

$x \rightarrow$ medida do raio do círculo maior;

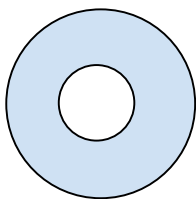
$y \rightarrow$ medida do raio do círculo menor.

$$\begin{cases} 6,28x - 6,28y = 9,42 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6,28(2y) - 6,28y = 9,42 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12,56y - 6,28y = 9,42 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6,28y = 9,42 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5 \\ x = 3 \end{cases}$$

O raio do círculo maior mede 3 cm e o do círculo menor mede 1,5 cm.

6.2. Área da coroa circular = área do círculo maior – área do círculo menor

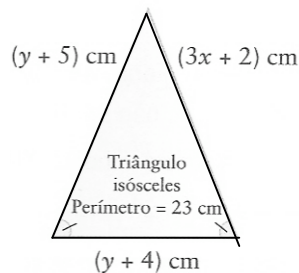
$$A = 3,14 \times 3^2 - 3,14 \times 1,5^2 = 28,26 - 7,065 = 21,195 \text{ cm}^2$$



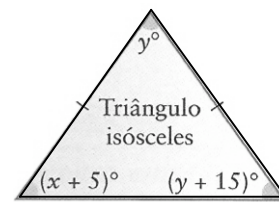
Actividades de aplicação

17. Observa as figuras e determina x e y .

17.1.



17.2.



18. O número total de pessoas que podem ocupar um autocarro é 84. As pessoas que podem subir para que o autocarro fique com os 84 lugares preenchidos são a terça parte mais quatro das que já estão sentadas dentro do autocarro.

18.1. Quantas pessoas ainda podem subir para o autocarro?

18.2. Quantas pessoas já entraram para o autocarro e já estão sentadas?

19. A soma das idades do Armando e da sua filha Teresa é 56. Há quatro anos atrás a idade do pai era tripla da idade da filha. Qual é a idade do Armando e da sua filha?

20. Num parque de estacionamento estão estacionados automóveis e motos. O número de automóveis é o triplo do número das motos e, ao todo, há 70 rodas no parque. Determina quantos automóveis e quantas motos estão estacionados no parque.

21. Há um ano a idade da Joana era o dobro da idade da Maria. Daqui a 11 anos a idade da Maria será $\frac{2}{3}$ da da Joana. Qual é a idade actual de cada uma?

22. Numa competição, nas modalidades de voleibol e basquetebol, participaram 32 equipas e 344 atletas. Cada equipa de voleibol inscreveu 12 atletas e cada equipa de basquetebol inscreveu 10 atletas.

Quantas equipas de voleibol participaram na competição e quantos eram os atletas inscritos nessa modalidade?

$$P = 2 \pi$$

Formar o sistema:

$$\begin{cases} 2\pi x - 2\pi y = 9,42 \\ x = 2y \end{cases}$$

UNIDADE 3 – PROPORCIONALIDADE INVERSA

3.1. Proporcionalidade directa (revisão)

A Ana e a Inês foram comprar enfeites para fazerem a árvore de Natal. Cada bola custa 2 000 dobras e cada estrela custa 5 000 dobras. A Ana comprou muitas bolas. A Inês comprou bolas e uma estrela para pôr no cimo da árvore.

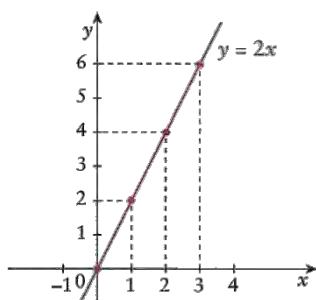
A Matemática ajuda-nos no dia-a-dia, por isso, vamos acompanhar as compras da Ana e da Inês com números, expressões matemáticas, tabelas e gráficos.

Para facilitar os cálculos fazemos: 1000 dobras = 1



Compras da Ana						
Número de bolas compradas	1	2	3	4	...	x
Custo das compras	2	4	6	8	...	$y = 2x$

$y = 2x$ é uma expressão analítica de uma função cujo gráfico é uma recta que contém a origem.



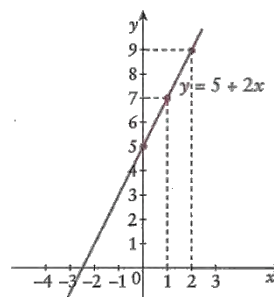
Diz-se que: y é directamente proporcional a x .

Na tabela, a segunda linha obtém-se da primeira multiplicando-a por 2, ou seja, a **constante de proporcionalidade** é 2 (é o custo de uma bola).

No gráfico, unindo os pontos, obtém-se uma recta que contém a origem do referencial.

Compras da Inês						
Número de bolas compradas	1	2	3	4	...	x
Custo das compras (bolas + estrela)	7	9	11	13	...	$y = 5 + 2x$

$y = 5 + 2x$ é uma expressão analítica de uma função cujo gráfico é uma recta que não passa pela origem.



Diz-se que: y não é directamente proporcional a x .

Na tabela não é possível obter os valores da segunda linha multiplicando os da primeira linha por um número.

No gráfico, unindo os pontos, obtém-se uma recta, mas esta não contém a origem do referencial.

A variável y é **directamente proporcional** à variável x se existe um número k , diferente de zero, de modo que:

$$y = kx$$

Ao número k chama-se **constante de proporcionalidade**.

Nas **tabelas** identifica-se a relação de proporcionalidade directa entre duas variáveis se for possível obter uma linha multiplicando a outra por um número.

Nos **gráficos**, a função de proporcionalidade directa é representada por uma recta que contém a origem do referencial.

➤ Resolução de problemas usando proporcionalidade directa entre variáveis (revisão)

Diariamente resolvemos problemas envolvendo relações de proporcionalidade directa. As formas mais comuns consistem em usar a regra de três simples ou a redução à unidade.

Exemplo 1

O Armando comprou 11 cadernos por 121.000 dobras.

Quanto gastava se comprasse 6 cadernos?

Resolução

Método da redução à unidade

Faz-se 1000 dobras = 1

$$121 : 11 = 11$$

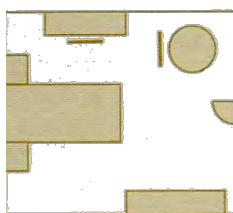
$$11 \times 6 = 66$$

Regra de três simples

Nº de cadernos	Custo	
11	121	$x = \frac{6 \times 121}{11} \Leftrightarrow x = 66$
6	x	

Logo, 6 cadernos custariam 66.000 dobras.

Exemplo 2



A figura
ao lado

representa a planta de um quarto. A escala utilizada foi de 1 : 130.

Qual é o comprimento real do quarto?

Resolução

Realidade Desenho

130 cm ----- 1 cm

x ----- 3 cm No desenho o comprimento é 3 cm

$$x = \frac{130 \times 3}{1} \Leftrightarrow x = 390$$

O quarto tem o comprimento real de 390 cm, ou seja, 3,90 m.

Exemplo 3

A Tânia comprou umas calças que custavam 250.000 dobras mas com o desconto que lhe fizeram ela pagou pelas calças 230.000. Qual foi a percentagem do desconto que lhe fizeram?

Resolução

1º Processo

$$250 - 230 = 20 \text{ Calculamos o valor do desconto.}$$

Custo inicial

Desconto

250 ----- 100%

20 ----- $x\%$

$$x = \frac{20 \times 100}{250} \Leftrightarrow x = 8$$

A taxa de desconto foi 8%

2º Processo

Seja x a taxa de desconto

$$250 - (x \times 250) = 230$$

Formou-se uma equação:

250 é o valor inicial e $x \times 250$ é o desconto.

Actividades de aplicação

1. A Adelaide comprou um pacote de feijão e alguns kg de arroz. A Marlene só comprou arroz. Observa as tabelas seguintes: (considere-se 1000 dobras = 1)

Compras da Adelaide				
Arroz comprado(em Kg)	0	1	3	x
Custo das compras (em dobras)	22	37	67	$y = \dots$

Compras da Marlene				
Arroz comprado(em Kg)	2	6	10	x
Custo das compras (em dobras)	30	90		$y = \dots$

1.1. Copia e completa as tabelas.

1.2. Qual das tabelas traduz uma função de proporcionalidade directa. Justifica.

1.3. A Marlene gastou 165.000 dobras em compras. Quantos quilos de arroz comprou.

1.4. A Adelaide gastou nas compras 97.000 dobras. Quantos quilos de arroz comprou?

2. Para percorrer 280 km o carro do Jailson gasta 21 litros de gasolina.

2.1. Quantos quilómetros anda o carro do Jailson com 10 litros de gasolina?

2.2. Quantos litros de gasolina gasta o Jailson para andar 500 quilómetros?

2.3. O Jailson tem 18 litros de gasolina. Será que chega para percorrer 260 quilómetros?

3. Uma saia custava 200.000 dobras e com desconto custou 176.000 dobras. Qual foi a percentagem de desconto?

4. O Sr. António depositou num banco 10 milhões de dobras com uma taxa de juro de 5% ao ano.

4.1. Quanto recebeu de juro ao fim de um ano?

4.2. À mesma taxa e decorrido um ano o Sr. Antunes recebeu 300 mil dobras. Quanto dinheiro depositou inicialmente o Sr. Antunes no banco?

5. Num mapa feito à escala de 1 : 100 000, a distância entre duas cidades é 13 cm. Qual é a distância real entre as duas cidades? Apresenta o resultado em km.

6. Para fazer 20 bolinhos usam-se as seguintes quantidades de ingredientes:

- 250 g de farinha
- 200 g de açúcar
- 75 ml de leite
- 80 g de manteiga

Faz uma lista de ingredientes para fazer 45 bolinhos.

$$\Leftrightarrow -250x = 230 - 250$$

$$\Leftrightarrow -250x = -20$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-20}{-250} \Leftrightarrow x = 0,08$$

$x = 0,08$, ou seja, o desconto foi de 8%

3.2. Proporcionalidade inversa

O Sr. Lima, na sua exploração agrícola tem 40 vacas e ração para as alimentar durante 50 dias. Se vender 15 vacas, para quantos dias durará a ração?



Na leitura do problema surgem duas variáveis:

- x designa o número de vacas;
- y designa o número de dias para os quais há ração.

É claro que quando x aumenta, y diminui na mesma proporção e quando x diminui, y aumenta na mesma proporção. Diz-se que as variáveis x e y são **inversamente proporcionais**.

Vamos apresentar dois métodos para resolver o problema:

1º método – Construindo uma tabela

		: 2		
x	40	20	1	25
y	50	100	2000	$2000 : 25 = 80$
		x 2		

Se vendeu 15 vacas ficou ainda com 25 vacas.

Repara que:

$$xy = 2000$$

2000 é a constante de proporcionalidade inversa.

Se tivesse uma só vaca, teria ração para 2000 dias (redução à unidade)

Como $xy = 2000$ ou $y = \frac{2000}{x}$ diz-se que a **constante de proporcionalidade inversa** é 2000.

2º método: Utilizando a constante de proporcionalidade inversa

$$40 \times 50 = 25x \Leftrightarrow x = \frac{40 \times 50}{25} \Leftrightarrow x = 80$$

As variáveis x e y são **inversamente proporcionais**.

Logo, são iguais os produtos dos elementos correspondentes, ou seja, $40 \times 50 = 25x$.

Logo, se o Sr. Lima vender 15 vacas, ficará só com 25 vacas e a ração durará para 80 dias.

Dois variáveis x e y são inversamente proporcionais quando o produto de dois **quaisquer valores correspondentes** é constante e diferente de zero.

$$xy = k, \quad k \neq 0$$

k é a constante de proporcionalidade.

Exemplo 4

Um terreno rectangular tem de área 300 m^2 .

4.1. Qual deve ser o comprimento do rectângulo se a sua largura for de:

- a) 15 m b) 12 m c) 10 m

4.2. Justifica que o comprimento e a largura do terreno são inversamente proporcionais.

Resolução

4.1. $A = c \times l$; $c = \frac{A}{l}$ Dividindo a área do rectângulo pela medida da largura obtém-se o comprimento.

x = largura do terreno

y = comprimento do terreno

Largura (x)	15	12	10
Comprimento (y)	20	25	30

4.2. São inversamente proporcionais porque $c \times l = 300$, ou seja, a constante de proporcionalidade inversa é 300.

➤ **Relação de proporcionalidade. Resolução de problemas envolvendo proporcionalidade**

A existência de uma relação de proporcionalidade (directa ou inversa) entre duas variáveis facilita a resolução de problemas.

Por vezes acontece que se lê apressadamente o problema e concluiu-se a existência de proporcionalidade quando ela não existe.

Exemplo 5

A 800 km / h um avião leva 100 passageiros.

Quantos passageiros leva se viajar a 400 km / h?

Resolução

Neste caso, não existe qualquer relação de proporcionalidade. O avião pode transportar qualquer número de passageiros, independentemente da velocidade a que viaja ou até se está estacionado no aeroporto.

Exemplo 6

O Edmar deslocou-se de carro da Trindade para Monte Café a uma velocidade de 45 km / h em 16 minutos.

6.1. Quanto tempo leva a descer de Monte Café para a Trindade a 60 km / h?

6.2. E se for um ciclista a descer de Monte Café para a Trindade à velocidade de 15 km / h?

6.3. O Abdulay demorou 15 minutos a subir da Trindade para Monte Café. A que velocidade viajou o Abdulay?

Resolução

As grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais, quanto mais tempo se gasta menor é a velocidade.

6.1.

$$45 \times 16 = 60x \Leftrightarrow x = \frac{45 \times 16}{60} \Leftrightarrow x = 12$$

A 60 km/h leva 12 minutos.

6.2.

$$45 \times 16 = 15x \Leftrightarrow x = \frac{45 \times 16}{15} \Leftrightarrow x = 48$$

O ciclista levará 48 minutos.

6.3.

$$k = 45 \times 16 = 720$$

$$720 : 15 = 48$$

O Abdulay viajou a 48 km/h.

Actividades de aplicação

7. Sabendo que as variáveis x e y são inversamente proporcionais, copia e completa as tabelas:

x	20	1	40
y	30	...	...

x	10	1	...
y	1,2	...	0,5

8. Alugou-se um autocarro de 50 lugares para um passeio à praia de Micondó. O custo do aluguer é de 3 milhões de dobras.

8.1. Copia e completa a tabela

Nº pessoas	25	50		20	
Custo por pessoa	120 000,00		200 000,00		300 000,00

8.2. No contexto da situação apresentada o que representa a constante 3 000 000,00?

9. Uma prova de ciclismo, com a extensão de 32 km, foi corrida no sistema de contra – relógio (vence o ciclista que percorrer a distância em menos tempo).

9.1. O ciclista vencedor gastou no percurso exactamente 40 minutos. Qual foi a sua velocidade média, em km/h?

9.2. Outro ciclista correu a prova a uma velocidade média de 46,4 km/h. Quantos segundos gastou a mais relativamente ao vencedor?

10. Para embalar uma certa quantidade de café são necessários 12 sacos, levando cada saco 9 kg.

10.1. Se se usarem 20 sacos com igual quantidade de café, quantos quilogramas leva cada saco?

10.2. Quantos sacos são necessários se cada um levar 7,2 kg?

11. O comprimento do papel de um rolo varia inversamente com a espessura do papel. Se o papel tem 0,8 mm de espessura o rolo terá 90 m de papel. Calcula o comprimento do papel num rolo, sabendo que neste a espessura do papel é de 1,2 mm.

12. Uma camioneta transporta 20 caixas de maçãs com 40 maçãs em cada caixa. Se retirarmos uma maçã de cada caixa, quantas caixas transportará a camioneta?

13. Uma torneira, A , com um caudal de 40 litros por minuto, enche um tanque em duas horas e meia.

13.1. Em quanto tempo encherá o tanque uma torneira, B , com um caudal de 60 litros por minuto?

13.2. E quanto tempo é necessário para encher o mesmo tanque se as torneiras A e B estiverem abertas ao mesmo tempo?

14. O Valdemar tem milho para alimentar 120 galinhas durante 90 dias. Se comprar mais um certo número de galinhas e ficará com milho para apenas 60 dias.

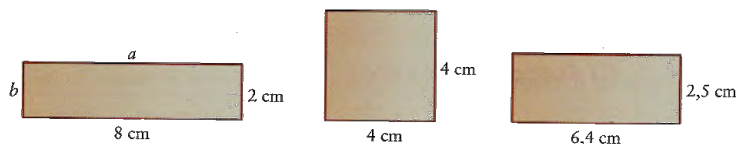
14.1. Quantas galinhas poderá comprar?

14.2. E se vender 20 galinhas, ficará com milho para quantos dias?

15. Estimou-se que seriam necessários 4000 homens para construir em 30 anos a maior pirâmide do Egipto. Calcula o número de homens para construírem a pirâmide em 10 anos.

3.3. Função de proporcionalidade inversa

Considera o conjunto de rectângulos que têm de área 16 cm^2 , comprimento a e largura b .

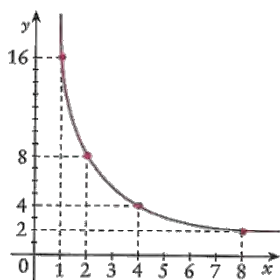


Vamos escrever b em função de a :

$$A = a \times b \text{ Fórmula da área do rectângulo; } b = \frac{A}{a}; \quad A = 16; \quad b = \frac{16}{a} \text{ Resolve-se a equação em ordem a } b.$$

Façamos agora o gráfico da função $b = \frac{16}{a}$.

a	b
1	16
2	8
4	4
8	2



O gráfico da função $b = \frac{16}{a}$ é uma curva. A curva aproxima-se dos eixos das coordenadas mas nunca lhe "toca".

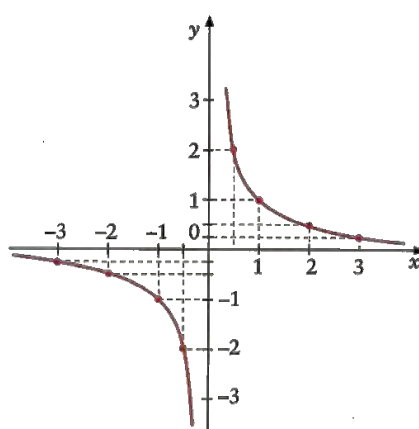
Como $ab = \text{constante}$, a relação entre as variáveis a e b é uma relação de proporcionalidade inversa e a constante de proporcionalidade inversa é 16.

Diz-se que a função $b = \frac{16}{a}$ é uma **função de proporcionalidade inversa**.

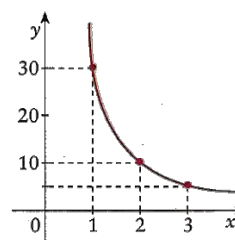
Uma função de proporcionalidade inversa é por exemplo a função

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

x	y
-1	-1
1	1
-2	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2



Observa o gráfico apresentado na figura seguinte. Será o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa?



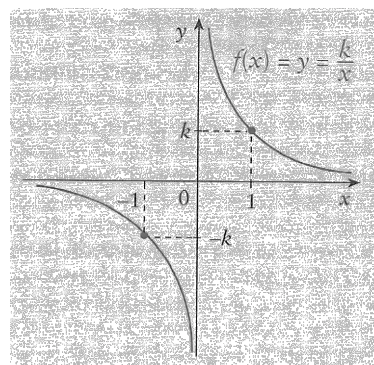
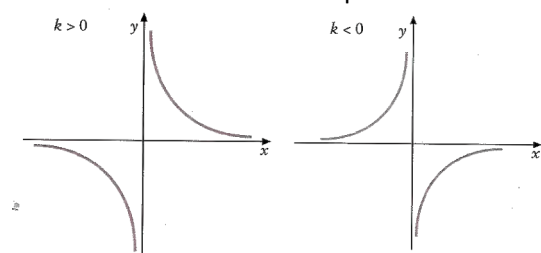
$$xy = k ?$$

Vejamos:
 $2 \times 10 = 20$
 $1 \times 30 = 30$
 $3 \times 5 = 15$

O produto dos valores correspondentes não é constante. O **gráfico não é** de uma função de proporcionalidade inversa.

Uma função do tipo $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ é uma **função de proporcionalidade inversa** e k é a constante de proporcionalidade inversa.

O gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é uma curva com dois ramos que tem o nome de **hipérbole**.



Nota que as curvas aproximam-se cada vez mais dos eixos coordenados mas nunca lhes chegam a tocar.

Exemplo 7

Considera a função f , definida por

$$f: x \mapsto y = \frac{6}{x} \quad x \neq 0.$$

7.1. Representa graficamente a função.

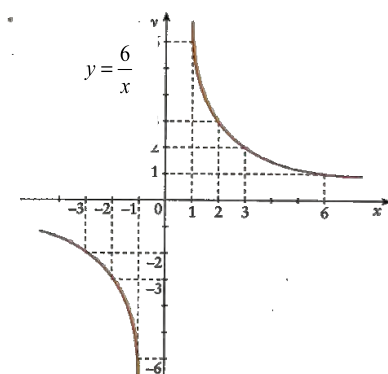
7.2. Como se chama o gráfico da função dada?

Resolução

Vamos registar numa tabela os valores dos pares ordenados (x, y) . Não esquecer que $x \neq 0$.

x	1	2	3	-1	-2	-3
y	6	3	2	-6	-3	-2

Representemos os pares ordenados (x, y) num referencial:



7.2. Como é o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa, é uma hipérbole.

Exemplo 8

Devido à poluição de um rio uma doença atacou uma população de peixes. O decréscimo da população faz-se de acordo com a fórmula:

$$N = \frac{2500}{t}, \quad 1 \leq t \leq 10, \quad \text{onde } N \text{ representa o}$$

número de peixes vivos e t o número de dias após ser detectada a doença.

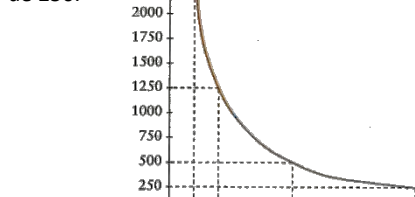
8.1. Representa graficamente N em função de t .

