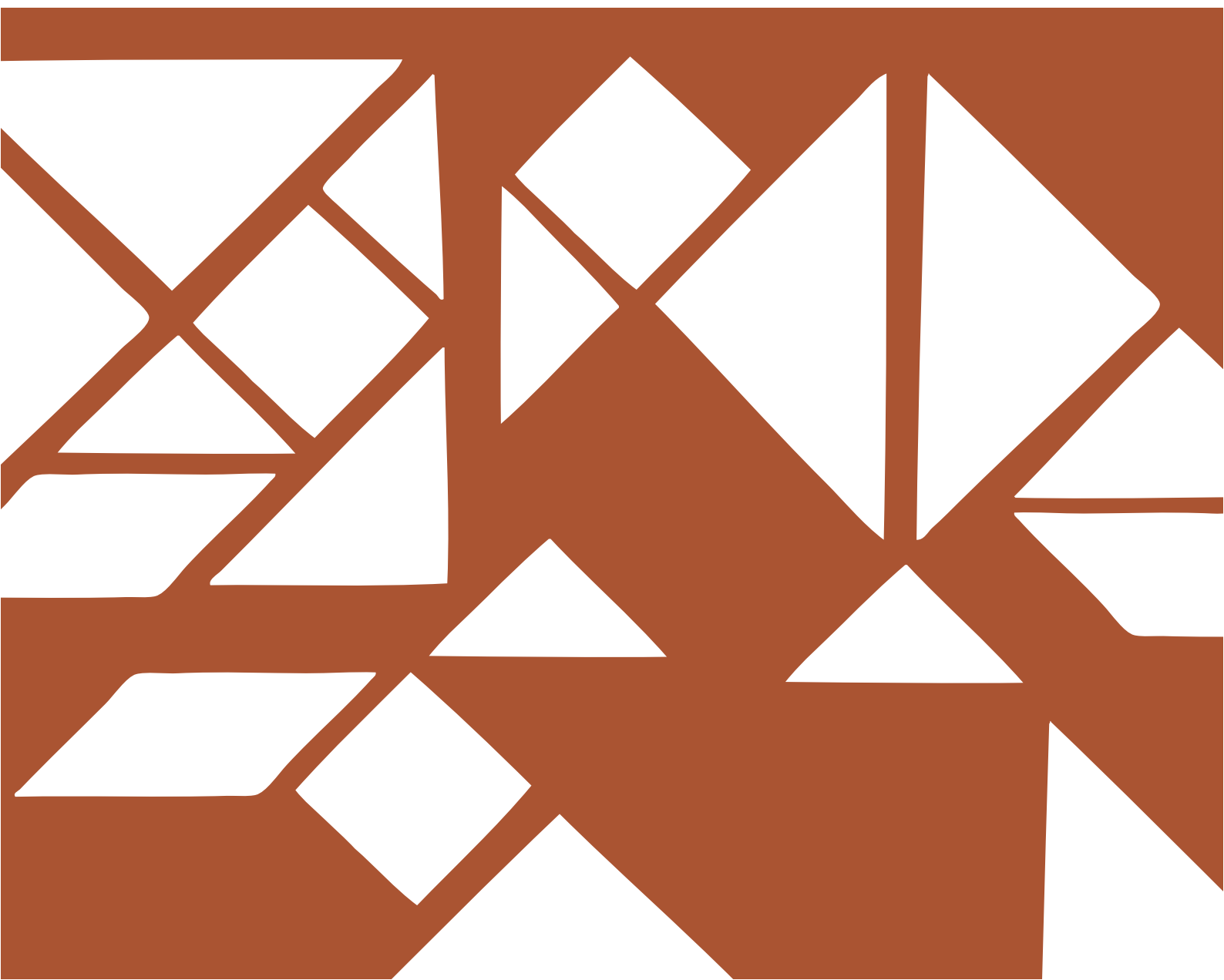


TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS
8ª Classe - 1º Ciclo

MATEMÁTICA 8



MATEMÁTICA 8

TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

8ª Classe - 1º Ciclo

Índice

UNIDADE 1 Semelhança de figuras

- 1.1. Figuras semelhantes. Ampliação e redução de figuras
- 1.2. Polígonos semelhantes
- 1.3. Casos de semelhança de triângulos

Pág
3
6
8

UNIDADE 2 Ainda os números

- 2.1. Problemas e sequências. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum
- 2.2. Potências de expoente natural
- 2.3. Potências de expoente nulo e inteiro negativo
- 2.4. Potências de base 10
- 2.5. Notação científica

12
16
18
20
21

UNIDADE 3 Equações

- 3.1. Equações do 1º grau: equações com denominadores
- 3.2. Equações literais
- 3.3. Monômios e polinômios
- 3.4. Adição algébrica de monômios e polinômios
- 3.5. Produto de polinômios
- 3.6. Produto de polinômios
- 3.7. Casos notáveis da multiplicação de polinômios
- 3.8. Factorização de polinômios
- 3.9. Lei do anulamento do produto e resolução de equações
- 3.10. Resolver equações através da lei do anulamento do produto

25
28
30
31
31
33
34
37
38
39

UNIDADE 4 Teorema de Pitágoras. Decomposição de figuras

- 4.1. Teorema de Pitágoras
- 4.2. Resolução de problemas usando o Teorema de Pitágoras no plano e no espaço
- 4.3. Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos
- 4.4. Decomposição de figuras. Áreas de figuras
- 4.5. Área do trapézio e do losango

41
44
45
47
51

UNIDADE 5
Funções

5.1. Introdução ao estudo das funções	Pág 53
5.2. Definição de função. Domínio e contradomínio de uma função	54
5.3. Formas de definir uma função	56
5.4. Função linear ou uma função de proporcionalidade directa	58
5.5. Formas de definir uma função	61

UNIDADE 6
Isometrias

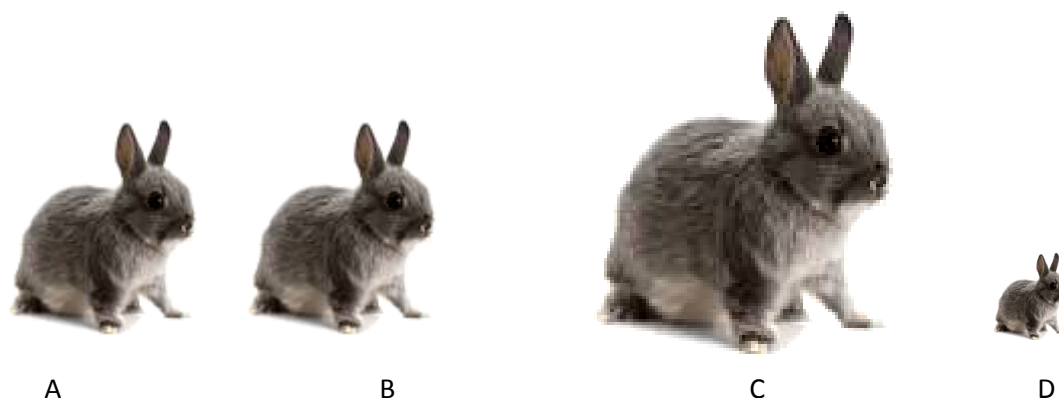
6.1. Translação	66
6.2. Simetria axial ou de reflexão	70
6.3. Rotação	71

Bibliografia e imagens	74
------------------------	----

UNIDADE 1 – SEMELHANÇA DE FIGURAS

1.1. Figuras semelhantes. Ampliação e redução de figuras

Observa as figuras:

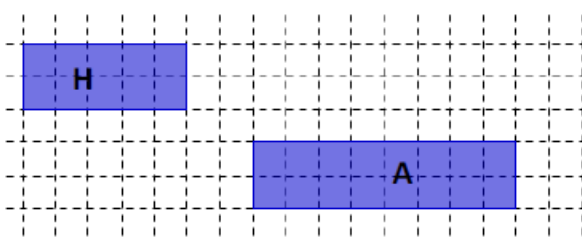


Todas as figuras têm a mesma forma. Por isso dizemos que **são semelhantes**.

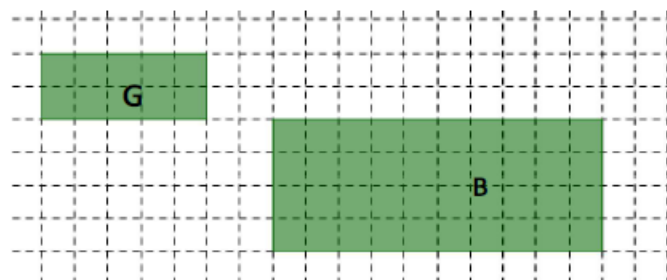
Quando as figuras têm o mesmo tamanho e a mesma forma são sobreponíveis. Neste caso dizemos que são **geometricamente iguais**. A e B são geometricamente iguais.

Se duas figuras têm a mesma forma mas uma tem dimensões maiores, dizemos que esta é uma **ampliação** da outra. C é uma ampliação de A.

Se duas figuras têm a mesma forma mas uma tem dimensões menores, dizemos que é uma **redução** da outra. D é uma redução de A.



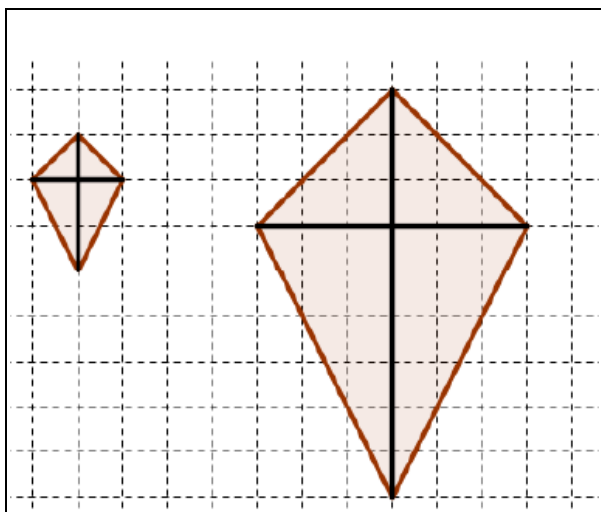
Os rectângulos **H** e **A** são parecidos mas não são semelhantes. Porquê?



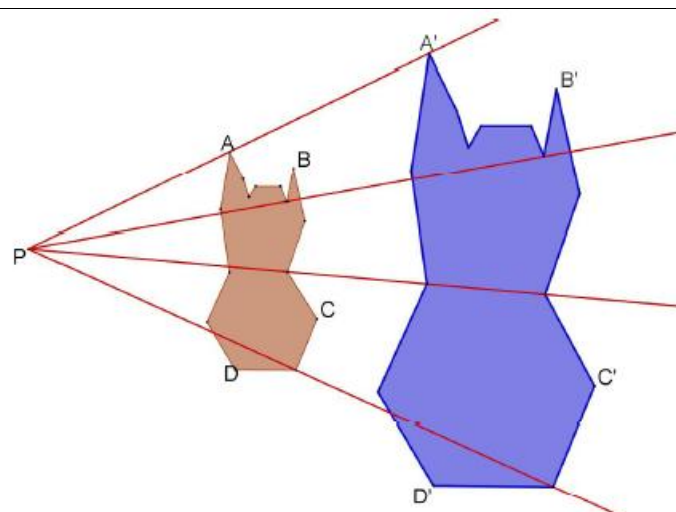
G é uma **redução** do rectângulo **B** e **B** é uma **ampliação** do rectângulo **G**. Os rectângulos **B** e **G** são **semelhantes**.

➤ Construção de figuras semelhantes

Para construir figuras semelhantes podemos usar quadrículas ou o método da homotetia.



1. Utilizando o quadrículado para ampliar e reduzir figuras.



2. Utilizando um ponto auxiliar. Este processo corresponde a uma transformação geométrica chamada **homotetia**.

Duas **figuras** são **semelhantes** quando os ângulos correspondentes são congruentes e a medida do comprimento dos segmentos que unem quaisquer dois pontos de uma é proporcional à medida do comprimento dos segmentos correspondentes na outra.

Assim, duas **figuras** são **semelhantes** se uma é **ampliação** ou **redução** da outra ou se são **congruentes**.

Numa **ampliação** todos os comprimentos são multiplicados por um número maior do que 1 e numa **redução** todos os comprimentos são multiplicados por um número positivo menor do que 1.

Para relacionar as dimensões de figuras semelhantes define-se a **razão de semelhança (r)** que é o quociente entre as medidas dos comprimentos de qualquer segmento da figura transformada e as medidas dos comprimentos do segmento **correspondente** da figura inicial. Ou seja:

$$\text{razão de semelhança} = \frac{\text{medida da figura transformada}}{\text{medida da figura original}}$$

Se $r > 1$ a figura semelhante é uma **ampliação**.

Se $r < 1$ a figura semelhante é uma **redução**.

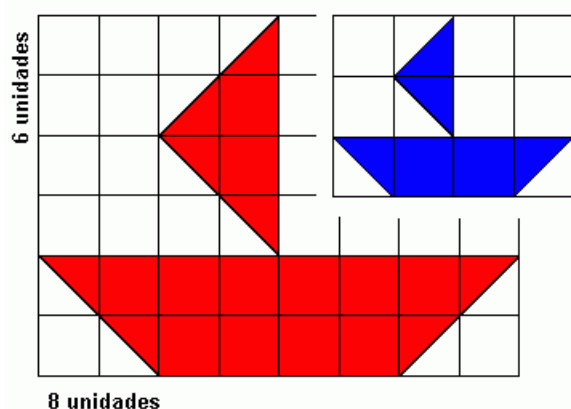
Se $r = 1$ as figuras são **congruentes** ou geometricamente iguais.

O factor de **escala** entre duas figuras semelhantes é **igual ao valor da razão de semelhança**.

A razão 1 / 2 pode escrever-se na forma de escala 1 : 2 (lê-se 1 para 2)

Exemplo 1 – Usar quadrícula

Observemos a figura onde estão representados dois barcos:



$$\text{Base menor barco pequeno} / \text{Base menor barco grande} = \frac{2}{4}$$

$$\text{Base maior barco pequeno} / \text{Base maior barco grande} = \frac{4}{8}$$

$$\text{Altura do barco pequeno} / \text{Altura do barco grande} = \frac{3}{6}$$

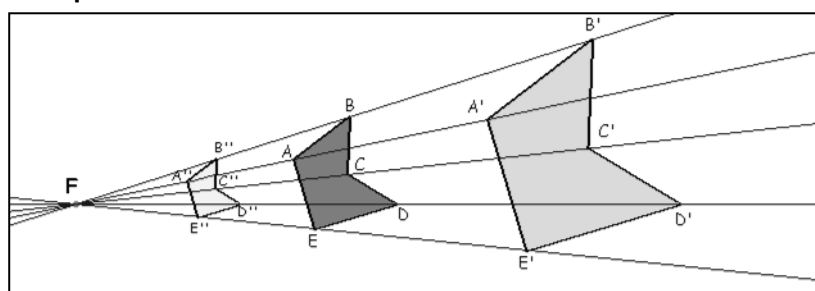
$$\text{Repara que } \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \text{ logo a razão de semelhança entre o}$$

barco pequeno e o barco grande é $\frac{1}{2}$, ou seja, os lados

correspondentes foram reduzidos à metade na mesma proporção.

O barco grande é uma ampliação do barco pequeno, pois as dimensões do barco grande são 2 vezes maiores do que as dimensões do barco pequeno.

Exemplo 2 – Método da homotetia



Partindo do polígono $[ABCDE]$.

Marcamos o ponto F .

Desenhamos as semi-rectas $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{FD}$ e $\overrightarrow{FE}$.

Marcamos A' , B' , C' , D' e E' , de modo que $\overline{FA'} = 2\overline{FA}$; $\overline{FB'} = 2\overline{FB}$; $\overline{FC'} = 2\overline{FC}$; $\overline{FD'} = 2\overline{FD}$ e $\overline{FE'} = 2\overline{FE}$. Traçamos o polígono $[A'B'C'D'E']$.

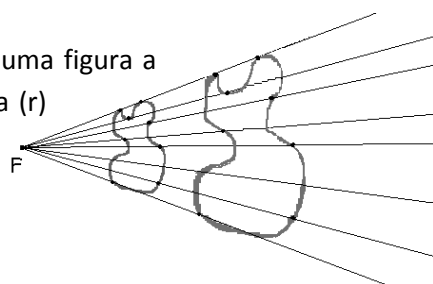
Marcamos A'' , B'' , C'' , D'' e E'' , de modo que $\overline{FA''} = \frac{1}{2}\overline{FA}$; $\overline{FB''} = \frac{1}{2}\overline{FB}$; $\overline{FC''} = \frac{1}{2}\overline{FC}$; $\overline{FD''} = \frac{1}{2}\overline{FD}$ e $\overline{FE''} = \frac{1}{2}\overline{FE}$.

Traçamos o polígono $[A''B''C''D''E'']$.

Obtivemos o polígono $[A'B'C'D'E']$ que é uma ampliação do polígono $[ABCDE]$ e o polígono $[A''B''C''D''E'']$ que é uma redução do polígono $[ABCDE]$.

Podemos observar que sempre que escolhemos pontos quaisquer numa figura a ser reproduzida e estipulando um foco (F) e uma razão de semelhança (r) quaisquer, podemos ampliar ou reduzir esta figura.

Assim sendo o mesmo se aplica a figuras curvas.



Actividades de aplicação

1. Dos seguintes pares de figuras quais são semelhantes?

a)



b)



c)



d)



2. Completa:

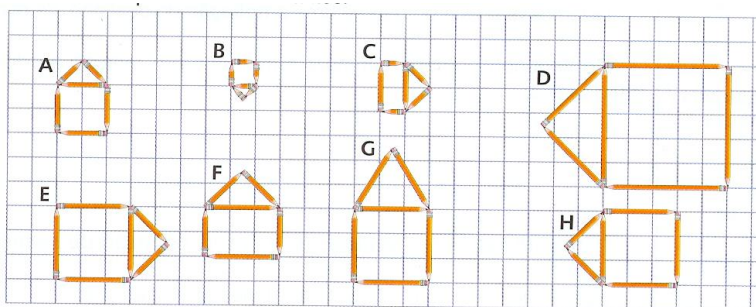


As figuras A e B são _____.

A figura A é uma _____ da figura B.

A figura B é uma _____ da figura A.

3. Considera as figuras:

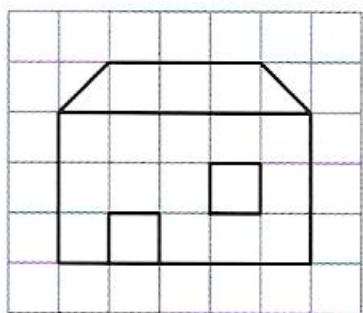


Diz quais das figuras são semelhantes, e indica a respectiva razão de semelhança.

4. Constrói no teu caderno usando quadriculado:

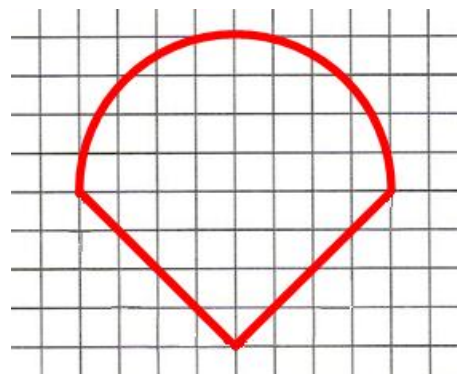
4.1.

Uma ampliação de razão 2, da figura ao lado.



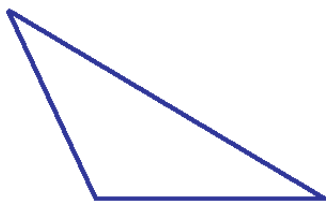
4.2.

Uma redução de razão 1 : 2 da figura ao lado.

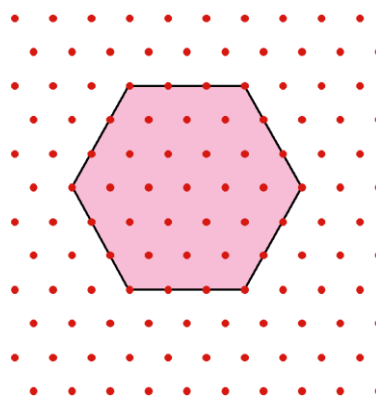


5.

Constrói no teu caderno, utilizando o método da homotetia uma redução e uma ampliação do triângulo



6. Constrói uma imagem semelhante à da figura seguinte à escala de 2 : 3.



7. Os dois relógios de parede da figura são semelhantes sendo a razão de semelhança 1,5. Determina:

7.1. O diâmetro do relógio maior sabendo que o diâmetro do menor é 9 cm.



8. O projecto de um novo tipo de barco foi desenhado à escala de 1 : 300.

Sabendo que no projecto o barco tinha de comprimento 25 cm e de altura 6 cm, calcula:

8.1. o comprimento real do barco;

8.2. a altura real.

9. A figura representa a planta dum apartamento à escala de 1 : 200. Usa uma régua para calcular:



9.1. a área do apartamento;

9.2. o perímetro da cozinha;

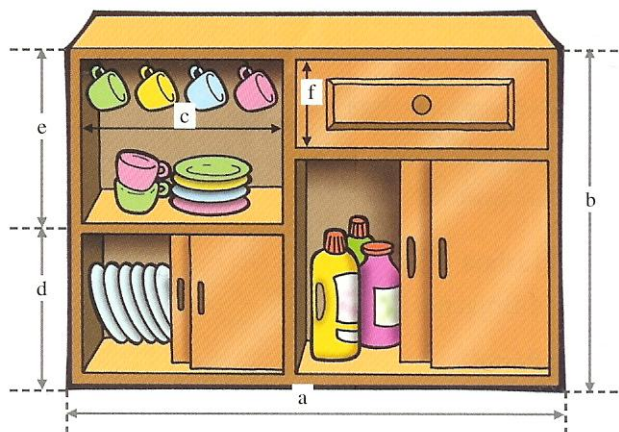
9.3. a área da sala

10. A Vilma foi a Cabo Verde e trouxe como recordação um modelo das antigas casas típicas duma das ilhas.

Determina a escala utilizada na construção do modelo sabendo que as casas costumam ter de altura 5,5 m e o modelo tem de altura 5,5 cm.

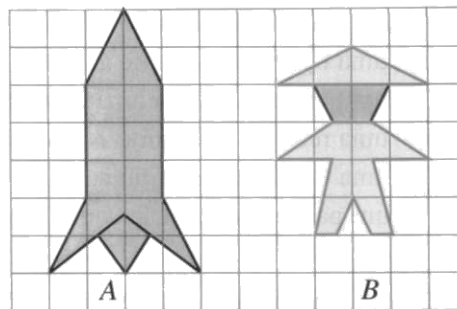


11. Este armário de cozinha está desenhado à escala 1:17.



Mede cada comprimento assinalado e calcula, em cm, os comprimentos reais correspondentes.

12. As figuras A e B foram pintadas no muro duma escola.



Escala 1 : 180

A largura de cada quadrícula é 1 cm.

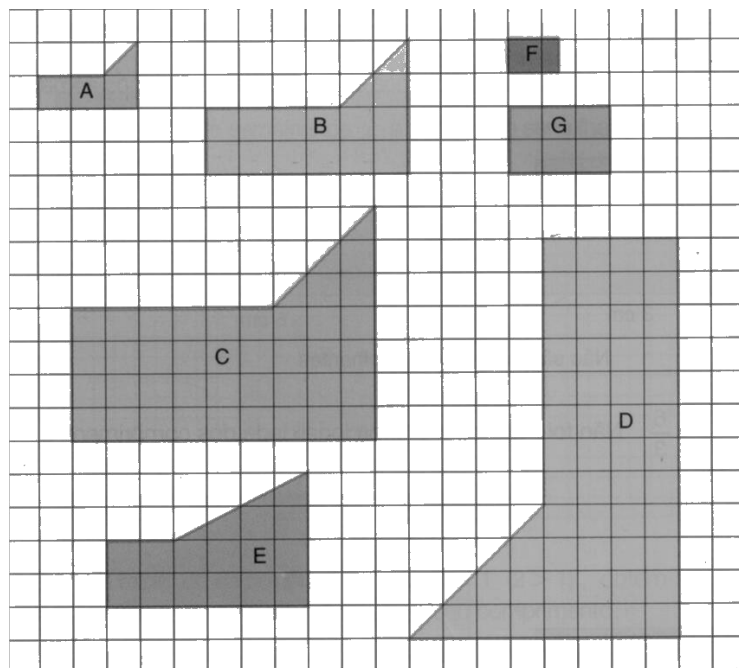
12.1. Determina altura real das figuras A e B pintadas no muro.

12.2. Reproduz as figuras no papel quadriculado do teu caderno usando a escala 1 : 3.

1.2. Polígonos semelhantes

Um polígono é um conjunto de pontos do plano limitado por uma linha fechada e formado por sucessivos segmentos de recta. Se desenharmos quadrados eles são sempre polígonos semelhantes. Se desenharmos dois rectângulos eles podem ser semelhantes ou não.

Como se identificam os polígonos semelhantes? Como se constroem polígonos semelhantes?



- Os polígonos A, B e D são semelhantes.
- Os polígonos A e C não são semelhantes.
- Os polígonos A e E não são semelhantes.

Dois polígonos com o mesmo número de lados dizem-se semelhantes quando têm de um para o outro:

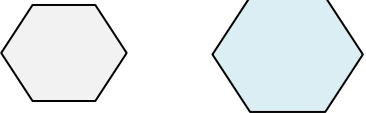
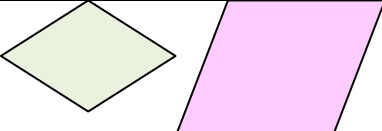
- ângulos geometricamente iguais;
- lados correspondentes proporcionais.

Para dois polígonos serem semelhantes terão que verificar simultaneamente as duas condições indicadas.

➤ Construção de polígonos semelhantes

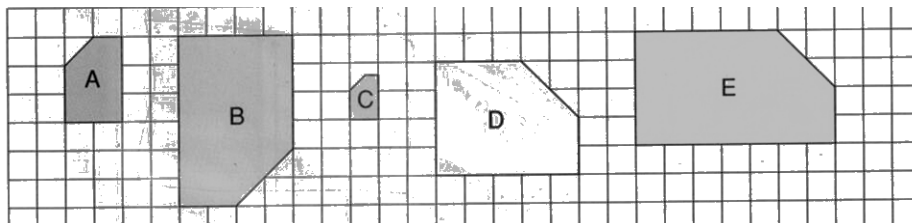
Para construir um polígono semelhante a outro multiplica-se a medida do comprimento de cada lado por um número. A esse número chama-se **razão de semelhança**. Também podemos usar o método da quadrícula e da homotetia que já utilizámos na construção de figuras semelhantes (exemplo 1 e 2).

Exemplo 3

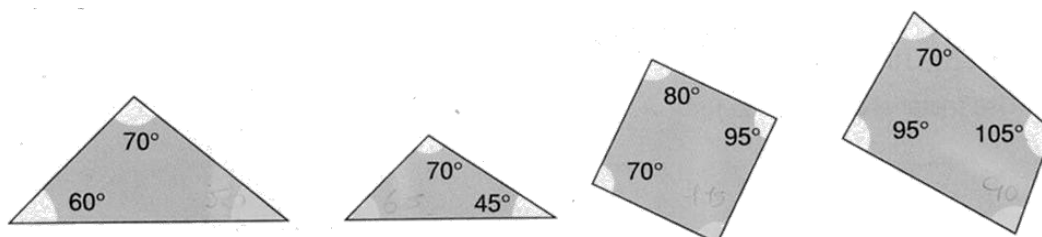
		
Estes polígonos são semelhantes, têm os ângulos geometricamente iguais e os lados proporcionais.	Os rectângulos têm os ângulos iguais mas os lados não são proporcionais. Não são semelhantes.	Os polígonos têm os lados proporcionais mas os ângulos não são iguais. Não são semelhantes.

Actividades de aplicação

13. Quais dos polígonos desenhados são semelhantes ao polígono A?

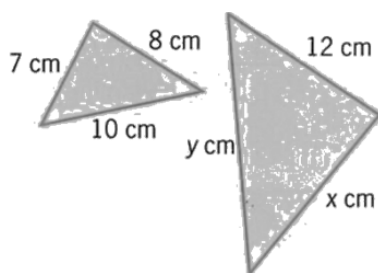


14. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e de um quadrilátero 360° , justifica que no conjunto das figuras seguintes não existe nenhum par de figuras semelhantes.

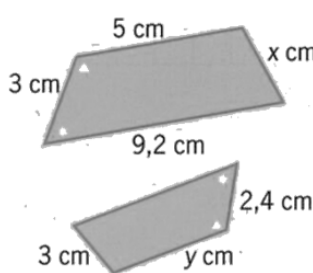


15. Em cada desenho estão representadas figuras semelhantes. Calcula x e y .

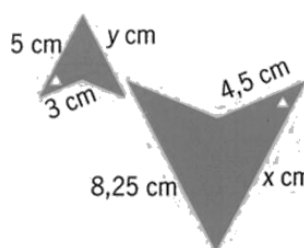
15.1.



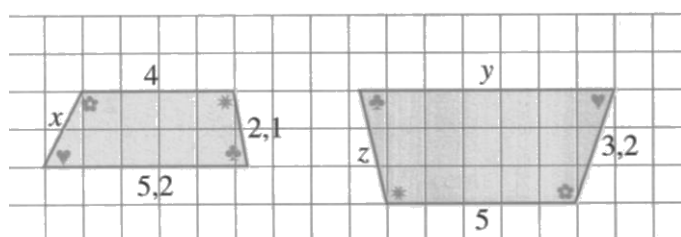
15.2.



15.3.