8.2. N e t são inversamente proporcionais. Diz qual é a constante de proporcionalidade inversa e o que representa na situação descrita.

Resolução

x	1	2	4	5	10
y	2500	1250	625	500	250

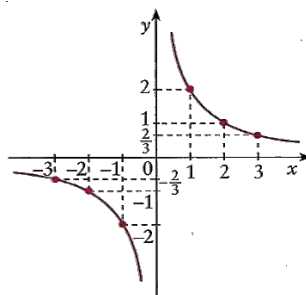
Como os valores de y são muito grandes marcamos no eixo, com intervalos de 250.



8.2. A constante de proporcionalidade inversa é 2500. Representa o número de peixes vivos decorrido 1 dia após ter sido detectada a doença.

Actividades de aplicação

16. O gráfico representado é de uma função de proporcionalidade inversa.

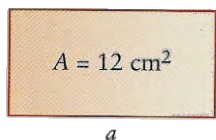


16.1. Elabora uma tabela com os valores dos pares ordenados (x, y) e completa:

$$y = \frac{\dots\dots}{x} \quad x \neq 0$$

16.2. Determina x sabendo que $y = 6$.

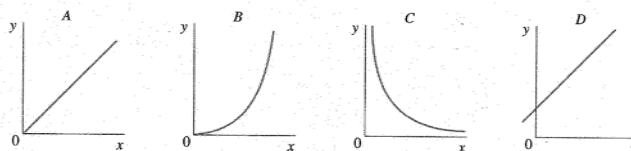
17. Considera todos os rectângulos de área 12 cm^2 .



17.1. Indica três valores possíveis para a e b .

17.2. Desenha o gráfico da função de proporcionalidade inversa $y = \frac{12}{x}$ para $x > 0$.

18. Observa os gráficos seguintes:



Identifica o(s) gráfico(s) correspondentes a cada uma das afirmações seguintes:

I) A relação de x e y é uma relação de proporcionalidade inversa.

II) A relação de x e y é uma relação de proporcionalidade directa.

III) A relação de x e y não é uma relação de proporcionalidade.

19. Um operário leva 6 horas a realizar uma tarefa. Se a tarefa for executada por mais do que um operário, naturalmente levará menos tempo a ser concluída.

19.1. Sendo n o número de operários e t o tempo que demoram a realizar a tarefa, elabora uma tabela e representa graficamente n como função de t , para $1 \leq t \leq 6$.

19.2. Indica a expressão analítica da função.

20. Dadas as funções assim definidas:

$$y = 3x; \quad y = -\frac{3}{x}, \quad x \neq 0; \quad y = 1 + x; \quad y = 5$$

$$y = \frac{10}{x}, \quad x \neq 0; \quad y = \frac{x}{10}; \quad y = \frac{3}{x+3}, \quad x \neq -3$$

Indica as funções:

- a) cujo gráfico é uma recta;
- b) que são de proporcionalidade directa;
- c) que são de proporcionalidade inversa.

3.4. Leitura e interpretação de gráficos

Os gráficos mostram de uma forma rápida e atraente a forma como se relacionam as variáveis. A representação, no mesmo referencial, de mais do que um gráfico permite estabelecer comparações.

Por exemplo, no gráfico ao lado podemos imaginar e comparar as “histórias das viagens do António e do Pedro.

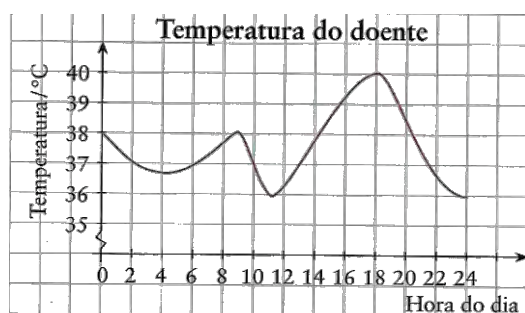
Os gráficos podem representar muitas situações do quotidiano e é muito importante saber fazer a sua leitura.

Exemplo 9

O gráfico seguinte mostra a evolução da temperatura de um doente.

9.1. A que hora do dia a temperatura foi mais elevada?

9.2. Em que intervalos de tempo a temperatura desceu?



9.3. A que hora do dia a temperatura foi mais baixa?

9.4. Qual foi a variação da temperatura?

Resolução

9.1. A temperatura foi mais elevada às 18 h.

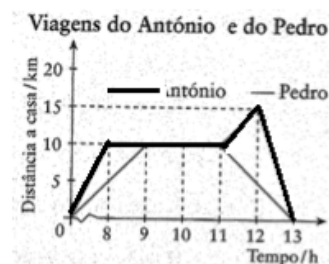
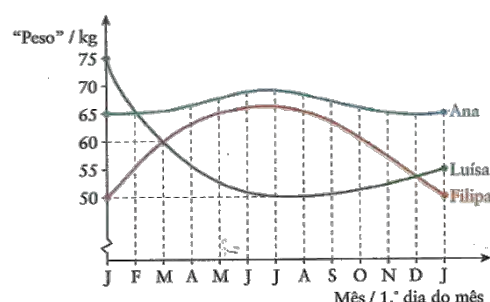
9.2. A temperatura desceu entre as 0:00 e as 4:00, entre as 9:00 e as 11:00 e entre as 18:00 e as 24:00.

9.3. A temperatura foi mais baixa às 11:00 e às 24:00.

9.4. A temperatura variou entre 36° C e 40° C.

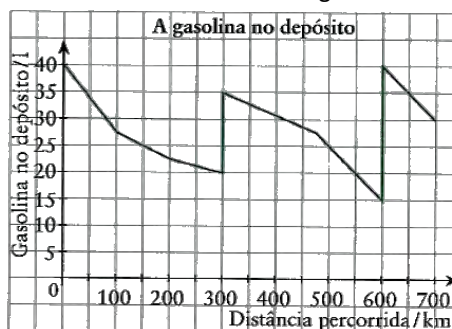
Exemplo 10

Três amigas resolveram controlar o seu “peso” durante um ano. Os resultados obtidos são apresentados no seguinte gráfico.



Actividades de aplicação

21. O gráfico seguinte mostra como varia a gasolina do depósito do carro do João Paulo ao longo de uma viagem.

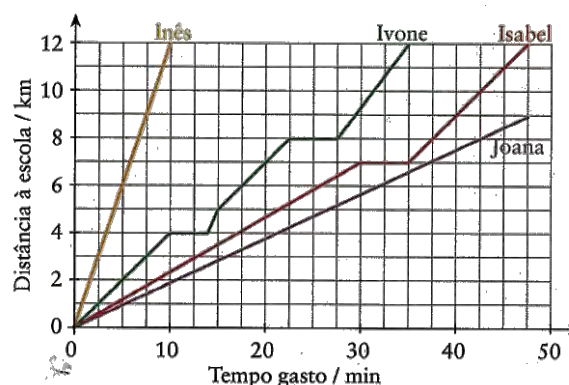


21.1. Quantas vezes foi metida gasolina no depósito?

21.2. Quantos litros de gasolina se gastaram na viagem?

21.3. Qual foi o consumo médio de gasolina em cada 100 km?

22. Observa o gráfico das viagens de quatro amigas que saíram da escola às 17:30 e se deslocaram cada uma para sua casa.



22.1. Descreve a viagem das quatro amigas.

22.2. A Isabel e a Joana chegaram a casa à mesma hora mas a Joana mora mais perto da escola. Como se pode justificar este facto?

22.3. Quais foram as amigas que foram directas para casa sem fazerem nenhuma paragem no caminho?

22.4. Determina, em quilómetros / hora, a velocidade média de cada uma das quatro amigas. Sempre que necessário usa uma casa decimal para indicar o resultado.

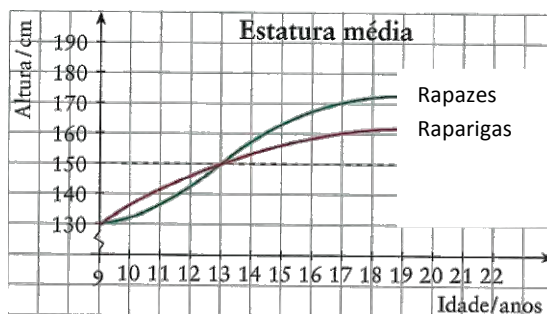
- 10.1.** Em que momento a Ana e a Luísa tinham o mesmo peso?
- 10.2.** Qual das três tinha menos “peso” no final do mês de Dezembro?
- 10.3.** Quantos quilogramas perdeu a Luísa de Fevereiro a Março (inclusive)?

Resolução

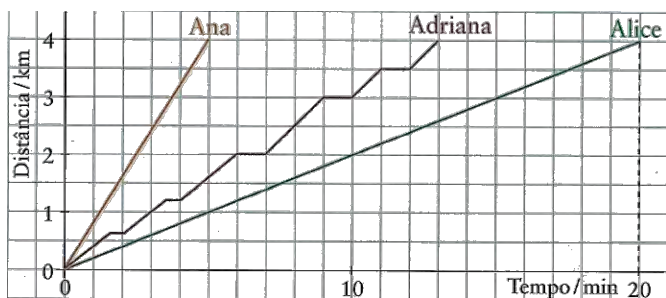
- 10.1.** A Ana e a Luísa tinham o mesmo peso no 1º dia do mês de Fevereiro.
- 10.2.** Era a Filipa.
- 10.3.** Cerca de 5 kg (passou de 65 kg para 60 kg, aproximadamente).

Actividades de aplicação

23. No gráfico seguinte pode observar-se a evolução da estatura média dos jovens. Que comentários sugere o gráfico?

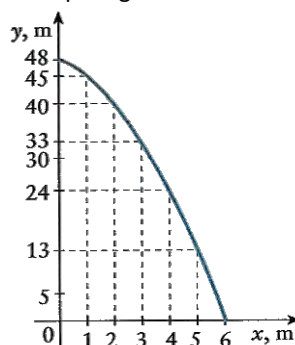


24. A Ana, a Adriana e a Alice estudam na mesma escola e na mesma turma da 9ª classe. Vivem as três a 4 km da escola. Na quinta-feira saíram da escola às 17 horas e regressaram a casa: uma de autocarro, outra de bicicleta e outra de carro, como se mostra no gráfico seguinte:



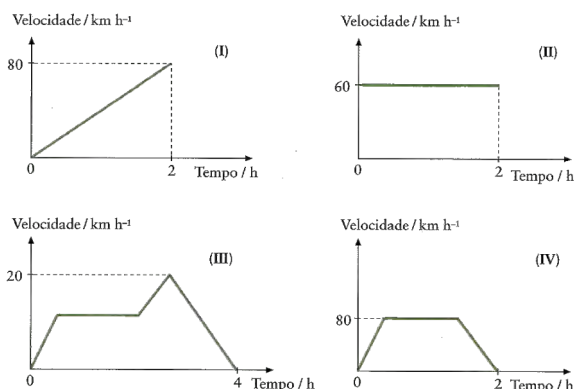
- 24.1.** Qual foi o transporte utilizado por cada uma das amigas? Justifica a resposta.
- 24.2.** A que horas chegou cada uma das amigas a casa?
- 24.3.** Qual das amigas fez várias paragens pelo caminho?
- 24.4.** Calcula, em km / h, a velocidade média de cada uma das amigas.

25. Imagina que um dos canhões que se encontram no terraço do Museu Nacional, em S. Tomé, projectou uma bala para o mar. A trajectória da bala projectada pelo canhão desde o momento em que foi lançada até atingir o mar é dada pelo gráfico abaixo.



- 25.1.** A que distância da terra caiu a bala ao mar?
- 25.2.** Qual é a distância entre a superfície do mar e o terraço do Museu?
- 25.3.** O que se pode dizer a propósito do valor de y quando x aumenta? As variáveis x e y são inversamente proporcionais? Justifica.

26. Observa os seguintes gráficos:



Identifica o gráfico onde é possível ler a seguinte informação:

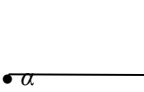
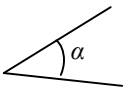
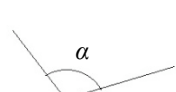
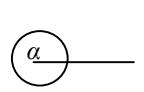
- (A)** A viagem demorou 4 horas.
- (B)** A velocidade foi constante.
- (C)** A distância total percorrida foi 120 km.
- (D)** O aumento da velocidade foi constante.
- (E)** A velocidade máxima foi de 80 km / h.

UNIDADE 4 – CIRCUNFERÊNCIA E POLÍGONOS

Revisão

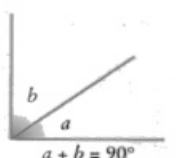
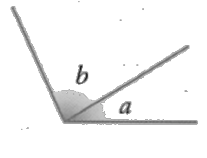
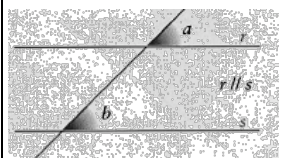
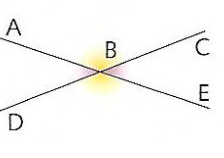
➤ Ângulos

Os ângulos classificam-se de acordo com as suas amplitudes:

					
Ângulo nulo Amplitude: $\alpha = 0^\circ$	Ângulo agudo Amplitude: $0 < \alpha < 90^\circ$	Ângulo recto Amplitude: $\alpha = 90^\circ$	Ângulo obtuso Amplitude: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	Ângulo raso Amplitude: $\alpha = 180^\circ$	Ângulo giro Amplitude: $\alpha = 360^\circ$

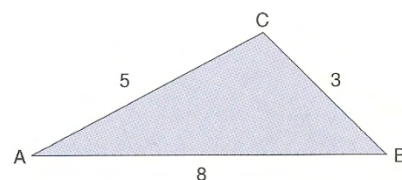
➤ Pares de ângulos

Alguns pares de ângulos têm designações específicas:

				
Ângulos complementares	Ângulos suplementares	Ângulos adjacentes	Ângulos de lados paralelos	Ângulos verticalmente opostos
São ângulos cuja soma das amplitudes é 90° .	São ângulos cuja soma das amplitudes é 180° .	São ângulos que têm um lado comum que os separa.	Se dois ângulos têm os lados paralelos ou são iguais ou são suplementares.	Dois ângulos verticalmente opostos são iguais $\hat{A}BD = \hat{C}BE$ $\hat{A}BC = \hat{D}BE$

➤ Relação entre os lados e os ângulos de um triângulo

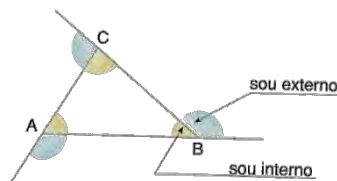
- Num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.
- Num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.
- Num triângulo, ao menor lado opõe-se o menor ângulo.



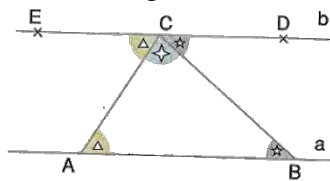
Maior ângulo: $\hat{A}CB$; menor ângulo: $\hat{C}AB$

➤ Ângulos num triângulo

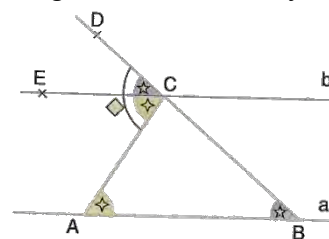
Ângulos internos e ângulos externos



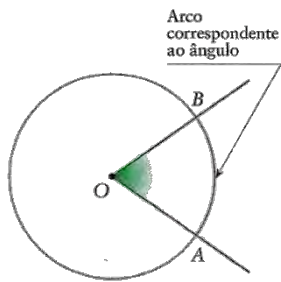
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°



Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.



4.1. Ângulos ao centro e arcos correspondentes



Observa que o ângulo AOB tem vértice no centro da circunferência e os seus lados contêm raios.

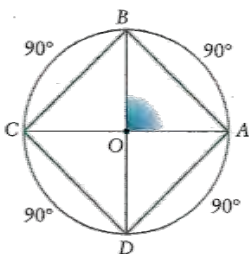
O ângulo AOB é um **ângulo ao centro** na circunferência de centro O .

Ângulo ao centro é um ângulo que tem o vértice no centro da circunferência e cada lado contém um raio dessa circunferência.

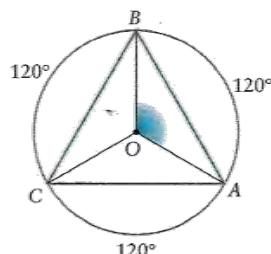
Este ângulo determina na circunferência um arco AB , compreendido entre os seus lados, a que se chama o **arco correspondente ao ângulo AOB** .

Haverá alguma relação entre a amplitude do ângulo e o arco correspondente? Lembra-te que a circunferência tem a amplitude de 360° .

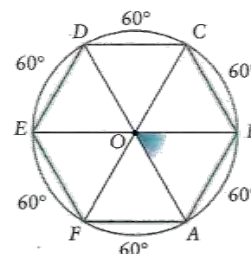
Observa as seguintes figuras. Qual é em cada uma delas a amplitude do ângulo AOB ?



$[ABCD]$ é um quadrado
 $\widehat{AOB} = 90^\circ$
 $\widehat{AB} = 360^\circ : 4 = 90^\circ$



$[ABC]$ é um triângulo equilátero
 $\widehat{AOB} = 120^\circ$
 $\widehat{AB} = 360^\circ : 3 = 120^\circ$



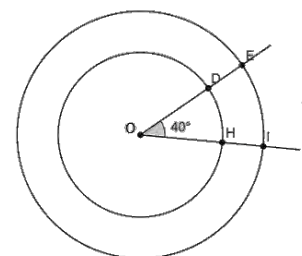
$[ABCDEF]$ é um hexágono regular
 $\widehat{AOB} = 60^\circ$
 $\widehat{AB} = 360^\circ : 6 = 60^\circ$

Repara que em cada uma das figuras a amplitude do ângulo ao centro coincide com a do seu arco correspondente. Reciprocamente a amplitude do arco compreendido entre os lados do ângulo é igual à amplitude do ângulo

A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

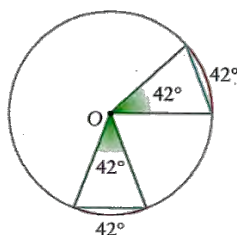
A figura representa duas circunferências concêntricas. Apesar dos arcos terem diferentes medidas de comprimento, a amplitude dos arcos compreendidos entre os lados dos ângulos DOH e EOI são iguais.

$$\widehat{DH} = \widehat{EI} = 40^\circ.$$



➤ Ângulo ao centro, arcos e cordas correspondentes

Observa a figura



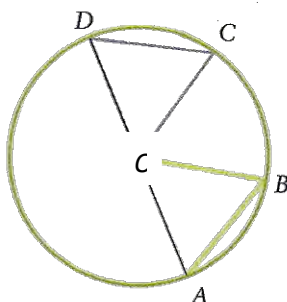
Uma corda de uma circunferência é um segmento de recta cujos extremos são pontos da circunferência.
 onde se pode ver dois ângulos ao centro iguais.

Numa circunferência, as **cordas** correspondentes a dois ângulos ao centro iguais são geometricamente iguais e reciprocamente.

Numa circunferência, os **arcos** correspondentes a dois ângulos ao centro iguais são geometricamente iguais e reciprocamente.

Exemplo 1

Na circunferência de centro O , sabe-se que $[AD]$ é um diâmetro e que $\overline{AB} = \overline{CD}$.



1.1. Justifica que os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$ são iguais.

1.2. Se $\widehat{AOB} = 40^\circ$, qual é a amplitude do ângulo COD ?

1.3. Determina a amplitude dos arcos AB e BC .

1.4. Indica, usando as letras da figura, seis ângulos ao centro.

Resolução

1.1. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ porque são raios da circunferência e $\overline{AB} = \overline{CD}$, logo, os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$ são iguais.

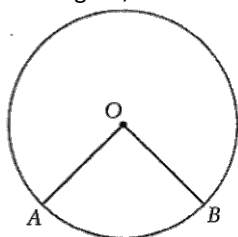
1.2. Como as cordas $\overline{AB} = \overline{CD}$, então os ângulos $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ e o ângulo COD tem a amplitude de 40° , porque numa circunferência, as cordas iguais correspondem arcos e ângulos ao centro iguais.

1.3. $\widehat{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo AOB e $\widehat{CD}$ é o arco correspondente ao ângulo COD . Como a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco correspondente, o recíproco é verdadeiro. Logo, $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 40^\circ$ e $\widehat{CD} = \widehat{COD} = 40^\circ$.

1.4. Por exemplo: ângulo AOB ; ângulo AOC ; ângulo BOC ; ângulo BOD ; ângulo COD e ângulo DOA .

Actividades de Aplicação

1. Na figura, O é o centro da circunferência e A e B são pontos da circunferência.



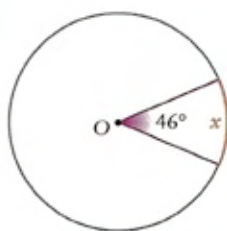
1.1. Como classificas o ângulo AOB ?

1.2. Se $\widehat{AOB} = 62^\circ$ qual é a amplitude do arco AB ?

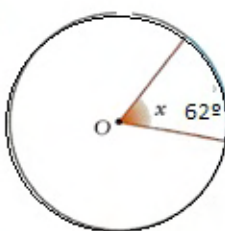
1.3. Se a amplitude do arco AB é 70° , qual é a amplitude do ângulo AOB ?

2. Observa as figuras e determina x .

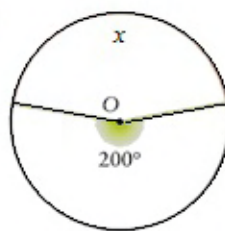
a)



b)



c)



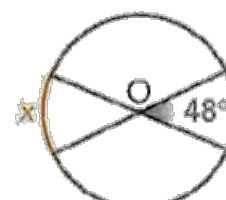
d)



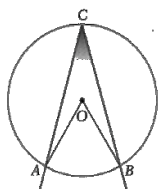
e)



f)



4.2. Ângulos inscritos



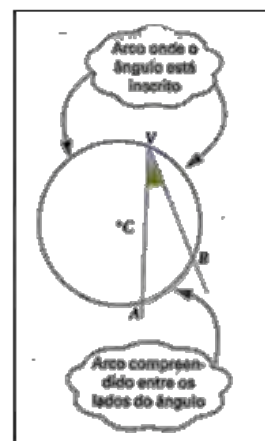
O ângulo ACB tem o vértice na circunferência e os lados contêm as cordas $[CA]$ e $[CB]$.