16. Os polígonos da figura são semelhantes. Calcula x , y e z .

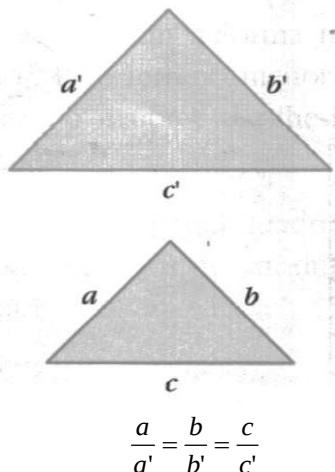
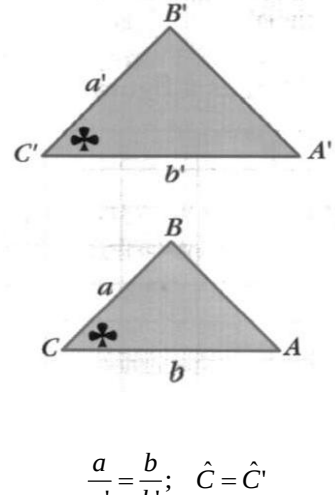
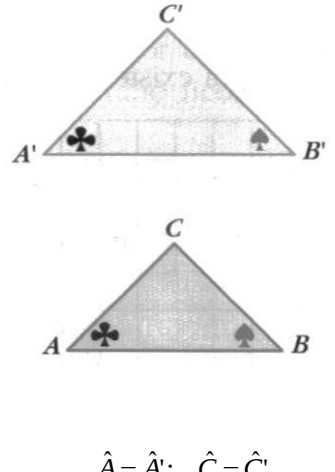


17. Um selo muito raro tem as dimensões de $3,5 \times 2,7$ cm. Um colecionador de selos pretendia fazer uma ampliação do selo para uma exposição. Se no expositor dispõe de um espaço quadrado de 32 cm de lado, determina o maior número inteiro para a razão de semelhança entre os dois selos (o original e o ampliado).

1.3. Casos de semelhança de triângulos

Existe um paralelismo entre os casos de igualdade de triângulos (estudados na 7ª classe) e os casos de semelhança (mantém-se a igualdade dos ângulos e os lados passam a ser proporcionais).

Casos de semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um são proporcionais aos três lados do outro. (L. L. L.)	Dois triângulos são semelhantes se têm dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual. (L. A. L.)	Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos iguais. (A. A. A.)
 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \hat{C} = \hat{C}'$	 $\hat{A} = \hat{A}'; \hat{C} = \hat{C}'$

Verificámos que para dois polígonos quaisquer, a semelhança só está assegurada se os ângulos forem todos iguais e os lados correspondentes proporcionais, para os triângulos não precisamos de tantos dados.

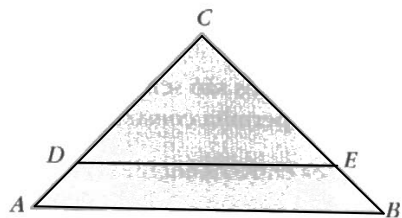
O conhecimento dos casos de semelhança de triângulos aplicam-se na vida prática na determinação de distâncias inacessíveis e, na matemática, na resolução de alguns problemas geométricos.

Exemplo 4

Os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ estão em posição de

Tales:

- têm um vértice comum;
- os lados opostos a este vértice são paralelos;
- os outros dois lados estão sobre uma mesma recta.



4.1. Justifica que são semelhantes os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$.

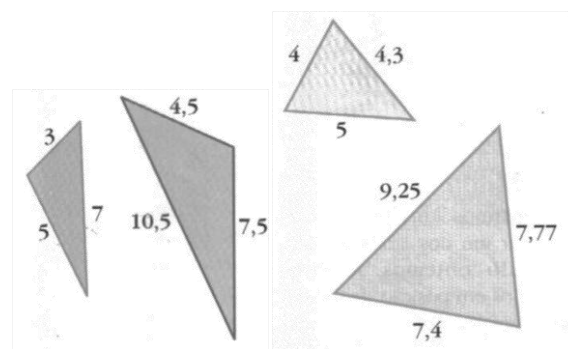
4.2. Se $\overline{CD} = 3\text{cm}$; $\overline{DE} = 5\text{cm}$ e $\overline{AB} = 8\text{cm}$, determine $\overline{AC}$.

Actividades de aplicação

18. Diz, justificando, se são ou não semelhantes os seguintes pares de triângulos (as medidas estão na mesma unidade).

18.1.

18.2



Resolução

4.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são semelhantes porque têm dois ângulos iguais:

- O ângulo C é comum;
- $\widehat{CDE} = \widehat{CAB}$, porque são ângulos agudos de lados paralelos.

4.2. Começamos por escrever as proporções entre os comprimentos dos lados correspondentes.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}. \text{ Substituímos os valores conhecidos:}$$

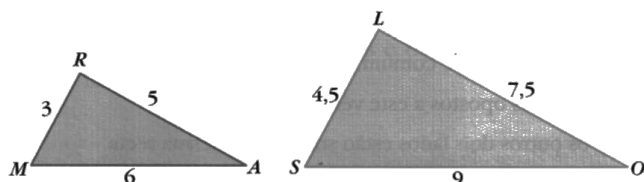
$$\frac{8}{5} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AC}}{3}. \text{ Escrevemos a proporção: } \frac{8}{5} = \frac{\overline{AC}}{3}$$

Calculamos o valor de $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = \frac{8 \times 3}{5} = 4,8. \text{ Logo, } \overline{AC} = 4,8 \text{ cm}$$

Exemplo 5

Observa os triângulos. Os números representam as medidas em centímetros, dos segmentos de recta a que estão associados.



5.1. Mostra que os triângulos são semelhantes e indica uma razão de semelhança que permita construir um a partir do outro.

5.2. Escreve as relações entre os ângulos dos dois triângulos.

Resolução

5.1. Para verificarmos se os triângulos são semelhantes teremos de ver se os lados de um são proporcionais aos lados do outro.

Escrevemos sucessivamente:

$$\frac{6}{9} = \frac{5}{7,5} = \frac{3}{4,5} \rightarrow \text{comprimentos dos três lados do triângulo}$$

$[MAR]$ por ordem decrescente;

$$\frac{6}{9} = \frac{5}{7,5} = \frac{3}{4,5} \rightarrow \text{comprimentos dos três lados do}$$

triângulo $[SOL]$ por ordem decrescente.

Como $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, os triângulos $[MAR]$

e $[SOL]$ são semelhantes. A razão de

semelhança é $r = \frac{2}{3}$.

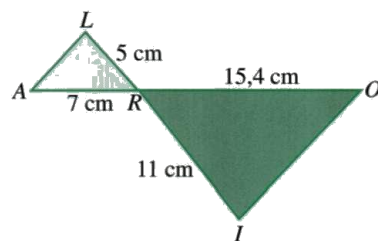
Nota

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$$

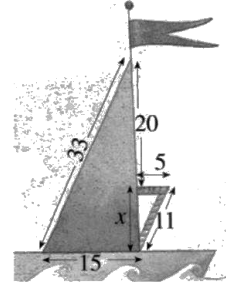
$$\frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$$

Actividades de aplicação

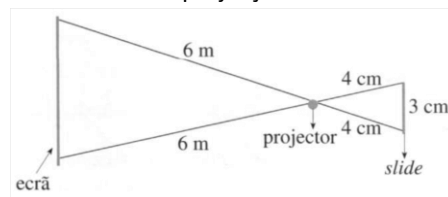
19. Justifica que os triângulos $[LAR]$ e $[RIO]$, representados na figura, são semelhantes e indica a razão de uma semelhança que transforma um no outro.



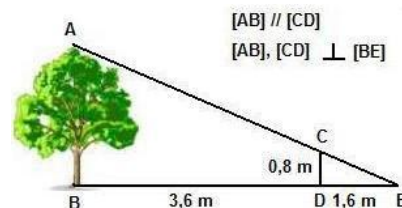
20. Observa a figura. Determina x , sabendo que os triângulos são semelhantes.



21. Observa a figura e, de acordo com os dados, determina a altura da projecção do *slide* no ecrã.



22. Observa a figura:

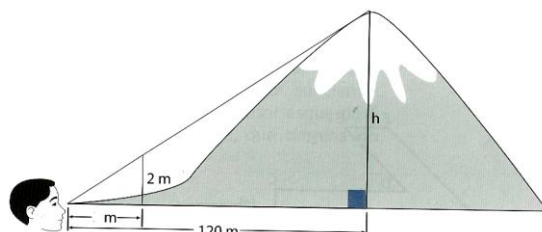


De acordo com os dados da figura:

22.1. mostra que os triângulos são semelhantes;

22.2. calcula a altura da árvore.

23. Considera a seguinte situação.



23.1. Justifica que os triângulos apresentados são semelhantes referindo o critério de semelhança utilizado.

23.2. Calcula a altura do monte.

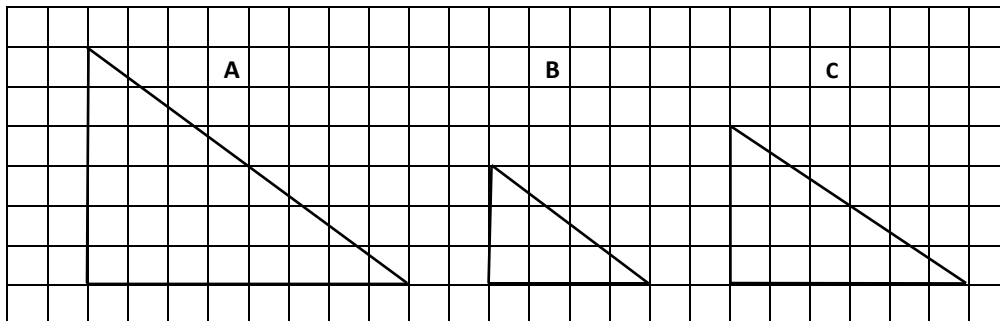
Se considerássemos uma ampliação, a razão de semelhança seria 1,5.

5.2. Em triângulos semelhantes, a lados correspondentes opõem-se ângulos iguais.

$$\text{Logo, } \hat{R} = \hat{L}; \hat{M} = \hat{S} \text{ e } \hat{A} = \hat{O}$$

➤ **Relações entre os perímetros e entre as áreas de triângulos semelhantes**

Vamos considerar três triângulos semelhantes utilizando a mesma quadrícula.



Vamos estabelecer a relação entre os perímetros e as áreas dos três triângulos semelhantes, observando o quadro:

	PERÍMETROS	ÁREAS	RAZÃO DOS PERÍMETROS	RAZÃO DAS ÁREAS	RAZÃO DE SEMELHANÇA
△ A △ B	$P_A = 24$ $P_B = 12$	$A_A = 24$ $A_B = 6$	$\frac{P_B}{P_A} = \frac{1}{2}$	$\frac{A_B}{A_A} = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{2}$
△ B △ C	$P_B = 12$ $P_C = 18$	$A_B = 6$ $A_C = 13,5$	$\frac{P_C}{P_B} = \frac{3}{2}$	$\frac{A_C}{A_B} = \frac{9}{4}$	$r = \frac{3}{2}$
△ A △ C	$P_A = 24$ $P_C = 18$	$A_A = 24$ $A_C = 13,5$	$\frac{P_C}{P_A} = \frac{3}{4}$	$\frac{A_C}{A_A} = \frac{9}{16}$	$r = \frac{3}{4}$

Comparando a razão das áreas com a razão de semelhança, concluímos que:

A razão das áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Do mesmo modo, comparando a razão dos perímetros com a razão de semelhança, também concluímos que:

A razão dos perímetros é igual à razão de semelhança.

Exemplo 6

Os perímetros de dois triângulos semelhantes são, respectivamente, 16 e 48 cm. Calcula a área do 2º triângulo sabendo que a área do primeiro é 20 cm².

Resolução

Começamos por determinar a razão de semelhança.

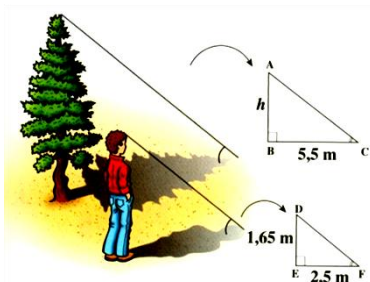
$$r = \frac{P_1}{P_2} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

A razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{9}; \quad \frac{20}{A_2} = \frac{1}{9}; \quad A_2 = 20 \times 9 = 180$$

Logo, a área do segundo triângulo é 180 cm².

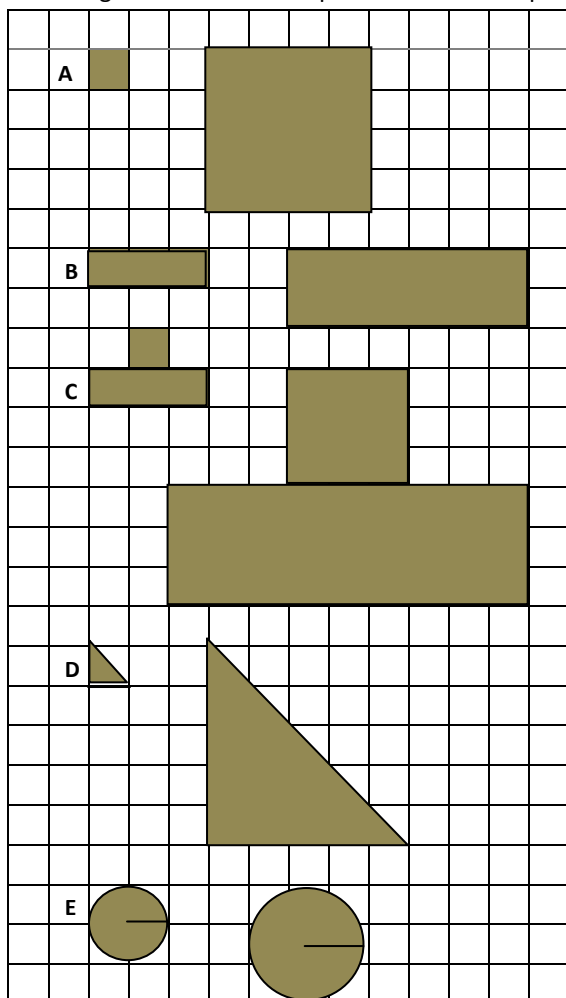
Atividades de aplicação



24. Rafael, a árvore e as respectivas sombras originam dois triângulos semelhantes como mostra a figura.

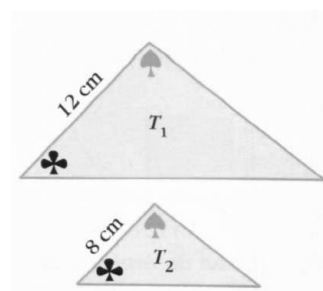
Atendendo aos dados da figura, calcula a altura h da árvore.

25. Na figura abaixo estão representados cinco pares de figuras semelhantes.



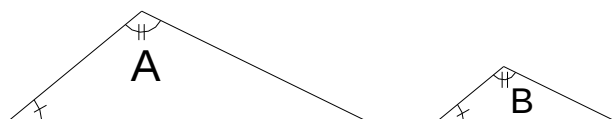
25.1. Completa a tabela.

Par de figuras	Razão entre	
	comprimentos ou perímetros	áreas
A		
B		
C	$3 = \frac{3}{1}$	
D		$25 = \frac{12,5}{0,5}$
E		



26. Os triângulos da figura ao lado são semelhantes. Atendendo às indicações da figura e que a área de T_1 é $31,5 \text{ cm}^2$, determina a área de T_2 .

27. Considera os seguintes triângulos semelhantes.



27.1. Sabendo que o perímetro de A é 25cm e perímetro de B é 5cm, determina a razão de semelhança.

27.2. Supondo que a área de B 10 cm^2 , determina a área de A.

Unidade 2 - Ainda os números

2.1. Problemas e sequências. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum.

A lista dos alunos da turma é composta pelos nomes dos alunos, esses nomes obedecem a uma ordem (são escritos em ordem alfabética), essa lista de nomes é considerada uma sequência. Os dias do mês são dispostos no calendário obedecendo a certa ordem que também é um tipo de sequência. Estes e vários outros exemplos de sequência estão presentes no nosso quotidiano.

Observando-os podemos definir sequência como:

Sequência é todo o conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos numa determinada ordem.

No estudo da matemática estudamos um tipo de sequência, a sequência numérica. Essa sequência é composta por números que estão dispostos numa determinada ordem pré-estabelecida.

São exemplos de sequências numéricas:

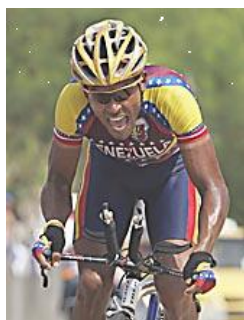
1, 2, 3, 4, 5, 6, ... (sequência dos números naturais);

1, 3, 5, 7, 9, 11 ... (sequência dos números ímpares);

1, 4, 9, 16, 25, ... (sequência dos números que são quadrados perfeitos);

2, 4, 8, 16, 32, ... (sequência das potências de base 2)

Exemplo 1 – O treino do ciclista



O Wilder está a treinar para participar no campeonato nacional de ciclismo. No 1º dia de fez um percurso de 4 km; no 2º dia 8 km, no 3º dia 12 km e no 4º dia percorreu 16 km. Se mantiver a regularidade no aumento do número de quilómetros que percorre por dia, quantos quilómetros vai percorrer no 8º dia de treino?

1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia	6º dia	7º dia	8º dia
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
4	8	12	16	20	24	28	32

Obtivemos a **sequência de números**: 4, 8, 12, 16, 20,

Aos números 4, 8, 12, 16, ... chamam-se **termos da sequência**. Passamos de um termo ao seguinte adicionando 4.

E se quiséssemos saber quantos quilómetros vai o Wilder percorrer no 20º dia de treino, teríamos que continuar a sequência ?

Procuremos uma fórmula:

1º dia – 1º termo da sequência $4 \times 1 = 4$

2º dia – 2º termo da sequência $4 \times 2 = 8$

3º dia – 3º termo da sequência $4 \times 3 = 12$

.....

Enésimo dia – enésimo termo da sequência **$4 \times n$**

$4 \times n$ é a expressão que gera a sequência.

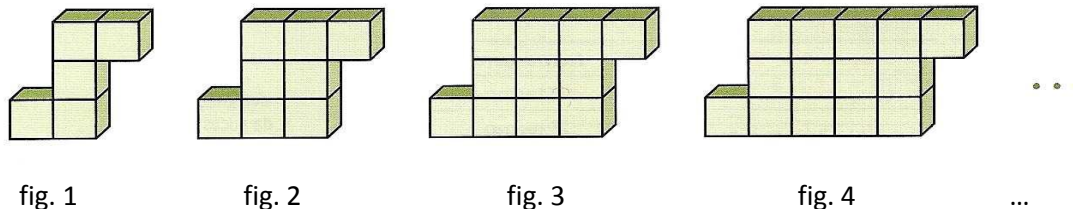
Ao calcularmos os quilómetros que o Wilder percorreu no vigésimo dia de treino, estamos a calcular o 20º termo da sequência:

20º termo $4 \times 20 = 80$

Por este processo poderíamos calcular qualquer termo da sequência.

Exemplo 2 - A sequência de cubos

Observa a sequência de figuras com cubos.



Supondo que se mantém a regularidade quantos cubos terá a figura 12? Completa a tabela:

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº de cubos	5	8	11	14								

Obtemos a sequência: 5, 8, 11, 14, 17, ...

A regra consiste em adicionar 3 ao termo anterior. E quantos cubos terá a figura 25?

Podíamos continuar a sequência ou tentar encontrar uma expressão que nos permita calcular o número de cubos de qualquer figura. Observa:

$$\begin{aligned}
 3 \times 1 + 2 &= 5 \\
 3 \times 2 + 2 &= 8 \\
 3 \times 3 + 2 &= 11 \\
 3 \times 4 + 2 &= 14 \\
 3 \times 5 + 2 &= 17 \\
 &\dots\dots\dots \\
 3 \times n + 2 &= 3n + 2
 \end{aligned}$$

A expressão $3n+2$ permite-nos calcular rapidamente o número de cubos de qualquer figura.

Figura 25: $3 \times 25 + 2 = 77$ cubos

Figura 30: $3 \times 30 + 2 = 92$ cubos

E qual será a figura que tem 56 cubos? $3n + 2 = 56 \Leftrightarrow 3n = 54 \Leftrightarrow n = \frac{54}{3} \Leftrightarrow n = 18$. A figura 18 tem 56 cubos.

Actividades de aplicação

1. Considera as sequências:

- (A) 1, 4, 16, 64, ...
 (B) 20, 17, 14, 11, ...
 (C) -3, 6, -12, 24, ...
 (D) -5, 5, -5, 5, ...

Para cada uma escreve os quatro termos seguintes e indica a regra que utilizaste.

2. Escreve os seis primeiros termos da sequência

1, 4, ...

usando a regra:

- 2.1. adicionando 3;
 2.2. multiplicando por 4;
 2.3. multiplicando por 3 e adicionando 1;

3. Escreve os cinco primeiros termos das sequências cujo termo de ordem n é:

- 3.1. $n + 1$
 3.2. $2n + 1$
 3.3. $2n^2 + 1$
 3.4. $4n - 3$

4. Observa as sequências de figuras, copia e completa a tabela:



4.1

Figura	1	2	3	4	5	...	n
Nº pontos	2	4				...	

4.2

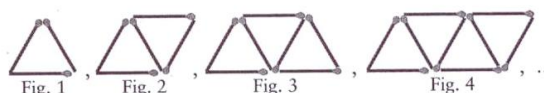


Figura	1	2	3	4	5	...	n
Nº fósforos	3					...	

4.3

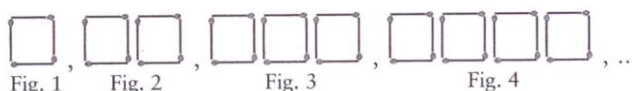


Figura	1	2	3	4	5	...	n
Nº fósforos	4					...	

Problemas com números

5. Um caracol começa a subir um muro com 9 metros de altura. Durante o dia sobe 2 metros mas quando adormece escorrega e desce um. Quantos dias demora a chegar ao cimo do muro?

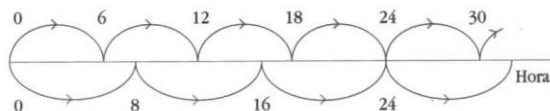


6. Uma tartaruga ao fim de uma semana andou 126 metros. Sabendo que, em cada dia, andava mais 5 metros do que no anterior, determina a distância que percorreu no primeiro dia.



➤ Mínimo múltiplo comum

A Vanessa está doente e precisa de tomar um comprimido de 6 em 6 horas e outro de 8 em 8 horas. Iniciou o tratamento tomando os dois medicamentos juntos às 0 horas. Quando voltará a tomar os dois medicamentos juntos?



Para resolver o problema vamos fazer um esquema:

Logo, a Vanessa voltará a tomar os medicamentos juntos no dia seguinte à mesma hora.

No esquema temos:

0, 6, 12, 18, **24**, 30, ... múltiplos de 6;

0, 8, 16, **24**, 32, 40, ... múltiplos de 8.

24 é o **mínimo múltiplo comum** entre 6 e 8 e escreve-se: **m. m. c. (6, 8) = 24**

O mínimo múltiplo comum de dois números naturais é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo desses números.

Para calcularmos o m. m. c. (6, 8), poderíamos utilizar a decomposição em factores primos.

$$\begin{array}{l|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$\text{m. m. c. (6, 8)} = 2^3 \times 3$$

$$\text{m. m. c. (6, 8)} = 24$$

O mínimo múltiplo comum de dois números decompostos em factores primos é igual ao produto dos factores comuns e não comuns elevados cada um ao maior dos expoentes.

Exemplo 3

Calcula o m. m. c. (12, 30).

$$\begin{array}{l|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \times 3 \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$\text{m. m. c. (12, 30)} = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{m. m. c. (12, 30)} = 60$$

Actividades de aplicação

7. Calcula o m. m. c. :

7.1. (15, 20)

7.2. (18, 20, 35)

7.3. (36, 50)

7.4. (12, 36)

7.5. (28, 20)

7.6. (128, 192)

8. O Eleutério percorre o rebordo de uma piscina em 18 passadas e o Carlos em 24. Se partirem ao mesmo tempo voltarão a encontrar-se? Se tal acontecer, quantas voltas terá dado cada um à piscina?



9. Numa árvore de Natal, um grupo de lâmpadas acende de 10 em 10 segundos e um outro grupo acende de 12 em 12 segundos.

À meia-noite acenderam-se os dois grupos de lâmpadas.

Quantos segundos depois voltam a acender-se simultaneamente os dois grupos de lâmpadas?

10. Três amigos encontraram-se numa segunda-feira na biblioteca. O Anderson costuma lá ir estudar de 2 em 2 dias, o Bruno de 4 em 4 dias e o Vasco de 6 em 6 dias. Daqui a quantos dias e em que dia da semana é que os amigos se voltam a encontrar? (a biblioteca está encerrada ao sábado e ao domingo).

➤ Máximo divisor comum

O Sr. Sérgio está a fazer saquinhos de frutos para vender aos turistas. Ele tem 72 mangas e 108 cajamangas. Pretende fazer o maior número possível de saquinhos com igual quantidade de frutos. No máximo quantos saquinhos poderá fazer? E quantas mangas e cajamangas terá cada saco?



Para resolver este problema teremos de procurar números que dividam simultaneamente 72 e 108 e desses números escrever o maior.

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, **36**, 72 são os divisores de 72.

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 27, **36**, 54, 108 são os divisores de 108.

Dos divisores que são comuns a 72 e a 108, o 36 é o maior. O Sr. Sérgio poderá fazer 36 saquinhos de frutos e cada um terá 2 mangas e 3 cajamangas.

O máximo divisor comum de 72 e 108 é 36 e escreve-se: **m. d. c. (72, 108) = 36**.

O máximo divisor comum entre dois ou mais números é o maior dos divisores comuns a esses números.

Para calcular o máximo divisor comum entre dois números podemos utilizar a decomposição em factores primos.

Exemplo 4

Calcular o m. d. c. (24, 60)

24	2	60	2
12	2	30	2
6	2	15	3
3	3	5	5
1		1	

O máximo divisor comum de dois números decompostos em factores primos é igual ao produto dos factores comuns cada um elevado ao menor expoente.

$$24 = 2^3 \times 3 \quad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Se o m. d. c. de dois números é 1, dizemos que os números são primos entre si.

$$\text{m. d. c. (24, 60)} = 2^2 \times 3 = 12$$

Os números 7 e 20 são primos entre si porque o m. d. c. (7, 20) = 1

Actividades de aplicação

11. Calcula o m. d. c. de:

11.1. (18, 24)

11.2. (75, 210)

11.3. (42, 56, 84)

11.4. (100, 50, 60)

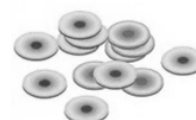
11.5. (120, 144)

12. Num encontro de jovens participam 168 angolanos, 112 cabo-verdianos e 96 santomenses.

12.1. Qual é o maior número de grupos que se podem formar de modo que cada país esteja igualmente representado em todos os grupos?

12.2. Quantos elementos de cada país ficará em cada um dos grupos?

13. O Narciso entretinha-se com as fichas de um jogo, 24 verdes e 40 vermelhas, de forma a obter pilhas com o mesmo número de fichas da mesma cor. Qual será o maior número de pilhas que poderá formar sem deixar nenhuma ficha de fora?



14. Numa escola a 7ª A tem 42 alunos e a 8ª C tem 48. O professor de Matemática organiza um concurso entre as duas classes e quer formar equipas com o maior número possível de alunos de cada classe, de maneira que cada equipa tenha o mesmo número de alunos. Qual será o número de alunos de cada uma das turmas por equipa?

2.2. Potências de expoente natural

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

O produto $5 \times 5 \times 5 \times 5$ tem quatro factores iguais, e pode ser escrito como uma potência em que 5 é a base e 4 é o expoente.

Elevar um número a a um expoente n , natural, é calcular o produto que tem n factores iguais a a .

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}}$$

$$a^1 = a$$

A escrita de um número sob a forma de potência facilita a escrita e os cálculos.

Exemplo 5: Calcular potências

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$$

$$\frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3^3 = 27$$

$$2^3 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4$$

➤ Propriedades das potências

Recordemos as propriedades das potências de expoente natural.