O ângulo ACB é um **ângulo inscrito** na circunferência de centro O .

AOB é o ângulo ao centro correspondente ao ângulo inscrito ACB .

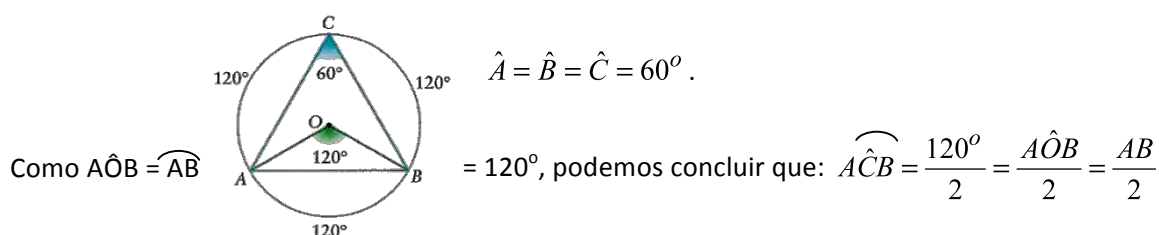
O arco AB é o arco compreendido entre os lados do ângulo inscrito ACB .

Chama-se **ângulo inscrito numa circunferência** a um ângulo que tem o vértice nessa circunferência e os lados contêm cordas dessa mesma circunferência.



Haverá alguma relação entre o ângulo ao centro e o correspondente ângulo inscrito?

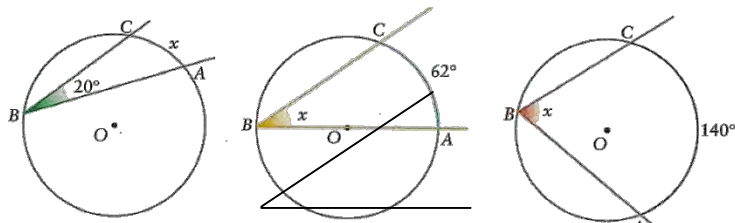
Observa a figura em que $[ABC]$ é um triângulo equilátero.



A **amplitude de ângulo inscrito** é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, ou seja, é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente.

Exemplo 2

Observa as figuras e determina x .



a) b)

c)

Resolução

a) $x = 2 \times \widehat{ABC} = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$

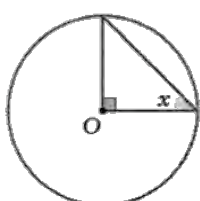
b) $x = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{62^\circ}{2} = 31^\circ$

c) $x = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$

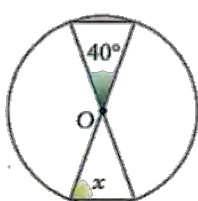
Actividades de aplicação

3. Observa as figuras e determina x . *Sugestão: coloca letras nos vértices dos ângulos.*

3.1.



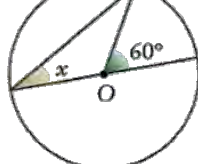
3.2.



3.3.

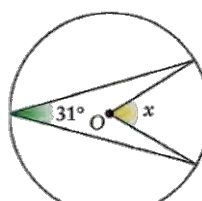


3.4.

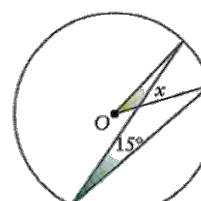


4. Observa as figuras e determina x . Justifica as tuas respostas. *Sugestão: coloca letras nos vértices dos ângulos.*

4.1.



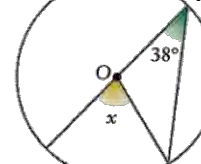
4.2.



4.3.

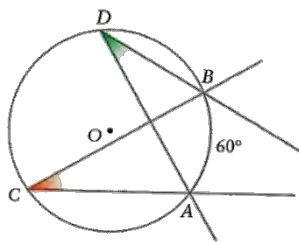


4.4.



4.3. Propriedades

O que têm em comum os ângulos $\hat{ACB}$ e $\hat{ADB}$? Qual é a sua amplitude?



O arco compreendido entre os seus lados é o mesmo e tem a amplitude de 60° .

$$\text{Logo, } \hat{ACB} = \hat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Os ângulos inscritos que contêm o mesmo arco são geometricamente iguais.

[AB] é um diâmetro da circunferência.

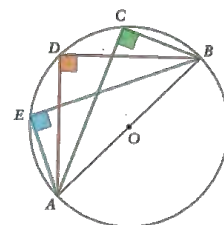
O que têm em comum os ângulos $\hat{ACB}$, $\hat{ADB}$ e $\hat{AEB}$? Qual é a sua amplitude?

Os ângulos têm em comum o mesmo arco compreendido entre os seus lados. São ângulos inscritos numa semicircunferência.

Como $\widehat{AB} = 180^\circ$ (metade da circunferência), então:

$$\hat{ACB} = \hat{ADB} = \hat{AEB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

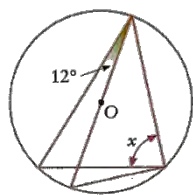
Um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo recto.



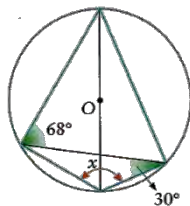
Exemplo 3

O ponto O é o centro das circunferências. Determina x.

3.1.

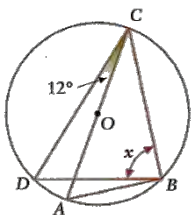


3.2.



Resolução

3.1.



$$\widehat{DCA} = 12^\circ$$

$$\widehat{AD} = 2 \times 12^\circ = 24^\circ$$

AC é um diâmetro

A amplitude do arco CDA é 180° .

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$$

$$x = \frac{156^\circ}{2} \Leftrightarrow x = 78^\circ$$

Colocam-se letras nos vértices dos ângulos.

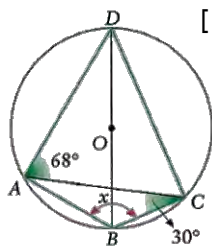
Parte-se dos dados.

O ângulo inscrito é metade do arco $\widehat{AD}$. Logo, $\widehat{AD} = 2 \times 12^\circ$.

Sabendo $\widehat{AD}$, determina-se $\widehat{CD}$.

x é um ângulo inscrito e o arco compreendido entre os seus lados é $\widehat{CD} = 156^\circ$. x é metade do arco $\widehat{CD}$.

3.2.



[BD] é um diâmetro.

$$\widehat{BCD} = 180^\circ$$

$$\hat{BAD} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\hat{BAC} = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$$

$$x + 22^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 180^\circ - 52^\circ \Leftrightarrow x = 128^\circ$$

Colocam-se letras nos vértices dos ângulos.

BAD um ângulo inscrito em metade da circunferência

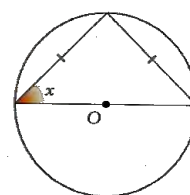
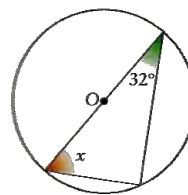
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Actividades de aplicação

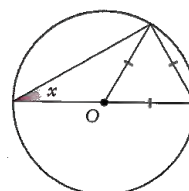
Sugestão: coloca letras nos vértices dos ângulos.

5. Os ângulos estão inscritos numa semicircunferência. O é o centro das circunferências. Determina x. **5.1.**

5.2.

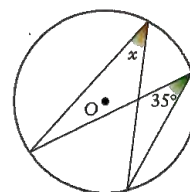


5.3.

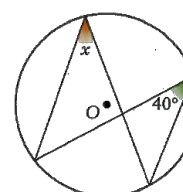


6. Os ângulos estão inscritos no mesmo arco. O é o centro das circunferências. Determina x.

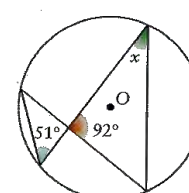
6.1.



6.2.



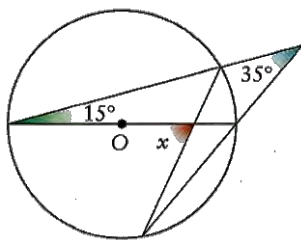
6.3.



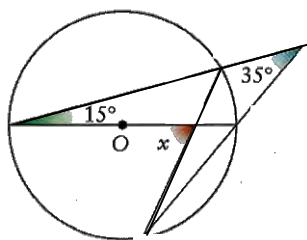
Exemplo 4

Na figura, O é o centro da circunferência.

Determina x .



Resolução



Colocam-se letras nos vértices dos ângulos. $[AD]$ é um diâmetro.

Como $\widehat{BAD} = 15^\circ$, então $\widehat{BD} = 30^\circ$

$$\widehat{BFD} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$\widehat{FBC} + 35^\circ + 15^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{FBC} = 180^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{FBC} = 130^\circ$$

$$\widehat{ABE} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Os ângulos $\widehat{FBC}$ e $\widehat{ABE}$ são suplementares. A sua soma é 180° .

$$\widehat{AEB} + 15^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AEB} = 115^\circ$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

$$x = 180^\circ - 115^\circ \Leftrightarrow x = 65^\circ$$

Os ângulos $\widehat{AEB}$ e x são suplementares.

Actividades de aplicação

7. $[ABC]$ é um triângulo inscrito na circunferência de centro O . $AB = 110^\circ$ e $[AC]$ é um diâmetro da circunferência. Indica a amplitude:

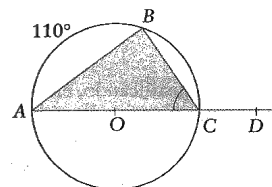
7.1. do ângulo $\widehat{BCA}$;

7.2. do arco BC ;

7.3. do ângulo $\widehat{CAB}$;

7.4. do ângulo $\widehat{ABC}$;

7.5. do ângulo $\widehat{DCB}$;



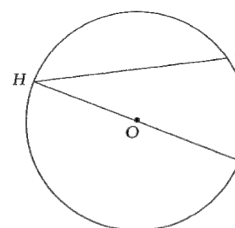
8. A circunferência da figura tem centro no ponto O e $\widehat{HG} = \frac{7}{3}\widehat{GI}$.

$$\widehat{HG} = \frac{7}{3}\widehat{GI}$$

8.1. Que valor, em graus tem a expressão $\widehat{HG} + \widehat{GI}$?

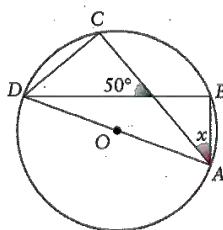
8.2. Calcula a amplitude dos arcos $\widehat{HG}$ e $\widehat{GI}$.

8.3. Determina $\widehat{IHG}$.

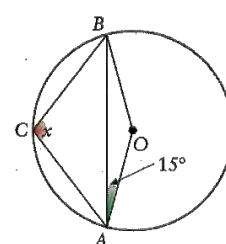


9. Na figura, O é o centro da circunferência. Determina x . *Sugestão: coloca letras nos vértices dos ângulos.*

9.1.

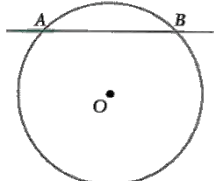


9.2.



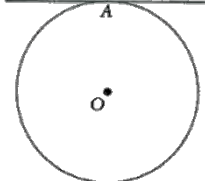
4.4. Rectas e circunferência. Tangente a uma circunferência

A recta tem com a circunferência dois pontos comuns.



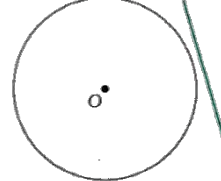
Recta **secante** à circunferência

A recta tem com a circunferência um só ponto comum.



Recta **tangente** à circunferência

A recta não qualquer tem ponto comum com a circunferência.



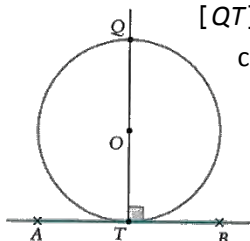
Recta **exterior** à circunferência

➤ Recta tangente a uma circunferência

$[QT]$ é um diâmetro. AT é tangente à circunferência em T . QT é um **eixo de simetria** da circunferência. Então:

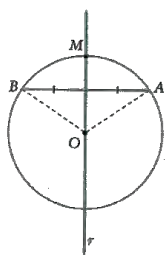
$$\widehat{ATQ} = \widehat{QTB} \text{ . Mas } \widehat{ATQ} + \widehat{QTB} = 180^\circ \text{ (são ângulos suplementares).}$$

$$\text{Logo, } \widehat{QTA} = 90^\circ.$$



Se uma recta t é tangente à circunferência, então é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

➤ **Perpendicular ao meio de uma corda**



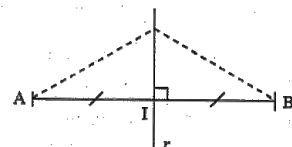
Desenhamos uma circunferência, uma corda e a recta perpendicular ao meio da corda. Verificamos que a recta passa pelo centro da circunferência. Sendo a recta r perpendicular ao meio da corda, a recta r é a mediatriz do segmento $[AB]$. Como o ponto O dista igualmente de A e B , o ponto O pertence à recta r .

Se a recta r é perpendicular ao meio da corda $[AB]$, então r contém o centro da circunferência.

Nota:

O **ponto médio** de um segmento é o ponto do segmento situado a igual distância dos extremos.

A **mediatriz** de um segmento é a perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio.

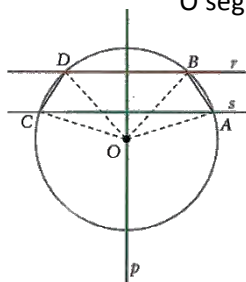


➤ **Rectas paralelas secantes a uma circunferência**

A recta p é perpendicular às rectas r e s e contém o ponto O . As rectas r e s são paralelas.

O segmento de recta $[CD]$ é simétrico do segmento $[AB]$ relativamente ao eixo de simetria p .

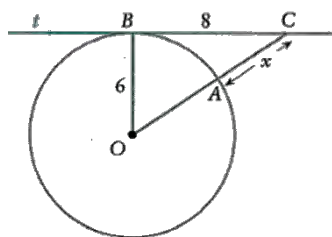
Assim, $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$.



Se as rectas r e s forem secantes à circunferência e se $r \parallel s$ então os arcos e as cordas AB e CD são geometricamente iguais.

Exemplo 5

Na figura, t é tangente à circunferência de centro O . Determina x .



Resolução

O triângulo $[OCB]$ é rectângulo em B , pois a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

$$\overline{OC}^2 = 6^2 + 8^2 \quad \text{Aplica-se o Teorema de Pitágoras.}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{100}; \quad \overline{OC} = 10$$

$$\overline{OA} = \text{raio da circunferência}; \quad x = \overline{OC} - \overline{OA}.$$

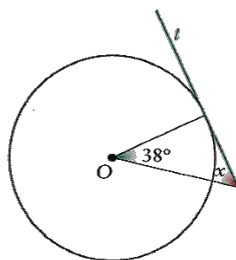
$$x = \overline{AC} = 10 - 6 = 4$$

Logo, $x = 4$ cm.

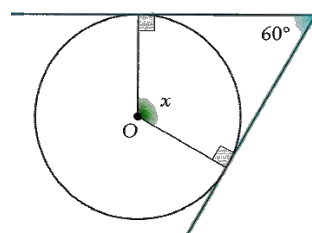
Actividades de aplicação

10. Observa as figuras e determina x . A recta t é tangente à circunferência. *Sugestão: coloca letras nos vértices dos ângulos.*

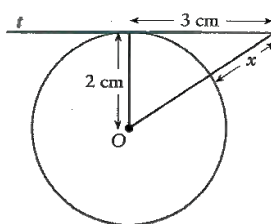
10.1.



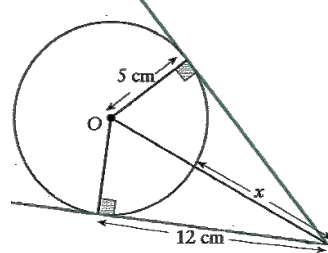
10.2.



10.3.



10.4.



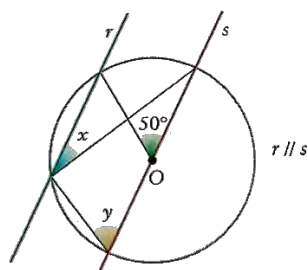
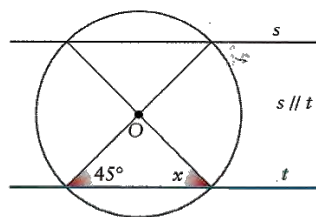
Actividades de aplicação

Sugestão: coloca letras nos vértices dos ângulos.

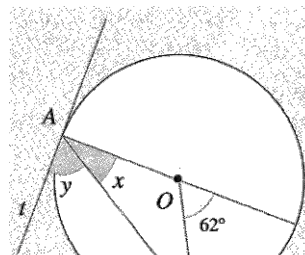
11. Observa a figura onde estão traçadas rectas paralelas secantes a uma circunferência. Determina:

11.1. x

11.2. x e y



12. A recta t é tangente à circunferência. Determina x e y .

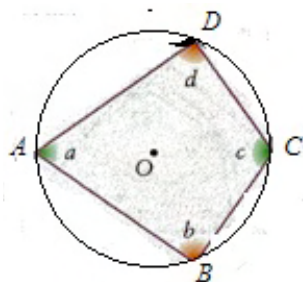


4.5. Polígonos inscritos. Ângulos de um polígono

Um **polígono** diz-se **inscrito numa circunferência** quando todos os seus vértices são pontos da circunferência. Um triângulo pode ser sempre inscrito numa circunferência. O centro da circunferência é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo e o raio é a distância do centro a um dos vértices.

Nem todos os quadriláteros podem ser inscritos numa circunferência, mas sempre que tal acontece a soma de dois ângulos opostos é 180° . Porque será?

Repara que:

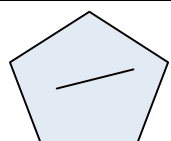


$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BCD}}{2}; \quad \widehat{BCD} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \text{ e, } \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\hat{a} + \hat{c} = 180^\circ \text{ e } \hat{b} + \hat{d} = 180^\circ$$

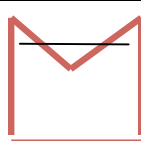
A soma de dois ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180° .

Também se prova que se a soma de dois ângulos opostos de um quadrilátero é igual a 180° , o quadrilátero pode ser inscrito numa circunferência.



Polígono convexo

Num polígono convexo quaisquer que sejam dois dos seus pontos A e B, o segmento [AB] está contido no polígono.



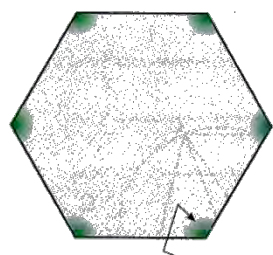
Polígono côncavo

Num polígono côncavo existem pelo menos dois pontos, A e B, de modo que o segmento de recta [AB] não está contido no polígono.

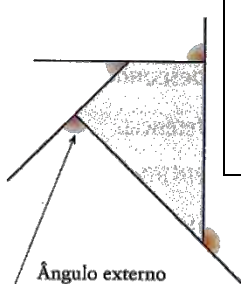
Os polígonos podem ser côncavos ou convexas. Os polígonos côncavos são menos usuais e quando falamos em polígonos normalmente queremos referir polígonos convexas.

Num polígono regular os lados e os ângulos são geometricamente iguais.

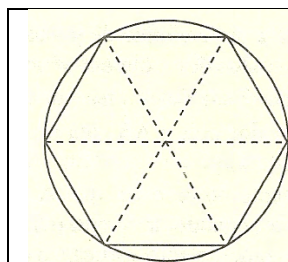
Num **polígono** é possível considerar dois tipos de ângulos: os **ângulos internos** e os **ângulos externos**.



Ângulo interno



Ângulo externo

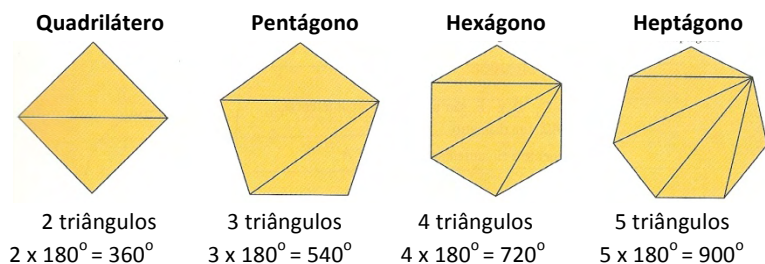


Um **polígono regular** é um polígono que se pode inscrever numa circunferência e cujos lados e ângulos são geometricamente iguais.

➤ Ângulos internos

Um polígono pode ser sempre dividido em triângulos.

Como já sabes a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Então observa:



A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a : $(n - 2) \times 180^\circ$.

Nomes dos polígonos

Nome	Número de lados
Triângulo	3
Quadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12
Polígono de n lados	n

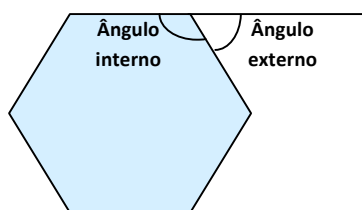
Por outro lado, se um polígono é regular cada um dos seus ângulos internos mede:

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}, \text{ ou seja } \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular com n lados é igual a:

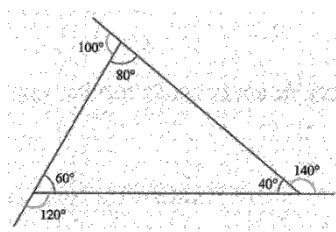
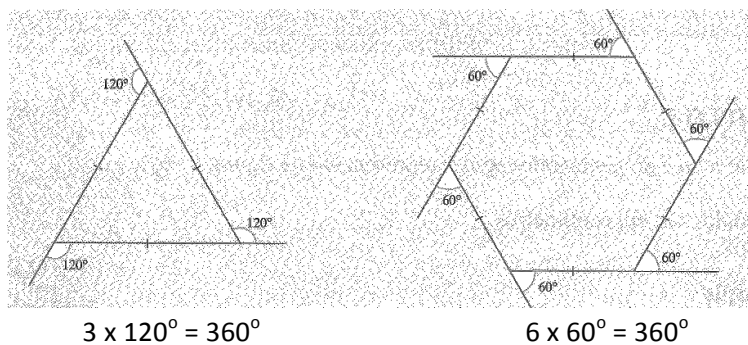
$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

➤ Ângulos externos



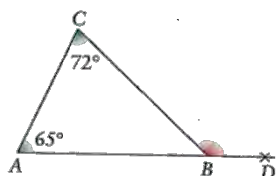
Num ângulo externo, um dos lados do ângulo contém o lado do polígono e o outro lado do ângulo contém o prolongamento do lado consecutivo do polígono.

Relativamente aos ângulos externos de um polígono podemos dizer que a soma não depende do número de lados, é sempre igual a 360° .
 Observa:



A soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono qualquer é igual a 360° .

Exemplo 6



Num triângulo $[ABC]$, $\hat{ACB} = 72^\circ$ e $\hat{CAB} = 65^\circ$.

6.1. Calcula: a) $\hat{ABC}$; b) $\hat{CBD}$;

6.2. Qual é a relação entre as amplitudes do ângulo externo CBD e a dos ângulos internos ACB e CAB ?

Resolução

6.1. a) $\hat{ABC} = 180^\circ - 65^\circ - 72^\circ = 43^\circ$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

b) $\hat{CBD} = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$

Os ângulos $\hat{CBD}$ e $\hat{ABC}$ são suplementares.

6.2. $\hat{ACB} + \hat{CAB} = 72^\circ + 65^\circ = 137^\circ$; $\hat{CBD} = 137^\circ$ A soma das amplitudes dos ângulos ACB e CAB é igual à amplitude do ângulo CBD . Os ângulos ACB e CAB são ângulos internos não adjacentes ao ângulo CBD .

Conclusão: Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

Exemplo 7

Num polígono regular, a amplitude de um ângulo interno é 17 vezes superior à amplitude do ângulo externo. De que polígono se trata?

Resolução

Suponhamos que o polígono tem n lados.

$$\frac{360^\circ}{n} \longrightarrow \text{amplitude do ângulo externo}$$

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \longrightarrow \text{amplitude do ângulo interno}$$

Temos:

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 17 \times \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 180n - 360^\circ = 17 \times 360^\circ \Leftrightarrow$$

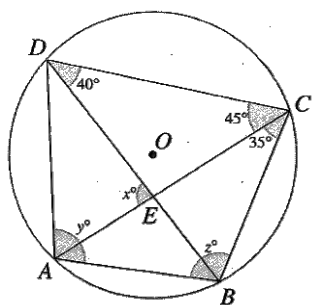
$$\Leftrightarrow 180n = 17 \times 360^\circ + 360^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{6480^\circ}{180} \Leftrightarrow n = 36$$

Logo, trata-se de um polígono regular com 36 lados.

Exemplo 8

Observa a figura e determina x , y e z .



Resolução

$$x = 45^\circ + 40^\circ = 85^\circ$$

A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

$$y = 180^\circ - (35^\circ + 45^\circ) = 100^\circ$$

A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência é 180° .

Actividades de aplicação

13. Calcula a soma dos ângulos internos de um polígono com:

13.1. 8 lados; 13.2. 25 lados; 13.3. 100 lados.

14. Calcula a amplitude de um ângulo interno de um polígono regular com:

14.1. 8 lados; 14.2. 25 lados; 14.3. 100 lados.

15. Determina o número de lados de um polígono sabendo que a soma dos seus ângulos internos é:

15.1. 1440° ; 15.2. 3600° .

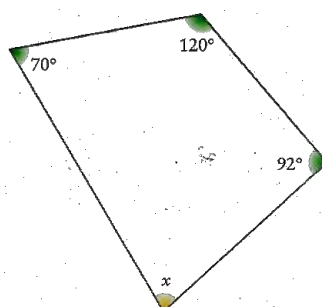
16. Determina o número de lados de um polígono regular sabendo que:

16.1. um ângulo interno mede 171° ;

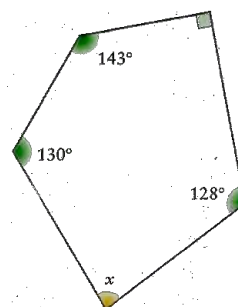
16.2. um ângulo externo mede 5° .

17. Na figura estão representados polígonos irregulares. Determina x .

17.1.

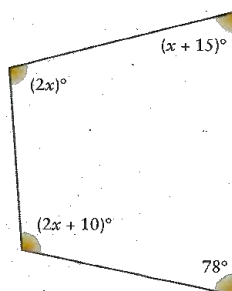


17.2.

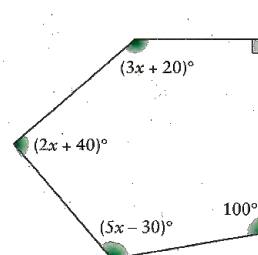


18. Determina x em cada um dos polígonos.

19.1.

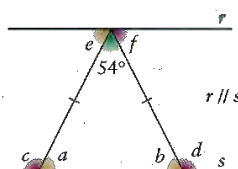


19.2.

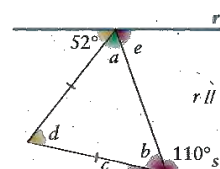


19. Para cada figura, calcula a amplitude dos ângulos representados pelas letras.

19.1



19.2.



$$\widehat{AB} = 2 \times \widehat{ACB} = 70^\circ; \quad \widehat{AD} = 2 \times \widehat{ACD} = 90^\circ$$

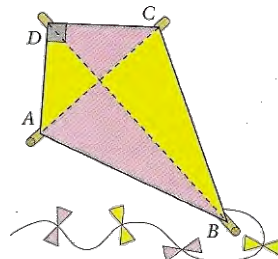
$$\widehat{BC} = 2 \times \widehat{BDC} = 80^\circ;$$

$$\widehat{DC} = 360^\circ - (70^\circ + 90^\circ + 80^\circ) = 120^\circ$$

$$z = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{90^\circ + 120^\circ}{2} = 105^\circ$$

$$\text{Logo, } x = 85^\circ; \quad y = 100^\circ; \quad z = 105^\circ;$$

20. Observa o polígono $[ABCD]$, cujas diagonais $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares.



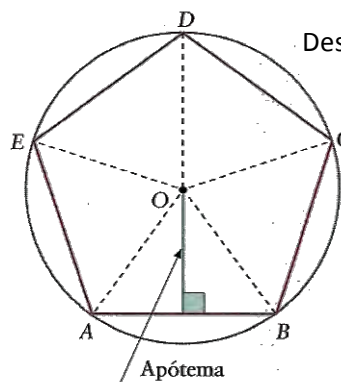
20.1. Atendendo ao número de lados, como classificas o polígono?

20.2. Se $\widehat{ABC} = 30^\circ$ e $\widehat{ADC} = 90^\circ$, qual é a amplitude do ângulo DCB ?

20.3. Pode inscrever-se este polígono numa circunferência? Justifica.

4.6. Área de um polígono regular

Na figura está inscrito numa circunferência um pentágono regular.



Desenhou-se o **apótema** do polígono. Nota que o polígono pode ser dividido em cinco triângulos iguais.

A área da cada triângulo é dada por $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$. A base do triângulo é o

lado (l) do polígono, a altura do triângulo é o apótema (ap) do polígono. O apótema do polígono é a altura do triângulo.

Logo, a área A do pentágono seria:

$$A = 5 \times A_{\Delta}; \quad A = 5 \times l \times \frac{ap}{2} \quad \text{Mas } 5l \text{ é o perímetro do pentágono.}$$

Apótema de uma corda é o segmento da perpendicular tirada do centro da circunferência para a corda.

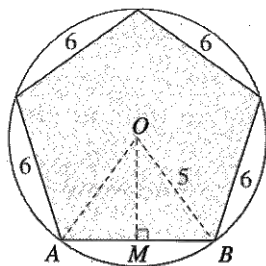
$$\text{Logo, } A = \frac{\text{perímetro}}{2} \times \text{apótema}$$

$$\text{Área do polígono regular} = \frac{\text{perímetro}}{2} \times \text{apótema}$$

Em alternativa à fórmula, é sempre possível dividir um polígono regular de n lados em n triângulos iguais. Calcula-se a área dos triângulos. A área do polígono será a soma das áreas dos triângulos em que foi dividido.

Exemplo 9

Calcula a área do pentágono representado na figura. As medidas são em centímetros.



Resolução

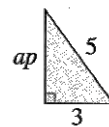
Vamos determinar o apótema do polígono através do teorema de Pitágoras.

$$ap^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ap^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow ap^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ap = \sqrt{16} \Leftrightarrow ap = 4$$

Substituindo na fórmula da área do polígono regular vem:

$$A = \frac{5 \times 6}{2} \times 4 = 15 \times 4 = 60.$$



Logo, a área é 60 cm^2 .

Podemos resolver o problema de outra maneira. Calculamos a área do triângulo $[OAB]$ e, em seguida, multiplicamos por 5.

$$A_{\Delta} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$

$$A_{\text{polígono}} = 5 \times 12 = 60 \text{ cm}^2$$

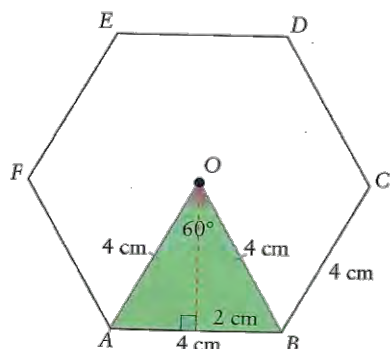
Exemplo 10

A figura representa um prisma hexagonal regular. A aresta da base tem 4 cm de comprimento e a altura é 3 cm.

Determina, com duas casas decimais, o valor do volume do prisma.

Resolução

O volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura. Para determinar a área da base precisamos de calcular a área do hexágono regular de 4 cm de lado.



Fazemos um desenho. $360^\circ : 6 = 60^\circ$
O triângulo [ABC] é equilátero porque os ângulos internos são todos iguais a 60° .

Para determinar o apótema do hexágono vamos aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$4^2 = 2^2 + ap^2 \Leftrightarrow 16 - 4 = ap^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 = ap^2 \Leftrightarrow ap = \sqrt{12} \approx 3,46$$

$$A_{\triangle ABO} = \frac{4 \times 3,46}{2} = 6,92 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \times 6,92 = 41,52 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times h$$

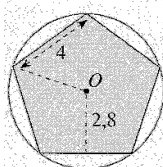
$$V_{\text{prisma}} = 41,52 \times 3 = 124,56$$

O volume do prisma é $124,56 \text{ cm}^3$.

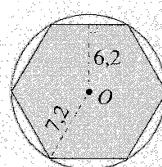
Atividades de aplicação

21. Calcula a área dos seguintes polígonos inscritos na circunferência de centro O. As medidas são em centímetros.

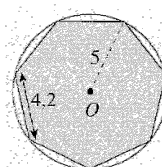
21.1.



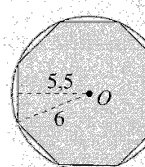
21.2.



21.3.

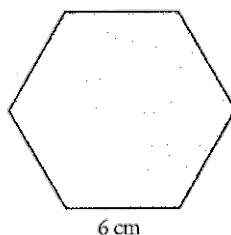


21.4.

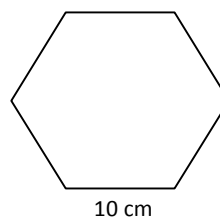


22. Determina, com duas casas decimais, a área de cada um dos polígonos regulares.

22.1.

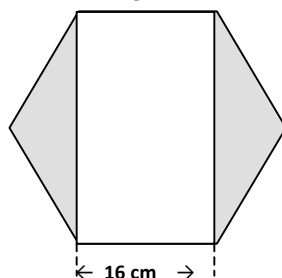


22.2.

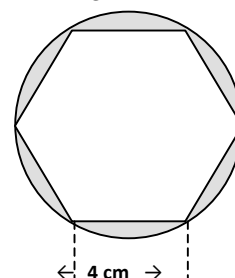


23. Observa as figuras e determina a área das partes sombreadas.

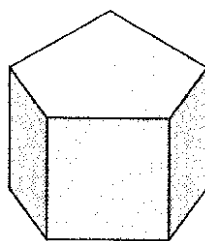
23.1.



23.2.



24. Um pentágono regular tem 8 cm de lado e 5,5 cm de apótema. Determina:



24.1. A amplitude de um ângulo interno do pentágono.

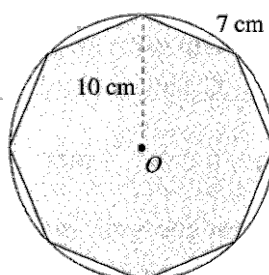
24.2. A área do pentágono.

24.3. Se o pentágono é a base de um prisma regular com 5 cm de altura, determina:

a) a área do prisma;

b) o volume do prisma.

25. O octógono da figura é regular e inscrito na circunferência de centro O. Determina:



25.1. o apótema do octógono;

25.2. a área do octógono;

25.3. a área lateral de um prisma de altura 50 cm e de base igual à do octógono da figura;

25.4. O volume de uma pirâmide com a mesma base e altura do prisma referido em 25.3.

UNIDADE 5 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

5.1. Operações com polinómios. Casos notáveis da multiplicação de polinómios. Decomposição em factores (revisão)

➤ Operações com polinómios. Casos notáveis da multiplicação de polinómios

Vamos recordar ...

Exemplo 1

Escreve sem usar parênteses a seguinte expressão: $(5x + 3)(2x - 1)$

$$\begin{aligned} (5x + 3)(2x - 1) &= 10x^2 - 5x + 6x - 3 && \text{Efectua-se o produto dos polinómios} \\ &= 10x^2 + x - 3 && \text{Reduzem-se os termos semelhantes} \end{aligned}$$

Exemplo 2

Escreve uma expressão simplificada da expressão: $(a + 2)(a^2 - a + 1) - a\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} (a + 2)(a^2 - a + 1) - a\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) &= \\ &= a^3 - a^2 + a + 2a^2 - 2a + 2 - a^3 + \frac{1}{2}a = \\ &= a^2 - \frac{1}{2}a + 2 \end{aligned}$$

Tiram-se os parênteses
Simplificam-se os termos semelhantes

Exemplo 3

Calcula a área de um quadrado que tem de lado $(2a + 3)$

A área do quadrado será igual ou semelhante a $(2a + 3)(2a + 3)$ ou a $(2a + 3)^2$

$$\begin{aligned} (2a + 3)(2a + 3) &= 4a^2 + 6a + 6a + 9 = \\ &= 4a^2 + 12a + 9 \end{aligned}$$

Tiram-se os parênteses
Simplificam-se os cálculos

ou aplica-se a **fórmula do quadrado do binómio**:

$$(2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3 + (3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$$

Exemplo 4

Escreve sem usar parênteses a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} (3x + 2)(3x - 2) &= 9x^2 - 6x + 6x - 4 = \\ &= 9x^2 - 4 \end{aligned}$$

ou aplica-se a **fórmula da diferença de quadrados**:

$$\text{expressão: } (3x + 2)(3x - 2) = (3x)^2 - (2)^2 = 9x^2 - 4$$

➤ Factorização de polinómios



A área do rectângulo maior da figura é dada por:

$$x(x + 5): \text{ expressão factorizada}$$

ou por

$$x^2 + 5x : \text{ expressão não factorizada}$$

Casos notáveis da multiplicação de polinómios

Quadrado do binómio

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$+ x^2$: quadrado do 1º termo

$\pm 2xy$: dobro do produto do 1º pelo 2º

$+ y^2$: quadrado do 2º termo

Diferença de quadrados

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$+ x^2$: quadrado do 1º termo

$- y^2$: quadrado do 2º termo

Factorizar um polinómio é escrevê-lo sob a forma de um produto de factores.

Exemplo 5

Factoriza as seguintes expressões:

5.1. $3x^2 - x$; 5.2. $x^2 - \frac{1}{4}$; 5.3. $x^2 - 8x + 16$; 5.4. $x^3 - x$.

Resolução

5.1. $3x^2 - x = x(3x - 1)$ Aplica-se a propriedade distributiva

5.2. $x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ Aplica-se a fórmula da diferença de quadrados

5.3. $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2 = (x - 4)(x + 4)$ Aplica-se a fórmula do quadrado do binómio

5.4. $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$ Aplica-se a propriedade distributiva seguida da fórmula da diferença de quadrados

5.2. Resolução de equações do 2º grau incompletas. Lei do anulamento do produto (revisão)

A equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ diz-se uma **equação do 2º grau completa** na forma canónica.

Equação do 2º grau na forma canónica é do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau é completa.

A equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ é completa porque nenhum dos seus termos é nulo.

São incompletas, por exemplo, as equações do 2º grau:

$$2x^2 = 0; \quad 4x^2 = 16; \quad x^2 + 3x = 0; \quad x^2 - 4 = 0;$$

Vamos rever como se resolvem equações do 2º grau incompletas.

➤ **Equações do tipo** $ax^2 = 0, \quad a \neq 0$

$$10x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{0}{10} \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{Zero é o único número cujo quadrado é zero.}$$

De um modo geral, tem-se: $ax^2 = 0, \quad a \neq 0$

$$ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad S = \{0\}$$

A equação tem uma solução.

➤ **Equações do tipo** $ax^2 + bx = 0$

$$3x^2 = 6x \quad \text{equação dada}$$

$$3x^2 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \quad \text{O 2º membro é zero. Factoriza-se o 1º membro}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 0 \vee x - 2 = 0 \quad \text{Aplica-se a lei do anulamento do produto}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \quad \text{A equação tem duas soluções: 0 e 2}$$

$$S = \{0, 2\}$$

Actividades de aplicação

1. Calcula e simplifica:

a) $(1 - x)(2x + 3)$; b) $-\frac{1}{2}x\left(3x + \frac{1}{2}\right)$

c) $(-1 + x - 2x)(1 - 3x)$

d) $1 - \frac{x-1}{2} + 3(2x + 3)$

e) $\left(2x - \frac{1}{2}\right) - x\left(1 + \frac{1}{2}x\right)$

2. Calcula e simplifica:

a) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2$; b) $(-x - 3)^2$;

c) $\left(-\frac{a}{2} + 3\right)^2$; d) $\left(\frac{1}{2} - b\right)^2$;

e) $(2x - 1)(2x + 1)$; f) $(-x + 1)(x + 1)$;

g) $\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$

h) $\left(-\frac{1}{3}x - 1\right)\left(-\frac{1}{3}x + 1\right)$

3. Factoriza cada uma das expressões:

a) $x^2 - x$; b) $b - 3b^2$; c) $2x - \frac{x^2}{2}$;

d) $\frac{x}{2} - x^2 + 3x$; e) $x^2 - 16$;

f) $x^2 - \frac{25}{4}$; g) $9 - x^2$; h) $4x^3 - 4x$;

i) $x^2 - 2x + 1$; j) $4x^2 + 12x + 9$;

Lei do anulamento do produto

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

De um modo geral, tem-se:

$$ax^2 + bx = 0, \quad a \neq 0 \quad e \quad b \neq 0$$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a};$$

$$S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

A equação tem sempre duas soluções.

➤ **Equações do tipo** $ax^2 + c = 0, \quad a, c \neq 0$

a) $x^2 - 5 = 0$

b) $4x^2 + 5 = 0$

Resolução

a) $x^2 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$S = \{\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

A equação tem duas soluções simétricas

b) $4x^2 + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = -5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{5}{4} \quad \text{Equação impossível}$$

De um modo geral, tem-se:

$$ax^2 + c = 0, \quad a \neq 0 \quad e \quad c \neq 0$$

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

☐ Se $-\frac{c}{a} > 0$, a equação tem duas soluções simétricas:

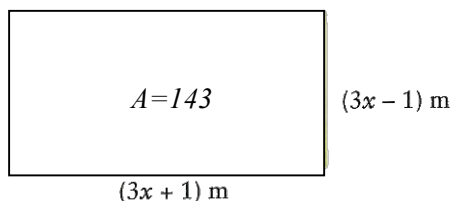
$$\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$$

☐ Se $-\frac{c}{a} < 0$, a equação é impossível.

A equação ou tem duas soluções ou é impossível.

Exemplo 6

Forma uma equação e determina x .



Resolução

Área do rectângulo $A = b \times h$.

Actividades de aplicação

4. Aplica a lei do anulamento do produto para determinar o conjunto-solução da cada uma das equações:

4.1. $(x - 7)(x + 8) = 0$; 4.2. $(3x - 2)(5x + 3) = 0$;

4.3. $x(x - 2)(x + 5) = 0$; 4.4. $3x^2(-x + 1) = 0$;

4.5. $\frac{1}{3}x(2x - 1)(1 - 3x) = 0$.

5. Escreve uma equação que tenha as soluções:

a) 3 e 5; b) $\frac{1}{2}$ e 4; c) $\frac{1}{2}$ e 5.

6. Reduz cada uma das seguintes equações à forma canónica $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

6.1. $2x^2 - x(x - 3) = 0$ 6.2. $\frac{1}{3}x = x^2$

6.3. $(x - 1)^2 = 5$ 6.4. $2 - 3x = -x^2 - 3x$

7. Resolve cada uma das seguintes equações e apresenta o respectivo conjunto- solução.

7.1. $2x^2 - 4x = 0$

7.2. $5x^2 = 8x$

7.3. $(1 - 2x)^2 = 1$

7.4. $x^2 - 36 = 0$

7.5. $2x^2 - 20 = 0$

7.6. $3x^2 + 15 = 0$

7.7. $-5x^2 - 30 = 0$ 7.8.