Potências com a mesma base	
$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^5$ $2^{200} \times 2^{300} = 2^{500}$	Para multiplicar potências com a mesma base, mantém-se a base e adicionam-se os expoentes. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
$2^5 \div 2^3 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2^2$ $2^{500} \div 2^{300} = 2^{200}$	Para dividir potências com a mesma base, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Potências com o mesmo expoente	
$2^3 \times 3^3 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = (2 \times 3)^3 = 6^3$ $2^{200} \times 3^{200} = 6^{200}$	Para multiplicar potências com o mesmo expoente, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases. $a^m \times b^m = (a \times b)^m$
$3^3 \div 2^3 = \frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$ $3^{500} \div 2^{500} = \left(\frac{3}{2}\right)^{500}$	Para dividir potências com o mesmo expoente, mantém-se o expoente e dividem-se as bases. $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Potência de potência	
$(2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^6$ $(2^{30})^{20} = 2^{600}$	Para transformar uma potência de potência numa potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Exemplo 6

6.1. Escrever como uma potência de 5:

$$5^6 \times 5^8 \div 5^2$$

$$5^6 \times 5^8 \div 5^2 = 5^{14} \div 5^2 = 5^{12}$$

6.2. Escrever como uma potência de 3:

$$(3^2)^4 \times (3^1)^6 \div (3^4)^2$$

$$(3^2)^4 \times (3^1)^6 \div (3^4)^2 = 3^8 \times 3^6 \div 3^8 = 3^6$$

6.3. Simplifica a expressão

$$2a^3b^2 \times 3a^2b^5$$

$$2a^3b^2 \times 3a^2b^5 =$$

$$2 \times 3 \times a^3 \times a^2 \times b^2 \times b^5 = 6a^5b^7$$

6.4. Calcula o valor da expressão e apresenta o resultado como uma potência de base 2:

$$\frac{2^3 \times 6^4 \times 2}{3^1 \times 3^3}$$

$$\frac{2^3 \times 6^4 \times 2}{3^1 \times 3^3} = \frac{2^4 \times 6^4}{3^4} = \frac{12^4}{3^4} = 4^4 = (2^2)^4 = 2^8$$

6.5. Calcula:

$$2^4 \div (-5)^2 - \left(-\frac{1}{5}\right)^3$$

$$2^4 \div (-5)^2 - \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = 16 \div 25 - \left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{16}{25} + \frac{1}{125} = \frac{80}{125} + \frac{1}{125} = \frac{81}{125} = \frac{3^4}{5^3}$$

Actividades de aplicação

15. Calcula o valor de cada potência:

$$(-5)^2; \quad (-2)^5; \quad -3^4; \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^2; \quad (2^3)^2$$

16. Escreve como potência de base 2 ou -2, 3 ou -3 e expoente natural cada um dos seguintes números:

$$64; \quad -8; \quad -32; \quad 81; \quad -27$$

17. Calcula:

$$\mathbf{17.1.} \quad (-2)^3 + (-2)^2; \quad \mathbf{17.2.} \quad (-1)^{12} - (-3)^2;$$

$$\mathbf{17.3.} \quad (0,1)^2 - (1,1)^2; \quad \mathbf{17.4.} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\mathbf{17.5.} \quad (-3)^2 \times (-2)^3; \quad \mathbf{17.6.} \quad (-2)^3 : (-3)^2;$$

18. Calcula:

$$\mathbf{18.1.} \quad \left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\right)^5; \quad \mathbf{18.2.} \quad 5^6 \times 5^3 \div 5^7$$

$$\mathbf{18.3.} \quad (-18)^6 \div (-3)^6 \div (-6)^4; \quad \mathbf{18.4.} \quad [2^2 \times (-3)^2]^2 \div [(-3)^2]^2$$

$$\mathbf{18.5.} \quad \frac{2^5 \times 3^7}{2^4 \times 3^3} \quad \mathbf{18.6.} \quad \frac{14^6 \times 5^6}{35^5 \times 2^5}$$

$$\mathbf{18.7.} \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{12} \times \left(2 - \frac{2}{3}\right)^{15} \div \left(\frac{2^2}{3}\right)^{25};$$

$$\mathbf{18.8.} \quad (-2)^{31} \times (0,5)^{31} + (-4)^{17} \times (0,25)^{17} - \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \times 2^{18};$$

Nota: Se as potências a multiplicar ou a dividir não têm a mesma base ou o mesmo expoente, não há regras. Neste caso devemos calcular o valor da potência atendendo à definição. Também não há regras para a adição e a subtração de potências.

2.3. Potências de expoente nulo e inteiro negativo

Potência de expoente nulo

Consideremos o seguinte quociente de potências de bases iguais e expoentes iguais:

$$5^3 \div 5^3 = \begin{cases} 5^{3-3} = 5^0 \rightarrow \text{aplicando a propriedade} \\ \frac{5^3}{5^3} = 1 \rightarrow \text{calculando o quociente} \end{cases}$$

$$5^0 = 1$$

Toda a potência de base diferente de zero e expoente zero é igual à unidade.

$$a^0 = 1 \\ (a \neq 0)$$

Exemplos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1; \quad (-2,5)^0 = 1; \quad \left[5 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{35}\right]^0 = 1$$

Potências de expoente inteiro negativo

Consideremos o seguinte quociente de potências de bases iguais em que o expoente do divisor é maior do que o expoente do dividendo:

$$5^4 \div 5^6 = \begin{cases} 5^{4-6} = 5^{-2} \rightarrow \text{aplicando a regra} \\ \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^2} \rightarrow \text{calculando o quociente} \end{cases}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

Uma potência, de base não nula, de expoente inteiro negativo é igual ao inverso da potência com a mesma base e expoente simétrico.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Como $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, também poderemos definir potência de expoente inteiro negativo do seguinte modo:

Uma potência, de base não nula, de expoente inteiro negativo é igual à potência de base inversa e expoente simétrico.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Esta definição tem particular interesse no caso de a base ser fraccionária:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exemplos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}; \quad (-5)^{-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}; \quad \frac{1}{2^{-3}} = 2^3; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4; \quad \left(\frac{7}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{7}$$

➤ Operações com potências de expoente inteiro

As propriedades das potências de expoente natural e as regras de cálculo aplicam-se às potências de expoente inteiro.

Exemplo 7

Calcula:

7.1. $2^{-3} \div 2^{-4} \times 2^{-5}$

$$2^{-3} \div 2^{-4} \times 2^{-5} = 2^{-3-(-4)} \cdot 2^{-5} = 2^1 \cdot 2^{-5} =$$

$$= 2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

7.2. $7^{-3} \times 2^{-3} \div 8^{-3}$

$$7^{-3} \times 2^{-3} \div 8^{-3} = 14^{-3} \div 8^{-3} = \left(\frac{14}{8}\right)^{-3} =$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3$$

No caso de não existirem regras para simplificar os cálculos, normalmente transformam-se as potências de expoente negativo em potências de expoente positivo, e, em seguida, calcula-se o seu valor.

7.3. $(-2)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \times (-3)^{-1}$

$$(-2)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \times (-3)^{-1} = 1 + (-2)^2 \times \left(\frac{1}{-3}\right)^1 =$$

$$1 + 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = \frac{3}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

7.4.

$$\frac{2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (-2)^{-5}}$$

$$\frac{2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (-2)^{-5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{1}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{27 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right)} =$$

$$= \frac{2^1}{-\frac{27}{32}} = 2 \times \left(-\frac{32}{27}\right) = -\frac{64}{27}$$

Actividades de aplicação

19. Escreve com expoente positivo cada uma das seguintes potências:

$$5^{-1}; \quad 3^{-2}; \quad (-2)^{-3}; \quad 1^{-10}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}; \quad \left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}$$

20. Calcula:

$$5^{-1}; \quad (-2)^{-1}; \quad 3^0; \quad (-5)^0; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}; \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

21. Escreve

$$5^{-1}; \quad (-2)^{-1}; \quad 3^0; \quad (-5)^0; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}; \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

22. Escreve:

22.1. 4; -8; -32; $-\frac{1}{8}$; e $\frac{1}{16}$, sob a forma de potência de base (-2) e de base $\left(-\frac{1}{2}\right)$;

22.2. 9; -27; 81; e $\frac{1}{729}$, sob a forma de potência de base (-3) e de base $\left(-\frac{1}{3}\right)$;

23. Calcula:

23.1. $2^{-3} - \frac{4^2}{8} + 3^0$;

23.2. $2^{-2} \times 3^3 - \frac{3^2}{2^{-3}} + 2^{-2}$;

23.3. $2^{-3} - (-2)^{-3} + (-1)^{-5}$;

23.4. $(-3)^{-2} \times \left(-\frac{1}{18}\right)^{-1} - 3^0$

24. Considera a expressão

$$a^0 - a^{-1} + a^{-2} - a^{-3}$$

Calcula o seu valor para:

24.1. $a = -1$

24.2. $a = 2$

25. Escreve sob a forma de uma única potência:

25.1. $5^{-3} \times 7^{-3}$; **25.2.** $(-8)^{-10} \div 4^{-10}$;

25.3. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-20} \div \left(-\frac{1}{4}\right)^{-20}$; **25.4.** $9^0 \div 9^{-3}$

Como $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ também se pode calcular da seguinte forma:

$$\frac{2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (-2)^{-5}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-2)^5}{2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{27} \cdot (-32)}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{32}{27}}{\frac{1}{2}} = -\frac{32}{27} \cdot 2 = -\frac{64}{27}$$

$$7.5. \frac{3^{-7} \div (2^{-7} \times 2^{-7})}{2^0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7} + 3^{-1} - (-1)^{-4}$$

Para facilitar os cálculos e a simplificação também se podem transformar as potências de expoente positivo em expoente negativo:

$$\frac{3^{-7} \div (2^{-7} \times 2^{-7})}{2^0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7} + 3^{-1} - (-1)^{-4} = \frac{3^{-7} \div 4^{-7}}{1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{-7}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-7}} + \frac{1}{3} - 1 = 1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

2.4. Potências de base 10

Com a ajuda das potências de base 10, de expoente positivo ou negativo, é mais fácil a leitura, a escrita e os cálculos de números muito grandes ou muito pequenos.

Já sabemos que:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

Se observares bem consegues relacionar o expoente da base 10 com o número de zeros à **direita** da unidade.

Actividades de aplicação

26. Efectua e simplifica:

$$26.1. 11^{-13} \div 11^{-12} \div 11^{-3};$$

$$26.2. \frac{3^{-7} \times 4^{-7}}{12^{-7} \times 12^{-2}}; \quad 26.3. (-5)^4 \cdot \frac{(-5)^{-11}}{(-5)^{-9}};$$

$$26.4. \frac{8^{-12} \div 2^{-12} \cdot 4^7}{4^0 \cdot 4^{-4}};$$

$$26.5. (7^{-2})^{-5} \times \left[\left(-\frac{1}{7} \right)^2 \right]^{-1} \div (7^4)^3;$$

$$26.6. (5^{-2} \times 3^{-2})^2 \div (5^{-2})^2;$$

27. Calcula:

$$27.1. \left(\frac{1}{5}\right)^{-25} \times 5^{-27}; \quad 27.2. \frac{(5^{-3} \times 4^3)^{-2}}{2^{-6}} - \frac{5^6}{8^2};$$

$$27.3. \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3^2 \right]^5 \times \left(\frac{1}{13}\right)^{-13};$$

$$27.4. \left[-(-2)^2 \right]^{-3} \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times (-0,5)^{-4};$$

$$27.5. 7^{-3} \times 7 \div 4^{-2} - \left[\left(\frac{7}{4}\right)^2 \right]^{-1};$$

$$27.6. \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{2^0}{3} \right]^3 \times \left(\frac{2^2}{3}\right)^5}{(5^0 - 4^{-1})^{-2}}.$$

28. Escreve usando potências de 10:

28.1. 1 milhão

28.2. 10 milhões

28.3. 100 milhões

28.4. 10 000 milhões

29. Escreve como uma potência de 10:

$$29.1. 10^5 \times 10^{-1} \times 10^{-3}$$

$$29.2. [(0,01)^{-2}]^5$$

Expoente **zero** $10^0 = 1$ **nenhum** zero à direita do 1
 Expoente **um** $10^1 = 10$ **um** zero à direita do 1
 Expoente **dois** $10^2 = 10 \times 10 = 100$ **dois** zeros à direita do 1

Observa:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1; \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01;$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001; \quad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001;$$

Também aqui podes relacionar o expoente de base 10 com o número de zeros à **esquerda** da unidade:

Expoente **-1** $10^{-1} = 0,1$; **um** zero à esquerda do 1

Expoente **-2** $10^{-2} = 0,01$; **dois** zeros à esquerda do 1

A potência de base 10 e expoente positivo é igual à unidade colocando à **direita** o número de zeros indicado pelo expoente.

$$10^n = 1 \underbrace{00\dots0}_n \text{ zeros}$$

A potência de base 10 e expoente negativo é um número do tipo 0,00...1 em que o número de zeros colocados à **esquerda** da unidade é igual ao valor absoluto do expoente.

$$10^{-n} = \underbrace{0,00\dots01}_n \text{ zeros}$$

➤ Multiplicar um número por uma potência de 10

Para multiplicar por $10^1, 10^2, \dots, 10^5, \dots$ desloca-se a vírgula de :	Para multiplicar por $10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-5}, \dots$... desloca-se a vírgula de :
[1] casa para a direita $\downarrow \quad \downarrow$ $72,41 \times 10^1 = 724,1$ [2] casas para a direita $\downarrow \quad \downarrow$ $880 \times 10^2 = 88\,000$... [5] casas para a direita $\downarrow \quad \downarrow$ $8,3 \times 10^5 = 830\,000$	[1] casa para a esquerda $\downarrow \quad \downarrow$ $8,41 \times 10^{-1} = 0,841$ [2] casas para a esquerda $\downarrow \quad \downarrow$ $814,5 \times 10^{-2} = 8,145$... [5] casas para a esquerda $\downarrow \quad \downarrow$ $18,9 \times 10^{-5} = 0,000\,189$

Nota

10^6 um milhão

$(10^6)^2$ um bilhão

$(10^6)^3$ um trilião

$(10^6)^4$ um quadrilião

2.5. Notação científica

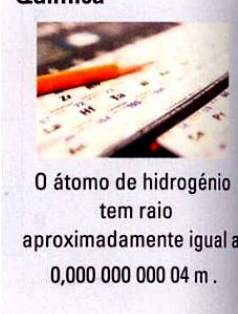
Astronomia



Medicina



Química



Repara que os números 150 000 000 km e 0,000 000 000 04 m estão escritos em forma normal (um número inteiro e um número decimal).

Números como estes, onde figuram muitos zeros, são difíceis de ler, de escrever e também é complicado efectuar cálculos com eles.

Por isso criou-se uma forma diferente de os escrever à qual se chama **notação científica**.

Um número positivo está escrito em **notação científica** se tem a forma $a \times 10^n$, onde a é um número inteiro ou decimal menor que 10 e maior ou igual a 1 e n é um número inteiro

$$150\,000\,000 = 1,5 \times 10^8$$

$$0,000\,000\,000\,04 = 4 \times 10^{-11}$$

Na escrita em notação científica debes ter sempre presente:

Calculadora

Nas calculadoras os números escritos em notação científica aparecem nas seguintes formas:

$$150\,000\,000 \longrightarrow 1,5 E^8$$

$$0,000\,000\,000\,04 \longrightarrow 4 E^{-11}$$

Isto significa que a letra E substitui o número 10.

Também podem aparecer na forma normal:

$$150\,000\,000 \longrightarrow 1,5 \times 10^8$$

$$0,000\,000\,000\,04 \longrightarrow 4 \times 10^{-11}$$

1º

A primeira parte é um número a , $1 \leq a < 10$, e pode ser inteiro ou decimal.

2º

O número a vem sempre multiplicado por uma potência de 10.

3º

O expoente de 10 é um número inteiro.

$$1,5 \times 10^8$$

Exemplos

Número	Notação científica
814,3	$8,143 \times 10^2$
$80,1 \times 10^{-15}$	$8,01 \times 10^{-14}$
$-0,3152 \times 10^{-5}$	$-3,152 \times 10^{-6}$

Nota:

Um número negativo também pode ser escrito em notação científica. Por exemplo, $-0,0003 = -3 \times 10^{-4}$

Repara que qualquer número pode ser escrito em notação científica:

$$3 = 3 \times 10^0; \quad 0,5 = 5 \times 10^{-1}; \quad 950 = 9,5 \times 10^2$$

Por outro lado, todos os números positivos estão compreendidos entre duas potências de 10 consecutivas.

$$\text{Se } a = 8,17 \times 10^4, \text{ então } 10^4 < a < 10^5.$$

$$\text{Se } a = 8,17 \times 10^{-4}, \text{ então } 10^{-5} < a < 10^{-4}.$$

➤ Escrever em notação científica

Exemplo 8

Escreve em notação científica:

8.1. 108 000 000 km (distância de Vénus ao Sol)

8.2. 0,000 000 000 023 m (comprimento de onda dos raios X)

8.3. $127,56 \times 10^2$ km (diâmetro da Terra)

Resolução

Vamos escrever cada um dos números dados como produto de um número inteiro ou decimal menor que 10 e maior ou igual a 1 por uma potência de 10, ou seja na forma $a \times 10^n$, onde $1 \leq a < 10$.

8.1. $108\,000\,000 = 1,08 \times 10^?$

$$108\,000\,000 = 1,08 \times 10^?$$

8 casas

$$108\,000\,000 = 1,08 \times 10^8$$

Escreve-se 1,08. Contam-se as casas decimais de deslocação da vírgula. A vírgula desloca-se 8 casas decimais para a esquerda. O expoente do 10 é 8.

Actividades de aplicação

30. Completa:

30.1. $45000 = 4,5 \times 10^{\dots}$; **30.2.** $120 = 1,2 \times 10^{\dots}$

30.3. $0,09 = 9 \times 10^{\dots}$; **30.4.** $12,05 = 1,205 \times 10^{\dots}$

30.5. $0,00235 = 2,35 \times 10^{\dots}$

30.6. $321,05 = 3,2105 \times 10^{\dots}$

31. Escreve os seguintes números em notação científica:

31.1. 600 000 **31.2.** 0,37 **31.3.** 0,005

31.4. 0,0537 **31.5.** 3 mil **31.6.** 0,000045

31.7. 281 512 **31.8.** 2,3 milhões

31.9. 820 000 000 **31.10.** 0,000 000 000 035

31.11. 350 000 **31.12.** 2 milésimas

8.2. $0,000\ 000\ 000\ 023 = 2,3 \times 10^7$

11 casas

$0,000\ 000\ 000\ 023 = 2,3 \times 10^{-11}$

Escreve-se 2,3.

A vírgula desloca-se 11 casas para a direita.

O expoente do 10 é -11.

8.3. $127,56 \times 10^2 = 1,2756 \times 10^2 \times 10^2$

2 casas

Escreve-se $1,2756 \times 10^2$.

A vírgula desloca-se 2 casas para a esquerda. O expoente do 10 é 2.

Aplica-se a propriedade do produto de potências com a mesma

$127,56 \times 10^2 = 1,2756 \times 10^2 \times 10^2$

$= 1,2756 \times 10^2$

Exemplo 9

Escreve, usando a escrita normal:

9.1. $4,878 \times 10^3$ km (diâmetro de Mercúrio)

9.2. $6,6 \times 10^{-11}$ m (raio do átomo de oxigénio)

Resolução

Para cada número vamos atender ao sinal e valor absoluto da potência de 10. O expoente, em valor absoluto, indica o número de casas decimais que a vírgula de desloca e o sinal indica se a vírgula se move para a direita ou para a esquerda.

9.1. $4,878 \times 10^3 = 4878$

3 casas

O expoente de 10 é 3.

A vírgula desloca-se 3 casas para a direita.

9.2. $6,6 \times 10^{-11} =$

$0,000\ 000\ 000\ 066$

11 casas

O expoente de 10 é -11. A vírgula desloca-se 11 casas para a esquerda.

Exemplo 10

Considera a seguinte tabela onde estão registadas em notação científica as distâncias médias de todos os planetas do Sistema Solar ao Sol.

Planeta	Distância ao Sol (km)
Saturno	$1,427 \times 10^9$
Úrano	$2,869 \times 10^9$
Marte	$2,279 \times 10^8$
Terra	$1,496 \times 10^8$
Neptuno	$4,505 \times 10^9$
Mercúrio	$5,79 \times 10^7$
Júpiter	$7,783 \times 10^8$
Vénus	$1,082 \times 10^8$



10.1. Qual é o planeta mais próximo do Sol?

Vamos observar qual é o número em que o expoente de 10 é menor.

Mercúrio dista $5,79 \times 10^7$ km do Sol.

10.2. Qual é o planeta mais afastado do Sol?

Se observarmos a tabela verificamos que há três planetas cuja distância se escreve com um número na forma $a \times 10^9$: Saturno, Úrano e Neptuno. Verifiquemos em qual destes a é um número maior.

Neptuno é o planeta mais distante do Sol : $4,505 \times 10^9$ km

Actividades de aplicação

32. Escreve em notação científica os números referidos nas frases seguintes:

32.1. Um vírus tem

$0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 457$ cm de comprimento.

32.2. A velocidade da luz é de $300\ 000$ km/s.

32.3. A Terra gira á volta do Sol a uma velocidade de $34\ 400\ 000$ m/s.

32.4. A Bíblia tem cerca de 7,5 milhões de palavras.

32.5. Em Novembro de 2002 afundou-se o navio Prestige com cerca de $300\ 000\ 000$ kg de crude.

33. Qual é o número que deve estar no lugar de $\square$?

33.1. $210 \times 10^2 = 2,1 \times 10^{\square}$

33.2. $0,52 \times 10^{-2} = 5,2 \times 10^{\square}$

33.3. $0,0004 \times 10^{-1} = 4 \times 10^{\square}$

33.4. $\square \times 10^{-3} = 5,2 \times 10^5$

33.5. $12,3 \times \square = 1,23 \times 10^8$

33.6. $15,4 \times 10^{-3} = \square \times 10^{-2}$

34. A tabela abaixo mostra o raio (em metros) e a massa (em kg) dos átomos de oxigénio (O), de hidrogénio (H) e de carbono (C).

Átomo	Raio (m)	Massa (kg)
O	$6,6 \times 10^{-11}$	2660×10^{-27}
H	40×10^{-12}	$16,7 \times 10^{-28}$
C	$77,2 \times 10^{-12}$	$1,99 \times 10^{-26}$

34.1. Dos números da tabela, quais estão escritos em notação científica?

34.2. Constrói uma tabela com a mesma informação mas em que todos os números estejam escritos em notação científica.

34.3. Escreve:

a) por ordem crescente os raios dos três átomos;

b) por ordem decrescente as massas dos três átomos.

Como podemos comparar números escritos em notação científica?

1º - Comparamos os expoentes de 10.

2º - Se houver expoentes iguais, comparamos em seguida os números inteiros ou decimais que representam a no número escrito na forma $a \times 10^n$.

Já observámos duas vantagens da escrita de números em notação científica:

- Um número muito grande ou muito pequeno necessita de poucos dígitos para ser escrito.
- Facilita a comparação de números muito grandes ou muito pequenos.

Outra vantagem consiste na facilidade de cálculos.

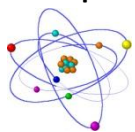
Exemplo 11

Um ano-luz (a. l.) equivale a $9,46 \times 10^{12}$ km. O horizonte do Universo observável dista $2,5 \times 10^{10}$ a. l. da Terra. Escreve esta distância em km.

Resolução

$$9,46 \times 10^{12} \times 2,5 \times 10^{10} = 9,46 \times 2,5 \times 10^{12} \times 10^{10} \\ = 23,65 \times 10^{22} = 2,365 \times 10^{23}$$

Exemplo 12



Em Química, calcula-se, aproximadamente, a massa (em g) de um átomo de ouro dividindo $1,98 \times 10^2$ por 6×10^{23} .

Qual é aproximadamente a massa de um átomo de ouro?

Resolução

$$\frac{1,98 \times 10^2}{6 \times 10^{23}} = \frac{1,98}{6} \times \frac{10^2}{10^{23}} = 0,33 \times 10^{-21} = 3,3 \times 10^{-22}$$

Um átomo de ouro tem aproximadamente a massa de $3,3 \times 10^{-22}$ g

Exemplo 13

Calcula a diferença, em kg, entre a massa de um átomo de lítio e a massa de um átomo de hidrogénio.

Lítio $\rightarrow 1,15 \times 10^{-26}$ kg; hidrogénio $\rightarrow 1,67 \times 10^{-27}$ kg;

Resolução

Escrevemos as duas potências de 10 com o mesmo expoente para em seguida aplicarmos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

Nota: $1,67 \times 10^{-27} = 0,167 \times 10^{-26}$

$$1,15 \times 10^{-26} - 1,67 \times 10^{-27} = 1,15 \times 10^{-26} - 0,167 \times 10^{-26}$$

$$= (1,15 - 0,167) \times 10^{-26} = 0,983 \times 10^{-26} = 9,83 \times 10^{-27}$$

Um átomo de lítio tem mais $9,83 \times 10^{-27}$ kg que um átomo de hidrogénio.

Actividades de aplicação

35. Considera a seguinte tabela:

Planeta	Diâmetro médio (m)
Mercúrio	$4,9 \times 10^6$
Marte	$6,8 \times 10^6$
Terra	$1,3 \times 10^7$

35.1. Qual dos planetas tem maior diâmetro?

35.2. Qual dos planetas tem menor diâmetro?

35.3. Calcula a diferença entre os diâmetros de Terra e de Marte.

36. Calcula apresentando os resultados em notação científica:

36.1. $43 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^{-2}$; 36.2. $53 \times 10^5 \times 0,53 \times 10^{-5}$;

36.3. $0,025 \times 10^5 \times 0,04 \times 10^{-8}$;

36.4. $\frac{0,5 \times 10^{-3} \times 0,002 \times 10^8}{4 \times 10^{-3} \times 10^5}$; 36.5. $56 \times 10^4 \div 2 \times 10^{-2}$

36.6. $512 \times 10^{12} - 2 \times 10^{13}$; 36.7. $0,3 \times 10^{11} + 21,3 \times 10^8$

36.8. $0,2 \times 10^{-5} - 0,1 \times 10^{-7}$; 36.9. $99 \times 10^{-7} - 9 \times 10^{-6}$

36.10 $13 \times 10^{-4} + 54 \times 10^{-5}$;

36.11 $-2 \times 10^{-50} + 3 \times 10^{-47}$;

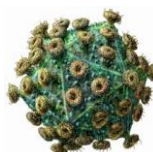
37. Os continentes ocupam 149 milhões de km^2 da superfície terrestre e os oceanos $361 \times 10^8 \text{ km}^2$. Qual a diferença entre as duas superfícies?

38. Um óvulo humano tem de diâmetro 1×10^{-2} cm e a espessura de um cabelo é 0,008 cm.

38.1. Qual dos dois valores é maior? Quantas vezes é maior?

38.2. Se colocássemos um bilião de cabelos lado a lado, quantos quilómetros teríamos que percorrer para realizar esta tarefa? Apresenta o resultado em notação científica.

39. O vírus da SIDA tem 1×10^{-7} m de diâmetro.



Quantos vírus seriam necessários para, encostados uns aos outros, formarem uma linha circular com 2 mm de diâmetro?

40. Em Cuba vive o colibri, que é a ave mais pequena que conhece. A massa do colibri é 0,002 kg e mede 0,065 m.

40.1. Escreve em notação científica os números referidos no texto.

40.2. Se a massa de um parasita for de 5×10^{-9} kg e um colibri comer por dia o equivalente à quarta parte da sua massa, quantos parasitas come por dia?



Unidade 3 – Equações

3.1. Equações do 1º grau – equações com denominadores

Regras para a resolução de equações

Regra da adição: Se numa equação passarmos um termo de um membro para o outro, trocando-lhe o sinal, obtemos uma equação equivalente à dada.

Exemplo: $2x + 3 = 7 + x \Leftrightarrow 2x - x = 7 - 3 \Leftrightarrow x = 4$

Regra da multiplicação: Se numa equação multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros por um número diferente de zero obtém-se uma equação equivalente à dada.

Exemplo: $2x + 3 = 7 + x \Leftrightarrow 2 \cdot (2x + 3) = 2 \cdot (7 + x) \Leftrightarrow 4x + 6 = 14 + 2x$

Exemplo 1

O professor de História da turma A da 8ª classe perguntou ao professor de Matemática se ele sabia quais eram os passatempos preferidos dos alunos da turma. O professor respondeu: “metade preferem passear, a quarta parte gosta de jogar futebol, a sétima parte gostam de ler e há ainda três que não têm nenhum passatempo preferido.” Quantos alunos tem a turma A?

Vamos descobrir quantos alunos tem a turma A através de uma equação do 1º grau.

Considerando que x (incógnita) representa o número total de alunos da turma teremos:

$\frac{x}{2} \rightarrow$ “metade preferem passear”; $\frac{x}{4} \rightarrow$ “a quarta parte gosta de jogar futebol”; $\frac{x}{7} \rightarrow$ “a sétima parte gostam

de ler”; 3 os que não têm passatempo preferido. Então:

$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$ é a equação que traduz o problema apresentado.

Resolução de uma equação com denominadores

$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$	Em primeiro lugar vamos escrever os termos com o mesmo denominador (igualar os denominadores).
$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + \frac{3}{1} = \frac{x}{1}$ (14) (7) (4) (28) (28)	O m. m. c. (2, 4, 7) = 28. Atribuímos denominador 1 aos termos que não têm denominador, multiplicamos todas as frações por um determinado número, de forma a obtermos frações equivalentes com o mesmo denominador 28.
$\frac{14x + 7x + 4x + 84}{28} = \frac{28x}{28}$ $\frac{28 \times (14x + 7x + 4x + 84)}{28} = 28 \times \frac{28x}{28}$	Aplicando a regra da multiplicação, multiplica-se por 28 ambos os membros da equação. Repara que ao multiplicarmos todos os termos por 28 e a seguir dividirmos por 28, obtemos a equação:
$14x + 7x + 4x + 84 = 28x$	Aplicando a regra da adição vamos transpor os termos com incógnita para o 1º membro e os termos independentes para o 2º membro, trocando-lhes o sinal.
$14x + 7x + 4x - 28x = -84$	Somamos algebricamente todos os termos semelhantes.
$-3x = -84 \Leftrightarrow x = \frac{-84}{-3} \Leftrightarrow x = 28$	Calcula-se o valor da incógnita.

Logo, a turma A da 8ª classe tem 28 alunos.

Exemplo 2

Resolve cada uma das seguintes equações:

2.1. $\frac{x}{2} + 3 = 6x + \frac{x}{2}$; **2.2.** $2(x - 3) = \frac{1}{2}x$

Resolução

2.1. $\frac{x}{2} + 3 = 6x + \frac{x}{2}$. Observando ambos os membros da equação verifica-se que o termo $\frac{x}{2}$ aparece nos dois membros. Então usando a regra da adição, pode escrever-se:

$$\frac{x}{2} + 3 = 6x + \frac{x}{2} \Leftrightarrow 3 = 6x \Leftrightarrow x = \frac{3}{6} \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

A solução: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2.2. $2(x-3) = \frac{1}{2}x$. A equação tem parênteses e denominadores. Em primeiro lugar, escrevemos uma equação equivalente sem parênteses e, em segundo lugar, outra equivalente sem denominadores.

$$2(x-3) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2x-6 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{1} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{4x-12}{2} = \frac{x}{2} \quad (1)$$

(2)

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{4x-12}{2} = 2 \times \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-12 = x \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 4x-12 = x \Leftrightarrow 4x-x=12 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

$$S = \{4\}$$

Nota:

Da equação (1) pode passar-se imediatamente para a equação (2).

Se duas fracções são iguais e têm igual denominador, então têm igual numerador.

Exemplo 3

O filho do dono de uma grande empresa de aluguer de automóveis, perguntou ao pai:

- Quantos carros temos na empresa?

O pai respondeu:

- Anteontem tinha todos os carros na garagem, ontem aluguei um terço, hoje aluguei metade dos restantes e, neste momento, há 20 carros na garagem.

Quantos carros tem a empresa?