$(2 - 3x)(2 + 3x) = 4 + x$

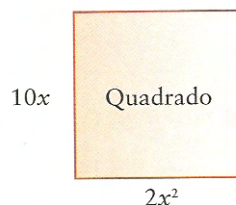
7.9. $2 - 3x^2 = -2x^2 + 1$ 7.10. $3x^3 = x^2$

8. Metade do quadrado de um número é igual ao triplo desse número. De que número se trata? Indica todas as soluções possíveis.

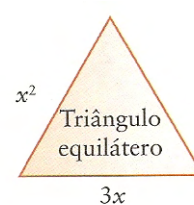
9. O quadrado de um número é igual ao seu quádruplo. De que número se trata? Indica todas as soluções possíveis.

10. Forma uma equação e determina x .

10.1.



10.2.



$$(3x+1)(3x-1)=143 \quad \text{Formar a equação}$$

$$(3x+1)(3x-1)=143 \Leftrightarrow 9x^2-1=143 \quad \text{Escrever a equação na forma canónica}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-1-143=0 \Leftrightarrow 9x^2-144=0$$

Resolver a equação

$$\Leftrightarrow 9x^2=144 \Leftrightarrow x^2=\frac{144}{9} \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$$

A solução negativa da equação não serve para o problema porque se trata de um comprimento.

Logo, $x=4 \text{ m}$.

5.3. Resolução de equações de 2º grau completas. Fórmula resolvente

Considera a equação de 2º grau $(x+2)^2=25$. Esta equação pode resolver-se por dois processos.

1º Processo

$$(x+2)^2=25 \quad \text{Equação dada}$$

$$\Leftrightarrow x+2=\pm\sqrt{25} \quad \text{Aplicação da definição de raiz quadrada.}$$

$$\Leftrightarrow x+2=5 \vee x+2=-5 \quad \text{Separação das raízes}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \vee x=-7 \quad \text{A equação tem duas soluções: 3 e -7}$$

2º Processo

$$(x+2)^2=25 \quad \text{Equação dada}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4=25 \quad \text{Tiram-se os parênteses}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+21=0 \quad \text{Escreve-se a equação na forma canónica.}$$

A equação $x^2+4x+21=0$ é uma **equação do 2º grau completa**, escrita na forma $ax^2+bx+c=0$.

Existe uma fórmula resolvente de equações do 2º grau que permite determinar as soluções de qualquer equação do 2º grau, mas que tem particular interesse para a equação do 2º grau completa.

$$\begin{array}{l} x^2+4x-21=0 \\ \quad \quad \quad \rightarrow c=-21 \\ \quad \quad \quad \rightarrow b=+4 \\ \quad \quad \quad \rightarrow a=1 \quad (x^2=1x^2) \end{array}$$

$$x = \frac{-(+4) \pm \sqrt{(+4)^2 - 4 \times 1 \times (-21)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 10}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4+10}{2} \vee x = \frac{-4-10}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{-14}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -7$$

$$\text{Logo, } S = \{ 7, 3 \}$$

Observa a expressão da fórmula resolvente. Sabemos que, por exemplo: $\sqrt{4}=\pm 2$; $\sqrt{0}=0$; $\sqrt{-3}$ é impossível, dado que não existem raízes quadradas de números negativos.

Ao observarmos a fórmula resolvente encontramos a expressão $\sqrt{b^2-4ac}$. Ora se:

- $b^2-4ac > 0 \rightarrow$ a equação tem duas soluções distintas
- $b^2-4ac = 0 \rightarrow$ a equação tem uma única solução
- $b^2-4ac < 0 \rightarrow$ a equação é impossível

Exemplo 7

Resolve cada uma das seguintes equações aplicando a fórmula resolvente.

$$\mathbf{7.1.} \quad 2x^2-7x+3=0; \quad \mathbf{7.2.} \quad x^2-3x+3=0 \quad \mathbf{7.3.} \quad 4x^2+12x+9=0$$

Fórmula resolvente

Se $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Resolução

7.1. $2x^2 - 7x + 3 = 0$; O primeiro passo antes de aplicar a fórmula resolvente é identificar os coeficientes a , b e c .

$$a = 2; \quad b = -7; \quad c = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7+5}{4} \vee x = \frac{7-5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{2}{4}. \quad \text{Logo, } S = \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

7.2. $x^2 - 3x + 3 = 0$

$$a = 1; \quad b = -3; \quad c = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad -3 < 0 \quad \text{Equação impossível}$$

$$\text{Logo, } S = \{ \}$$

7.3. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

$$a = 4; \quad b = 12; \quad c = 9$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 4 \times 9}}{2 \times 4} \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{12}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

A fórmula resolvente permite resolver qualquer equação do 2º grau, mas nem sempre é o processo mais simples. Observa:

Exemplo 8

Resolve as seguintes equações de 2º grau incompletas.

8.1. $x^2 - 25 = 0$; **8.2.** $3x^2 + x = 0$

Resolução

8.1. $x^2 - 25 = 0$; Usando a fórmula resolvente:

$$a = 1; \quad b = 0; \quad c = -25$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \times 1 \times (-25)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pm 10}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$$

Não usando a fórmula resolvente:

$$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x+5 = 0 \vee x-5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$$

8.2. $3x^2 + x = 0$ Usando a fórmula resolvente:

Actividades de aplicação

11. Aplica a fórmula resolvente para resolver cada uma das equações do 2º grau.

11.1. $x^2 - 4x + 3 = 0$; **11.2.** $x^2 - x - 2 = 0$;

11.3. $x^2 + x - 20 = 0$; **11.4.** $x^2 + 2x + 80 = 0$;

11.5. $x^2 - x + \frac{3}{4} = 0$; **11.6.** $3x^2 - 16x + 5 = 0$;

11.7. $3x^2 = x + 1$; **11.8.** $x(x-3) = -2$.

12. Determina com uma casa decimal o valor das equações:

12.1. $x^2 + 3x = 8x + 12$; **12.2.** $(x-1)^2 = 3x + 3$

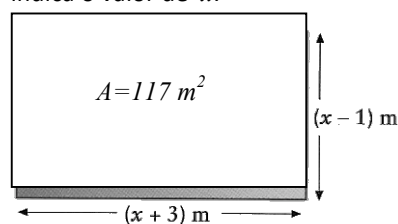
13. Resolve cada uma das equações pelo processo que entenderes ser o mais simples.

13.1. $(2x+3)(2x-3) = 0$; **13.2.** $100x^2 = 0$;

13.3. $(x-7)^2 = 0$; **13.4.** $9x^2 - 1 = 0$;

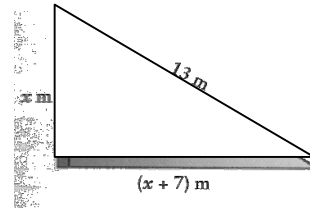
13.5. $-x^2 = 3x$; **13.6.** $x^2 + 2 = 0$;

14. Observa a figura, forma a equação, resolve-a e indica o valor de x .

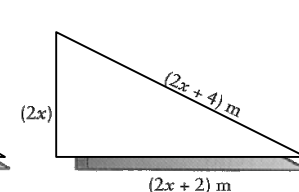


15. Observa os triângulos rectângulos. Aplica o teorema de Pitágoras, forma e resolve a equação e determina x .

15.1.



15.2.



$$a = 3; \quad b = 1; \quad c = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 0}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-1+1}{6} \vee x = \frac{-1-1}{6} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{3}$$

Não usando a fórmula resolvente:

$$3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x + 1 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{1}{3}$$

Conclusão

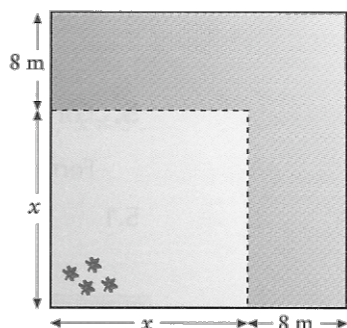
Como se pode observar é muito mais simples resolver as equações de 2º grau incompletas, sem utilizar a fórmula resolvente.

5.4. Resolução de problemas do 2º grau

Na resolução de um problema, fazer um desenho ou um esquema pode ajudar a formar a equação que relacione os dados e a incógnita. Em seguida resolve-se a equação e interpreta-se as suas soluções no contexto do problema. Quando a equação é do 2º grau, diz-se que o problema é do 2º grau.

Exemplo 9

Ampliou-se o terreno de um jardim quadrado aumentando 8 m ao lado. A área do terreno ampliado é 625 m². Qual era o comprimento do lado do quadrado inicial?



Resolução

Seja x o comprimento do lado do quadrado inicial. Como se aumentou 8 m ao lado do quadrado este passou a ter o comprimento de $x + 8$. Então:

$$(x + 8)^2 = 625 \text{ Forma-se a equação que traduz o problema}$$

$$\Leftrightarrow x + 8 = \pm \sqrt{625} \Leftrightarrow x + 8 = \pm 25$$

$$\Leftrightarrow x + 8 = 25 \vee x + 8 = -25$$

$$\Leftrightarrow x = 25 - 8 \vee x = -25 - 8 \Leftrightarrow x = 17 \vee x = -33$$

Resolve-se a equação pelo processo mais simples.

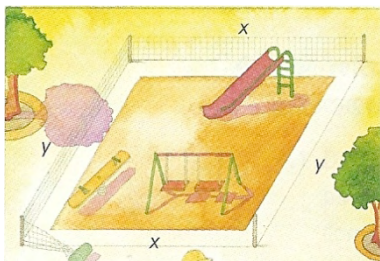
A solução -33 não serve para o problema, pois x representa um número positivo por ser o comprimento do lado do quadrado.

Se $x = 17$, vem $17 + 8 = 25$; $25^2 = 625$.

Logo, o lado do quadrado inicial media 17 m.

Exemplo 10

Um engenheiro tem 130 m de rede e com ela pretende vedar um parque infantil com a forma de um rectângulo de 1000 m² de área. Será que a rede chega para vedar o parque?



Resolução

$x \leftarrow$ largura do parque

$y \leftarrow$ comprimento do parque

$130 \leftarrow$ perímetro do parque

$$P = 2x + 2y$$

$$2x + 2y = 130 \Leftrightarrow y = \frac{130 - 2x}{2} \text{ comprimento do parque}$$

$A =$ largura $\times$ comprimento

$$x \left(\frac{130 - 2x}{2} \right) = 1000 \text{ Forma-se a equação}$$

Actividades de aplicação

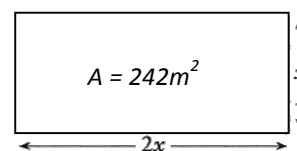
17. A soma de um número com o seu quadrado é 156. Qual é o número? Indica todas as soluções possíveis.

18. A diferença entre o quadrado de um número e 30 é igual ao próprio número. Qual é o número? Indica todas as soluções possíveis.

19. A soma de um número com o quadrado da sua quarta parte é 12. Qual é o número?

20. Se ao quadrado da idade da Eva adicionarmos o triplo da idade dela, e, em seguida, subtrairmos trinta anos, obtemos o dobro da idade da Eva. Quantos anos tem a Eva?

21. Um rectângulo tem de área 242 m².



Se o comprimento é o dobro da largura, determina as dimensões do rectângulo.

$$\Leftrightarrow \frac{130x - 2x^2}{2} = 1000 \Leftrightarrow 130x - 2x^2 = 2000 \Leftrightarrow -2x^2 + 130x - 2000 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 65x - 1000 = 0$$

Escreve-se a equação na forma canónica. Divide-se por 2 os termos da equação para facilitar os cálculos.

$$\Leftrightarrow x = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \times (-1) \times (-1000)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 - 4000}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-65 \pm \sqrt{225}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-65 \pm 15}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-65 + 15}{-2} \vee x = \frac{-65 - 15}{-2}$$

$$x = 25 \vee x = 40$$

A equação tem duas soluções: 25 e 40.

O parque rectangular terá 25 m de largura e 40 m de comprimento.

$$2 \times 25 + 2 \times 40 = 50 + 80 = 130$$

Logo, os 130 m de rede chegam para vedar o parque infantil.

Exemplo 11

Determina dois números inteiros consecutivos cujo produto é 156.

Resolução

São número inteiros consecutivos, por exemplo: 10 e 11 ou -21 e -20. As expressões x e $x+1$ designam números inteiros consecutivos.

$$x(x+1) = 156 \text{ Formar a equação}$$

$$x^2 + x - 156 = 0 \text{ Escrever a equação na forma canónica}$$

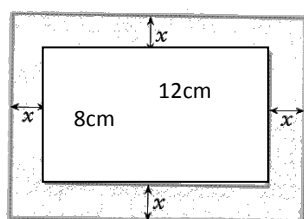
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-156)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{625}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 25}{2}$$

$$x = 12 \vee x = -13$$

Os números poderão ser 12 e 13 ou -13 e -12.

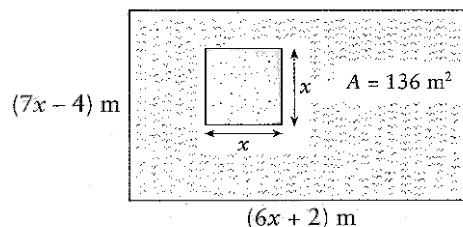
25. Na figura estão representados dois rectângulos estando um contido no outro. A área do rectângulo maior é 140 cm^2 .



De acordo com os dados da figura, determina o perímetro do rectângulo maior.

Actividades de aplicação

22. A figura ao abaixo representa um jardim rectangular. Neste jardim, uma parte é relvada e a outra, com a forma de um quadrado, é destinada a flores. A área da parte relvada é 136 m^2 .



22.1. De acordo com os dados, determina x .

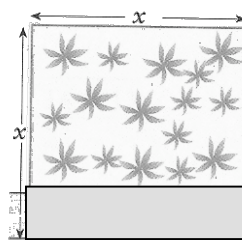
22.2. Qual é o perímetro do jardim?

23. Um grupo de alunos da 9ª classe, decidiu que era tempo de fazer alguma coisa para melhorar o aspecto da sua escola.

O quadrado da décima parte do grupo apanhou o lixo que se encontrava espalhado pelo recinto escolar, a quinta parte dos alunos pintou as paredes da biblioteca e os restantes 15 fizeram um jardim no recinto.

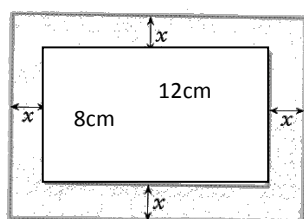
Quantos eram os alunos?

24. De um terreno rectangular retirou-se uma parte para fazer uma estrada como se vê na figura. A largura da estrada é 8 m.



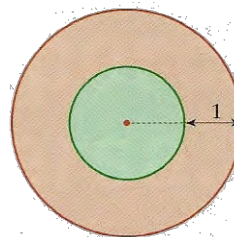
Sabendo que a área da parte restante do terreno é de 768 m^2 , qual foi a área cedida para a construção da estrada?

25. Na figura estão representados dois rectângulos estando um contido no outro. A área do rectângulo maior é 140 cm^2 .



De acordo com os dados da figura, determina o perímetro do rectângulo maior.

26. Na figura estão desenhadas duas circunferências concêntricas (com o mesmo centro).



O raio da circunferência maior tem mais um metro do que o raio da circunferência menor. A razão entre a área do círculo menor e a área do círculo maior é $\frac{1}{4}$.

Qual é o raio da circunferência menor?

27. Calcula a área de um triângulo equilátero com 20 cm de lado. Apresenta o resultado exacto e um valor aproximado às décimas do metro. Sugestão: Traça o triângulo e em seguida traça a sua altura.

UNIDADE 6 – TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RECTÂNGULO

A palavra **trigonometria** resultou da composição de três termos gregos:

tri (três) + *gono*(ângulo) + *metria* (medida)

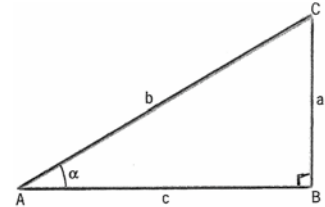
significando **medida de triângulos**. Trata-se, assim, do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

A trigonometria surgiu para resolver problemas de astronomia e é anterior à era cristã. Ao longo dos séculos tem vindo a evoluir e, como é uma ciência que permite calcular distâncias e ângulos que não se podem medir directamente, é aplicada por exemplo, na navegação, na construção e na física.

6.1. Razões trigonométricas de um ângulo agudo

No triângulo rectângulo [ABC] diz-se que:

- [AC] é a hipotenusa;
- [BC] é o cateto oposto ao ângulo α ;
- [AB] é o cateto adjacente ao ângulo α ;



Num triângulo rectângulo para cada ângulo agudo há um cateto oposto e um cateto adjacente.

Na figura, os triângulos [ABI], [ACH], [ADG] e [AEF] são semelhantes: têm em comum o ângulo recto e o ângulo A. Em triângulos semelhantes a ângulos iguais opõem-se lados proporcionais.

Assim, pode dizer-se, por exemplo que $\overline{BI}$ está para $\overline{AI}$, assim como $\overline{CH}$ está para $\overline{AH}$, assim como $\overline{DG}$ está para $\overline{AG}$, assim como $\overline{EF}$ está para $\overline{AF}$ e escreve-se:

$$\frac{BI}{AI} = \frac{CH}{AH} = \frac{DG}{AG} = \frac{EF}{AF} = k, \quad (k \text{ constante})$$

Isto quer dizer que se se mantiver a amplitude do ângulo α , a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa, não depende do triângulo que se escolhe, pois ela não depende dos comprimentos dos lados dos triângulos mas sim da amplitude do ângulo α . Relativamente ao ângulo α , são constantes as razões entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento da hipotenusa. A esta constante dá-se o nome de **seno de ângulo α** .

$$\text{seno } \alpha = \sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Relativamente ao ângulo α são também constantes as razões entre o comprimento do cateto adjacente e o comprimento da hipotenusa.

A esta constante chama-se **co-seno do ângulo α** .

$$\text{Co-seno } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

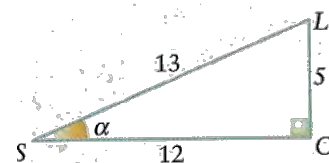
Ainda são constantes as razões entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente ao ângulo α . A esta constante chama-se **tangente do ângulo α** .

$$\text{tangente } \alpha = \tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$

A estas razões chamamos **razões trigonométricas do ângulo agudo α** .

Para o triângulo [SOL], tem-se:

$$\tan \alpha = \frac{5}{12}; \quad \sin \alpha = \frac{5}{13}; \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}$$



Nota:

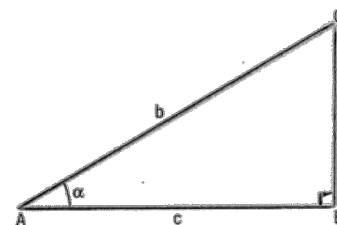
Nas definições usa-se cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa em lugar de *comprimento de ...* Por exemplo, a hipotenusa de um triângulo é um segmento de recta, mas também se chama hipotenusa ao comprimento desse segmento.

Sendo $[ABC]$ um triângulo rectângulo em B e α a amplitude de um dos ângulos agudos, definem-se as **razões trigonométricas** seno α ($\sin \alpha$), co-seno α ($\cos \alpha$) e tangente de α ($\tan \alpha$) do seguinte modo:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{a}{c}$$



Neste triângulo:

- a é o cateto oposto a α ;
- c é o cateto adjacente a α ;
- b é a hipotenusa do triângulo.

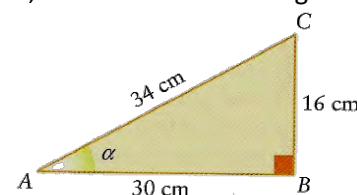
Exemplo 1

Calcula um valor exacto e um valor aproximado às centésimas para a tangente, seno e co-seno do ângulo α .

Resolução

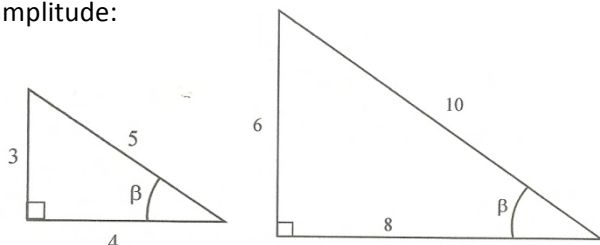
$$\tan \alpha = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}; \quad \tan \alpha = 0,53 \quad ; \quad \sin \alpha = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}; \quad \sin \alpha = 0,47$$

$$\cos \alpha = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}; \quad \cos \alpha = 0,88$$



➤ Tabelas trigonométricas e calculadora

Consideremos um triângulo rectângulo, cujos comprimentos dos lados sejam 3, 4 e 5 centímetros. Como, dois triângulos são semelhantes se tiverem lados correspondentes proporcionais, um triângulo cujos comprimentos dos lados sejam, 6, 8 e 10 centímetros, é um triângulo semelhante ao inicial. Sendo semelhantes, os seus ângulos têm a mesma amplitude:



Calculemos as razões trigonométricas para o ângulo β , em ambos os triângulos:

$$\sin \beta = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\sin \beta = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\cos \beta = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\cos \beta = \frac{8}{10} = 0,8$$

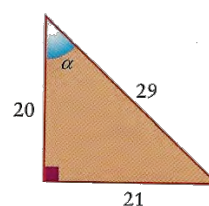
$$\tan \beta = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\tan \beta = \frac{6}{8} = 0,75$$

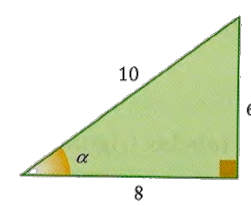
Actividades de aplicação

1. Para cada um dos ângulos escreve as razões trigonométricas $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$.

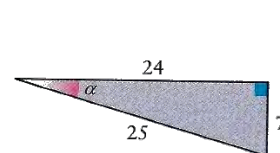
1.1.



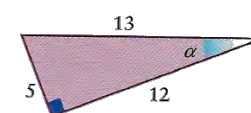
1.2.