Resolução

Seja:

$x \rightarrow$ número de carros da empresa

$\frac{x}{3} \rightarrow$ terça parte do número de carros

$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{3}\right) \rightarrow$ metade dos restantes

Então:

$\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{3}\right) + 20 = x$ é a equação que traduz o problema.

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x}{3}\right) + 20 = x \quad \text{Tirar os parenteses}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{6} + \frac{20}{1} = \frac{x}{1} \quad \text{Reduzir ao mesmo denominador,}$$

$$(2) \quad (3) \quad (1) \quad (6) \quad (6) \quad \text{m. m. c. (3, 2, 6) = 6}$$

Actividades de aplicação

1. Resolva as seguintes equações:

1.1. $2x-5=3x+7$ 1.2. $-4x+17=3x+3$

1.3. $2x-3(x+1)=0$

1.4. $-(-b+3)-2(b+5)=-1$

1.5. $100+(-10x-80)+800=-3(-10x)$

1.6. $0,2-3(x-3)=-(-1+x)$

2. A mãe do Valder tem 45 anos e o Valder tem 20. Daqui a quantos anos terá a mãe o dobro da idade do Valder?

3. A Márcia, o Rolando e o Denilson foram apanhar mangas.

A Márcia colheu três vezes mais que o Rolando e o Denilson colheu mais quatro que os outros dois em conjunto.

No total colheram 212 mangas.

Quantas colheu cada um?

$$\frac{2x}{6} + \frac{3x}{6} - \frac{x}{6} + \frac{120}{6} = \frac{6x}{6} \quad \text{Tirar denominadores}$$

$$2x + 3x - x + 120 = 6x \quad \text{Aplicar a regra da adição}$$

$$2x + 3x - x - 6x = -120 \quad \text{Simplificar os termos}$$

$$-2x = -120 \Leftrightarrow x = \frac{-120}{-2} \Leftrightarrow x = 60$$

Verificação

$$\frac{60}{3} + \frac{1}{2} \left(60 - \frac{60}{3} \right) + 20 = 60$$

$$20 + \frac{1}{2} (40) + 20 = 60$$

Logo, na empresa havia 60 carros.

Exemplo 4

Determina três números inteiros consecutivos sabendo que a diferença entre a terça parte do maior e a quarta parte do menor é igual ao do meio dividido por 12.

Resolução

Exemplo de três números inteiros consecutivos: 14, 15 e 16.

Se x é o número do meio, os três números inteiros consecutivos podem ser representados por

$$x-1, \quad x, \quad x+1$$

$$\frac{x+1}{3} \rightarrow \text{terça parte do maior;}$$

$$\frac{x-1}{4} \rightarrow \text{quarta parte do menor;}$$

$$\frac{x}{12} \rightarrow \text{o do meio a dividir por 12.}$$

Então a equação que traduz o problema é:

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{4} = \frac{x}{12} \quad \text{m. m. c. (3, 4, 12) = 12}$$

(4) (3) (1)

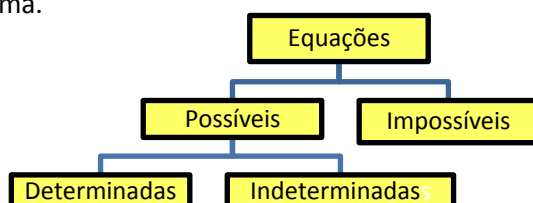
Tirar denominadores

$$4x + 4 - 3x + 3 = x \quad \text{Nota: o sinal (-) que se encontra antes da fracção afecta todos os termos do numerador.}$$

$$4x + 4 - 3x + 3 = x \Leftrightarrow 4x - 3x - x = -4 - 3$$

$$0x = -7$$

A equação é impossível. Logo, não existem três números inteiros consecutivos na resolução do problema.



Nota:

Na resolução de problemas usando equações, ajuda seguir o seguinte método:

1ª Leitura → debes ler o enunciado do problema muito bem, de modo a seres capaz de reproduzir pelas tuas próprias palavras a “história” do problema.

2ª Dados → Deves tomar nota dos dados. Se for um problema geométrico debes fazer uma figura e colocar nela os dados.

3ª Incógnita → Depois de reflectires sobre os dados e o que pretendes obter, terás que escolher uma letra (a incógnita) para representares um número desconhecido, de tal modo que, conhecido esse número se encontre uma solução para o problema.

4ª Equacionar o problema → escreve uma equação que traduza o problema. Se necessário recorre a fórmulas conhecidas.

5ª Resolver a equação → Resolve a equação que escreveste.

6ª Interpretar o resultado → Verifica se o valor encontrado para a incógnita satisfaz as condições do problema.

Actividades de aplicação

4. Resolve as seguintes equações:

4.1. $a - \frac{1}{3} = 7a$

4.2. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4x}{15}$

4.3. $\frac{1}{3}x - \frac{5}{2} = 2 - x$

4.4. $\frac{2b+1}{6} + \frac{-b+5}{9} = 1$

4.5. $2x - \frac{x+1}{4} = 3 + \frac{x-1}{8}$

4.6. $\frac{1-7y}{5} - \frac{2y-10}{7} = -y$

4.7. $2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) = 5$

4.8. $\frac{2(3x+1)}{5} = 1 - \frac{x-1}{3}$

4.9. $\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{3(x+1)}{5} = 0$

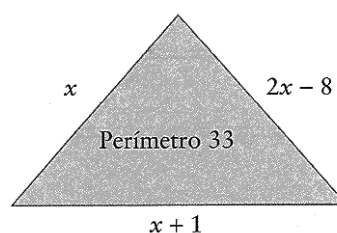
5. A figura representa um paralelogramo.



Determina as dimensões do paralelogramo sabendo que o seu perímetro é 80 cm.

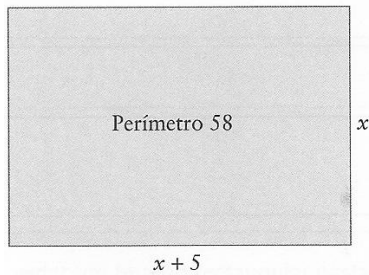
6. As medidas indicadas são em centímetros. Determina x .

6.1.

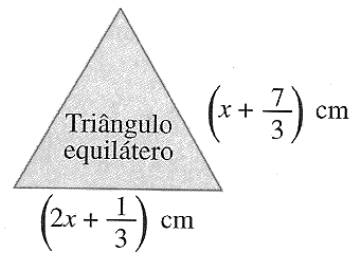


Actividades de aplicação

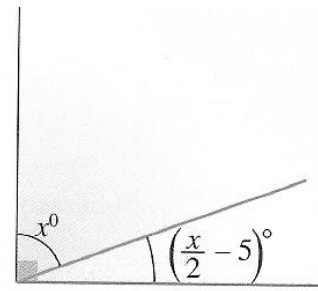
6.2.



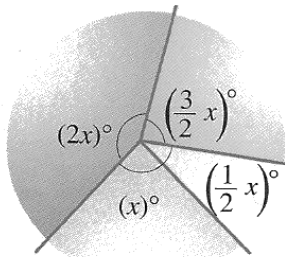
6.3.



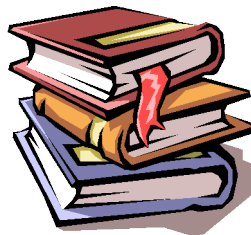
6.4.



6.5.



7.



A Solange foi à feira do livro da sua escola e gastou metade do dinheiro que levava num livro. Em seguida foi comprar um chocolate e gastou a quinta parte do dinheiro que lhe tinha sobrado do livro.

Determina quanto dinheiro levava a Solange se lhe sobraram 200.000 dobras.

8. O Sr. Lima distribuiu 520 mil dobras pelos seus filhos André, Vilma e Teresa. A Vilma recebeu $\frac{2}{5}$ do dinheiro do André e a Teresa recebeu $\frac{5}{6}$ do dinheiro da Vilma. Quanto recebeu cada um dos filhos do Sr. Lima?

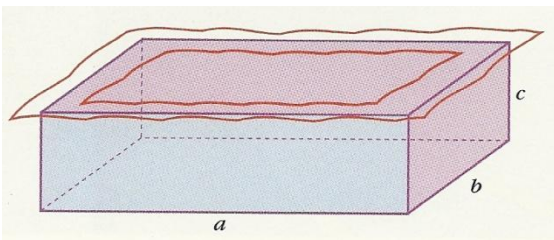
9. Um pai tem 30 anos a mais que o seu filho. Se o filho tivesse nascido dois anos mais cedo a sua idade seria, actualmente, a terça parte da idade do pai. Calcula a idade actual do filho.

10. A idade da avó Sam Ginga

Vovó Sam Ginga adora fazer “contas de cabeça” e apesar da sua idade lança desafios aos netos e bisnetos. No dia do *bocado*, com toda a família reunida no seu *quinté*, um dos seus muitos netos perguntou-lhe a idade. Vovó, com olhar maroto e sorriso de ternura, disse-lhe:

- “Desde que nasci e até começar a labutar como lavadeira passou a sexta parte da minha idade; mais um doze avos da minha idade passou e casei com o vosso avô Sum Mé Novo. Passou a sétima parte da minha idade, e numa vida de cansa e labuta tive os meus cinco filhos. Com metade da idade que tenho agora nasceu o meu primeiro neto e passados nove anos vim morar neste *lucham* onde estamos juntos a festejar *bocado*. Quantos anos tenho eu?” Os netos fizeram muitas contas, disseram que a avó era muito complicada, mas por fim acabaram por descobrir a sua idade. Descobre também tu a idade da avó Sam Ginga.

3.2. Equações literais



Uma caixa tem a forma de um paralelepípedo rectângulo de dimensões a , b e c . Para proteger a caixa, todas as arestas serão cobertas com fita cola.

Pretende-se escrever uma fórmula que permita calcular a soma dos comprimentos de todas as arestas da caixa. Observando a caixa, verifica-se que ela tem 4 arestas dos comprimentos

referidos.

Assim, se y for a soma dos comprimentos de todas as arestas, vem:

$$y = 4a + 4b + 4c \quad \text{ou} \quad y = 4(a + b + c).$$

A equação $y = 4(a + b + c)$ é uma equação literal.

Chama-se equação literal a uma equação onde aparecem uma ou mais letras para além da incógnita.

São equações literais:

- $V = abc$ (fórmula para determinar o volume de um paralelepípedo)
- $P = 2x + 2y$ (fórmula para determinar o perímetro de um rectângulo)
- $A = \pi r^2$ (fórmula para determinar a área de um círculo)
- $Cm = \frac{m_{\text{sóluto}}}{v_{\text{solução}}}$ (fórmula química para determinar a concentração mássica)

As equações literais são de uma importância muito grande para a resolução de problemas relacionados com outras áreas, tais como a Física, a Química, a Economia, etc.

Exemplo 5

Um foguete é lançado na vertical com a velocidade inicial a metros por segundo. Passados t segundos a velocidade v do foguete é dada por:

$$v = a + gt \quad (g \text{ é uma constante})$$

5.1. Calcula a velocidade v , quando $a = 110$; $g = -9,8$ e $t = 5$ e interpreta o resultado.

5.2. Escreve t em função de v e calcule t quando $a = 93,5$; $g = -9,8$ e $v = 20$. Interpreta o resultado.

Resolução

5.1. $v = a + gt$

$$a = 110; g = -9,8 \text{ e } t = 5$$

Substituindo na fórmula as variáveis, vem:

$$v = 110 + (-9,8) \times 5$$

$$v = 61$$

De acordo com os dados, 5 segundos após o lançamento a velocidade do foguete era de 61 m/s.

$$\mathbf{5.2.} \quad v = a + gt \Leftrightarrow v - a = gt \Leftrightarrow t = \frac{v - a}{g} \quad (g \neq 0)$$

Calcule-se t , se:

$a = 93,5$; $g = -9,8$ e $v = 20$. Substituindo na fórmula vem:

$$t = \frac{20 - 93,5}{-9,8} \Leftrightarrow t = 7,5$$

Nas condições do enunciado, um foguete lançado à velocidade inicial de 93,5 m/s encontra-se à velocidade de 20 m/s ao fim de 7,5 segundos.

Exemplo 6

Numa corrida de ciclismo na montanha o tempo t , em minutos para um ciclista subir s km e descer d km é dado pela fórmula: $t = 15s + 3d$.

6.1. Resolve a equação em ordem a d .

6.2. Determina t , sendo $s = 1,5$ e $d = 2$.

Resolução

$$\mathbf{6.1.} \quad t = 15s + 3d \Leftrightarrow t - 15s = 3d \Leftrightarrow d = \frac{t - 15s}{3} \Leftrightarrow d = \frac{t}{3} - \frac{15s}{3} \Leftrightarrow d = \frac{1}{3}t - 5s$$

$$\mathbf{6.2.} \quad t = 15s + 3d \Leftrightarrow t = 15 \times 1,5 + 3 \times 2 \Leftrightarrow t = 22,5 + 6 \Leftrightarrow t = 28,5$$

De acordo com os dados do problema o tempo necessário para um ciclista subir 1,5 km e descer 2 km são 28,5 minutos.



Exemplo 7

À medida que um avião sobe, a temperatura do ar

fora do avião diminui. A fórmula $T = 26 - \frac{h}{500}$,

permite calcular a temperatura, T , em $^{\circ}\text{C}$, do ar, fora do avião quando este se encontra a h pés de altitude (1 pé $\approx 0,33$ metros).

Actividades de aplicação

11. Num livro de Física encontramos as seguintes fórmulas:

$$v = at; \quad e = \frac{at^2}{2}; \quad v = v_0 + at; \quad e = v_0t + \frac{at^2}{2};$$

onde:

e = espaço percorrido; v = velocidade; t = tempo

v_0 = velocidade inicial; a = aceleração

Resolve as equações em ordem a a .

7.1. Se o avião voa a 25 000 pés (aproximadamente 8 250 m) de altitude, qual é a temperatura do ar fora do avião?

7.2. Resolve a equação em ordem a h .

7.3. Se a temperatura fora do avião é de -52°C , calcula a altitude do avião em km.

Resolução

7.1.

$$T = 26 - \frac{h}{500} \Leftrightarrow T = 26 - \frac{25000}{500} \Leftrightarrow T = 26 - 50 \Leftrightarrow T = -24$$

A 25 000 pés de altitude a temperatura do ar fora do avião será de -24°C .

7.2.

$$T = 26 - \frac{h}{500} \Leftrightarrow 500T = 13000 - h \Leftrightarrow h = 13000 - 500T$$

7.3.

$$h = 13000 - 500 \times (-52) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 13000 + 26000 \Leftrightarrow h = 39000$$

Como 1 pé $\approx 0,33$ metros, fazendo a conversão para metros:

$$h = 39000 \times 0,33 \Leftrightarrow h \approx 12870$$

$$12870 \text{ m} = 12,87 \text{ km}$$

Logo, se a temperatura fora do avião for de -52°C , o avião estará a voar a aproximadamente 12,87 km de altitude.

3.3. Monómios e polinómios

Um **monómio** é uma expressão constituída por um número, por uma letra ou por um produto de números e letras, estas com expoentes naturais.

São monómios por exemplo $3x$, $\frac{xy}{2}$, a^3 , $5a^2bc$.

Num monómio distingue-se o **coeficiente** da **parte literal**.

Exemplos

$4ab \rightarrow$ coeficiente: 4; parte literal: ab

$-\frac{x}{7} \rightarrow$ coeficiente: $-\frac{1}{7}$; parte literal: x

$-x \rightarrow$ coeficiente: -1; parte literal: x

$5 \rightarrow$ coeficiente: 5; parte literal: não tem

Os monómios $4y$ e $-\frac{2}{5}y$ têm a mesma parte literal. São **monómios semelhantes**.

Monómios semelhantes são monómios que têm a mesma parte literal.

Os monómios $3x$ e $3y$ não são semelhantes porque não têm a mesma parte literal.

Dois monómios semelhantes como $7a$ e $-7a$ com coeficientes simétricos, dizem-se **monómios simétricos**.

Dois monómios são simétricos se têm a mesma parte literal e coeficientes simétricos.

Os monómios também se classificam atendendo à soma dos expoentes das letras que neles figuram.

Actividades de aplicação

12. As equações literais são utilizadas para resolver problemas em várias outras áreas. Resolve cada uma das equações em ordem à letra indicada entre parênteses:

12.1. Geometria: perímetro do círculo $P = 2\pi R$ (R);

12.2. Eletricidade $V = RI$ (I);

12.3. Economia $J = cni$ (c);

12.4. Física: fórmula de Einstein $E = mc^2$ (m);

12.5. Geometria: área total do cilindro $A = 2\pi r(g + r)$ (g);

13. Seja h a altura de uma pessoa, em centímetros, e p o peso dessa pessoa em quilogramas.

A fórmula $p = h - 100 - \frac{h - 150}{4}$ dá o peso “teórico” que uma pessoa de h deve ter.

13.1. Resolve a equação em ordem a h .

13.2. Qual é a altura que uma pessoa deve ter se tem de peso 75 kg?

13.3. Determina o teu peso “teórico”.

14. O perímetro de um rectângulo é 500 cm e as suas dimensões são x e y .

14.1. Escreve uma equação que relacione x e y .

14.2. Determina o valor de y se $x = 200$

Exemplo

Monómio	Soma dos expoentes das letras onde figuram	Grau do monómio
xy^2	$1 + 2 = 3$ ($xy^2 = x^1y^2$)	Grau 3
$2ab^3$	$1 + 3 = 4$ ($2ab^3 = 2a^1b^3$)	Grau 4
$-3x^2$	2	Grau 2
$3x$	1 ($3x = 3x^1$)	Grau 1
5	0 ($5 = 5x^0$)	Grau 0

Dado um monómio não nulo, chama-se **grau do monómio** à soma dos expoentes das letras que nele figuram

As expressões $x + y$, $-x + 2$, $x^2 - x + 1$ não são monómios. São uma soma algébrica de monómios, chamam-se **polinómios**.

Um **polinómio** é uma soma algébrica de monómios

Alguns polinómios têm nomes específicos.

Exemplo

Os polinómios $x + y$ e $-x + 2$ têm dois termos (são a soma algébrica de dois monómios), chamam-se **binómios**. O polinómio $x^2 - x + 1$ tem três termos, chama-se **trinómio**. Com mais de três termos os polinómios designam-se pelo número de termos: $x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1$ é um polinómio de 5 termos.

3.4. Adição algébrica de monómios e polinómios

➤ Redução de termos semelhantes

Qualquer expressão com monómios semelhantes pode ser simplificada. Na simplificação da expressão diz-se que se **reduzem** os termos semelhantes.

Na simplificação das expressões com monómios semelhantes usam-se as propriedades:

- comutativa $\rightarrow a + b = b + a$; $ab = ba$
- associativa $\rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$
- distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica $\rightarrow a(b + c) = ab + ac$
- elemento neutro da adição $\rightarrow a + 0 = 0 + a = a$
- elemento absorvente da multiplicação $\rightarrow a \times 0 = 0 \times a = 0$

Exemplo 8

Reduz os termos semelhantes das expressões:

8.1. $2x + 3 - 5x - 1 + x =$

8.2. $\frac{y}{2} + \frac{x}{3} + 4 + y + x =$

Resolução

8.1. $2x + 3 - 5x - 1 + x =$ Aplicando a propriedade comutativa podemos trocar a ordem das parcelas

$2x + 3 - 5x - 1 + x = 2x - 5x + x + 3 - 1 =$ Para reduzir os termos semelhantes basta somar algebricamente os coeficientes dos termos semelhantes

$2x + 3 - 5x - 1 + x = 2x + x - 5x + 3 - 1 = 3x - 5x + 2 = -2x + 2$

Atividades de aplicação

15. No jardim da casa da Vera havia x girassóis. A

Vera colheu $\frac{1}{4}$ dos girassóis para pôr numa jarra.

Ainda lhe juntou 5 rosas de porcelana.

15.1. Qual é o significado das expressões?

a) $\frac{1}{4}x$ b) $x - \frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}x + 5$

15.2. Completa a tabela seguinte:

Monómio	Coefficiente	Parte literal	Grau
x			
$\frac{1}{4}xy^2$			
-5			

15.3 Escreve o monómio simétrico de $-\frac{x}{4}$.

15.4. Admite que no jardim havia 88 girassóis.

a) Quantos girassóis colheu a Vera?

b) Quantas flores tinha o ramo que a Vera pôs na jarra?

8.2. $\frac{y}{2} + \frac{x}{3} + 4 + y + x =$ Nos termos em y é necessário colocar o denominador 2, pois m. m. c. (1, 2) = 2

$$= \frac{y}{2} + \frac{y}{1} + \frac{x}{3} + \frac{x}{1} + 4 = \text{Nos termos em } x \text{ é necessário colocar o denominador 3, pois m. m. c. (1, 3) = 3}$$

(1) (2) (1) (3)

$$= \frac{y}{2} + \frac{2y}{2} + \frac{x}{3} + \frac{3x}{3} + 4 = \frac{3y}{2} + \frac{4x}{3} + 4$$

Exemplo 9

Simplifica as expressões depois de lhe tirares os parênteses:

9.1. $-2(x-1)-3\left(\frac{x}{2}+5\right)$

9.2. $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{1}{2}(x+y)$

Resolução

Começamos por tirar os parênteses às expressões. Em seguida identificamos os termos semelhantes para as reduzir.

9.1. $-2(x-1)-3\left(\frac{x}{2}+5\right) = -2x+2-\frac{3x}{2}-15 =$

$$= -\frac{2x}{1} - \frac{3x}{2} + 2 - 15 = -\frac{4x}{2} - \frac{3x}{2} - 13 =$$

(2)

$$= -\frac{7x}{2} - 13$$

9.2. $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{1}{2}(x+y) =$

$$= \frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{3x-3-2x-6-3x}{6} - \frac{y}{2} =$$

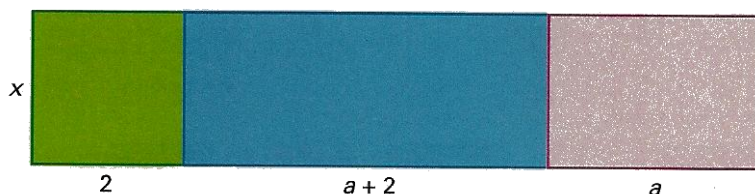
(3) (2) (3)

$$= \frac{-2x}{6} - \frac{9}{6} - \frac{y}{2} = -\frac{x}{3} - \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$$

3.5. Produto de um monómio por um polinómio

Exemplo 10

A figura representa um rectângulo dividido em três rectângulos. Escreve uma expressão com parênteses e outra sem parênteses para representar a área respectiva.

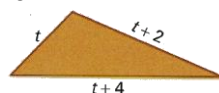


Vamos aplicar a fórmula da área do rectângulo. A altura é x e a base é $2+a+2+a$.

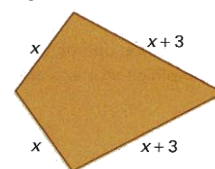
Actividades de aplicação

16. Escreve uma expressão simplificada que represente o perímetro de cada uma das figuras:

16.1.



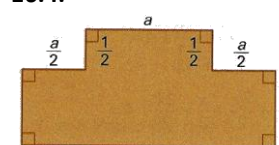
16.2.



16.3.



16.4.



17. Depois de tirar os parênteses, reduz os termos semelhantes.

17.1. $-(x-1)+(3x-7)$

17.2. $-2(x-1)-3(x+2)$

17.3. $-2a-b-(-3b+a)$

17.4. $5-2\left(\frac{x-1}{4}\right)-\frac{x}{2}$ **17.5.** $\frac{a}{3}-\left(\frac{a-1}{2}-3\right)$

17.6. $-\frac{x-1}{2}-3x-1-\left(-\frac{1}{2}x-1\right)$

17.7. $0,2-3(x-1)-\frac{x-1}{3}$

Resolução

Expressão com parênteses

$$x(2 + a + 2 + a) = x(4 + 2a)$$

Expressão com parênteses

Expressão sem parênteses

$$x(2 + a + 2 + a) =$$

$$= 2x + ax + 2x + ax =$$

$$= 4x + 2ax$$

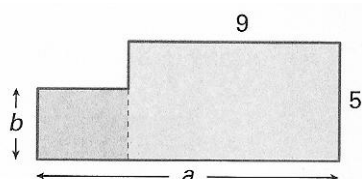
$x \times 2$, área do retângulo da esquerda

$x(a + 2)$, área do retângulo do meio

$x \times a$, área do retângulo da direita

Exemplo 11

A figura é formada por dois rectângulos. Escreve uma expressão sem parênteses para representar a área da figura.



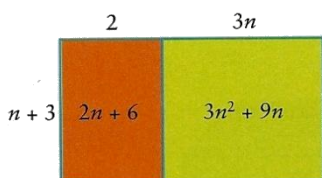
Resolução

Um dos rectângulos tem as dimensões de 9 cm e 5 cm e o outro rectângulo tem as dimensões b cm por $(a - 9)$ cm.

$$9 \times 5 + b(a - 9) = 45 + ab - 9b$$

A área do rectângulo é de $(45 + ab - 9b)$ cm².

3.6. Produto de polinómios



Para calcular o produto de dois polinómios, multiplica-se cada monómio de um pelos monómios do outro. O produto dos polinómios é a soma de todos os produtos anteriormente obtidos.

$$(n + 3)(2 + 3n) = 2n + 3n^2 + 6 + 9n$$

$$= 3n^2 + 11n + 6$$

Exemplo 12

Escreve uma expressão simplificada para o produto $(a + 2)(2a^2 + a + 5)$

Resolução

Vamos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição. Duma forma geral:

$$(a + b)(c + d + e) = a(c + d + e) + b(c + d + e) \quad , \text{ ou seja:}$$

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be \quad . \text{ Então:}$$

$$(a + 2)(2a^2 + a + 5) = 2a^3 + a^2 + 5a + 4a^2 + 2a + 10$$

Identificar os termos semelhantes.

$$= 2a^3 + 5a^2 + 7a + 10$$

Reduzir os termos semelhantes.

Actividades de aplicação

18. Simplifica:

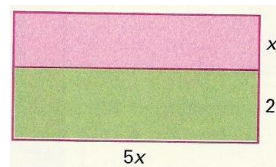
18.1. $9 - (a + 2) - 2(a - 2)$

18.2. $8(g + 3h) - 5\left(2g + \frac{1}{5}h\right)$

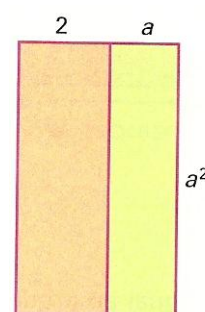
18.3. $x(2x - y) - 3x(2x + y)$

19. Escreve sem usar parênteses e sem termos semelhantes uma expressão para a área de cada um dos rectângulos.

19.1.



19.2.



20. Simplifica cada uma das expressões:

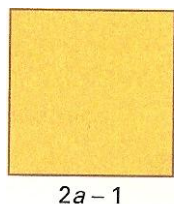
20.1. $x(-2x + 1) + x^2$

20.2. $-2a(a + 2) + a(-a + 3)$

20.3. $\frac{2(x-1)}{3} - \frac{2}{3}(x+5)$

Exemplo 13

Escreve uma expressão simplificada da área do quadrado representado na figura.



Resolução

Aplicando a área do quadrado:

$$A = (2a - 1)^2$$

Como a área do quadrado é igual ao produto do lado pelo lado:

$$(2a - 1)^2 = (2a - 1) \times (2a - 1) =$$

$$= (2a - 1)(2a - 1) = 4a^2 - 2a - 2a + 1$$

Identificar os termos semelhantes

$$= 4a^2 - 4a + 1$$

Reduzir os termos semelhantes

Exemplo 14

Calcula $(x - 3)(2x^2 + x + 1)$

Resolução

$$(x - 3)(2x^2 + x + 1) =$$

$$= 2x^3 + x^2 + x - 6x^2 - 3x - 3 =$$

Identificar os termos semelhantes

$$= 2x^3 + x^2 - 6x^2 + x - 3x - 3 =$$

Reduzir os termos semelhantes

$$= 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$$

Actividades de aplicação

21. Calcula:

21.1. $(x + 3)(x - 5)$ 21.2. $(3t - 2)(5 - 2t)$

21.3. $(2a + 5)(a^2 - 3a - 7)$ 21.4. $(y^2 + 1)(1 - y)$

21.5. $(3 + x)(x^2 - 2x - 1)$

21.6. $(1 - x + 3x^2)(1 - 5x)$ 21.7. $(2a + 1)^2$

21.8. $(x - 3)^2$ 21.9. $(-a - 5)^2$

22. Calcula pelo processo que achares mais conveniente:

22.1. $(x^2 - x - 2)(x - 5)$

22.2. $(-2x + 1)(-x^2 + 2x - 5)$

Outro método de multiplicação de polinómios

Aplicando a propriedade comutativa da multiplicação:

$$(x - 3)(2x^2 + x + 1) = (2x^2 + x + 1)(x - 3)$$

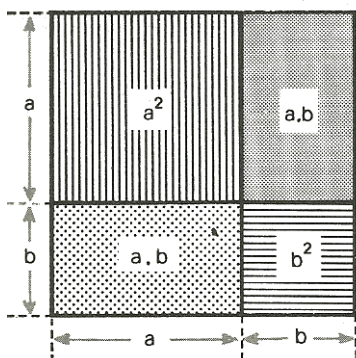
$$\begin{array}{r} 2x^2 + x + 1 \\ \times \quad x - 3 \\ \hline -6x^2 - 3x - 3 \\ 2x^3 + x^2 + x \\ \hline 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

3.7. Casos notáveis da multiplicação de dois polinómios

A multiplicação de dois polinómios pode processar-se sempre do mesmo modo. No entanto, há produtos de polinómios que aparecem com muita frequência e com variadas aplicações em Matemática e que nos merecem especial atenção: o quadrado do binómio e a diferença de quadrados.

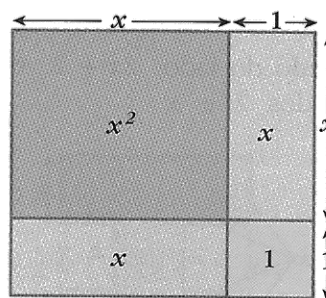
➤ Quadrado do binómio

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$$



$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Verificaste que:

- O quadrado de um binómio é um polinómio com três termos (trinómio)
- Dois dos termos são os quadrados dos termos do binómio dado (o sinal destes termos é positivo porque são quadrados destes termos).
- O outro termo é igual a duas vezes o produto dos termos do binómio (o sinal deste termo é positivo se os dois termos do binómio dado têm o mesmo sinal e é negativo se têm sinais contrários).

$$\begin{array}{l} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ \begin{array}{l} \text{1.º} \quad \text{2.º} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quadrado do 1.º} \\ \text{Dobro do produto do 1.º pelo 2.º} \\ \text{Quadrado do 2.º} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \begin{array}{l} \text{1.º} \quad \text{2.º} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Quadrado do 1.º} \\ \text{Dobro do produto do 1.º pelo 2.º} \\ \text{Quadrado do 2.º} \end{array} \end{array}$$

Esta é a **fórmula do quadrado do binómio**.

Um erro muito frequente consiste em confundir o quadrado de um binómio com a soma dos quadrados dos termos do binómio. Repara que:

$$(1+2)^2 = 3^2 = 9$$

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$$

$$a^2 - b^2 \neq (a-b)^2$$

$$a \neq b$$

Exemplo 15

Calcula:

15.1. $(1-y)^2$; 15.2. $(-3x-5)^2$; 15.3. $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2$

Resolução:

Vamos usar a fórmula do quadrado do binómio.

15.1. $(1-y)^2$

Quadrado do 1º :

$$\rightarrow 1^2 = 1$$

Dobro do produto do 1º pelo 2º :

$$\rightarrow 2 \times 1 \times (-y) = -2y$$

Quadrado do 2º:

$$\rightarrow (-y)^2 = y^2$$

Logo, $(1-y)^2 = 1 - 2y + y^2$

15.2. $(-3x-5)^2$

Quadrado do 1º :

$$\rightarrow (-3x)^2 = 9x^2$$

Dobro do produto do 1º pelo 2º :

$$\rightarrow 2 \times (-3x) \times (-5) = 30x$$

Quadrado do 2º:

$$\rightarrow (-5)^2 = 25$$

Logo, $(-3x-5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$

15.3. $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2$

Quadrado do 1º :

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$$

Dobro do produto do 1º pelo 2º :

$$\rightarrow 2 \times \left(\frac{1}{2}x\right) \times 3 = 3x$$

Quadrado do 2º:

$$\rightarrow 3^2 = 9$$

Logo, $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$

Actividades de aplicação

23. Calcula:

23.1. $(1+a)^2$

23.2. $(y-5)^2$

23.3. $(2x+3)^2$

23.4. $(3x-5)^2$

23.5. $(-2t+3)^2$

23.6. $(-5-x)^2$

23.7. $\left(\frac{1}{3}x+1\right)^2$

23.8. $(2,5-0,2x)^2$

24. Simplifica cada uma das seguintes expressões:

24.1. $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2(2-3)^2$

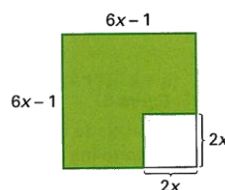
24.2. $(1-2x)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

24.3. $(x-1)^2 - 3(x-2)(x+3)$

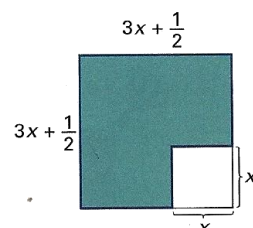
24.4. $(1-x)^2 - (x-1)(x+1)$

25. Escreve uma expressão simplificada para a área da parte a sombreado de cada uma das figuras.

25.1.



25.2.



Exemplo 16

Simplifica a seguinte expressão: $(2x+1)^2 - (-1-x)(x+3)$

$$(2x+1)^2 - (-1-x)(x+3) = \underbrace{(4x^2 + 4x + 1)}_{\text{quadrado do binómio}} - \underbrace{(-x - 3 - x^2 - 3x)}_{\text{produto de binómios}} =$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 + x + 3 + x^2 - 3x =$$

$$= 4x^2 + x^2 + 4x + x - 3x + 1 + 3 =$$

$$= 5x^2 + 2x + 4$$

Retirar os parênteses

Identificar os termos semelhantes

Reduzir os termos semelhantes

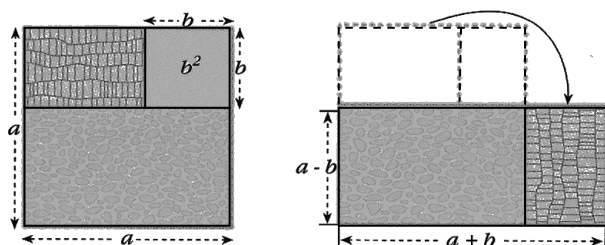
➤ Diferença de quadrados

Calcule-se o produto dos binómios $(a-b)$ e $(a+b)$.

$$(a-b)(a+b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

O produto dos binómios é igual a uma **diferença de quadrados**. Se a e b representassem medidas de comprimento, geometricamente, verificava-se que:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$



Verificaste que:

- O produto de dois binómios que apenas diferem no sinal de um dos termos é igual à diferença dos quadrados dos termos.
- O sinal $(-)$, de diferença, fica associado ao quadrado do termo que tem sinal diferente.

$$\begin{matrix} (x-y)(x+y) = x^2 - y^2 \\ \begin{matrix} 1.^\circ & 2.^\circ & 1.^\circ & 2.^\circ \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Quadrado do } 2.^\circ \\ \text{Quadrado do } 1.^\circ \end{matrix} \end{matrix}$$

Exemplo 17

Calcula:

$$17.1. \left(3y - \frac{1}{2}\right)\left(3y + \frac{1}{2}\right) \quad 17.2. (-3x+5)(5+3x)$$

$$17.3. (-x-y)(-x+y)$$

Resolução

Vamos usar a fórmula $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

$$17.1. \left(3y - \frac{1}{2}\right)\left(3y + \frac{1}{2}\right) = (3y)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9y^2 - \frac{1}{4}$$

$$17.2. (-3x+5)(5+3x) = (5-3x)(5+3x) = 5^2 - (3x)^2 = 25 - 9x^2$$

$$17.3. (-x-y)(-x+y) = (-x)^2 - y^2 = x^2 - y^2$$

Actividades de aplicação

26. Aplica a fórmula $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ para calcular cada um dos seguintes produtos.

$$26.1. (x-3)(x+3) \quad 26.2. (3x-1)(3x+1)$$

$$26.3. \left(2a - \frac{b}{2}\right)\left(2a + \frac{b}{2}\right)$$

$$26.4. \left(5x + \frac{7}{3}\right)\left(-\frac{7}{3} + 5x\right)$$

$$26.5. \left(-\frac{1}{4}x - y\right)\left(-\frac{1}{4}x + y\right)$$

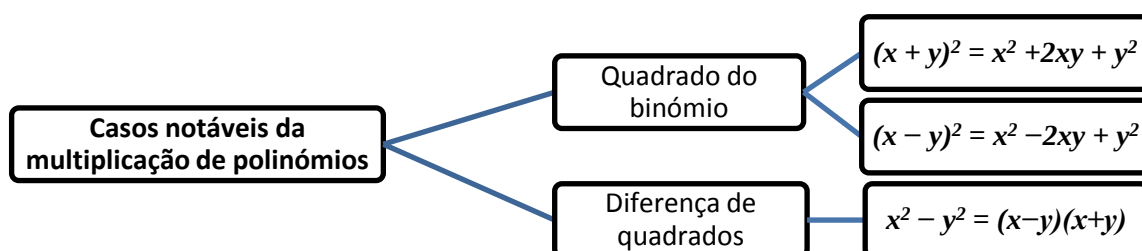
27. Aplica a fórmula $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ para escrever sob a forma de um produto de dois binómios cada um dos seguintes polinómios.

$$27.1. x^2 - 16$$

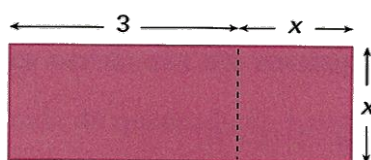
$$27.2. 49 - a^2$$

$$27.3. x^2 - \frac{1}{9}$$

$$27.4. \frac{25}{64}b^2 - 1$$



3.8. Factorização de polinómios



A área do rectângulo da figura pode ser dada por qualquer uma das expressões:

$$x(x+3)$$

expressão factorizada

ou

$$x^2 + 3x$$

expressão não factorizada

Factorizar um polinómio significa escrevê-lo como um produto de factores diferentes de 1.

Exemplo 18 – Aplicação da propriedade distributiva

Factoriza cada um dos seguintes polinómios.

18.1. $4a + 6$; **18.2.** $8x^2 - 12x$

Resolução

18.1. $4a + 6$

$$4a + 6 =$$

$$= 2(2a + 3)$$

O factor comum entre 4 e 6 é 2

$$4a : 2 = 2a; 6 : 2 = 3$$

18.2. $8x^2 - 12x$

O factor comum a 8 e 12 é 4 e o factor comum a x^2 é x . Logo o factor comum é $4x$.

$$8x^2 - 12x = 4x(2x - 3)$$

$$8x^2 : 4x = 2x; 12x : 4x = 3 = 2x ;$$

Na decomposição em factores devemos colocar em evidência **todos** os factores comuns.

Exemplo 19 – Aplicação da fórmula da diferença de quadrados

Factoriza cada um dos seguintes polinómios.

19.1. $16 - \frac{1}{4}x^2$; **19.2.** $2x^2 - 2$

Resolução

Como se trata de binómios vamos procurar factores comuns; caso não existam, vamos verificar se é possível aplicar a fórmula da diferença de quadrados: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

19.1. $16 - \frac{1}{4}x^2 =$

Não existem factores comuns

$$\left(4 - \frac{1}{2}x\right)\left(4 + \frac{1}{2}x\right) = 16 = 4^2 \text{ e } \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

19.2. $2x^2 - 2 =$

2 é o factor comum

$$= 2(x^2 - 1) =$$

A decomposição pode continuar porque

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$= 2(x - 1)(x + 1)$$

Exemplo 20 – Aplicar a fórmula do quadrado do binómio

Factoriza cada uma das seguintes expressões.

20.1. $x^2 - 4x + 4$; **20.2.** $2x^2 + 12x + 18$

Resolução

Trata-se de um trinómio. Vamos procurar factores comuns; caso não existam, vamos verificar se é possível aplicar a fórmula do quadrado do binómio.

20.1. $x^2 - 4x + 4 =$

Não existem factores comuns

$$= (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2) \quad 4 = 2^2 \text{ e } x^2 = (x)^2$$

20.2. $2x^2 + 12x + 18$

2 é o factor comum

$$= 2(x^2 + 6x + 9) =$$

Aplica-se a fórmula do quadrado do binómio

$$= 2(x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) =$$

$$= 2(x + 3)^2 = 2(x + 3)(x + 3)$$

Exemplo 21 – Decomposição em factores

Decompõe os polinómios em factores

21.1. $(x - 7)^2 - 16$;

21.2. $(3x - 1)^2 - (7x + 2)^2$

21.3. $(x - 1)^2 - (x + 3)(x - 1)$

Resolução

21.1. $(x-7)^2 - 16 =$ É uma diferença de quadrados em que o 1º termo é $(x-7)^2$ e o 2º termo é 16. Vamos aplicar a fórmula da diferença de quadrados $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\begin{array}{cccc} (x-7)^2 - 16 = & & & \\ a & b & a & b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$= [(x-7)-4][(x-7)+4] = \text{Reduzir os termos semelhantes}$$

$$= (x-7-4)(x-7+4) = (x-11)(x-3)$$

21.2. $(3x-1)^2 - (7x+2)^2 =$ Vamos aplicar a forma da diferença de quadrados: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= [(3x-1)-(7x+2)][(3x-1)+(7x+2)] =$$

$$= (3x-1-7x-2)-(3x-1+7x+2) =$$

$$= (-4x-3)(10x+1) =$$

21.3. $(x-1)^2 - (x+3)(x-1) =$ Neste caso existe o factor comum $(x-1)$ que vamos pôr em evidência

$$= (x-1)[(x-1)-(x+3)] = (x-1)(-4) =$$

$$= -4(x-1)$$

$$16 - (3x-7)^2$$

Actividades de aplicação

28. Das seguintes expressões quais estão factorizadas?

28.1. $2x-2$ **28.2.** $(2x-1)^2$ **28.3.** $3x(x-7)$

28.4. $2(x-7)(x-3)$ **28.5.** $2(a+3)+2a$

29. Factoriza cada uma das expressões aplicando, sempre que possível, os casos notáveis da multiplicação.

29.1. $t^2 + 6t + 9$ **29.2.** $y^2 + 2y + 1$

29.3. $81 + 18a + a^2$ **29.4.** $36x^2 - 24x + 4$

29.5. $100 - x^2$ **29.6.** $\frac{49}{25}x^2 - \frac{81}{64}$

30. Sem recurso à calculadora, usa os casos notáveis para calcular:

30.1. $280^2 - 20^2$ **30.2.** $155^2 - 165^2$ **30.3.** $81^2 - 91^2$

31. Factoriza cada uma das seguintes expressões:

31.1. $16 - (3x-7)^2$

31.2. $(3x-1)(x+2) - (x-1)(3x-1)$

31.3. $(x+2)^2 - 49$

3.9. Lei do anulamento do produto

Observa o seguinte a seguinte equação $(x-5)(x+6) = 0$

O primeiro membro desta equação é um produto e o segundo membro é zero. Sendo o 2º membro é igual a zero então no primeiro membro pelo menos um dos factores será igual a zero.

Um produto é nulo se e só se um dos factores é nulo, isto é, $a \times b = 0$, se e só se $a = 0$ ou $b = 0$ ou a e b são simultaneamente nulos.

À equivalência $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ chama-se **lei do anulamento do produto**.

O símbolo **V** lê-se **ou** e entre duas condições significa que pelo menos uma delas é verificada.

Será possível pela observação da expressão $(x-5)(x+6) = 0$ descobrir mentalmente as soluções? A equação tem o 1º membro escrito sob a forma de um produto e o 2º membro é zero.

$$\begin{array}{l} (x-5)(x+6) = 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{O 2º membro é zero} \\ \text{O 1º membro é o produto dos factores } (x-5)(x+6) \end{array}$$

Então, aplicando a lei do anulamento do produto, teremos:

$$(x-5)(x+6) = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \vee x+6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -6$$

$$S = \{-6, 5\}$$

Repara que fizemos referência a dois factores cujo produto é nulo, mas o mesmo pode ser generalizado ao produto de três, quatro ou mais factores. Um produto é zero se e só se pelo menos um dos factores é nulo.

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \quad \vee \text{ lê-se ou}$$

$$abc = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0$$

$$abcd = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0 \vee d = 0$$

3.10. Resolver equações através da lei do anulamento do produto

Exemplo 22

Resolve cada uma das seguintes equações.

22.1. $(2x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ **22.2.** $x(x-1)(2x+3)=0$

Resolução

Vamos aplicar a lei do anulamento do produto porque o 1º membro das equações é um produto e o 2º membro é zero. A resolução da equação transforma-se na resolução de equações do 1º grau.

22.1.

$$(2x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)=0 \vee \left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \text{Aplica-se a lei do}$$

anulamento do produto

$$\Leftrightarrow 2x=3 \vee x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \vee x=\frac{1}{2} \text{ Resolvem-se as equações}$$

do 1º grau

$$S=\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

22.2.

$$x(x-1)(2x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-1=0 \vee 2x+3=0 \Leftrightarrow$$

Aplica-se a lei do anulamento do produto

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee 2x=-3 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=-\frac{3}{2}$$

Resolvem-se as equações do 1º grau

$$S=\left\{-\frac{3}{2}, 0, 1\right\}$$

➤ Resolver equações do 2º grau aplicando a lei do anulamento do produto

Algumas equações do 2º grau incompletas podem ser resolvidas através da lei do anulamento do produto.

Exemplo 23

Resolve cada uma das seguintes equações do 2º grau.

23.1. $4x^2-16x=0$ **23.2.** $16-\frac{x^2}{25}=0$

23.3. $x(2x+1)=8x$

Resolução

23.1. $4x^2-16x=0$ O 1º membro é um polinómio do 2º grau e o 2º membro é zero. Vamos transformar o 1º membro da equação num produto de factores e em seguida resolver a equação através da lei do anulamento do produto.

$$4x^2-16x=0 \Leftrightarrow 4x(x-4)=0 \Leftrightarrow \text{Coloca-se em evidência o}$$

factor comum $4x$. O 1º membro foi factorizado.

$$\Leftrightarrow 4x(x-4)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \vee x-4=0$$

Aplica-se a lei do anulamento do produto

$$\Leftrightarrow x=\frac{0}{4} \vee x=4 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$$

Resolvem-se as equações do 1º grau

$$S=\{0, 4\}$$

23.2. $16-\frac{x^2}{25}=0 \Leftrightarrow$ O 1º membro é uma diferença de

quadrados e o 2º membro é zero. Vamos factorizar o 1º membro.

Equações do 2º grau

Uma equação do 2º grau é uma equação que pode ser reduzida à forma $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$.

À forma $ax^2+bx+c=0$ dá-se o nome de forma canónica.

Quando $b=0$ ou $c=0$, a equação de 2º grau é uma equação **incompleta**.

São equações de 2º grau incompletas as equações do tipo:

- $ax^2=0$,
- $ax^2+c=0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$
- $ax^2+bx=0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

Actividades de aplicação

32. Resolve cada uma das seguintes equações:

32.1. $x(x-2)=0$ **32.2.** $2x(3x-1)=0$

32.3. $-7(x-4)=0$ **32.4.** $(-2x-1)(x+1)=0$

32.5. $(-x-1)\left(-2x-\frac{1}{2}\right)=0$

32.6. $x(x-2)(x+3)=0$

32.7. $3x(3x-1)\left(2x-\frac{7}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow 16 - \frac{x^2}{25} = 0 \Leftrightarrow \left(4 - \frac{1}{5}x\right)\left(4 + \frac{1}{5}x\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Aplica-se a lei}$$

do anulamento do produto e resolvem-se as equações do 1º grau

$$\Leftrightarrow \left(4 - \frac{1}{5}x\right) = 0 \vee \left(4 + \frac{1}{5}x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x = -4 \vee \frac{1}{5}x = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-4) \times (-5) \vee x = (-4) \times 5 \Leftrightarrow x = 20 \vee x = -20$$

$$S = \{-20, 20\}$$

23.3. $x(2x+1) = 8x \Leftrightarrow$ O 2º membro da equação não é zero.

Efetua-se os cálculos no 1º membro e reduz-se o 2º membro a zero.

$$x(2x+1) = 8x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow$$

Factoriza-se o 1º membro

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow$$

Resolve-se a equação através da lei do anulamento do produto

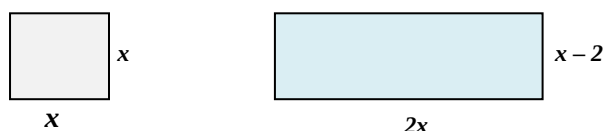
$$\Leftrightarrow x(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{7}{2}$$

$$S = \left\{0, \frac{7}{2}\right\}$$

Exemplo 24

Na figura seguinte a área do quadrado é igual à área do rectângulo. Determina x



Resolução

A área do quadrado é x^2 e a do rectângulo é $2x(x-2)$.

Vamos escrever a equação:

$$x^2 = 2x(x-2) \Leftrightarrow \text{As áreas são iguais.}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2x^2 - 4x \Leftrightarrow \text{Escreve-se a equação na forma}$$

$$ax^2 + bx = 0,$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \text{Coloca-se } x \text{ em evidência}$$

$$\Leftrightarrow x(-x + 4) = 0 \Leftrightarrow \text{Aplica-se a lei do anulamento do produto}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee (-x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

A equação tem duas soluções, mas apenas uma serve para responder à questão.

Se $x = 0$, o rectângulo e o quadrado não existiam.

Logo, $x = 4$

Nota

$4 \div \frac{1}{5} = 4 \times \frac{5}{1} = 4 \times 5 = 20$ Multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.

Actividades de aplicação

33. Das seguintes equações identifica e resolve aquelas em que é possível aplicar a lei do anulamento do produto.

33.1 $a(2a-3)(a-1) = 0$

33.2. $(-2a-1)(a+2) = 1$

33.3. $-x(x-1)(x-3) = 0$

33.4. $0 = (x+3)(2x-3)x$

33.5. $(-2x-1)(x-3) = 2$

33.6. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(3x-1)(x-0,5) = 0$

34. Determina as soluções das seguintes equações:

34.1. $x^2 - 36 = 0$ **34.2.** $2x^2 - 3x = 0$

34.3. $5x^2 = x$ **34.4.** $x^2 = \frac{25}{16}$

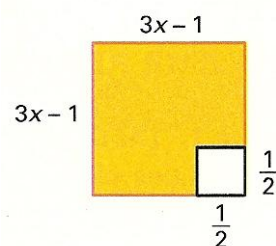
34.5. $(x-3)(x+3) = 7$ **34.6.** $2x^2 = x^2 + 9$

34.7. $4x^2 = -1 + 4x$ **34.8.** $x^2 = 2x(x+2)$

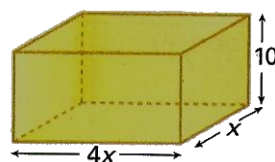
35. A figura é formada por dois quadrados.

Determina x , sabendo que a área da parte sombreada

é $\frac{3}{4} \text{ cm}^2$.



36. A figura representa um paralelepípedo rectângulo. As medidas estão expressas em centímetros.



36.1. Determina x sabendo que para reforçar todas as arestas se gastaram 180 m de fita.

36.2. Determina x sabendo que o seu volume é 1 dm^3 .

Unidade 4 – Teorema de Pitágoras. Decomposição de figuras.

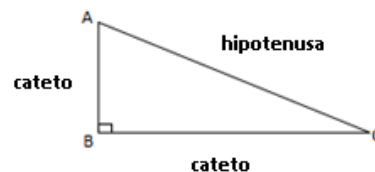
4.1. Teorema de Pitágoras

➤ Conceitos básicos sobre os triângulos rectângulos

Observa o triângulo [ABC] rectângulo em B, representado na figura ao lado.

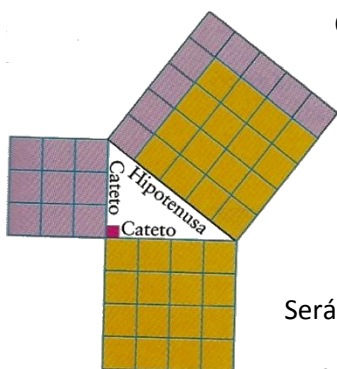
Num triângulo rectângulo os lados têm nomes especiais:

- Os lados que formam o ângulo recto chamam-se **catetos**.
- O lado oposto ao ângulo recto chama-se **hipotenusa**.



Nota: Como a hipotenusa é o lado oposto ao maior ângulo do triângulo (o ângulo recto) é o maior lado do triângulo rectângulo.

➤ Relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados



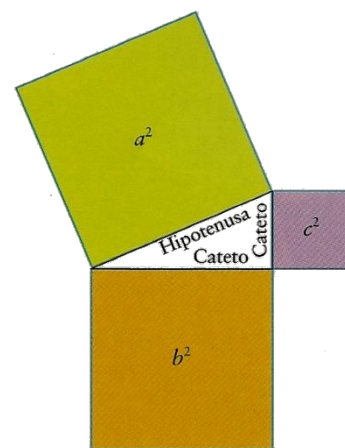
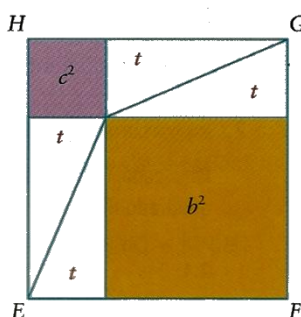
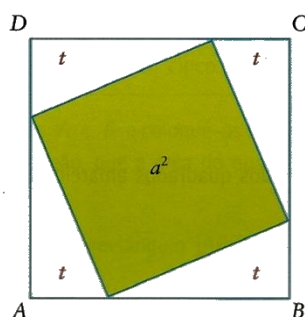
Qual é a relação entre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e a área dos quadrados construídos sobre os catetos?

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

$$5^2 = 3^2 + 4^2 \quad \text{ou} \quad 25 = 9 + 16$$

Será que esta relação se verifica para qualquer triângulo rectângulo?

Na figura seguinte, os dois quadrados maiores, [ABCD] e [EFGH], são iguais e foram decompostos em triângulos de área t e quadrados a^2 , b^2 e c^2 .



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como os quadrados maiores são iguais tem-se:

$$\underbrace{t+t+t+t+a^2}_{\text{quadrado [ABCD]}} = \underbrace{t+t+t+t+b^2+c^2}_{\text{quadrado [EFGH]}} \Leftrightarrow 4t - 4t + a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Logo: $a^2 = b^2 + c^2$

➤ Teorema de Pitágoras

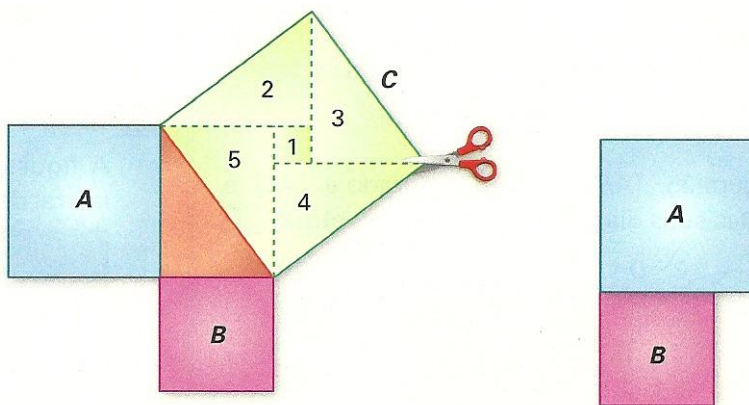
Da relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo rectângulo resulta o **Teorema de Pitágoras**.

Nota

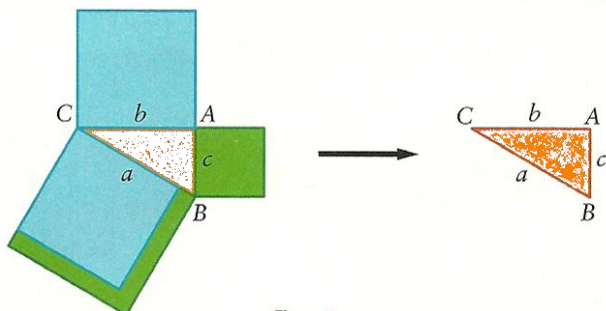
Um **teorema** é uma afirmação precisa e clara que, por estar rigorosamente demonstrada, se sabe que é verdadeira.

Actividade: Fazer uma demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras

Desenha um triângulo rectângulo e os quadrados A, B, e C sobre os lados do triângulo.

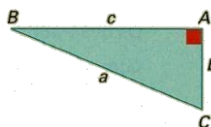


- Decompõe o quadrado C em 5 partes iguais como se mostra na figura e recorta-as.
- Recorta os quadrados A e B e coloca-os na posição indicada na figura.
- Verifica, por sobreposição, que a área do quadrado C é igual à soma das áreas dos quadrados A e B.

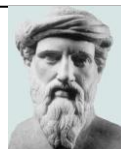


Teorema de Pitágoras

Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



Um pouco de história...



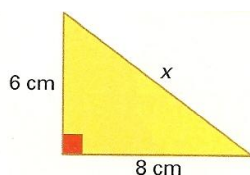
Pitágoras de Samos, filósofo e matemático, nasceu cerca do ano 580 a.C. em Samos e julga-se que morreu em 520 a.C. em Metaponto.

Afirmava que "Tudo é número". Pitágoras descobriu uma propriedade importante nos triângulos rectângulos a qual se designa por **Teorema de Pitágoras**.

Concretizando duas variáveis da equação literal $a^2 = b^2 + c^2$, pode determinar-se o valor da terceira variável, ou seja, conhecendo dois lados de um triângulo rectângulo é possível determinar o outro lado aplicando o Teorema de Pitágoras.

Exemplo 1

Determina o **comprimento da hipotenusa x** no triângulo rectângulo representado ao lado.



Resolução

Como o triângulo é rectângulo, pode-se aplicar o Teorema de Pitágoras, ou seja, "o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos."

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow$$

Teorema de Pitágoras

$$\Leftrightarrow x^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt{100} \vee x = -\sqrt{100} \Leftrightarrow$$

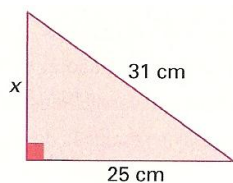
Equação do tipo
 $ax^2 = b, a \neq 0$

$$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = -10$$

Como x representa um comprimento considera-se apenas a solução positiva.

Logo, $x = 10$ cm .

Exemplo 2



Determina o comprimento do **cateto x**.

Resolução

Vamos utilizar o Teorema de Pitágoras porque conhecemos dois lados de um triângulo rectângulo e pretendemos determinar o terceiro lado.

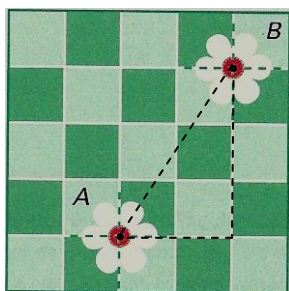
$$\begin{aligned} 31^2 &= 25^2 + x^2 \Leftrightarrow && \text{Teorema de Pitágoras} \\ \Leftrightarrow x^2 + 25^2 &= 31^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 31^2 - 25^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 961 - 625 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 336 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{336} \vee x = -\sqrt{336} && \sqrt{336} = 18,33030278 \dots \end{aligned}$$

Como se trata de um comprimento, $x = \sqrt{336}$.

Logo, $x = 18,3$ cm (1 c. d.)

Na resposta considerou-se um valor aproximado com uma casa decimal (mais uma casa decimal que as dos dados do problema).

Exemplo 3



A figura representa uma parte de uma parede de uma casa de banho. Os azulejos são quadrados com 20 cm de lado.