1.3.

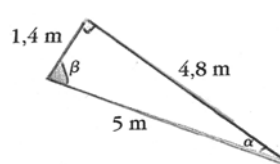


1.4.

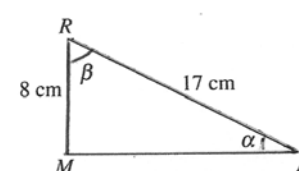


2. Para cada um dos triângulos indica, com duas casas decimais, as razões trigonométricas dos ângulos agudos α e β

2.1.



2.2.



Ou seja, obtivemos os mesmos valores nos dois triângulos, isto quer dizer que, as razões trigonométricas não dependem do comprimento dos lados dos triângulos rectângulos, dependem apenas da amplitude do ângulo considerado.

Devido a este facto, existem tabelas onde se podem encontrar os valores das razões trigonométricas para um determinado ângulo, como as que se encontram no final deste texto de apoio.

Observa o excerto de uma tabela trigonométrica:

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002

Da leitura da tabela conclui-se, por exemplo, que:
 $\sin 30^\circ = 0,5000$; $\cos 30^\circ = 0,8660$; $\tan 30^\circ = 0,5774$

Também se pode ler a tabela ao contrário, ou seja, dada a razão trigonométrica, encontrar o ângulo.

Por exemplo, qual será a amplitude do ângulo α se $\cos \alpha = 0,8192$?

Observando a tabela vem: $\alpha = 35^\circ$.

Hoje em dia só se usam as tabelas se não tivermos uma calculadora que permita determinar as razões trigonométricas (calculadora científica ou gráfica). Para usar a calculadora começa por verificar se ela está a trabalhar em graus (pode estar a trabalhar em radianos).

sin 30	0,5
--------	-----

Para calcular uma razão trigonométrica de um ângulo na calculadora:

Conhecida a razão trigonométrica de um ângulo pode-se conhecer o ângulo.

Sabendo que $\sin \alpha = 0,5592$, qual será a amplitude do ângulo α ?

Na calculadora

$\sin^{-1}(0,5592)$
34.00049045

Logo, $\alpha \approx 34^\circ$

A calculadora também permite conhecer a razão trigonométrica de um ângulo, conhecida outra razão trigonométrica.

Exemplo 2

Determina $\cos \alpha$, sabendo que $\tan \alpha = 2,8$

Resolução

Na calculadora:

$$\tan \alpha = 2,8 ; \quad \alpha \approx (70,34617)^\circ \quad \text{Determina-se } \alpha$$

$$\sin(70,34617)^\circ \approx 0,94174 \quad \text{Determina-se } \sin \alpha$$

Logo, $\sin \alpha \approx 0,94$ (2 c. d.).

Actividades de aplicação

3. Indica:

a) $\sin 27^\circ$ b) $\cos 78^\circ$ c) $\tan 39^\circ$ d) $\cos 2^\circ$

4. Usa a calculadora para determinar o ângulo α em 1.1. ; 1.2. ; 1.3. e 1.4. .

5. Copia e completa:

5.1. $\sin 28^\circ = \dots$

5.2. $\cos \dots = 0,5$

5.3. $\tan 12^\circ = \dots$

5.4. $\tan 45^\circ = \dots$

5.5. $\sin 45^\circ = \dots$

5.6. $\cos \dots = 0,707$

6. Já observas-te que os valores do seno e do co-seno são menores que a unidade? Será por acaso?

6.1. Entre que valores pode variar o seno e o co-seno de um ângulo agudo?

6.2. Porque será que a tangente de 45° é 1?

6.2. Resolução de triângulos rectângulos

Resolver um triângulo rectângulo é determinar os ângulos e os lados desconhecidos a partir do conhecimento de determinados ângulos e lados.

Exemplo 3: Conhecidos um cateto e a hipotenusa

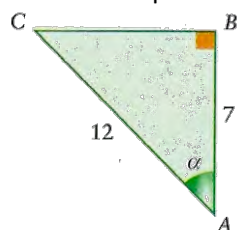
De um triângulo $[ABC]$ rectângulo em B sabe-se que $\overline{AB} = 7$ cm e $\overline{AC} = 12$ cm.

3.1. Determina, em número inteiro de graus, a amplitude de cada um dos ângulos agudos do triângulo.

3.2. Determina o terceiro lado do triângulo.

Resolução

Começamos por desenhar o triângulo:



3.1. Conhecemos a hipotenusa e o cateto adjacente a α . A razão trigonométrica que relaciona a hipotenusa e o cateto adjacente a um ângulo agudo é o co-seno. Então:

$$\cos \alpha = \frac{7}{12} \quad \text{Com esta razão, usando a calculadora ou consultando a tabela:}$$

$$\alpha \approx 54^\circ ; \quad \beta = (90^\circ - 54^\circ) = 36^\circ$$

$\cos^{-1}(7 : 12)$
54.31466529

3.2. O terceiro lado, $\overline{BC}$, é o cateto oposto ao ângulo α .

Sabendo que $\alpha = 54^\circ$, $\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{12}$;

$$\overline{BC} = 12 \times \sin 54^\circ \Leftrightarrow \overline{BC} = 9,708203933.$$

Podes inserir directamente na calculadora $12 \times \sin 54^\circ$, ou, ver na tabela o valor de $\sin 54^\circ$ e multiplicar esse valor por 12.

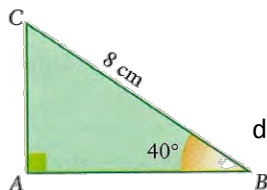
Donde: $\overline{BC} = 9,7 \text{ cm}$.

Exemplo 4: Conhecido um lado e um ângulo

De um triângulo $[ABC]$ rectângulo em A sabe-se que o comprimento da hipotenusa é 8 cm e $\hat{B} = 40^\circ$. Determina:

4.1. a amplitude do ângulo C;

4.2. o comprimento de cada um dos catetos.



Resolução

4.1. Sabemos que um dos ângulos agudos do triângulo tem de amplitude 40° . Então, o outro ângulo agudo tem de amplitude $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

$$\hat{C} = 50^\circ$$

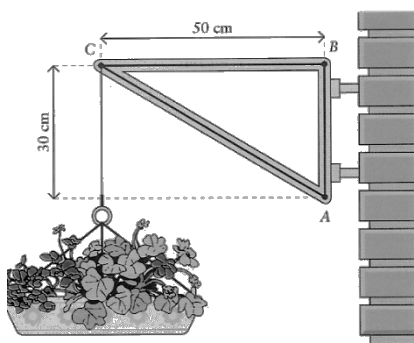
4.2. Como conhecemos a hipotenusa, vamos usar as razões trigonométricas $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.

- $\sin 40^\circ = \frac{\overline{AC}}{8} \Leftrightarrow \overline{AC} = 8 \times \sin 40^\circ \Leftrightarrow \overline{AC} = 5,142300877$
- $\cos 40^\circ = \frac{\overline{AB}}{8} \Leftrightarrow \overline{AB} = 8 \times \cos 40^\circ \Leftrightarrow \overline{AB} = 6,128355545$

Logo, $\overline{AC} \approx 5,1 \text{ cm}$ e $\overline{AB} \approx 6,1 \text{ cm}$.

Exemplo 5: conhecidos dois catetos

Na parede de uma casa encontramos um suporte de um vaso de flores com a forma de um triângulo rectângulo como se mostra na figura. De acordo com os dados da figura, determina a amplitude do ângulo $\hat{BAC}$.



como se mostra na figura. De acordo com os dados da figura, determina a amplitude do ângulo $\hat{BAC}$.

Resolução

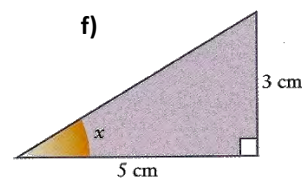
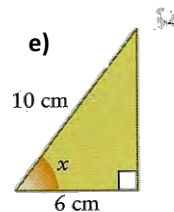
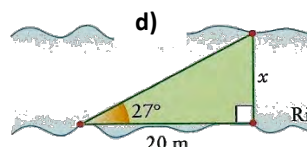
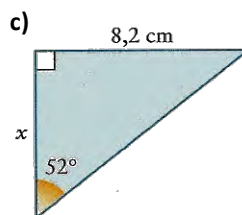
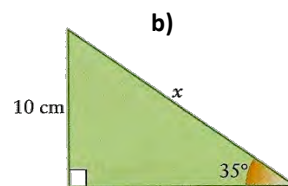
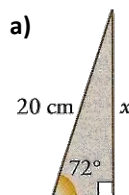
Conhecemos os dois

catetos. Logo, vamos usar a razão trigonométrica $\tan \alpha$.

$$\tan \hat{BAC} = \frac{50}{30}; \quad \tan^{-1}(50 \div 30) \approx 59^\circ. \text{ Logo, } \hat{BAC} \approx 59^\circ$$

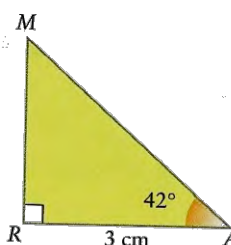
Actividades de aplicação

7. O conhecimento das razões trigonométricas permite determinar comprimentos e ângulos. Determina x .

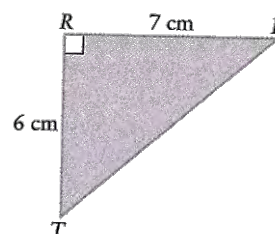


8. Para cada um dos triângulos determina os elementos desconhecidos.

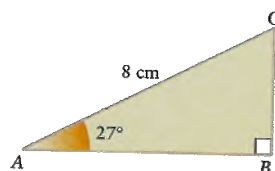
8.1.



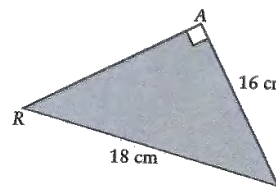
8.2.



8.3.

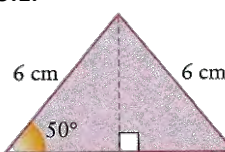


8.4.

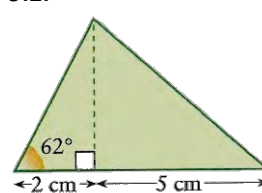


9. Determina o perímetro de cada um dos seguintes triângulos.

9.1.



9.2.

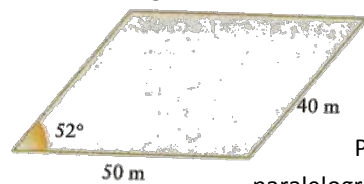


6.3. Aplicação da trigonometria na resolução de problemas de matemática e da vida real

A resolução de muitos problemas de geometria é facilitada com o conhecimento da trigonometria.

Exemplo 6

Observa a figura e determina a área do paralelogramo.

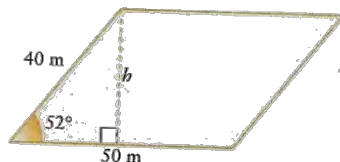


Resolução

Para determinar a área de um paralelogramo é necessário conhecer a

base (50 m) e a altura, h .

Tracemos a altura h no paralelogramo:



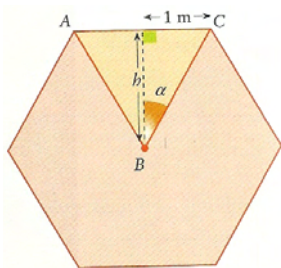
A altura é o cateto oposto ao ângulo de amplitude 52° .

Então:

$$\sin 52^\circ = \frac{h}{40} \Leftrightarrow h = 40 \times \sin 52^\circ; \quad A = 50 \times h;$$

$$A = 50 \times \underbrace{40 \times \sin 52^\circ}_h. \quad \text{Logo, } A \approx 1576 \text{ m}^2$$

Exemplo 7



A figura representa um hexágono regular com 2 m de lado. Qual é a área do hexágono?

Resolução

$$360^\circ : 6 = 60^\circ$$

Calcula-se a amplitude do ângulo ABC .

$$60^\circ : 2 = 30^\circ$$

Determina-se α .

Para calcular a área do hexágono é necessário saber o valor do apótema h .

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{h} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\tan 30^\circ} \quad h \text{ é o apótema do hexágono.}$$

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{\text{perímetro}}{2} \times \text{apótema}$$

$$A = \frac{6 \times 2}{2} \times \frac{1}{\tan 30^\circ} \Leftrightarrow A = \frac{6}{\tan 30^\circ} \Leftrightarrow A \approx 10,3923$$

Logo, a área do hexágono é aproximadamente $10,39 \text{ m}^2$.

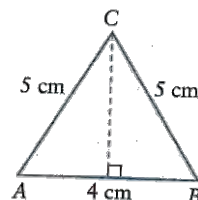
➤ Determinação de distâncias inacessíveis

Observa as figuras que representam uma situação da vida real onde se está a utilizar um teodolito para medir o ângulo de elevação do cimo da árvore.

O António pode determinar a altura de árvores medindo a distância, $\overline{AB}$, que o separa da mesma e o ângulo de elevação do cimo da árvore.

Actividades de aplicação

10. $[ABC]$ é um triângulo isósceles. Determina, com valor arredondado às unidades, a amplitude dos ângulos do triângulo.



11. Determina a área: (sugestão: faz um desenho do polígono como se mostra no exemplo 7)

11.1. de um hexágono regular com 5 m de lado;

11.2. de um pentágono regular com 6 m de lado;

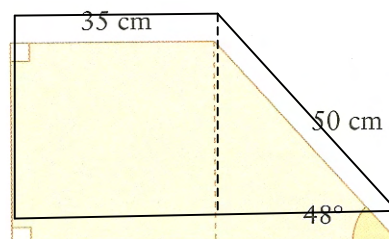
11.3. de um octógono regular com 12 m de lado.

12.

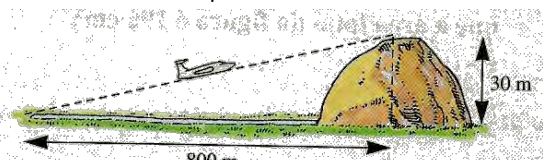
$[ABCD]$ é um rectângulo de diagonal $[BD]$.

Sabendo que $\overline{BD} = 10 \text{ m}$, determina o perímetro do rectângulo.

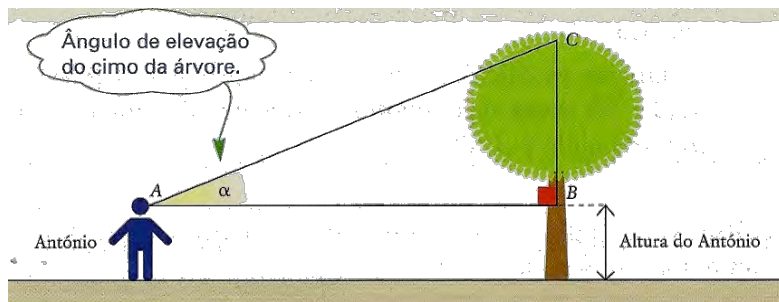
13. Observa a figura e, de acordo com os dados, determina a área do trapézio. Apresenta o resultado com duas casas decimais.



14. Com que ângulo de inclinação deve descolar o avião de forma a ultrapassar a montanha?



O António tem 1,8 m de altura, a sua distância a B é 6 m e o ângulo de elevação, que mediu usando um teodolito, é de 42° .
Qual será a altura da árvore?

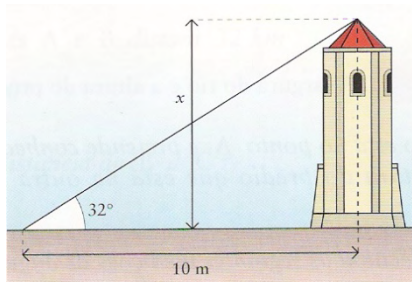


A altura da árvore será igual $\overline{BC}$ mais a altura do António. Sendo $\overline{AB} = 6\text{ m}$, e $\alpha = 42^\circ$, usando $\tan \alpha$:

$$\tan 42^\circ = \frac{\overline{BC}}{6} \Leftrightarrow \overline{BC} = 6 \times \tan 42^\circ \Leftrightarrow \overline{BC} \approx 5,4024;$$

$5,4 + 1,8 = 7,2$. A árvore tem, aproximadamente, 7,2 m de altura.

Exemplo 8



De acordo com os dados da figura calcula a altura da torre.

Resolução

Considerando os dados, verificamos

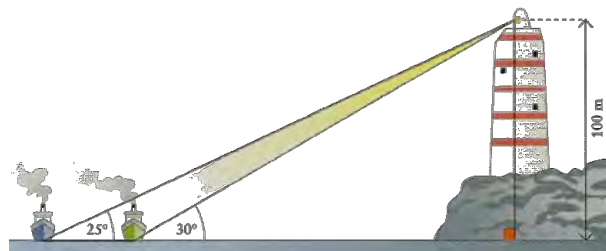
que conhecemos um cateto e pretendemos saber o comprimento do outro, daí vamos usar $\tan \alpha$.

$$\tan 32^\circ = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \times \tan 32^\circ \Leftrightarrow x \approx 6,2487$$

A altura da torre é, aproximadamente, 6,2 m.

Exemplo 9

Observa a figura.



Determina a distância entre os barcos.

Resolução

O problema está relacionado com os catetos, portanto, vamos usar $\tan$ de 25° e $\tan$ de 30° .

$x \leftarrow$ distância do 1º barco à base do farol;

$y \leftarrow$ distância do 2º barco à base do farol;

$$\begin{cases} \tan 25^\circ = \frac{100}{x} \\ \tan 30^\circ = \frac{100}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\tan 25^\circ)x = 100 \\ (\tan 30^\circ)y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{100}{\tan 25^\circ} \\ y = \frac{100}{\tan 30^\circ} \end{cases}$$

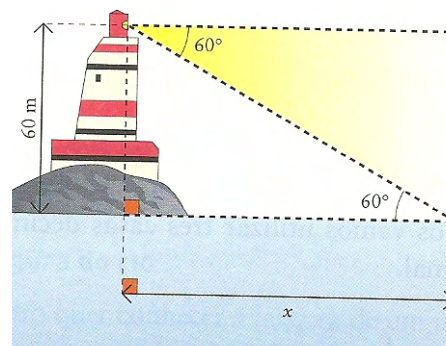
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 214,45 \\ y \approx 173,2 \end{cases}$$

$214,45 - 173,2 = 41,25$ m. A distância entre os dois barcos é, aproximadamente, 41 m.

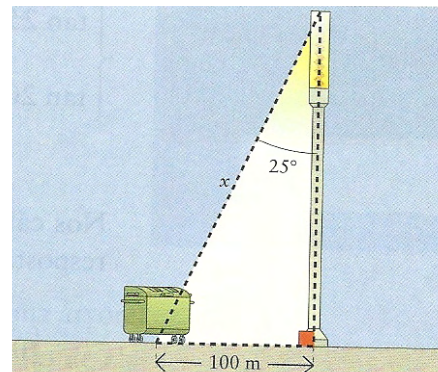
Actividades de aplicação

15. Observa as figuras e para cada uma delas determina x . Apresenta a resposta com uma casa decimal.

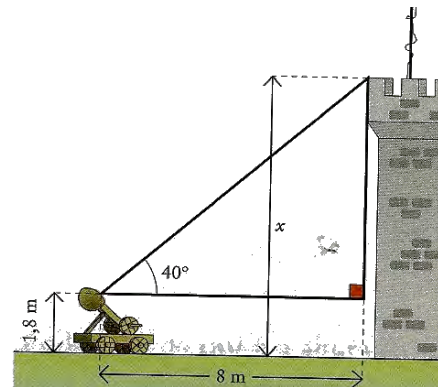
15.1.



15.2.



15.3.



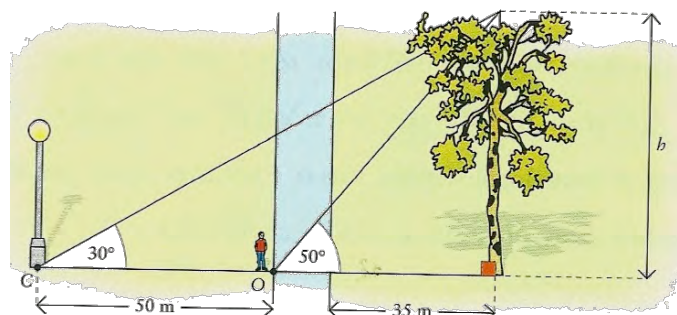
Nota: Nos cálculos intermédios, sempre que possível, não deves proceder a arredondamentos. Deves conservar o valor exacto, como por exemplo $\tan 25^\circ$, e introduzir na calculadora esse dado.

Se não tiveres calculadora científica e utilizares a tabela trigonométrica, nos cálculos intermédios, deves utilizar o arredondamento com as quatro casas decimais da tabela.

Não te esqueças que normalmente o resultado final não é um valor exacto, pelo que deves utilizar o símbolo $\approx$ (aproximadamente igual a).

Exemplo 10

O Valdemar quer conhecer a largura de um rio e a altura de uma árvore. Colocou-se na berma do rio (posição O), mediu o ângulo de elevação do topo da árvore e obteve 50° . Afastou-se 50 m e na sua posição C mediu novamente o ângulo de elevação do topo da árvore, obtendo 30° .



Qual é a largura do rio? E a altura da árvore? Apresenta a resposta em número inteiro de metros. Nos cálculos auxiliares utiliza quatro casas decimais.