Qual é a distância entre os centros das flores A e B?

Apresenta a resposta com aproximação às décimas do centímetro.

Resolução

Como podemos observar a distância entre os centros das flores é a hipotenusa de um triângulo rectângulo. Calculemos as medidas dos catetos:

$$3 \times 20 \text{ cm} = 60 \text{ cm}; \quad 2 \times 20 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} d^2 &= 60^2 + 40^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow d^2 &= 3600 + 1600 \Leftrightarrow d^2 = 5200 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$d = \pm\sqrt{5200}$$

Como se trata de um comprimento,

$$d = \sqrt{5200}$$

$$\sqrt{5200} = 72,1110\dots$$

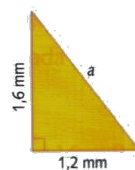
Logo, a distância entre os centros das flores A e B é 72,1 cm.

Para facilitar o cálculo podemos escrever $d = \pm\sqrt{5200}$ em vez de $d = \sqrt{5200} \vee d = -\sqrt{5200}$

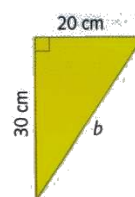
Actividades de aplicação

1. Calcula o comprimento da hipotenusa em cada triângulo. Apresenta, se necessário, o resultado com uma casa decimal.

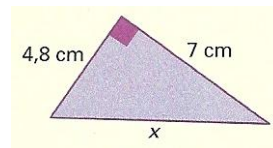
1.1.



1.2.

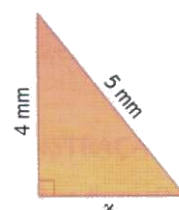


1.3.

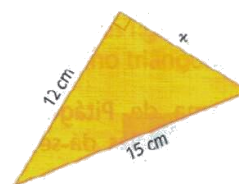


2. Calcula o comprimento do cateto desconhecido em cada triângulo. Apresenta, se necessário, o resultado com uma casa decimal.

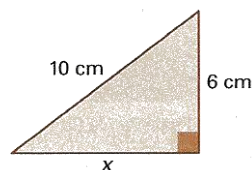
2.1.



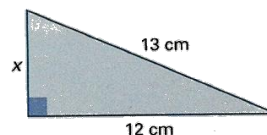
2.2.



2.3.

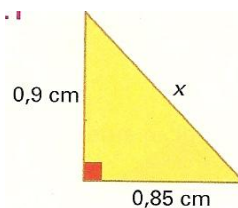


2.4.

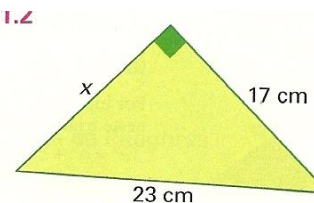


3. Para cada um dos seguintes triângulos, determina o comprimento x. Apresenta o resultado com uma casa decimal.

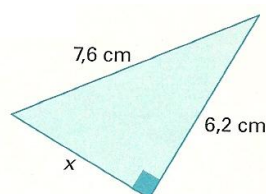
3.1.



3.2.



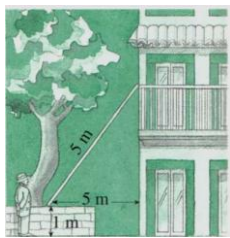
3.3.



4.2. Resolução de problemas usando o Teorema de Pitágoras no plano e no espaço

O Teorema de Pitágoras pode ser utilizado na resolução de muitos problemas no plano e também no espaço.

Exemplo 4



Observa a figura ao lado.
A que altura fica do solo o parapeito da varanda?

Resolução:

Calculemos x :

$$5^2 = 3^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 25 = 9 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 25 - 9 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 16 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 4$$

Como x é um comprimento, então $x = 4$.

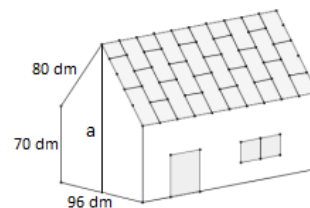
$$4 + 1 = 5$$

Logo, o parapeito da varanda fica a 5 metros do solo.



Exemplo 5

Atendendo aos dados da figura, calcula a altura da casa (em metros)



Resolução:

Começamos por calcular a altura do telhado (x):

$$80^2 = 48^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 6400 = 2304 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 6400 - 2304 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 4096 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4096}$$

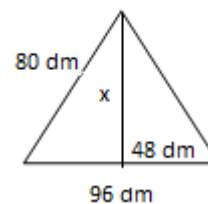
$$\Leftrightarrow x = \pm 64$$

Como x é um comprimento, então $x = 64$.

A altura da casa (a) é igual a $70 + x = 70 + 64 = 134$.

$$134 \text{ dm} = 13,4 \text{ m}$$

Logo, a altura da casa mede 13,4 m.

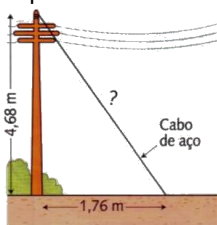


Actividades de aplicação

4. Que comprimento deve ter a escada representada na figura seguinte se a altura da janela é de 5 metros e no solo a distância da escada à parede é de 2 metros?



6. Na figura ao lado está representado um poste telefónico de 4,68 m de altura. Este está preso por um cabo de aço que une o seu extremo superior com um ponto situado no solo a 1,76 m da base do poste.

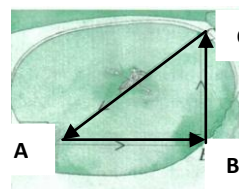


Qual é o comprimento do cabo de aço?

8. Determina a altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm.

10. Calcula a área de um triângulo isósceles cuja base mede 60 cm e o perímetro 216 cm. Sugestão: faz o desenho do triângulo isósceles.

5. Um barco saiu do ponto A, da margem de um lago, deslocou-se até B, em seguida dirigiu-se para norte e chegou ao ponto C. Finalmente regressou ao ponto A.

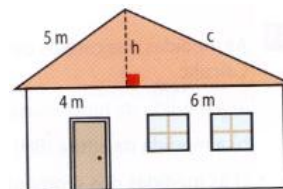


Se $\overline{AB} = 32 \text{ m}$ e $\overline{BC} = 24 \text{ m}$, calcula a distância percorrida pelo barco.

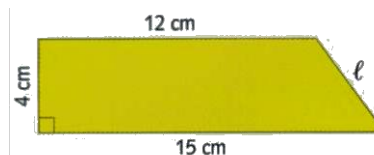
7. Ao lado está representada a vista frontal de uma casa. Calcula:

7.1. A altura h do telhado;

7.2. O comprimento c .



9. As bases de um trapézio rectângulo medem 15 cm e 12 cm e a sua altura mede 4 cm.



Determina o perímetro do trapézio.

➤ Teorema de Pitágoras no espaço

Exemplo 6

Uma empresa de construção civil tem camiões para transporte de material. Com o camião representado na figura qual é o comprimento máximo de vigas que é possível transportar?

Resolução

A “caixa” do camião tem a forma de um paralelepípedo rectângulo.

O comprimento máximo que a viga pode ter é o comprimento da **diagonal espacial** do paralelepípedo.

A diagonal espacial do paralelepípedo rectângulo é o segmento de recta $[AG]$.

$$\overline{AG}^2 = (2,2)^2 + \overline{AC}^2$$

Determinação de $\overline{AC}^2$

$$\overline{AC}^2 = (4,5)^2 + (1,8)^2$$

Teorema de Pitágoras

$$\overline{AC}^2 = 20,25 + 3,24$$

$$\overline{AC}^2 = 23,49$$

Para simplificar, por vezes não se escreve o símbolo $\Leftrightarrow$ entre as equações equivalentes.

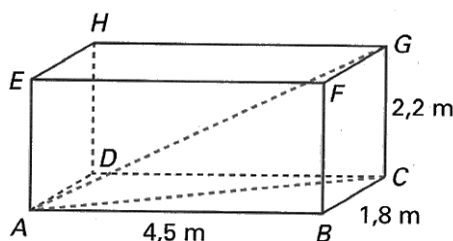
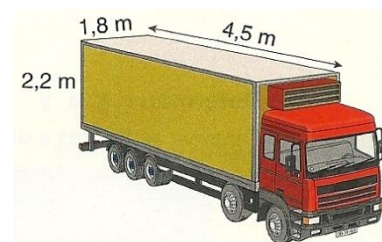
Então:

$$\overline{AG}^2 = (2,2)^2 + 23,49 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 28,33$$

$$\overline{AG} = \pm\sqrt{28,33}, \overline{AG} > 0.$$

Logo, $\overline{AG} = 5,32$ (2 c. d.).

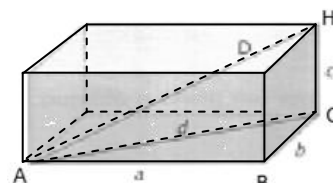
O comprimento máximo da viga que é preciso transportar é cerca de 5,32 m



Nota:

Uma **diagonal espacial** de um paralelepípedo é um segmento de recta que une dois vértices que não estão situados na mesma face. É uma diagonal que “corta” o paralelepípedo.

Uma **diagonal facial** é a diagonal de uma face.



Calcular a diagonal espacial D :

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

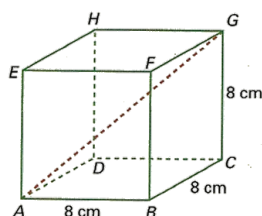
$$D^2 = d^2 + c^2 \quad (2)$$

Como $d^2 = a^2 + b^2$, substituindo na 2ª equação, vem:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

A diagonal espacial, D , de um paralelepípedo de dimensões a por b por c é dada por:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Exemplo 7

Calcula o comprimento da diagonal $\overline{AG}$ do cubo.

Resolução

$$\overline{AG}^2 = 8^2 + \overline{AC}^2$$

Como $\overline{AC}^2 = 8^2 + 8^2$, substituindo vem:

$$\overline{AG}^2 = 8^2 + 8^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 3 \times 8^2 \Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 192 \Leftrightarrow \overline{AG} = \pm\sqrt{192}, \overline{AG} > 0$$

Logo, $\overline{AG} = 13,9$ cm (1 c. d.).

Exemplo 8

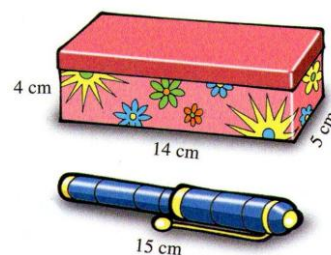
A Micaela foi comprar uma caneta para oferecer à sua mãe. Quer colocá-la dentro da caixinha da figura. Será que a caneta cabe na caixa?

Resolução

O comprimento da caneta é maior que o comprimento da caixa. Será que a caneta cabe na caixa se for colocada em diagonal na base da caixa? Calcule-se a diagonal d da base:

$$d^2 = 14^2 + 5^2 \Leftrightarrow d^2 = 196 + 25 \Leftrightarrow d^2 = 221 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{221}, d > 0; d = 14,87 \text{ cm (2 c. d.).}$$

O comprimento da diagonal da base é menor que o comprimento da caneta, logo esta não cabe.



Vejam se cabe segundo a diagonal espacial D:

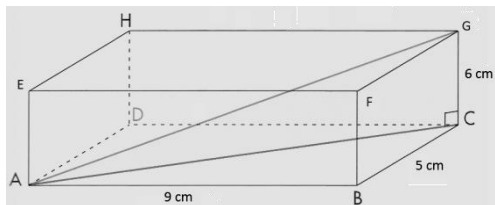
$$D^2 = d^2 + 4^2 \Leftrightarrow D^2 = 221 + 4^2 \Leftrightarrow D^2 = 221 + 16 \Leftrightarrow D^2 = 237 \Leftrightarrow D = \pm\sqrt{237}, D > 0$$

$$D = 15,4 \text{ (1 c. d.)}$$

Como o comprimento da diagonal espacial é, cerca de 15,4 cm, a caneta cabe na caixa.

Atividades de aplicação

11. Observa o paralelepípedo rectângulo representado na figura.

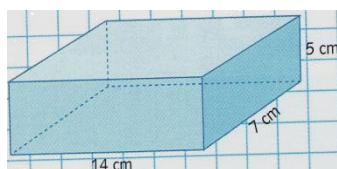


11.1. Quantas diagonais faciais e espaciais tem um paralelepípedo rectângulo?

11.2. Calcula a medida exacta do comprimento da diagonal da base [AC].

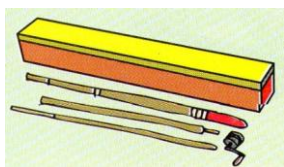
11.3. Calcula o comprimento da diagonal espacial [AG].

13. Uma caixa em forma de paralelepípedo rectângulo tem 14 cm de comprimento, 7 cm de largura e 5 cm de altura.



Determina o comprimento da diagonal espacial da caixa.

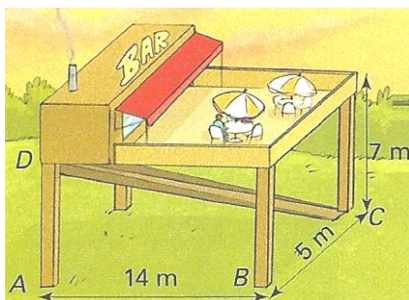
15. O Isidoro decidiu comprar uma caixa para guardar a sua cana de pesca. As dimensões da caixa são 50 cm, 70 cm e 100 cm. Como a cana de pesca é dividida em três partes e a parte maior mede 130 cm, será que a escolha da caixa que o Isidoro comprou é adequada para guardar a sua cana de pesca?



17. A figura ao lado representa um jardim onde foi construído um bar com esplanada num andar superior ao solo.

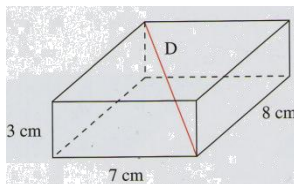
O acesso ao bar é feito pela rampa que, na figura, une os pontos C e D.

Calcula o comprimento da rampa com aproximação às centésimas do metro.

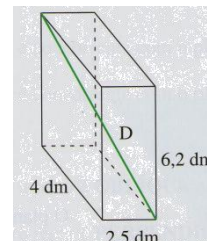


12. Calcula o comprimento da diagonal espacial de cada um dos paralelepípedos:

12.1

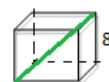


12.2.

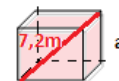


14. Determina o comprimento da:

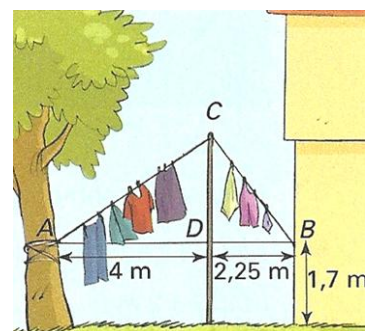
14.1. diagonal espacial de um cubo com 8 m de aresta;



14.2. aresta de um cubo cuja diagonal espacial mede 7,2 m.



16. Na figura está representada uma estaca que estica uma corda onde está presa a roupa a secar. O triângulo [ABC] é rectângulo em C e tem 9,375 m² de área.

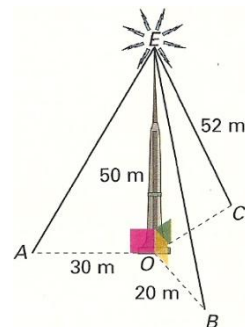


16.1. Determina a altura da estaca.

16.2. Calcula o comprimento da corda.

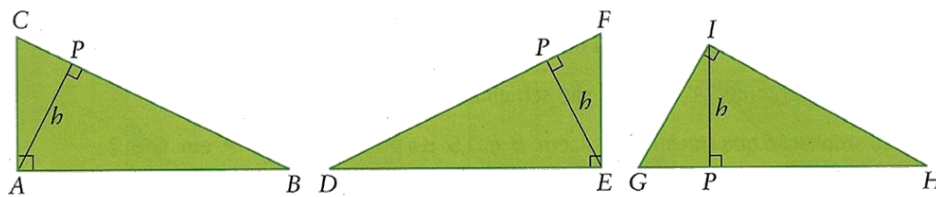
18. Três cabos de aço estão presos no topo de um poste de uma antena de telecomunicações. A outra extremidade dos cabos está presa no solo. O plano do solo é perpendicular ao mastro que suporta a antena.

De acordo com os dados da figura, calcula quantos metros de cabos de aço foram utilizados para segurar o poste. Apresenta a resposta com aproximação às décimas do metro.



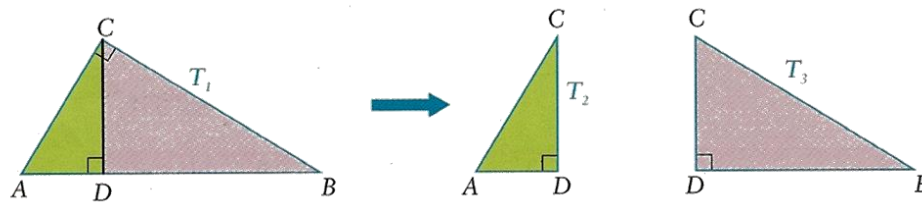
4.3. Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos

Na figura estão representados três triângulos rectângulos e a altura h relativamente à hipotenusa.



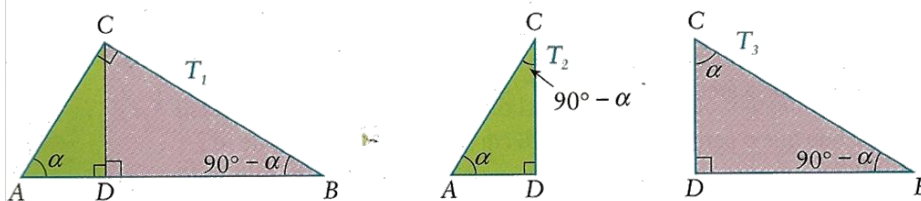
A altura, h , divide o triângulo em dois triângulos. Vejamos como dois triângulos são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo dado.

Na figura seguinte, o triângulo T_1 , rectângulo em C , foi dividido nos triângulos T_2 e T_3 , pela altura relativamente à hipotenusa. São semelhantes os triângulos T_1 e T_2 ?



Os triângulos T_1 e T_2 são semelhantes porque têm dois ângulos iguais: o ângulo recto e o ângulo A , que é comum aos dois triângulos. E os triângulos T_1 e T_3 são semelhantes?

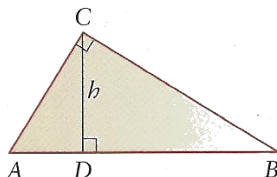
Os triângulos são semelhantes porque têm dois ângulos iguais: o ângulo recto e o ângulo B , que é comum aos dois triângulos. E os triângulos T_2 e T_3 são semelhantes?



Se a amplitude de A é α , a amplitude de B é $90^\circ - \alpha$. A amplitude do ângulo ACD também é $90^\circ - \alpha$ e a amplitude do ângulo BCD é α . Logo, os triângulos T_2 e T_3 são semelhantes porque têm dois ângulos iguais: o ângulo recto e $\hat{D}\hat{A}\hat{C} = \hat{B}\hat{C}\hat{D}$.

Num triângulo rectângulo, a altura referente à hipotenusa divide-o em dois triângulos rectângulos semelhantes entre si e cada um deles semelhante ao triângulo dado.

São semelhantes os triângulos $[ABC]$, $[ADC]$ e $[DBC]$.



Observa que a conclusão referida ao lado permite deduzir o Teorema de Pitágoras.

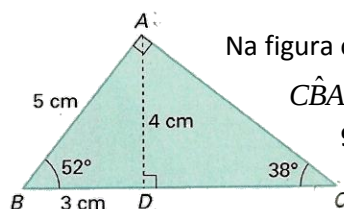
$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB} \Leftrightarrow AB \times DB = CB^2$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow AB \times AD = AC^2$$

Logo,

$$\begin{aligned} AC^2 + CB^2 &= AB \times DB + AB \times AD \\ &= AB (DB + AD) \\ &= AB \times AB \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

Exemplo 9



Na figura o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em A . $[AD]$ é a altura da hipotenusa.

$$\hat{CBA} = 52^\circ \text{ e } \hat{ACD} = 38^\circ$$

9.1. Justifica que os triângulos $[DCA]$ e $[BDA]$ são semelhantes.

9.2. Calcula o valor exacto de $\overline{DC}$ e de $\overline{AC}$.

Resolução

9.1. Se $\hat{CBA} = 52^\circ$ então $\hat{BAD} = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$.

Logo, os triângulos são semelhantes porque têm dois ângulos iguais: o ângulo recto e $\hat{BAD} = \hat{ACD}$.

9.2. Como os triângulos $[DCA]$ e $[BDA]$ são semelhantes:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Escrevem-se as razões entre os lados correspondentes dos triângulos $[DCA]$ e $[BDA]$

$$\frac{4}{3} = \frac{\overline{CD}}{4}$$

Aplica-se a propriedade fundamental das proporções: numa proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

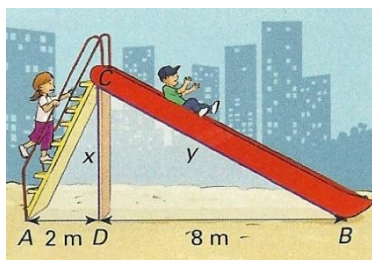
$$\overline{CD} = \frac{4 \times 4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{\overline{AC}}{5}$$

$$\text{Logo, } \overline{CD} = \frac{16}{3} \text{ cm e } \overline{AC} = \frac{20}{3} \text{ cm.}$$

$$\overline{AC} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

Exemplo 10



Observa a figura. O triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C .

Calcula a altura e o comprimento do escorrega.

Resolução

Determinação da altura do escorrega.

Os triângulos $[ADC]$ e $[DBC]$ são semelhantes.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

Escrevem-se as razões entre os lados correspondentes dos triângulos $[ADC]$ e $[DBC]$

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

Os comprimentos conhecidos são substituídos nas razões anteriores.

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow$$

Resolve-se a equação que resulta da aplicação da propriedade fundamental das proporções: numa proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Logo, a altura do escorrega é 4 m.

Determinação do comprimento do escorrega.

$$y^2 = 8^2 + 4^2 \Leftrightarrow \text{Teorema de Pitágoras}$$

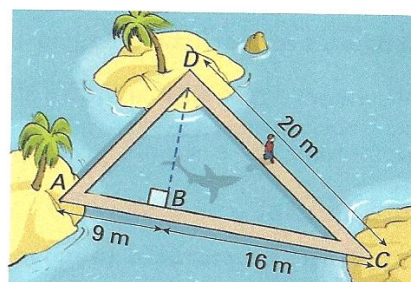
$$y^2 = 80 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{80} = 8,9 \text{ (1 c. d.)}$$

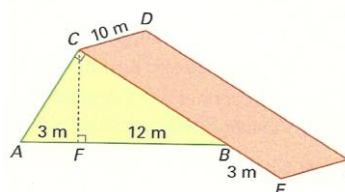
Logo, o comprimento do escorrega é aproximadamente 8,9 m (1 c. d.).

Actividades de aplicação

19. Na figura o triângulo $[ABD]$ é rectângulo em B . De acordo com os dados da figura mostra que os triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são semelhantes.



20. Observa a figura.

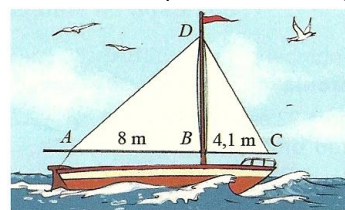


20.1. Mostra que os triângulos $[AFC]$ e $[FBC]$ são semelhantes.

20.2. Mostra que $\overline{CF} = 6$ m.

20.3. $[EFDC]$ é um rectângulo e $\overline{CD} = 10$ m. Determina, com aproximação às décimas do metro quadrado, a área do rectângulo.

21. Observa o barco representado na figura.



O triângulo $[ACD]$ é rectângulo em D e $DB \perp AC$. Determina com uma casa decimal.

21.1. a altura do mastro $\overline{BD}$.

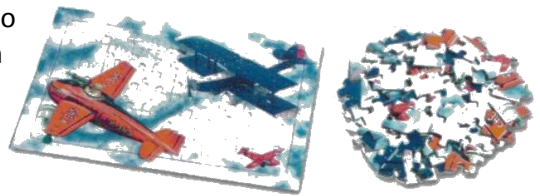
21.2. a distância de C a D .

4.4. Decomposição de figuras. Áreas de figuras.

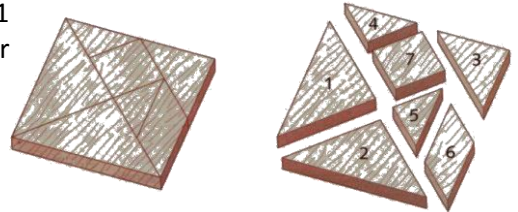
As peças de um puzzle quando observadas individualmente não fazem qualquer sentido; no entanto, se se unirem convenientemente formam uma composição com sentido.

Há uma grande variedade de puzzles, alguns deles relacionados com a geometria.

Um dos mais antigos e conhecidos é o *tangram*.

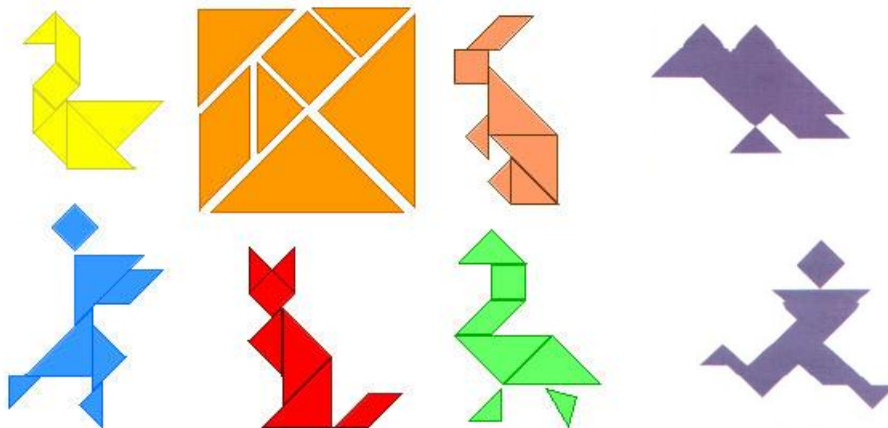


O tangram original (tangram chinês) é composto por um quadrado subdividido em sete polígonos (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) e pode ser obtido por dobragens e recorte de um quadrado.



A partir desses sete polígonos é possível construir imensas figuras.

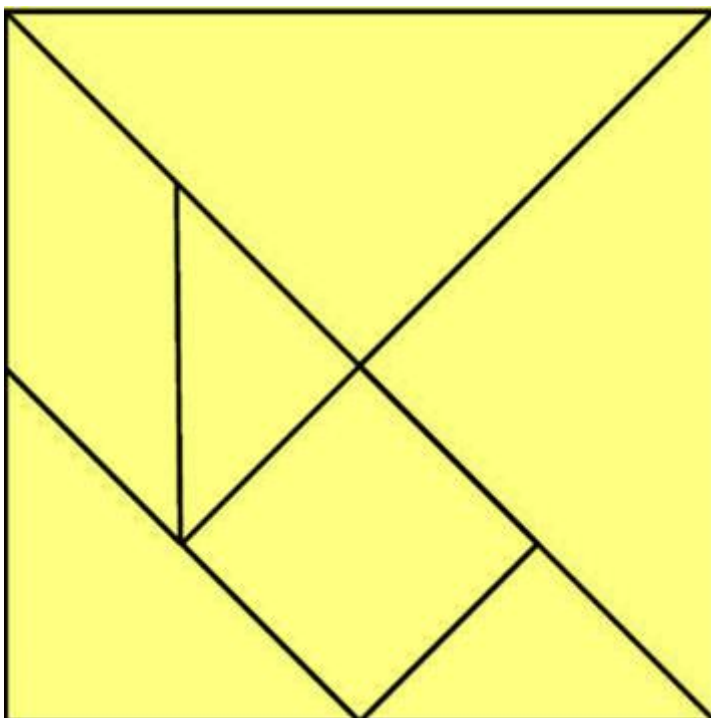
Observa alguns exemplos:



Curiosidade

O **tangram** é um jogo de paciência conhecido como sendo dos mais antigos. O primeiro foi inventado na China — **tangram chinês** — há mais de mil anos. O nome significa “7 tábuas da sabedoria”.

É possível construir com as peças do tangram várias figuras, respeitando sempre duas regras: **todas as peças devem ser usadas e não é permitido sobrepor as peças.**



Actividades de aplicação

22. Observa o modelo de tangram.

22.1. Copia para uma o modelo para uma folha (de preferência em cartolina).

22.2. Recorta as peças (polígonos) e com elas constrói as figuras do exemplo.

22.3. Que relação existe entre as áreas das figuras que construístes e a área do quadrado (tangram)?

➤ Decomposição de figuras em quadriláteros e triângulos

O Sr. Manuel pretende determinar a área do seu terreno para o poder vender. O terreno tem a forma da figura ao lado. Como poderá o Sr. Manuel calcular a área do terreno?

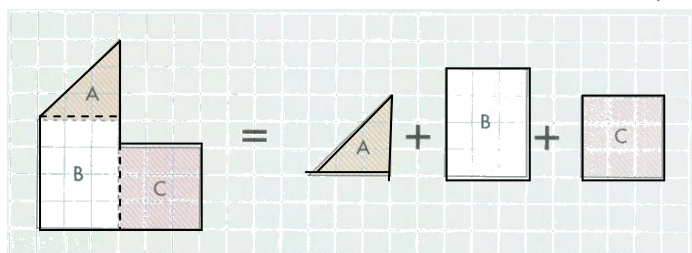
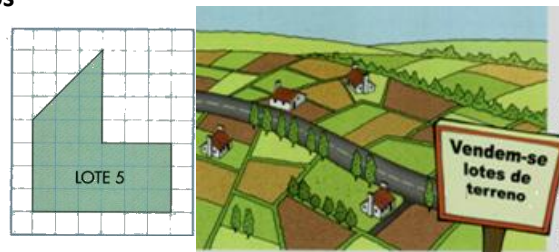
Como se pode observar, o terreno tem a forma de um

polígono irregular, para o qual não existe uma fórmula que permita calcular directamente a sua área.

Uma forma de resolver este problema, consiste em decompor o polígono em triângulos e quadriláteros e em seguida calcular a área de cada um destes polígonos.

Neste caso, poder-se-ia decompor a figura por exemplo, num triângulo, num rectângulo e num quadrado.

A área do lote será obtida adicionando as áreas destes polígonos.



Considerando que o lado da quadrícula mede 1m, a área do lote obtém-se assim:

$$A_A = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4,5$$

$$A_B = b \times h = 3 \times 4 = 12 ; \quad A_C = l^2 = 3^2 = 9 ; \quad A_{\text{lote}} = A_A + A_B + A_C = 4,5 + 12 + 9 = 25,5$$

Logo, a área do lote é igual a 25,5 m²

Qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos e quadriláteros.

Exemplo 11

Observa a figura e calcula a área do polígono P.

Resolução

Para calcular a área do polígono P, começa-se por decompor a figura em triângulos e quadriláteros.

De seguida, determina-se a área de cada uma das figuras que compõem o polígono. É de fácil verificação que $A_A = A_B$.

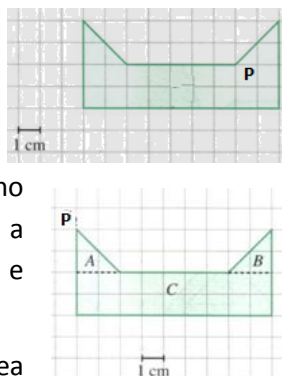
$$A_A = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 ; \quad A_B = A_A = 2$$

$$A_C = b \times h = 9 \times 2 = 18$$

Logo, a área do polígono P é obtida da seguinte forma:

$$A_P = A_A + A_B + A_C = 2 + 2 + 18 = 22$$

A área do polígono P é igual a 22 cm².



Exemplo 12

Determina a área do polígono representado ao lado. As medidas estão expressas em centímetros.

Resolução

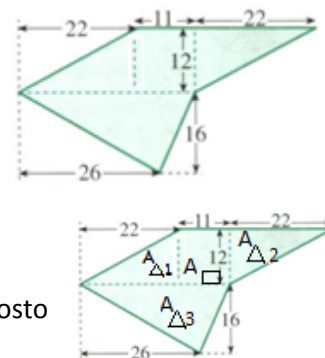
Como ilustra a figura, o polígono pode ser decomposto em 3 triângulos e um rectângulo. Por observação da figura, facilmente se verifica que dois dos triângulos são geometricamente iguais, logo $A_{\Delta 1} = A_{\Delta 2}$. $A_{\square} = c \times l = 11 \times 12 = 132$;

$$A_{\Delta 1} = \frac{b \times h}{2} = \frac{22 \times 12}{2} = 132 ; \quad A_{\Delta 2} = A_{\Delta 1} = 132 ;$$

$$A_{\Delta 3} = \frac{b \times h}{2} = \frac{26 \times 16}{2} = 208$$

$$A_{\text{polígono}} = A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2} + A_{\Delta 3} + A_{\square} = 132 + 132 + 132 + 208 = 604$$

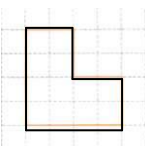
O polígono tem de área 604 cm².



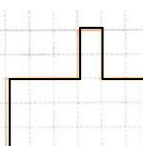
Actividades de Aplicação

23. Calcula a área dos polígonos seguintes, decompondo-os em triângulos e quadriláteros ($\square = 2\text{cm}$).

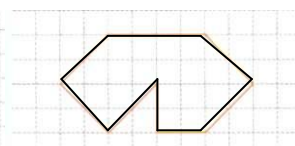
23.1.



23.2.

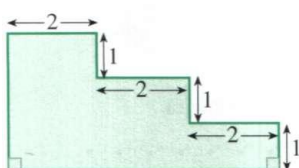


23.3.

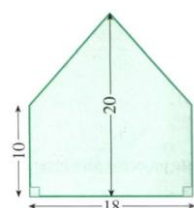


25. Calcula a área das seguintes figuras (as medidas indicadas estão expressas em centímetros.)

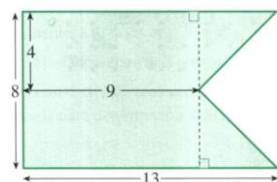
25.1.



25.2.



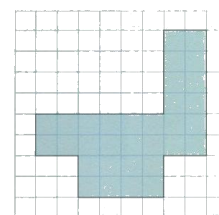
25.3.



24. Observa a figura.

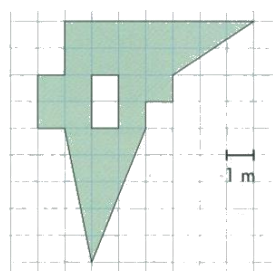
24.1. Decompõe o polígono de duas maneiras diferentes, em figuras das quais saibas determinar a área.

24.2. Tomando como unidade a quadrícula, calcula a área da figura.

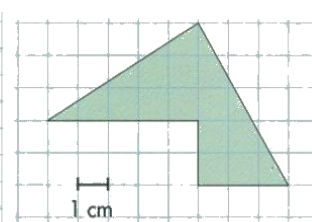


26. Calcula a área das regiões sombreadas em cada figura, decompondo-as em triângulos ou quadriláteros. ($\square = 1\text{cm}$).

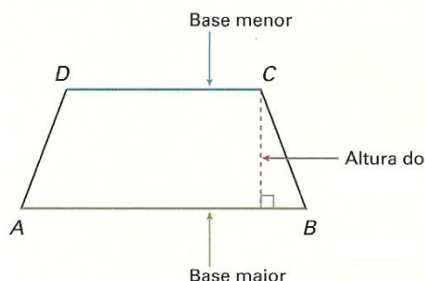
26.1



26.2.



4.5. Área do trapézio e do losango



Um trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos aos quais chamamos bases do trapézio.

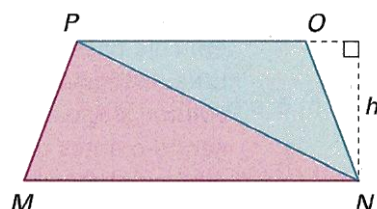
B representa a base maior do trapézio;

b representa a base menor do trapézio;

h representa a altura do trapézio;

Qualquer trapézio pode ser decomposto em dois triângulos e a sua área calculada como a soma das áreas desses triângulos.

Observa o trapézio da figura abaixo:



O trapézio [MNOP] foi decomposto em dois triângulos: [MNP] e [NOP].

Vamos escrever uma fórmula para as áreas de cada um desses triângulos.

$$A_{[MNP]} = \frac{\overline{MN} \times h}{2} ; \quad A_{[NOP]} = \frac{\overline{OP} \times h}{2} .$$

A área do trapézio é igual à soma das áreas dos dois triângulos. Então:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{\overline{MN} \times h}{2} + \frac{\overline{OP} \times h}{2} = \frac{(\overline{MN} + \overline{OP}) \times h}{2} = \frac{\overline{MN} + \overline{OP}}{2} \times h$$

Como [MN] é a base maior do trapézio (B), [OP] a base menor (b) e (h) a altura, podemos escrever:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{B+b}{2} \times h . \text{ Esta fórmula aplica-se no cálculo da área de qualquer trapézio.}$$

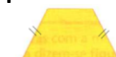
$$\text{Área do trapézio: } A = \frac{B+b}{2} \times h$$

Classificação dos trapézios propriamente ditos:

Trapézio rectângulo



Trapézio isósceles

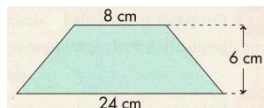


Trapézio escaleno



Exemplo 13

Determina a área do trapézio isósceles representado na figura ao lado.



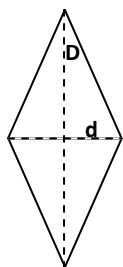
Resolução:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B+b)}{2} \times h = \frac{24+8}{2} \times 6 = 16 \times 6 = 96$$

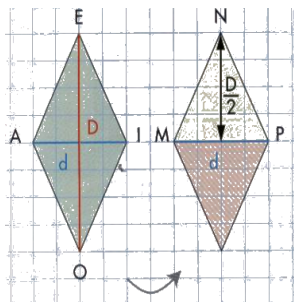
A área do trapézio é igual a 96 cm².

➤ Área do losango

Um losango é um quadrilátero que tem todos os lados iguais.



Um losango tem duas diagonais que se bissektam e são perpendiculares. A diagonal maior representa-se por **D** e a diagonal menor por **d**. Este polígono pode ser decomposto em dois triângulos geometricamente iguais.



Assim, a área do losango é igual à soma das áreas dos dois triângulos (cuja altura é

$\frac{D}{2}$ e a base é d):

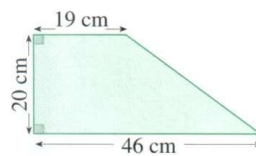
$$A_{\text{losango}} = \frac{d \times \frac{D}{2}}{2} + \frac{d \times \frac{D}{2}}{2} = 2 \times \frac{d \times \frac{D}{2}}{2} = d \times \frac{D}{2} = \frac{D \times d}{2}$$

$$\text{Área do losango: } A = \frac{D \times d}{2}$$

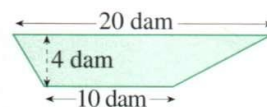
Actividades de aplicação

27. Calcula a área de cada um dos seguintes trapézios:

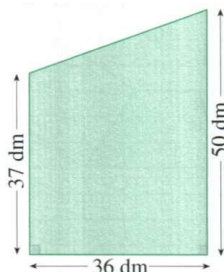
27.1.



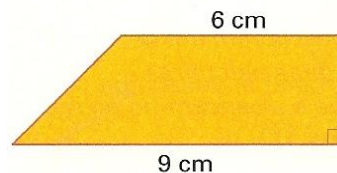
27.2.



27.3.



27.4

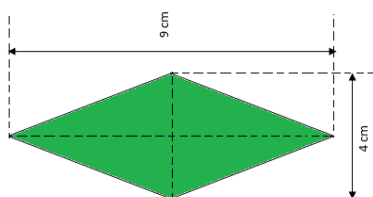


Altura = 3 cm

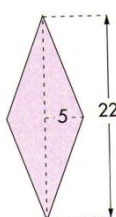
Actividades de aplicação

28. Calcula a área dos seguintes losangos.

28.1.

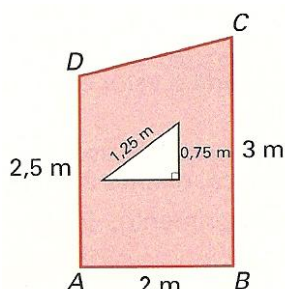


28.2.



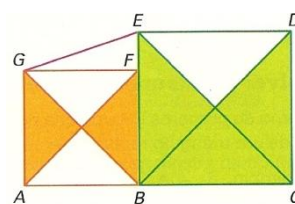
30. Na figura [ABCD] é um trapézio.

Determina a área da parte da figura a sombreado.



29. Considera a figura:

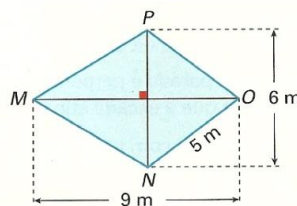
- [ABFG] é um quadrado de área 36;
- [BCDE] é um quadrado de área 64;
- F é um ponto do segmento de recta [BE].



29.1. Calcula a área da parte sombreada da figura.

29.2. Determina o valor exacto de $\overline{EG}$

31. Calcula a área do quadrilátero.



UNIDADE 5 – FUNÇÕES

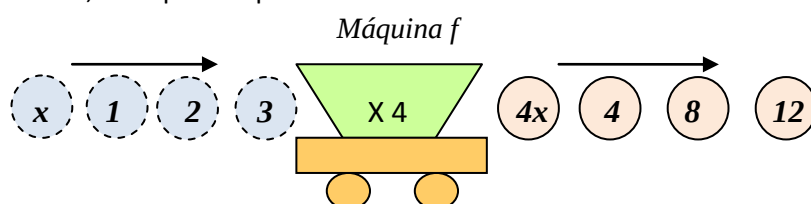
5.1. Introdução ao estudo das funções

Um dos conceitos mais utilizados em Matemática é o de **função**.

Este conceito aplica-se também à Física, à Química e à Biologia, entre outras ciências. Na linguagem do dia-a-dia, o termo função surge ligado a expressões “depende de” ou “varia com”, conforme os exemplos seguintes demonstram:

- “No domingo vou à praia em função das condições climáticas.”
- “O preço da gasolina varia em função do preço do barril de petróleo”
- “O dinheiro que gasto em cartões de recarga varia em função do tempo que falo ao telemóvel.”
- “A distância ideal de travagem num veículo motorizado varia em função da velocidade.”
- “A produção de cacau depende das condições climáticas.”

Imaginemos agora uma “máquina” onde entra um número, dá-se uma transformação dentro da máquina e sai o número que entrou, multiplicado por 4:



Esta máquina tem um mecanismo (regra) que transforma qualquer elemento que entra noutro que sai. Se na máquina entram os números 1, 2, 3, 4, ..., os números que saem são: 4, 8, 12, 16, ...

Se o número que entra é x , sai o número y , sendo $y = 4x$ ou $x \curvearrowright y = 4x$.

O número y que sai da máquina **depende** do número x que entra. Dizemos que y é **função** de x . À variável x chamamos **variável independente** e à variável y **variável dependente**.

Assim:

$$y = 4x \quad \text{ou} \quad x \curvearrowright y = 4x.$$

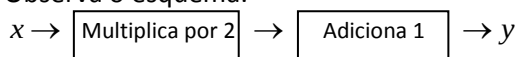
→ variável independente
→ Variável dependente

Conhecido x , determina-se y , porque o valor da variável dependente y depende do valor de x através da transformação que sofre na máquina.
Por exemplo se $x = 5$ então $y = 4 \times 5 = 20$

Os números que entram na máquina chamam-se **objectos** (valores de x) e os que saem chamam-se **imagens** (valores de y).

Exemplo 1

Observa o esquema:



1.1. Escreve y em função de x .

1.2. Determina a imagem dos objectos -2 e 5.

Resolução

1.1. $x \times 2 + 1 = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow y = 2x + 1$

Logo, $y = 2x + 1$

1.2. Se $y = 2x + 1$ e $x = -2$, então $y = 2 \times (-2) + 1 = -3$

A imagem de -2 é -3.

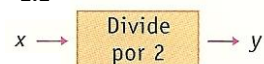
Se $y = 2x + 1$ e $x = 5$, então $y = 2 \times 5 + 1 = 11$

A imagem de 5 é 11.

Actividades de aplicação

1. Considera a tabela incompleta ao lado. Completa a tabela para cada uma das seguintes transformações:

1.1



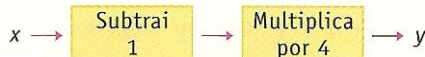
1.2



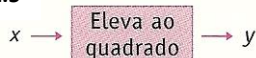
1.3



1.4.



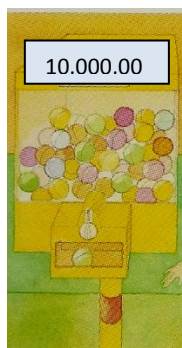
1.5



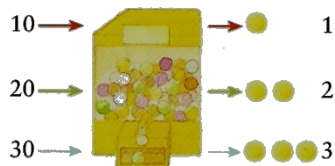
Objecto	Imagem
1	
2	
3	
x	$y =$

5.2. Definição de função. Domínio e contradomínio de uma função.

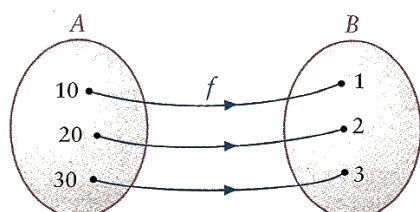
À porta da loja do Sr. Quintino há uma máquina, onde se introduzem moedas e saem bolas com um doce dentro. Cada bola custa 10.000,00.



Há uma correspondência entre o dinheiro gasto e o número de bolas compradas (para facilitar a leitura representa-se o preço de cada bola por 10):



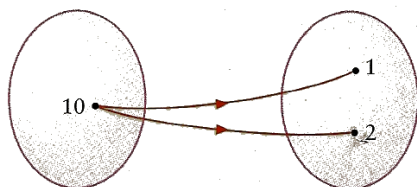
Outra forma de representar esta correspondência é através de um diagrama sagital (ou de setas). O conjunto A é o conjunto dos **objectos** e o conjunto B é o conjunto das **imagens**.



A correspondência f é uma função.

Repara que:

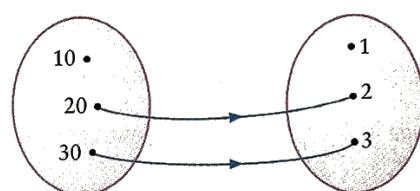
A cada elemento do conjunto A corresponde um e um só elemento do conjunto B . A uma correspondência deste tipo dá-se o nome de **função**.



A correspondência f não é uma função.

A Marinela foi comprar uma bola. Introduziu na máquina 10.000,00 em moedas e saíram duas bolas.

A máquina estava avariada. Na correspondência, o objecto 10 tinha duas imagens. Esta correspondência **não é uma função**. Numa função cada objecto tem uma e uma só imagem.

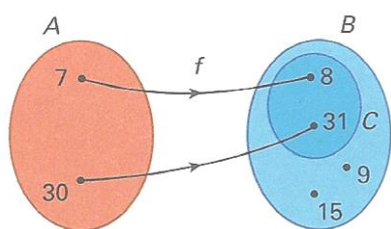


A correspondência f não é uma função.

Imagina agora que o Edymerson também foi comprar bolas. Introduziu 10.000,00 em moedas e não saiu nenhuma bola. A máquina estava mesmo avariada.

Esta correspondência também **não é uma função**: o objecto 10 não tem imagem e numa função cada objecto tem uma e uma só imagem.

Observa a correspondência. Será f uma função?



Como a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um e um só elemento do segundo, a correspondência f é uma função.

Ao conjunto A (de onde saem as setas) chama-se **domínio da função** f e representa-se por D_f .

$$D_f = \{7, 30\}; D_f = A$$

Os elementos do conjunto A designam-se por **objectos**.

A cada objecto corresponde uma **imagem**.

A imagem do objecto 7 é 8 ou $f(7) = 8$

(lê-se: f de 7 é igual a 8).

A imagem do objecto 30 é 31 ou $f(30) = 31$.

Ao conjunto das imagens C chama-se **contradomínio** da função e representa-se por D'_f .

$$D'_f = \{8, 31\}; D'_f = C$$

Ao conjunto B chama-se **conjunto de chegada**.

Um pouco de história ...



O matemático alemão Leibniz (1646-1716) terá introduzido pela primeira vez em 1673 o termo "função". O matemático Euler (1709-1783) terá utilizado pela primeira vez a expressão $f(x)$.

Uma **função** é uma correspondência entre dois conjuntos que a cada elemento x do primeiro conjunto faz corresponder um e um só elemento y do segundo conjunto.

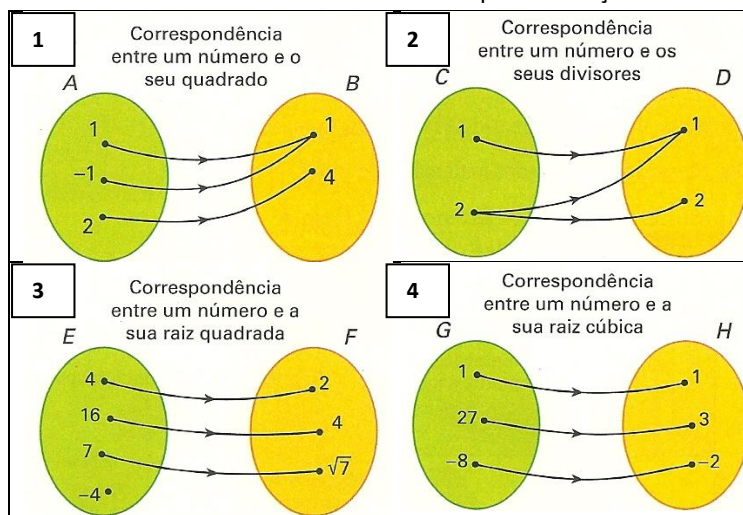
Ao primeiro conjunto, o conjunto dos objectos, chama-se **domínio da função** e representa-se por D_f . Ao conjunto das imagens chama-se **contradomínio** da função e representa-se por D'_f .



Exemplo 2

2.1. Das seguintes correspondências, identifica as que **não** representam funções e explica porquê.

2.2. Indica o domínio e o contradomínio das que são funções.



Resolução

2.1. Como uma função é uma correspondência que a cada elemento do primeiro conjunto associa um e um só elemento do segundo conjunto, não são funções as correspondências:

- 2 não é uma função porque ao elemento 2 do conjunto C correspondem dois elementos do conjunto D .

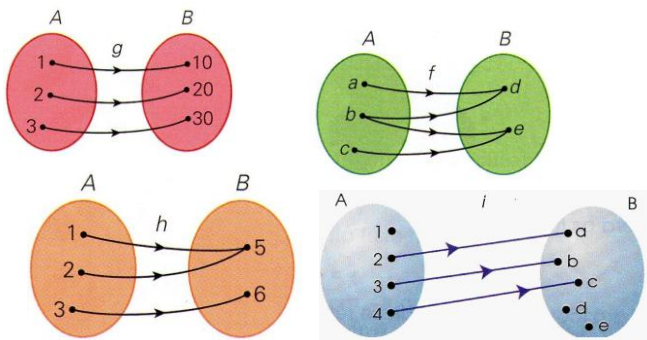
- 3 também não é uma função porque ao elemento -4 do conjunto E não corresponde nenhum elemento do conjunto F .

2.2. A correspondência 1 é uma função. $D_f = \{-1, 1, 2\}; D'_f = \{1, 4\}$

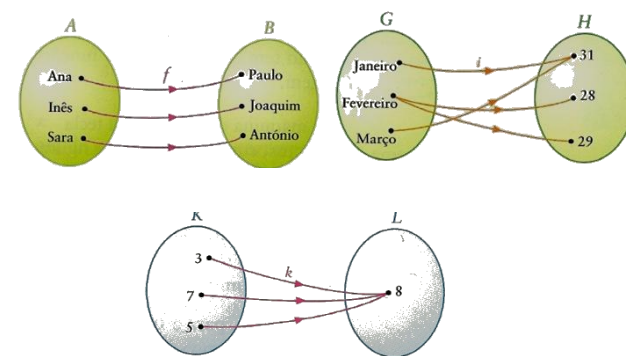
A correspondência 4 é uma função. $D_f = \{-8, 1, 27\}; D'_f = \{-2, 1, 3\}$

Atividades de aplicação

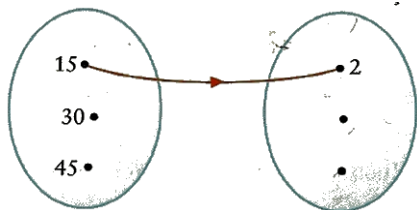
2. Para cada um dos diagramas, diz, justificando, se representam ou não uma função.



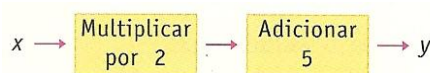
3. Observa as seguintes correspondências. Diz, justificando, se se trata ou não de uma função. Para cada função representada indica o domínio e o contradomínio.



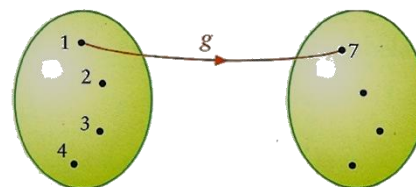
4. Cada 2 gelados custam 15.000,00. Completa o diagrama.



5. Considera a função g representada pelo esquema seguinte:



Completa o diagrama.



5.3. Formas de representar uma função

Existem diferentes formas de representar uma função sendo as mais utilizadas as quatro representações seguintes.

Representação por um diagrama sagital Função f	Representação por uma tabela Função g <table border="1"> <thead> <tr> <th>Número de pães comprados</th><th>Custo (em milhares de dobras)</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>2</td><td>4</td></tr> <tr> <td>3</td><td>6</td></tr> <tr> <td>4</td><td>8</td></tr> </tbody> </table>	Número de pães comprados	Custo (em milhares de dobras)	1	2	2	4	3	6	4	8
Número de pães comprados	Custo (em milhares de dobras)										
1	2										
2	4										
3	6										
4	8										
Representação gráfica ou geométrica Função h	Representação algébrica Função i $x \rightarrow \text{Multiplica por 2 e subtrai 1} \rightarrow y = 2x - 1$ $y = 2x - 1$ ou $i : x \mapsto 2x - 1$ ou $i(x) = 2x - 1$ $D_i = \{1, 2, 3, 4\}$										

Qualquer uma das representações apresentadas tem as suas vantagens.

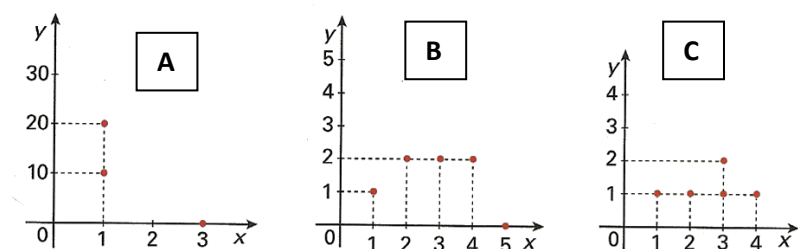
As tabelas e os diagramas de setas têm a vantagem de permitir ler directamente a imagem de um dado objecto ou o(s) próprio(s) objecto(s) conhecida a imagem.

A grande vantagem da expressão algébrica é determinar a imagem de qualquer objecto ou o(s) objecto(s) de qualquer imagem, caso ele não esteja explícito na tabela ou no diagrama de setas.

A representação gráfica permite visualizar a forma como se relacionam as variáveis representadas nos eixos coordenados.

Exemplo 3

Considera as seguintes representações gráficas.



Qual delas representa uma função? Justifica a resposta.

Resolução

Numa função a cada objecto corresponde uma e uma só imagem.

O gráfico A não representa uma função porque ao número 1 correspondem dois elementos: 10 e 20.

O gráfico B representa uma função porque a cada valor de x corresponde um e um só valor de y : $1 \rightarrow 1$; $2 \rightarrow 2$; $3 \rightarrow 2$; $4 \rightarrow 2$; $5 \rightarrow 0$.

O gráfico C não representa uma função porque ao número 3 correspondem dois elementos: 1 e 2.

• Uma **função** também pode ser definida utilizando a linguagem natural. Por exemplo:

“Considera a função h que a cada número faz corresponder o seu triplo.”

• Quando uma função é representada por uma expressão algébrica deve indicar-se o domínio da função.

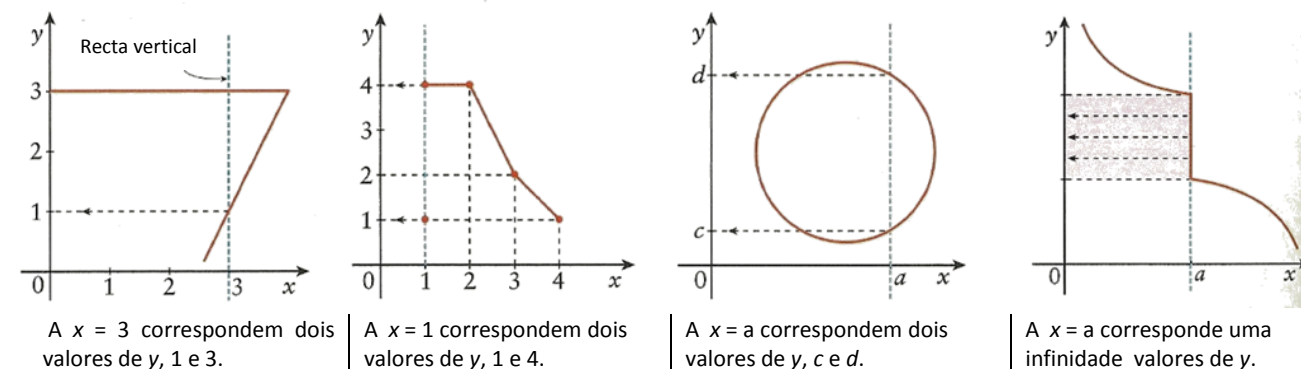
• Na representação gráfica de uma função, a variável independente está representada no eixo das abcissas (x) e a variável dependente no eixo das ordenadas (y).

• Uma função também pode ser definida da seguinte forma:

Uma correspondência entre duas variáveis é função se a cada valor da variável independente corresponde um e um só valor da variável dependente.

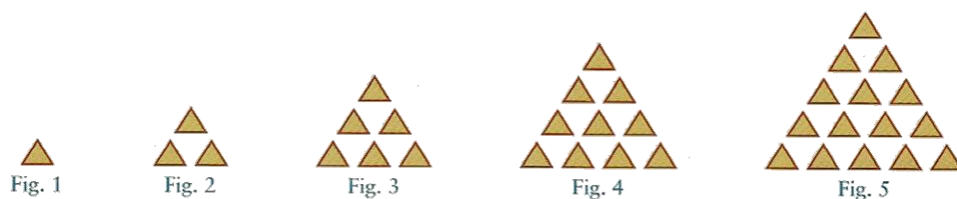
Teste da recta vertical: uma recta vertical não intersecta o gráfico de uma função em mais do que um ponto.

Os seguintes gráficos **não representam funções** pois não “passam” no teste da recta vertical.



Exemplo 4

Observa a seguinte sequência de figuras.



A função f é a função que ao número da figura fez corresponder o número de triângulos da mesma figura.

4.1. Representa a função f :

- por uma tabela;
- por um diagrama de setas;
- geometricamente.

4.2. Indica o domínio e o contradomínio.

4.2. $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$D'_f = \{1, 3, 6, 10, 15\}$

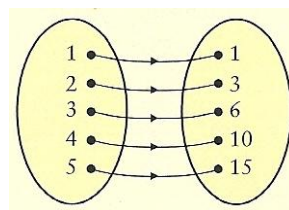
Resolução

4.1.