Resolução

$x \leftarrow$ largura do rio; $h \leftarrow$ altura da árvore;

$x+35 \leftarrow$ distância do ponto O à árvore;

$50 + x+35 = x + 85 \leftarrow$ distância do ponto C à árvore;

$$\begin{cases} \tan 50^\circ = \frac{h}{x+35} \\ \tan 30^\circ = \frac{h}{x+85} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 50^\circ (x+35) = h \\ \tan 30^\circ (x+85) = h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,1918x + 41,713 = h \\ 0,5774x + 49,079 = h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5774x + 49,079 = 1,1918x + 41,713 \end{cases} \Leftrightarrow$$

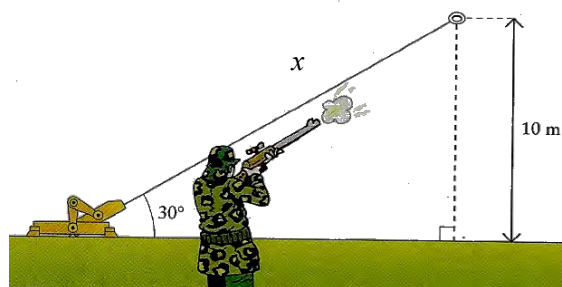
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6144x = -7,366 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,1918 \times 11,989 + 41,713 = h \\ x = 11,989 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 56,001 \\ x = 11,989 \end{cases}$$

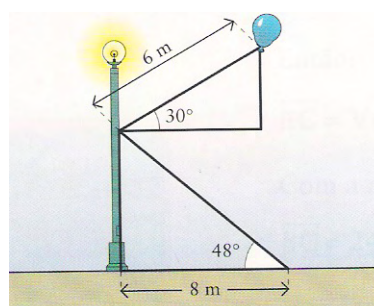
A largura do rio é, aproximadamente, 12 m. A altura da árvore é, aproximadamente, 56 m.

Actividades de aplicação

16. Num concurso de tiro aos pratos, um prato foi lançado segundo um ângulo de 30° com o solo. Sabendo que o prato foi atingido a uma altura de 10 m, qual a distância que percorreu?

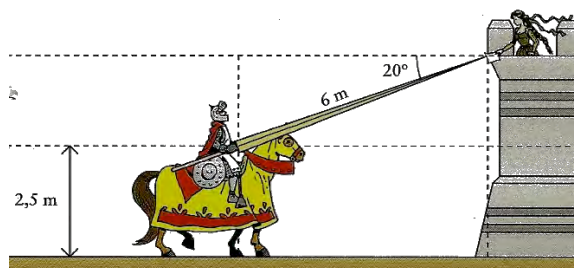


17.

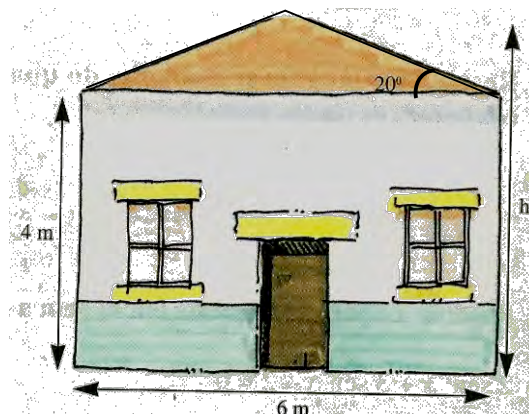


De acordo com os dados da figura determina a altura a que se encontra o balão.

18. Um cavaleiro com uma vara de 6 m entrega à sua amada uma carta. O cavaleiro é visto pela dama segundo um ângulo de depressão de 20° . Determina a altura a que se encontra a mão da dama.



19. De acordo com os dados da figura determina a altura total da casa.



6.4. Relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo

No triângulo [ABC] rectângulo em A tem-se:

$$\sin \alpha = \frac{c}{a}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{a}; \quad \tan \alpha = \frac{c}{b}.$$

➤ Calculemos $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \tan \alpha.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

➤ Calculemos $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$

$$\begin{aligned} (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ &= \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \leftarrow \text{teorema de Pitágoras}$$

Logo:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

ou

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



Fórmula fundamental da trigonometria

A fórmula fundamental da trigonometria relaciona o seno de um ângulo com o co-seno do mesmo ângulo. Conhecido o seno podemos determinar o co-seno e vice-versa.

Exemplo 11

Seja $\sin \alpha = 0,6$ e α um ângulo agudo. Determina:

11.1. $\cos \alpha$; **11.2.** $\tan \alpha$;

Resolução

11.1. Como conhecemos $\sin \alpha$, podemos determinar $\cos \alpha$ pela fórmula fundamental da trigonometria.

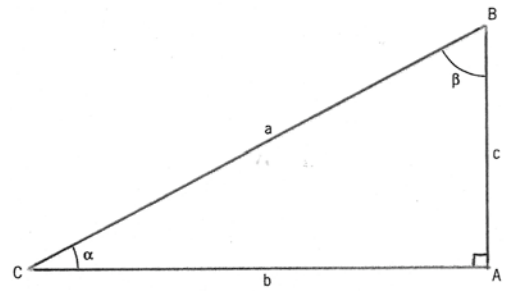
$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \Leftrightarrow 0,6^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &= 1 - 0,36 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 0,64 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \pm \sqrt{0,64} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm 0,8 \end{aligned}$$

Como α é um ângulo agudo, $\cos \alpha$ é positivo e vem $\cos \alpha = 0,8$.

11.2. Sabemos agora que $\sin \alpha = 0,6$ e $\cos \alpha = 0,8$. Então:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Logo, $\tan \alpha = 0,75$.



Actividades de aplicação

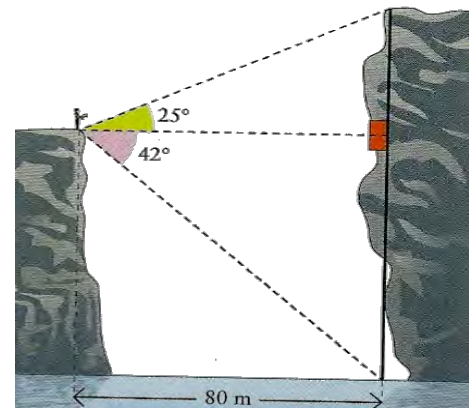
20. Sabe-se $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e que α é um dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo. Determina o valor exacto de:

20.1. $\sin \alpha$; **20.2.** $\tan \alpha$.

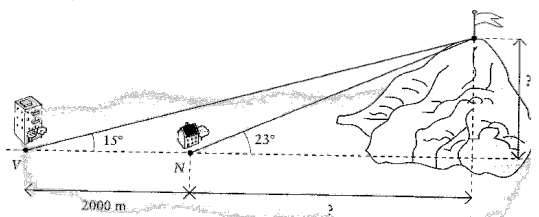
21. Sabe-se $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Determina, com duas casas decimais:

21.1. $\cos \alpha$; **20.2.** $\tan \alpha$.

22. De acordo com os dados da figura determina a altura da falésia.



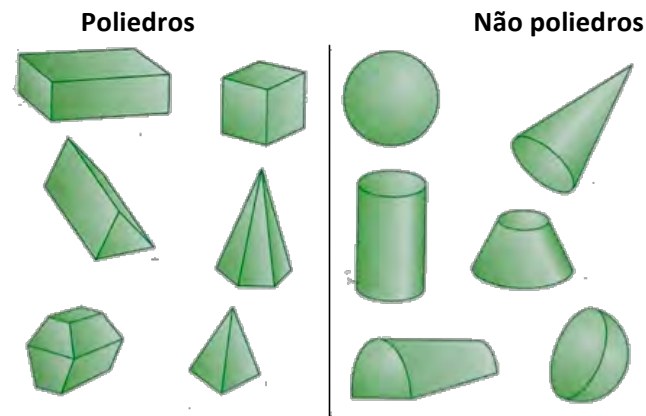
23. Da sua casa o Valter via o cume da montanha com um ângulo de elevação de 15° . Andou até à casa da Noémia que ficava a 2000 m e via agora o cume da montanha segundo um ângulo de 23° . Determina a altura da montanha e a distância da casa da Noémia à montanha. Apresenta o resultado em metros com aproximação às unidades.



UNIDADE 7 – ESPAÇO – OUTRA VISÃO

7.1. Sólidos geométricos (revisão)

Os sólidos classificam-se em poliedros e não-poliedros. Poliedros são os sólidos que são limitados apenas por superfícies planas. Os elementos de um poliedro são as faces, as arestas e os vértices. As faces de um poliedro são polígonos.



➤ Áreas e volumes de sólidos geométricos (revisão)

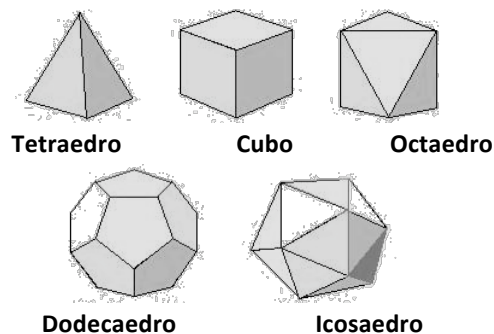
Na 7ª classe já aprendeste a calcular as áreas e os volumes de alguns sólidos. A área da superfície de um sólido é igual à soma das áreas das suas superfícies (área lateral + área das bases).

Relembra as fórmulas dos volumes de alguns sólidos.

Sólidos Platónicos

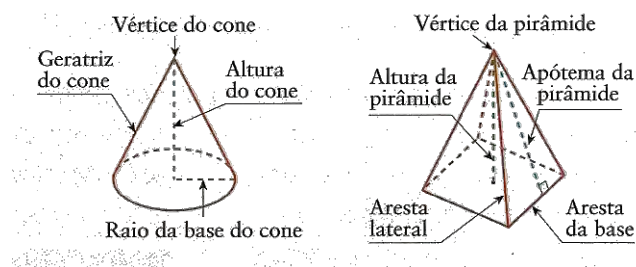
Há mais de 2500 anos que os Gregos descobriram que só há cinco poliedros regulares (poliedros cujas faces são todas geometricamente iguais). A sua designação deve-se a Platão, que os descobriu em cerca de 400 a.C..

São os seguintes os sólidos platónicos:



Volumes de sólidos

Cubo	Paralelepípedo	Prisma	Cilindro	Pirâmide	Cone
$V = a^3$	$V = a \times b \times c$	$V = A_{base} \times h$		$V = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h$	



Exemplo 1

Determina com uma casa decimal a área lateral, a área total e o volume de:

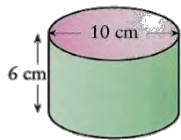
- 1.1. um cilindro com 10 cm de diâmetro e altura 6 cm;
- 1.2. um prisma pentagonal com 4 cm de altura e 3 cm de aresta da base.

Actividades de aplicação

1. Calcula o volume e a área total dos seguintes sólidos:

- 1.1. um cubo com 5 cm de aresta;
- 1.2. um paralelepípedo com 6 cm de comprimento, 4 cm de largura e 2 cm de altura;
- 1.3. um prisma regular com 15 cm de altura em que as bases são triângulos com 4 cm de lado;
- 1.4. um cilindro com 20 cm de diâmetro e 40 cm de altura.

Resolução



$$\overline{AB} = \text{Perímetro da base} = (2 \times \pi \times r)$$

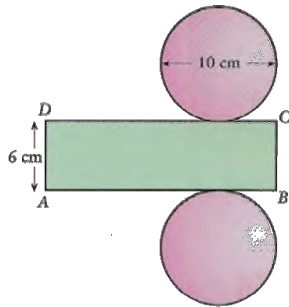
$$\overline{AB} = 10\pi \text{ cm} \quad \text{raio} = 5 \text{ cm}$$

1.1.

Área lateral da superfície do cilindro:

$$A_l = \underbrace{10 \times 3,14}_{P_b} \times \underbrace{6}_h \approx 188,4 \text{ cm}^2$$

Área total da superfície do cilindro:

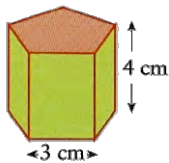


$$A_t = \underbrace{10 \times 3,14 \times 6}_{\text{Área lateral}} + 2 \times \underbrace{3,14 \times 5^2}_{\text{Área da base}}$$

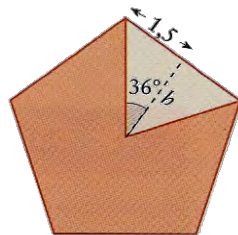
$$\approx 345,4 \text{ cm}^2$$

Volume do cilindro: $V = \underbrace{3,14 \times 5^2}_{\text{Área da base}} \times \underbrace{6}_h = 471 \text{ cm}^3$

1.2.



Recorda:



$$360^\circ : 5 = 72$$

$$72^\circ : 2 = 36^\circ$$

$$\tan 36^\circ = \frac{1,5}{h}$$

$$h \approx 2,065 \text{ cm}$$

Área lateral da superfície do prisma:

$$A_l = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^2$$

Área de uma face

Área total da superfície do prisma

$$A_t = 60 + 2 \times 5 \times \frac{3 \times 2,065}{2} = 91,0 \text{ cm}^2$$

Volume do prisma

$$V = 5 \times \frac{3 \times 2,065}{2} \times 4 = 62,0 \text{ cm}^3$$

altura

Área da base

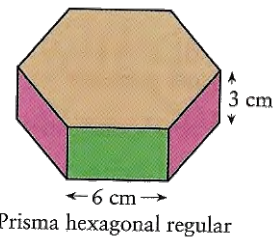
Exemplo 2

Determina, com uma casa decimal, a área lateral, a área total e o volume de um cone com 3 cm de raio da base e 8 cm de altura.

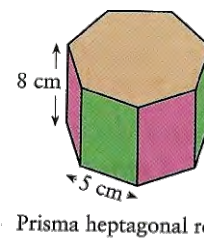
Actividades de aplicação

2. Calcula o volume dos seguintes prismas regulares:

2.1.

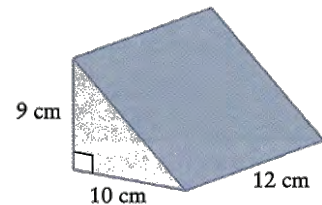


2.2.

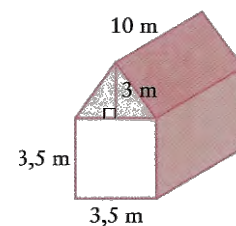


3. Determina o volume e a área total da superfície de cada um dos sólidos.

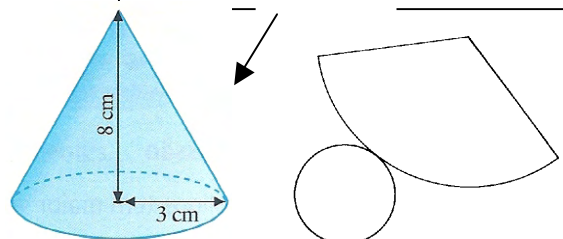
3.1.



3.2.



geratriz



Resolução

Área lateral da superfície do cone

Como podes ver na planificação do cone a base da parte lateral é igual ao perímetro da base que é um círculo. Então $A_l = \frac{P_b}{2} \times g$.

Há necessidade de calcular a geratriz que se vai designar por x .

Aplica-se o Teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 8^2 + 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 73 \Leftrightarrow x = \sqrt{73}$$

$$A_l = \frac{2\pi \times 3}{2} \times \sqrt{73} \approx 80,5 \text{ cm}^2$$

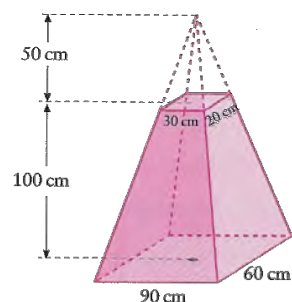
Área total da superfície do cone

$$A_t = A_l + \pi r^2 = 80,5 + 3,14 \times 9 \approx 108,76 \text{ cm}^2$$

Volume do cone

$$V = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times 3,14 \times 9 \times 8 \approx 75,36 \text{ cm}^3$$

Exemplo 3



Para fazer uma floreira cortou-se uma parte a uma pirâmide, como se mostra na figura. De acordo com os dados determina a capacidade, em litros, da floreira.

Resolu

Nota:
 $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$

Volume, V_1 , da pirâmide completa:

$$V_1 = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times 90 \times 60 \times 150 = 270\,000 \text{ cm}^3$$

Volume, V_2 , da pirâmide que se cortou:

$$V_2 = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times 30 \times 20 \times 50 = 10\,000 \text{ cm}^3$$

$$V_1 - V_2 = 270\,000 - 10\,000 = 260\,000 \text{ cm}^3$$

$$260\,000 \text{ cm}^3 = 260 \text{ dm}^3$$

Como o $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$, a capacidade da floreira é de 260 litros.

7.2. Volume da esfera. Área da superfície esférica

Há vários objectos que bem conheces com forma esférica, como por exemplo, uma bola de futebol.

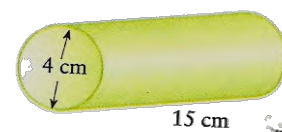
Esfera de centro C e raio r é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância r menor ou igual ao raio.

Chama-se superfície esférica ao conjunto de pontos do espaço que estão à distância r de um ponto C .

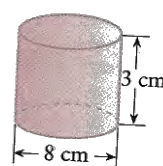
Actividades de aplicação

4. Determina o volume de cada um dos sólidos.

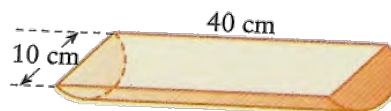
4.1.



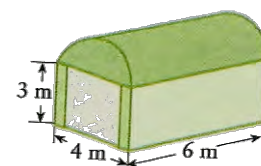
4.2.



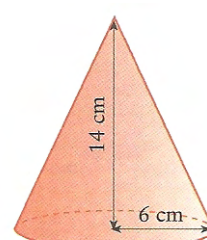
4.3.



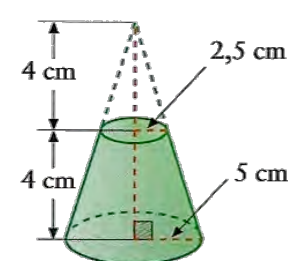
4.4.



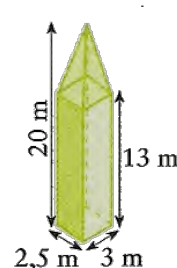
4.5.



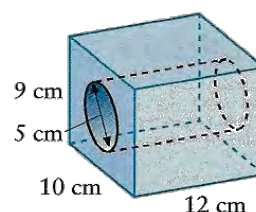
4.6.



4.7.

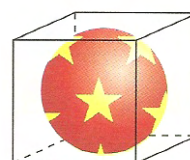


4.8.



Ao paralelepípedo foi retirado um cilindro, como se mostra na figura.

5.



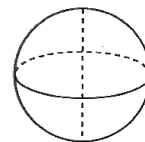
O volume da esfera é $\frac{2}{3}$ do volume de um cilindro de raio da base igual ao da esfera e altura igual ao diâmetro da esfera.

$$V_{\text{esfera}} = \frac{2}{3} \times V_{\text{cilindro}}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{2}{3} \times \pi \times r^2 \times 2r \rightarrow V_{\text{cilindro}}$$

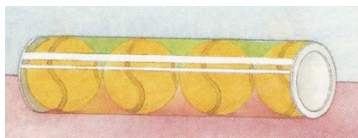
$$\text{Volume de esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Área da superfície esférica} = 4\pi r^2$$



Exemplo 4

Quatro bolas de ténis estão numa caixa cilíndrica, como se mostra na figura.



O diâmetro de uma bola de ténis é 8 cm. Determina:

- 4.1. o volume de uma bola;
- 4.2. a área da superfície de uma bola;

4.3. o volume da caixa cilíndrica;

4.4. a razão entre o volume das quatro bolas e o volume da caixa.

Resolução

As bolas de ténis têm a forma de uma esfera.

A caixa que as contém tem a forma de um cilindro.

4.1. o raio da esfera mede 4 cm.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 \approx 267,95 \text{ cm}^3.$$

Logo, uma bola tem o volume aproximado de 267,95 cm³.

$$4.2. A = 4\pi r^2 = 4 \times 3,14 \times 4^2 \approx 200,96 \text{ cm}^2.$$

Logo, a área da superfície de uma bola é, aproximadamente, 200,96 cm².

4.3. A altura do cilindro é igual a 4 vezes o diâmetro de uma bola de ténis.

$$4 \times 8 = 32 \text{ cm}.$$

$$V = A_b \times h = \pi \times 4^2 \times 32 \approx 1607,86 \text{ cm}^3$$

4.4. As quatro bolas de ténis têm o volume total de:

$$4 \times 267,95 = 1071,8 \text{ cm}^3.$$

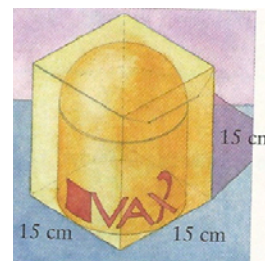
$$\text{Razão: } \frac{1071,8}{1607,86} = 0,6666 \approx \frac{2}{3}$$

A razão entre o volume das quatro bolas e o volume da caixa é, aproximadamente, $\frac{2}{3}$.

Actividades de aplicação

6. Uma pirâmide quadrangular de 40 cm³ de volume, tem de aresta da base 5 cm. Qual é a altura da pirâmide?

7. Um perfume está embalado numa caixa com a forma de um cubo com 15 cm de aresta. O frasco de perfume é formado por um cilindro e uma semi-esfera. A altura do frasco é 15 cm e a base é um círculo inscrito na base do cubo. Calcula:

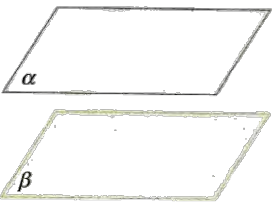
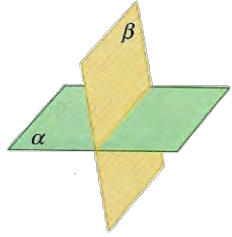
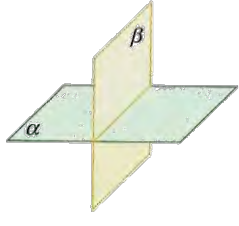


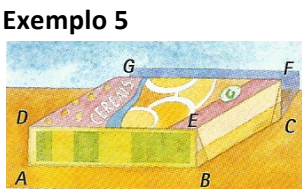
7.1. o volume do frasco de perfume;

7.2. o volume do espaço livre entre o frasco e a caixa.

8. Um biberão tem aproximadamente a

No quadro seguinte apresenta-se um resumo das posições relativas de dois planos.

Planos paralelos	Planos secantes (ou concorrentes)	
 $\alpha \cap \beta = \emptyset$ α e β são planos estritamente paralelos  $\alpha \equiv \beta$ α e β são coincidentes	 Planos oblíquos	 Planos perpendiculares (dividem o espaço em quatro regiões iguais)

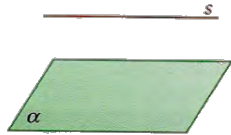
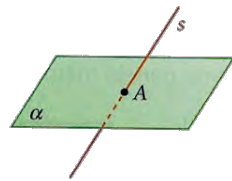
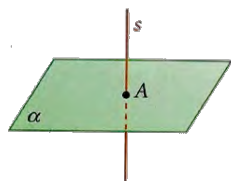


Os planos:

- ▣ ABC e DEF são paralelos;
- ▣ ADE e BCF são concorrentes perpendiculares;
- ▣ ABC e BCF são concorrentes oblíquos.

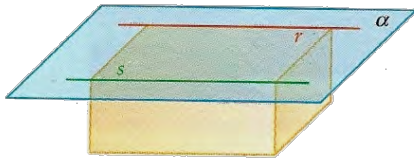
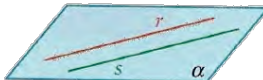
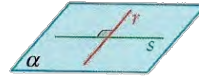
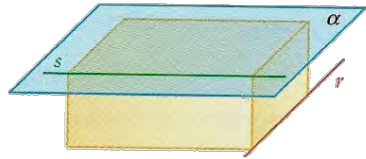
➤ **Posição relativa de rectas e planos no espaço**

No quadro seguinte apresenta-se um resumo das posições relativas de uma recta e um plano no espaço.

Recta paralela ao plano	Recta secante (ou concorrente) ao plano	Recta aposta (ou contida) no plano
 $s // \alpha$ $s \cap \alpha = \emptyset$	 s é oblíquo a α $s \cap \alpha = \{A\}$  $s \perp \alpha$	 $s \cap \alpha = s$ Todos os pontos de recta pertencem ao plano.

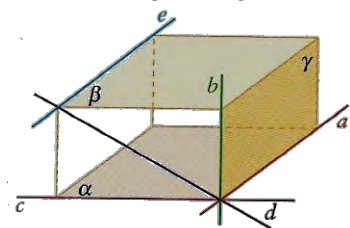
➤ **Posição relativa de duas rectas no espaço**

No espaço as rectas ou são coplanares ou não coplanares

Rectas coplanares	 r e s são coplanares	Rectas paralelas	Rectas secantes
		 Rectas estritamente paralelas  Rectas coincidentes	  Rectas secantes ou concorrentes
Rectas não coplanares	 s e r são não coplanares		

Exemplo 6

Observa a figura seguinte. Indica:



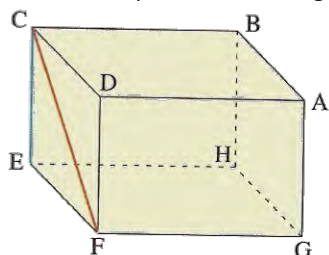
- uma recta e um plano α ;
- uma recta e um plano β ;
- uma recta apostada a um plano γ ;
- duas rectas não coplanares α e β ;
- duas rectas paralelas: rectas α e β ;
- duas rectas concorrentes: rectas α e β .

Nota:

Os planos podem ser representados por letras gregas:
 α : alfa
 β : beta
 γ : gama

Actividades de aplicação

9. Considerando o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$ representado na figura:



9.1. Indica duas maneiras diferentes de designar o plano que contém a face $[ABCD]$.

9.2. Indica:

- dois planos paralelos;
- dois planos concorrentes;
- um plano perpendicular ao plano que contém a base inferior.

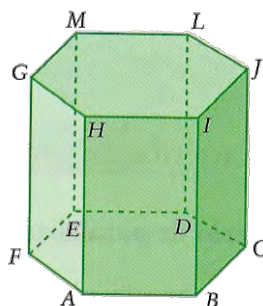
9.3. Considerando o plano que contém a face ABG , indica:

- uma recta contida no plano;
- uma recta perpendicular ao plano;
- uma recta paralela ao plano;
- uma recta oblíqua ao plano.

9.4. Indica duas rectas:

- não coplanares;
- perpendiculares;
- concorrentes não perpendiculares.

10. A figura representa um prisma hexagonal regular. Utilizando as letras da figura:



10.1. Indica dois planos:

- paralelos;
- perpendiculares;
- concorrentes e oblíquos.

10.2. Indica uma recta e um plano de modo que:

- a recta seja apostada ao plano;
- a recta seja paralela ao plano;
- a recta seja perpendicular ao plano;
- a recta seja oblíqua relativamente ao plano.

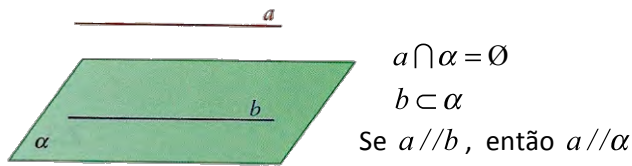
10.3. Indica duas rectas:

- não coplanares;
- coplanares e paralelas;
- coplanares e perpendiculares.

11. Na figura abaixo temos:

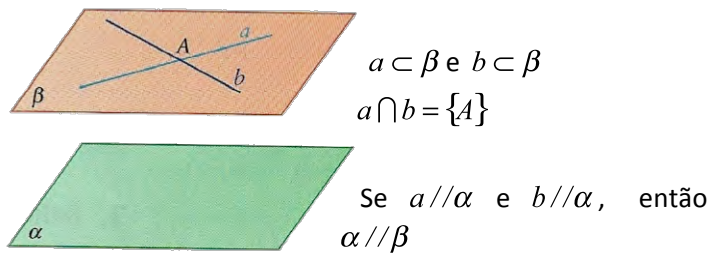
➤ **CrITÉRIOS de paralelismo entre recta e plano**

Se existir num plano uma recta paralela a uma recta dada que não está contida nesse plano, a recta e o plano são paralelos.



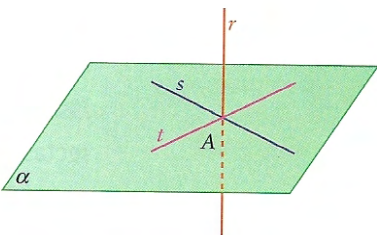
➤ **CrITÉRIO de paralelismo entre planos**

Se duas rectas concorrentes de um plano são paralelas a outro plano, então os planos são paralelos.



➤ **CrITÉRIO de perpendicularidade entre recta e plano**

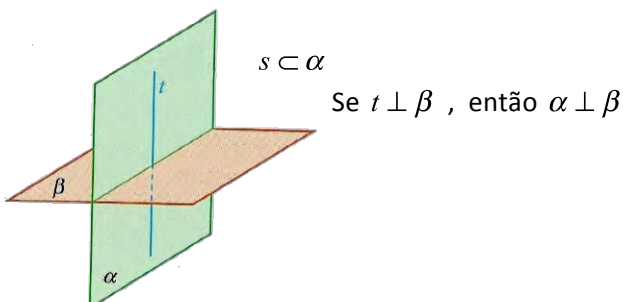
Se uma recta é perpendicular a duas rectas concorrentes de um plano, então a recta é perpendicular ao plano.



$s \subset \alpha$ e $t \subset \alpha$
 $s \cap t = \{A\}$
 Se $r \perp s$ e $r \perp t$,
 então $r \perp \alpha$

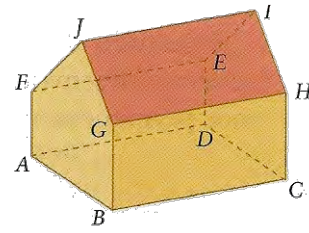
➤ **CrITÉRIO de perpendicularidade entre planos**

Se num plano existe uma recta perpendicular a outro plano, então os planos são perpendiculares.



Actividades de aplicação

12. A figura representa uma casa.



12.1. Qual é a posição da recta HI relativamente ao plano ABC ?

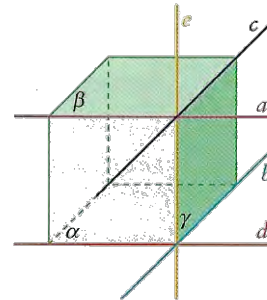
12.2. Qual é a posição da recta BG relativamente ao plano ABC ?

12.3. Indica na figura:

a) dois planos paralelos;

b) dois planos perpendiculares.

13. Na figura está representado um prisma recto.



(α é o plano da base inferior; β é o plano da base superior e γ é o plano de uma face lateral)

UNIDADE 8 – PROBABILIDADES

8.1. A linguagem das probabilidades

➤ Experiências aleatórias e experiências deterministas

Num grupo de trabalho são realizadas duas experiências: uma consiste em empurrar uma caneta para fora do tampo da mesa, a outra, consiste em lançar uma moeda ao ar e verificar se a face que indica o valor da moeda fica voltada para cima ou para baixo.

Na primeira experiência já conhecemos o resultado mesmo antes de a realizar: a caneta vai cair ao chão. Trata-se de uma **experiência determinista** cujo estudo não interessa ao estudo das probabilidades.

Na segunda experiência só é possível conhecer o resultado depois de a realizarmos. Trata-se de uma **experiência aleatória**. Só as experiências aleatórias interessam ao estudo das probabilidades.

Uma **experiência** é **aleatória** quando é impossível prever o resultado que se obtém, ainda que repetida nas mesmas condições.

Uma **experiência** é **determinista** quando é possível prever o resultado que se obtém se repetida nas mesmas condições.

➤ Conjunto de resultados. Acontecimentos.

Na figura está representada uma roda da sorte. Roda-se o ponteiro e pode sair qualquer um dos números representados (de 1 a 8).

Os resultados possíveis são **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**.

Ao conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ chama-se **conjunto de resultados**. É o conjunto formado por todos os resultados possíveis.

$A = \{3\}$ é um subconjunto de S .

A é um **acontecimento**.

Consideremos agora os seguintes acontecimentos:

A : sair 3

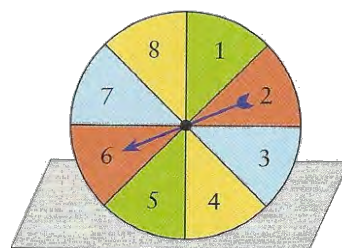
B : sair um número par

C : sair 9

D : sair um número ímpar

E : sair um número menor que 9

- O que podemos dizer acerca do acontecimento “sair 9”? É um **acontecimento impossível**. $C = \emptyset$
- O que podemos dizer acerca do acontecimento “sair um número menor que 9”? É um **acontecimento certo**. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = S$
- O acontecimento “sair 3” é um **acontecimento elementar**. $A = \{3\}$. Os acontecimentos $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$; $\{6\}$; $\{7\}$ e $\{8\}$ são elementares porque são constituídos por um único elemento.
- Aos subconjuntos constituídos por mais do que um elemento chamamos **acontecimentos compostos**. $B = \{2, 4, 6, 8\}$ é um acontecimento composto.
- Quais são os resultados favoráveis para o acontecimento B : “sair um número par”? $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Os casos (ou resultados) favoráveis são 2, 4, 6 e 8.
- Qual é mais provável, o acontecimento “sair 3” ou o acontecimento “sair um número par”? O acontecimento “sair um número par” é mais provável. Este acontecimento tem quatro casos (ou resultados) favoráveis e o acontecimento “sair 3” só tem um.



- E o que podemos dizer dos acontecimentos “sair um número par” e “sair um número ímpar”?
 $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $D = \{1, 3, 5, 7\}$. B e D têm o mesmo número de casos favoráveis. São igualmente prováveis ou **equiprováveis**.

Exemplo 1

Considera a experiência do lançamento de um dado com as faces numeradas de 1 a 6.



1.1. Define o conjunto de resultados.

1.2. Define e classifica o acontecimento:

- a) A : sair número par;
- b) B : sair um número superior a 5;
- c) C : sair um número menor que 7;
- d) D : sair o número 7.

1.3. Indica um acontecimento equiprovável ao acontecimento A referido em **1.2**.

Resolução

1.1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1.2.

a) $A = \{2, 4, 6\}$. É um acontecimento composto.

b) $B = \{6\}$. É um acontecimento elementar.

c) $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. É um acontecimento certo.

d) $D = \emptyset$. É um acontecimento impossível.

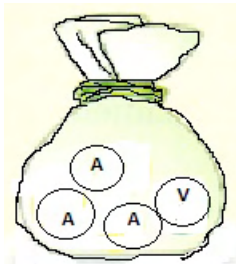
1.3. Seria o acontecimento E , sair um número ímpar, por exemplo.

Actividades de aplicação

1. Para cada uma das situações seguintes indica a expressão que associavas à frase.

Certo	Provável	Pouco provável	Impossível
-------	----------	----------------	------------

8.2. Cálculo da probabilidade de um acontecimento. Lei de Laplace.



Tira-se uma bola, ao acaso, do saco.

Qual a probabilidade de sair uma bola amarela?

Número de casos possíveis: 4

Número de casos favoráveis: 3

A probabilidade de sair uma bola amarela é:

3 em 4; $\frac{3}{4}$; 75% ou 0,75.

$$P(\text{amarela}) = \frac{3}{4}$$

Qualquer uma das formas está correcta, mas a forma mais usual de representar a probabilidade de um acontecimento é usando uma fracção.

Sempre que os acontecimentos elementares são **equiprováveis**, isto é têm igual probabilidade de acontecer, podemos calcular a probabilidade de um acontecimento utilizando a chamada **Lei de Laplace**.

Lei de Laplace

Para acontecimentos elementares equiprováveis:
Representando por $P(A)$ a probabilidade do acontecimento A ,

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de acontecimentos possíveis}}$$

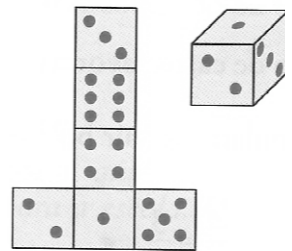
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Actividades de aplicação

4.

Na figura está representado um dado e a planificação da sua superfície.

Considera a experiência que consiste em lançar o dado uma vez e anotar o número de pontos da face voltada para cima.



4.1. Escreve todos os casos possíveis.

4.2. Quantos são os casos possíveis?

Exemplo 3

Foram feitos e vendidos 100 bilhetes para angariar fundos para o *Clube do Ambiente* de uma escola. Só um bilhete tinha prémio. O Marcelo comprou dois bilhetes.

3.1. Indica sob a forma de fracção e de percentagem a probabilidade do Marcelo ganhar o prémio.

3.2. Quantos bilhetes terá que comprar um amigo do Marcelo para ter 20% de probabilidades de ganhar o prémio?

Resolução

Número de casos possíveis: 100

2.1.

Número de casos favoráveis: 2

$$P(\text{Marcelo ganhar}) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} (= 2\%)$$

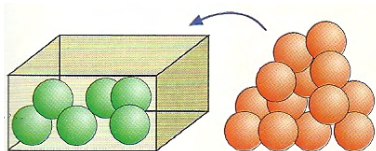
A resposta deve ser dada sob a forma de fracção simplificada.

2.2.

$$20\% = \frac{20}{100} \rightarrow \begin{array}{l} \text{nº casos favoráveis} \\ \text{nº casos possíveis} \end{array}$$

Terá que comprar 20 bilhetes.

Exemplo 3



Numa caixa há seis bolas verdes. Quantas bolas vermelhas devem ser colocadas na caixa de modo que a probabilidade de, ao acaso, tirar da caixa uma bola verde seja $\frac{2}{3}$?

Resolução

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} \quad \text{Procura-se uma fracção equivalente a } \frac{2}{3} \text{ cujo numerador seja 6 (número de casos favoráveis)}$$

$$9 - 6 = 3 \quad \text{Calcula-se a diferença entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.}$$

O número de bolas vermelhas que devemos colocar na caixa é 3.

Qual a probabilidade de:

4.1. ser rapaz e deslocar-se a pé para a escola?

4.2. ser rapariga e deslocar-se de carro para a escola?

Resolução

Número de casos possíveis: 25.

Número de casos favoráveis: procura-se na tabela.

4.1. $\frac{3}{25}$

4.2. $\frac{2}{25}$

8.3. Frequência relativa e probabilidade

Quando os acontecimentos elementares são equiprováveis, podemos determinar a sua probabilidade através da Lei de Laplace. Mas há muitas situações em que os acontecimentos elementares não são equiprováveis. Nestes casos recorre-se à repetição da experiência muitas vezes para determinar um valor aproximado da probabilidade do acontecimento.

Quando se recorre à experiência para fazer a estimativa de uma probabilidade, diz-se que se aplica a **lei dos grandes números**.

Lei dos grandes números

Para um grande número de repetições de uma experiência aleatória a frequência relativa de um acontecimento é um valor aproximado da probabilidade do acontecimento.

Exemplo 5

Perguntou-se a todos os alunos da 9ª classe de uma escola se usavam o texto de apoio de Matemática para estudar em casa. Os resultados estão identificados na seguinte tabela:

Sempre	Nunca	Por vezes
120	10	60

5.1. A quantos alunos foi colocada a questão?

5.2. Calcula a frequência relativa para cada uma das respostas.

5.3. Escolhido ao acaso um aluno da 9ª classe desta escola, qual é a probabilidade de ele usar sempre o texto de apoio de Matemática para estudar em casa?

Resolução

5.1. $120 + 10 + 60 = 190$. A questão foi colocada a 190 alunos.

5.2. $f_r(\text{sempre}) = \frac{120}{190} \approx 0,63$; $f_r(\text{nunca}) = \frac{10}{190} \approx 0,05$; $f_r(\text{por vezes}) = \frac{6$

Exemplo 6



Perguntou-se a 100 estudantes duma escola quantos tinham pelo menos um cão. Trinta e cinco responderam “sim”.

6.1. Calcula a frequência relativa dos estudantes que responderam sim.

6.2. Indicou-se, ao acaso, um aluno da escola. Estima a probabilidade de ele não ter cão.

6.3. Dos 1500 alunos da escola, quantos se estima que não têm cão?

Resolução

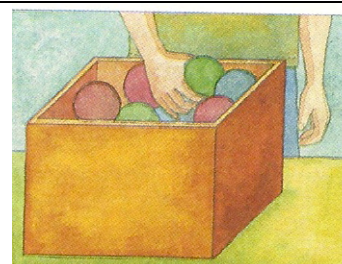
$$\mathbf{6.1.} \quad f_r(\text{resposta sim}) = \frac{35}{100} = 0,35 = 35\% \quad \mathbf{6.2.} \quad f_r(\text{resposta não}) = \frac{65}{100} = 0,65 = 65\%$$

$$\mathbf{6.3.} \quad 0,65 \times 1500 = 975.$$

Actividades de aplicação

10. Na caixa representada na figura ao lado há bolas de três cores: vermelhas azuis e verdes.

Não sabemos quantas bolas de cada cor há na caixa. Retirou-se, ao acaso, uma bola da caixa, anotou-se a cor e colocou-se de novo na caixa. A experiência foi repetida 110 vezes, baralhando sempre as bolas. Os resultados obtidos foram os seguintes:

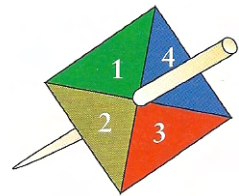


	Vermelha	Azul	Verde	
Contagem	 	 	 	
Total	21	37	52	110

10.1. Ao fazer uma nova experiência e de acordo com os dados, qual é a probabilidade de sair uma:

a) bola verde? **b)** bola vermelha ou bola azul?

13. O pião representado na figura está construído correctamente, isto é, a probabilidade de sair qualquer um dos números é a mesma. O Alexandre, a Ana, a Alice e a Adriana afirmaram que, cada um, rodou o pião 200 vezes e mostraram os dados obtidos ao professor.



Número que saiu	Alexandre	Ana	Alice	Adriana
1	50	53	12	15
2	50	47	53	100
3	50	51	102	42
4	50	49	33	43

Sabe-se que só um deles falou verdade. Qual deles terá sido?

Explica o teu raciocínio.

Tabela trigonométrica

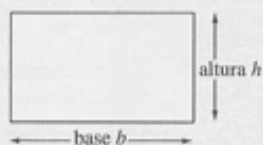
Graus	Seno	Co-seno	Tangente	Graus	Seno	Co-seno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003

Formulário de geometria

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

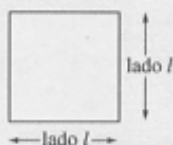
QUADRILÁTEROS

RECTÂNGULO



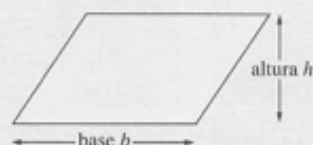
$$A = b \times h$$

QUADRADO



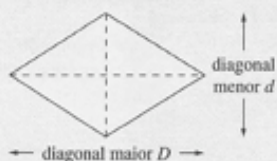
$$A = l^2$$

PARALELOGRAMO



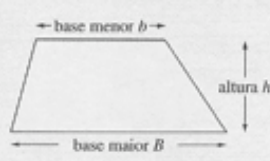
$$A = b \times h$$

LOSANGO



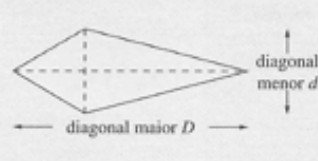
$$A = \frac{D \times d}{2}$$

TRAPÉZIO



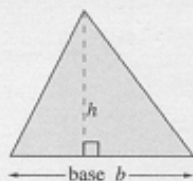
$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

PAPAGAIO



$$A = \frac{D \times d}{2}$$

TRIÂNGULOS



Bibliografia e imagens

Texto compilado a partir de:

NEVES, Maria Augusta Ferreira; GUERREIRO, Luís; NEVES, Armando – Matemática 9.º ano - Porto Editora, 2011

FARIA, Luís; AZEVEDO, Alexandre – Matemática Dinâmica 9 – Porto Editora, 2011

Sites da Internet

www.matematica.no.sapo.pt; www.educ.fc.ul.pt; <http://math.about.com>; www.amatoso.org;

www.redematematica.wordpress.com ; www.dgidc.min-edu.pt .