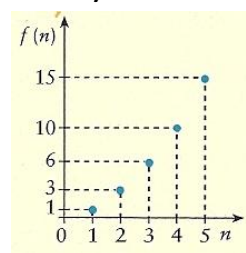
a)

n	$f(n)$
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15

b)



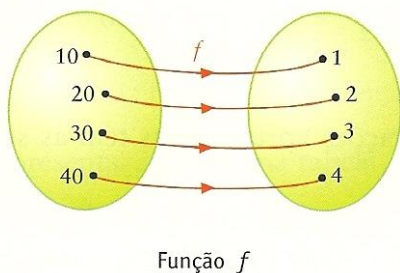
c)



Actividades de aplicação

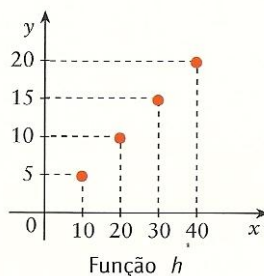
6. A função f está representada por um diagrama sagital; a função g por uma tabela; a função h está representada geometricamente e a função i está representada por uma expressão algébrica. O domínio de cada uma das funções é :

$$D = \{10, 20, 30, 40\}$$



x	$g(x)$
10	2
20	4
30	6
40	8

Função g

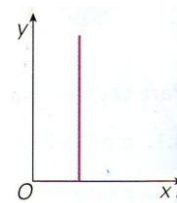
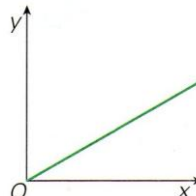
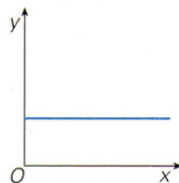
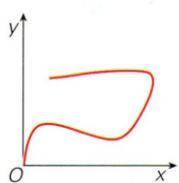


$$i(x) = x - 10$$

Função i

Representa cada uma das funções dadas por cada uma das outras formas de representação, por exemplo a função g deve ser representada por um diagrama de setas, graficamente e por uma expressão analítica.

7. Para cada um dos seguintes gráficos indica os que representam funções.



8. Considera a função g que a cada número natural faz n corresponder a sua soma com 3.

8.1. Define g pela sua expressão analítica.

8.2. Completa os espaços: $g(1) = \dots$ $g(5) = \dots$
 $g(\dots) = 10$ $g(\dots) = 5$

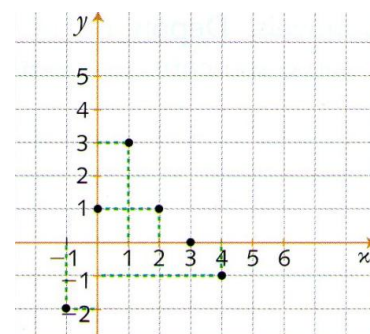
8.3. Qual é a imagem de 4? Qual é o objecto que tem por imagem 20?

8.4. Qual é o domínio e o contradomínio de g ?

9. A função f está representada no seguinte gráfico.

9.1. Define f por meio de uma tabela.

9.2. Indica o domínio e o contradomínio de f .



5.4. Função linear ou uma função de proporcionalidade directa

O Danylson andando sempre ao mesmo ritmo, demora 1 minuto a percorrer 120 metros. Registou-se numa tabela e a distância percorrida.

tempo (min)	1	2	3	4
Distância (m)	120	240	360	480

Esta correspondência é uma **função** porque a cada valor de tempo está associado um e um só valor da distância. A distância é a **variável dependente** e o tempo é a **variável independente**.

Além disso, verifica-se que

$$\frac{120}{1} = 120; \quad \frac{240}{2} = 120; \quad \frac{360}{3} = 120; \quad \frac{480}{4} = 120$$

Como a razão entre a distância e o tempo é constante, conclui-se que se trata de uma **situação de proporcionalidade directa** em que a **constante de proporcionalidade** é 120.

Representando por y a distância (**variável dependente**) e por x o tempo (**variável independente**), obtém-se a expressão analítica da função: $y = 120x$

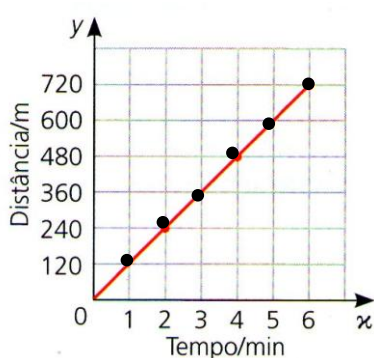
Uma função linear ou função de proporcionalidade directa é uma função com uma expressão algébrica do tipo

$$y = ax \text{ ou } f(x) = ax$$

x é a variável independente, y é a variável dependente e a é a constante de proporcionalidade directa.

• Graficamente, uma função de proporcionalidade directa ou função linear é representada por uma recta que contém a origem do referencial ou apenas um conjunto de pontos dessa recta.

• Repara que se $a = 0$, a função linear resultante é $y = 0$, cuja representação gráfica coincide com o eixo das abcissas.



A representação gráfica do exemplo apresentado é:

O gráfico é uma recta com origem em $(0, 0)$ que contém os pontos de coordenadas:

$(1, 120)$; $(2, 240)$; $(3, 360)$;
 $(4, 480)$; $(5, 600)$ e $(6, 720)$.

Nota

• Repara que $a = \frac{y}{x}$, ou seja, o valor de a obtém-se dividindo qualquer imagem (y) pelo objecto (x), não nulo, que lhe está associado.

• Numa função linear, isto é, do tipo $y = ax$, o objecto 1 tem por imagem por o valor de a :

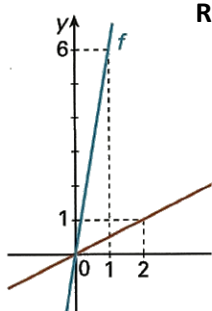
$$y = a \times 1 = a$$

• O gráfico da função linear $y = ax$ passa pelo ponto de coordenadas $(1, a)$.

Exemplo 5

Considera as funções f e g representadas graficamente. Escreve a expressão algébrica de cada uma delas.

Resolução



Recorrendo à definição de função de proporcionalidade directa, como $y = ax$, onde a é a constante de proporcionalidade directa, então a é a imagem do objecto 1.

Para a função f , tem-se que $f(1) = 6$. Logo, $f(x) = 6x$.

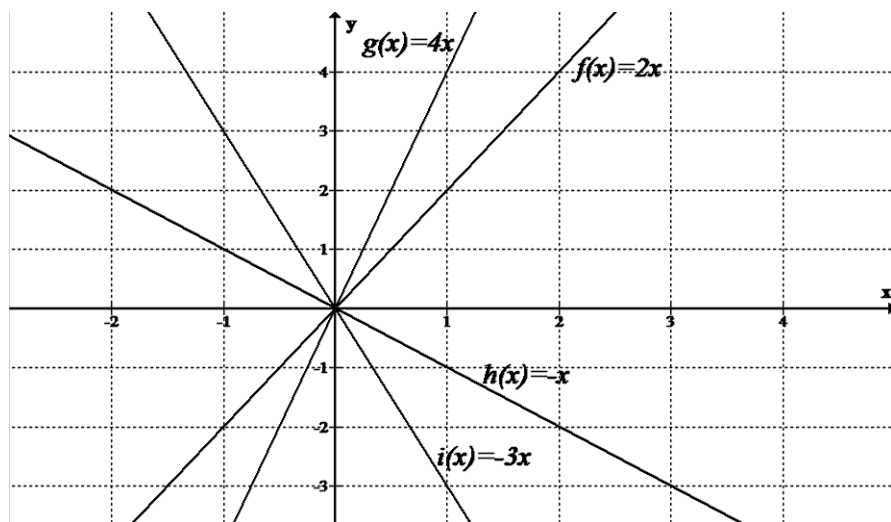
Para a função g , vamos determinar a imagem do objecto 1.

A função g contém o ponto de coordenadas $(2, 1)$. Através de uma regra de três simples calculemos a .

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow a \\ 2 \rightarrow 1 \end{array}; \quad a = \frac{1 \times 1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}. \text{ Logo, } g(x) = \frac{1}{2}x.$$

➤ Declive de uma recta

O gráfico de uma função linear é uma recta ou uma parte de uma recta. A sua expressão algébrica é do tipo $y = ax$, onde a é a constante de proporcionalidade directa. A a também se chama **declive** da recta que representa graficamente a função.



Observa a figura onde estão representadas graficamente as funções lineares f, g, h e i .

Nas funções f e g o valor de a é positivo; em f , $a = 2$, e, em g temos $a = 4$.

Quando o declive é positivo, da esquerda para a direita, as rectas têm um sentido ascendente.

Nas funções h e i o valor de a é negativo; em h , $a = -1$, e, em i temos $a = -3$.

Quando o declive é negativo, da esquerda para a direita, as rectas têm um sentido descendente.

Como se pode observar quanto maior for o valor absoluto de a , mais inclinada está a recta. O declive da recta está relacionada com a constante de proporcionalidade a . Geometricamente à **constante de proporcionalidade directa a** , chama-se **declive da recta**.

Actividades de aplicação

10. A D. Andreza compra carambolas no mercado. Após cada compra, gosta de registar, numa tabela, o número de carambolas e o valor que pagou:

Número de carambolas	2	4	6	8
Custo (em milhares de dobrás)	5	10	15	20

10.1. Mostra que o preço é directamente proporcional ao número de carambolas e explica o significado da constante de proporcionalidade.

10.2. Por que razão a correspondência entre o número de carambolas e o preço é uma função?

10.3. Escreve a expressão analítica da função.

10.4. Determina o preço de 10 carambolas.

10.5. Calcula o número de carambolas que se pode comprar com 12500 dobrás.

10.6. Representa graficamente a função.

12. A expressão analítica de uma função que relaciona o número (N) de voltas completas dadas pela roda de uma bicicleta e o espaço (E) percorrido em metros é

$$N(E) = \frac{2}{3}E.$$

12.1. Justifica que se trata de uma função linear.

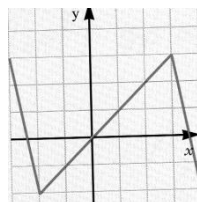
12.2. Qual é a constante de proporcionalidade entre o número de voltas e o espaço percorrido? Que significado tem?

12.3. Determina $N(3)$ e explica o que representa o valor obtido.

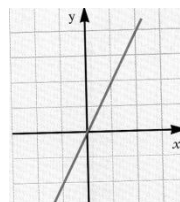
12.4. Determina o valor de E para o qual $N(E) = 10$, e explica o significado do valor obtido.

11. Das seguintes funções representadas graficamente, indica, justificando, as que são de proporcionalidade directa.

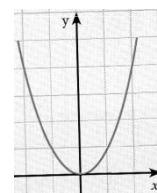
11.1.



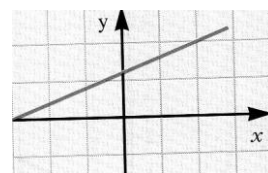
11.2.



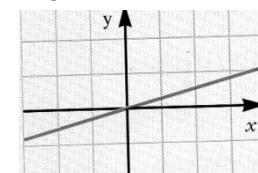
11.3.



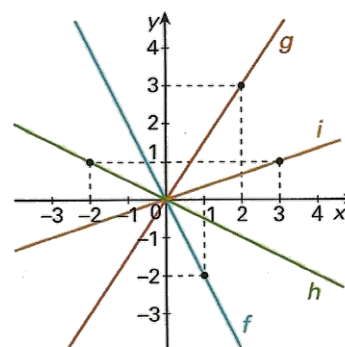
11.4.



11.5.



13. Escreve as expressões algébricas de cada uma das funções lineares representadas graficamente, e , indica o declive da recta.



5.5. Função afim

Na escola do Alex, os alunos têm um prazo de 15 dias para se matricular. No acto da matrícula pagam 10.000,00.

Findo o prazo, por cada dia de atraso, têm de pagar uma multa de 5.000,00.

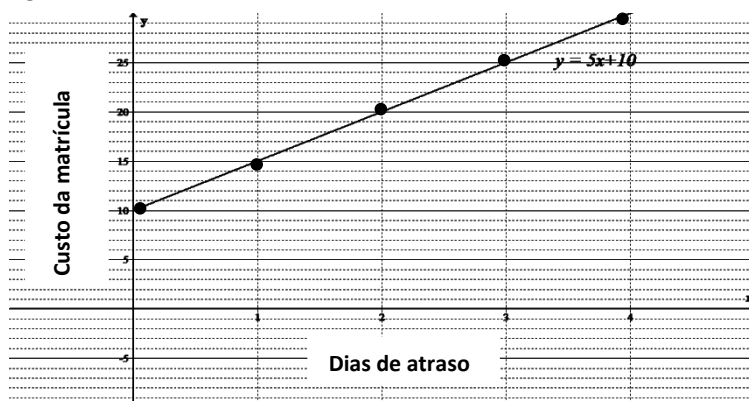
Vejamos quanto os alunos têm que pagar (para facilitar os cálculos faz-se 1.000,00 = 1):

- no prazo da matrícula (0 dias de atraso): valor a pagar = $5 \times 0 + 10 = 10$
- com 1 dia de atraso: valor a pagar = $5 \times 1 + 10 = 15$
- com 2 dias de atraso: valor a pagar = $5 \times 2 + 10 = 20$
- com 3 dias de atraso: valor a pagar = $5 \times 3 + 10 = 25$

O preço a pagar depende do número de dias que o aluno ultrapasse o prazo da matrícula.

Designando por y o valor a pagar (**variável dependente**) e por x o número de dias de atraso (**variável independente**), obtém-se uma função cuja expressão algébrica é $y = 5x + 10$.

Esta é uma **função afim**.

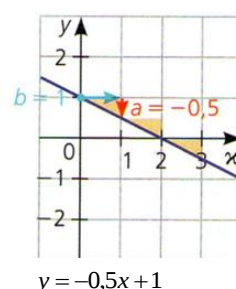
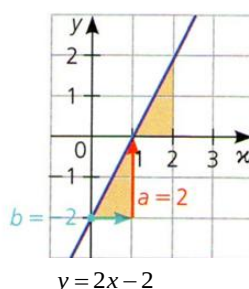
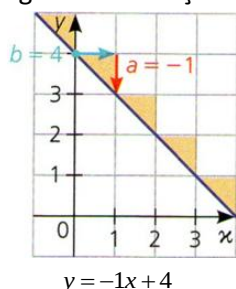
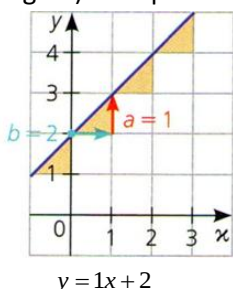


Nota: Nesta representação gráfica consideram-se apenas valores de x , positivos, já que esta se refere ao custo da matrícula.

Uma **função afim** é uma função do tipo $y = ax + b$, com a e b constantes.

- O gráfico de uma função afim é uma recta não vertical.
- a designa-se por **declive** da recta que representa graficamente a função.
- b designa-se por **ordenada na origem**. Na expressão $y = ax + b$, se $x = 0$, vem $y = a \times 0 + b \Leftrightarrow y = b$, ou seja, a imagem de zero é sempre igual ao valor de b . Graficamente, a ordenada na origem é o ponto de intersecção da recta com o eixo das ordenadas.

Nos gráficos seguintes podemos observar a influência dos parâmetros a (declive da recta) e b (ordenada na origem) na representação gráfica da função afim.



Exemplo 6

Representa graficamente a função $f(x) = 2x - 2$. Indica a ordenada na origem e o declive da recta que representa graficamente a função.

Resolução

Trata-se de uma representação de uma função afim cujo gráfico é uma recta. Precisamos de conhecer dois pontos da recta. Para isso vamos determinar a imagem de dois objectos quaisquer, porque para definir a recta basta conhecer dois pontos.

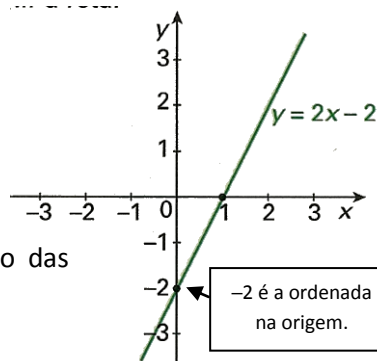
Por exemplo vamos considerar os objectos 0 e 1.

x	$y = f(x) = 2x - 2$
0	$2 \times 0 - 2 = -2$
1	$2 \times 1 - 2 = 0$

Num referencial assinalam-se os pontos de coordenadas $(0, -2)$ e $(1, 0)$.

Em seguida desenha-se a recta por eles definida. O gráfico intersecta o eixo das abscissas (x) no ponto 1 porque $f(1) = 0$. Diz-se que 1 é o zero da função.

A ordenada na origem é -2 ($b = -2$). No gráfico a recta intersecta o eixo das ordenadas no ponto -2 . O declive da recta é 2 ($a = 2$).



Actividades de aplicação

14. Um turista quer reservar um quarto num hotel na cidade de Santo António, na ilha do Príncipe. O preço do quarto é de 60€ por noite, aos quais se acrescentam 10€, para o transporte do aeroporto para o hotel.

Escreve a expressão analítica da função que a cada número de noites (x) faz corresponder o preço a pagar (y).

15. O custo de entrada na discoteca "África a Dançar" é de 50.000,00, sem direito a consumo de bebidas. Cada bebida não alcoólica custa 30.000,00.



Escreve a expressão analítica da função que a cada bebida não alcoólica consumida (x) faz corresponder o dinheiro gasto pelo cliente da discoteca (y).

16. Considera a função definida pela expressão algébrica $f(x) = 3x - 1$.

16.1. Copia para o teu caderno e completa a tabela.

x	2	4		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$
$f(x)$			14		59	

16.2. Representa graficamente a função.

16.3. Quais dos seguintes pontos pertencem ao gráfico da função?

A $\searrow \nearrow (3, 8)$; B $\searrow \nearrow (6, 18)$;

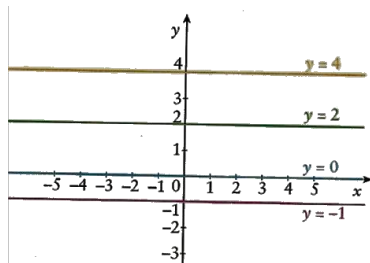
C $\searrow \nearrow \left(\frac{4}{3}, 3\right)$.

Apresenta os cálculos que efectuares.

➤ Função constante

Na função $y = 4$, todos os objectos têm imagem 4. Uma função deste tipo designa-se por **função constante**.

Uma **função constante** é representada por uma **recta horizontal**.



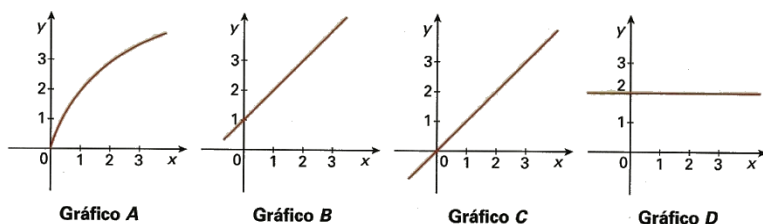
A função constante, assim como a função linear são casos particulares da função afim.

Sendo a função afim definida por $y = ax + b$, se $a = 0$, vem $y = b$; a função é constante. Se $b = 0$, vem $y = ax$, $a \neq 0$; a função é linear.

Função afim – Quadro resumo		
$y = ax + b$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$	$y = ax + b$, $b = 0$ $y = ax \rightarrow$ Função linear	$y = ax + b$, $a = 0$ $y = b \rightarrow$ Função constante
O gráfico é uma recta que não passa pela origem.	O gráfico é uma recta que passa pela origem.	O gráfico é uma recta horizontal

Exemplo 7

Qual dos seguintes gráficos representam uma função afim?

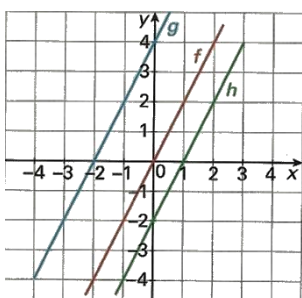


Resolução

São os gráficos B, C e D.

O gráfico B representa uma função afim, o gráfico C uma função linear e o gráfico D uma função constante.

Observa o referencial onde estão representadas as funções: $f(x) = 2x$; $g(x) = 2x + 4$ e $h(x) = 2x - 2$.

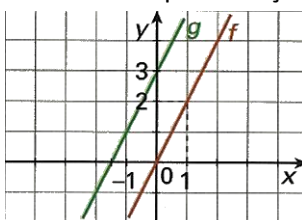


Como se pode observar as funções f , g e h são representadas por rectas estritamente paralelas.

Como nas três funções o coeficiente de x é igual ($a = 2$) as rectas têm o mesmo declive. Logo, conclui-se que **rectas com o mesmo declive são paralelas**.

Exemplo 8

Observa as representações gráficas das funções f e g .



Escreve a expressão algébrica de cada uma delas.

Resolução

Vamos escrever $g(x)$ a partir de $f(x)$, porque as rectas que representam graficamente as duas funções são paralelas, e, portanto, têm o mesmo declive.

O declive da recta que representa graficamente a

função f é a imagem do objecto 1, por se tratar de uma função linear, $f(x) = 2x$. Logo, o declive da recta é 2 ($a = 2$).

A ordenada na origem da função g é 3, (a imagem de 0 é 3, logo, a recta intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 3)$). Então, $a = 2$ e $b = 3$.

Substituindo na expressão da função $y = ax + b$, vem:
 $g(x) = 2x + 3$.

Deste modo $f(x) = 2x$ e $g(x) = 2x + 3$.

➤ Funções e gráficos em contextos reais

Exemplo 9



A função afim $f(n) = -0,08n + 16$

permite fazer uma estimativa do comprimento do lápis, em centímetros, depois de ter sido introduzido no apara-lápis e rodado n vezes.

9.1. Calcula $f(0)$ e interpreta o resultado no contexto apresentado.

Actividades de aplicação

17. Considera as seguintes expressões algébricas de funções:

A. $y = 8x$

E. $y = -9x - 11$

B. $y = 3x + 7$

F. $y = -x$

C. $y = 14$

G. $y = 5x^2 + 7$

D. $y = 2,5x - 14$

H. $y = -6$

17.1. Identifica as funções lineares.

17.2. Quais das funções são constantes?

17.3. Indica as funções afins e, em cada caso, refere os valores de a e b (na expressão $y = ax + b$).

18. Considera a função que tem por expressão algébrica $y = 4x - 7$. Copia e completa a tabela.

x	-5	-3,25			3		6,3	
y			-15	-7		11		28

9.2. Faz uma estimativa para o comprimento do lápis após ter rodado no apara-lápis:

a) 100 vezes; **b)** 80 vezes; **c)** 10 vezes.

9.3. Calcula n sabendo que $f(n) = 0$. Interpreta o resultado no contexto do problema.

9.4. Representa graficamente a função f .

Resolução

Vamos substituir n por 0, 100, 80 e 10 porque conhecemos o objecto e queremos determinar a imagem.

9.1. $f(0) = -0,08 \times 0 + 16 = 16$

Antes de ser afiado, o lápis tinha 16 cm.

9.2. a) $f(100) = -0,08 \times 100 + 16 = 8$

b) $f(80) = -0,08 \times 80 + 16 = 9,6$

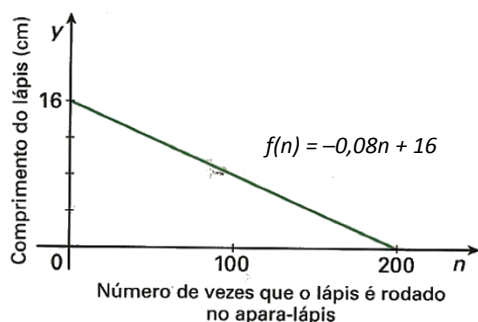
b) $f(10) = -0,08 \times 10 + 16 = 15,2$

9.3. Vamos substituir $f(n)$ por 0 e determinar n .

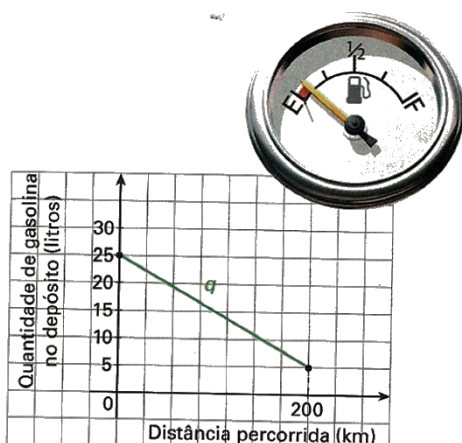
$$0 = -0,08n + 16 \Leftrightarrow 0,08n = 16 \Leftrightarrow n = \frac{16}{0,08} \Leftrightarrow n = 200.$$

Se o lápis fosse rodado 200 vezes no apara-lápis, desaparecería, ou seja, seria igual a zero.

9.4.



Exemplo 10



O gráfico da figura mostra a quantidade, q , de gasolina no depósito de um automóvel após ter iniciado uma viagem.

10.1. Antes de iniciar a viagem quantos litros de gasolina tinha o depósito do automóvel?

10.2. De quantos quilómetros foi a viagem?

Actividades de aplicação

19. Para cada uma das funções apresentadas a seguir, copia e completa a tabela; depois, representa graficamente a função num referencial cartesiano.

19.1.

x	$y = 2x - 3$	$(x; y)$
0	$y =$	$A(;)$
2	$y =$	$B(;)$

19.2.

x	$y = -3x + 5$	$(x; y)$
	$y =$	$C(;)$
	$y =$	$D(;)$

19.3.

x	$y = 4$	$(x; y)$
	$y =$	$E(;)$
	$y =$	$F(;)$

20. No mesmo referencial, representa graficamente as seguintes funções:

$f: \searrow y = -2x$; $g: \searrow y = -2x + 2$;

$h: \searrow y = 2x - 1$; $i: \searrow y = -x + 4$;

20.1. O gráfico de cada função é uma recta.

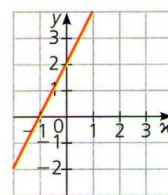
a) Qual é o declive de recta que representa cada função?

b) No gráfico observaste duas rectas paralelas. O que podes dizer acerca dos declives respectivos?

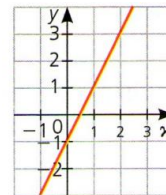
c) O que podes dizer acerca de uma recta quando o declive é negativo? E quando o declive é um número positivo?

21. Selecciona, de entre os gráficos seguintes, o que representa a função $y = 2x - 1$.

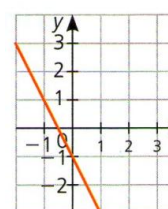
(A)



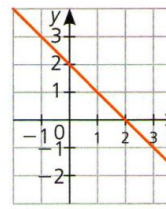
(B)



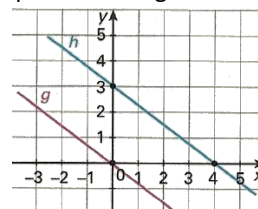
(C)



(D)



22. Escreve a expressão algébrica de cada uma das funções g e h representadas graficamente.



23. No mesmo referencial representa graficamente as seguintes funções:

$f: \searrow y = 2x + 1$; $g: \searrow y = -2x + 1$;

$h: \searrow y = -x + 1$

23.1. Há algum ponto comum aos três gráficos? Qual?

24.1. Que significado tem esse ponto relativamente às funções dadas?

10.3. Mostra que $q(x) = -0,1x + 25$, onde q representa a quantidade em litros de gasolina no depósito após x quilómetros de viagem.

10.4. Determina $q(200)$ e interpreta o resultado.

10.5. Determina x , para $q(x)=0$. Interpreta o resultado.

Resolução

10.1. Antes de iniciar a viagem corresponde ao tempo 0. A imagem do objecto 0 é 25, logo, antes de iniciar a viagem o depósito do automóvel tinha 25 litros de gasolina.

10.2. A viagem foi de 200 km.

10.3. Como se pode verificar no gráfico a ordenada na origem é 25, logo, $b = 25$

Por outro lado o gráfico contém o ponto de coordenadas (200, 5). Sendo $x = 200$ e $y = 5$, substituindo na expressão $q(x) = ax + b$, vem:

$$5 = a \times 200 + 25 \Leftrightarrow 5 - 25 = 200a \Leftrightarrow -20 = 200a \Leftrightarrow a = \frac{-20}{200} \Leftrightarrow a = -0,1$$

Assim, a expressão da função é $q(x) = -0,1x + 25$.

10.4. $q(200) = -0,1 \times 200 + 25 = 5$

Depois de percorrer 200 km o depósito do automóvel tinha apenas 5 litros de gasolina.

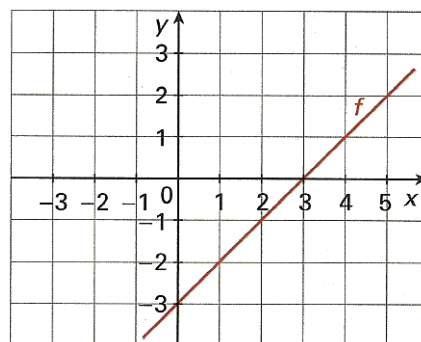
10.5.

$$0 = -0,1x + 25 \Leftrightarrow 0,1x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{0,1} \Leftrightarrow x = 250$$

Após ter percorrido 250 km, o depósito do automóvel fica completamente vazio.

Actividades de aplicação

25. Considera a representação gráfica da função f .



25.1. Qual é a imagem de 5 por f ?

25.2. Qual é o objecto que tem a imagem 0 por f ?

25.3. Traça uma recta g paralela a f que passe pelo ponto de coordenadas (0, 0).

25.3. Qual é a ordenada na origem da função f ?

25.4. Escreve a expressão algébrica da função f .

25.5. Qual é o declive da recta que representa a função f ?

25.6. Qual é a imagem de 10 por f ?

25.7. Qual é o objecto cuja imagem por f é 97?

26. A Sofia está a mudar a água de um lago de peixes e, para isso, deixou alguma água no lago antes de acrescentar água limpa.

Após a abertura da torneira, a expressão algébrica que relaciona a altura da água (y), em centímetros, dentro do lago com o tempo (x), em minutos, é:

$$y = 2,5x + 20$$

26.1. Qual era a altura da água quando a Sofia abriu a torneira?

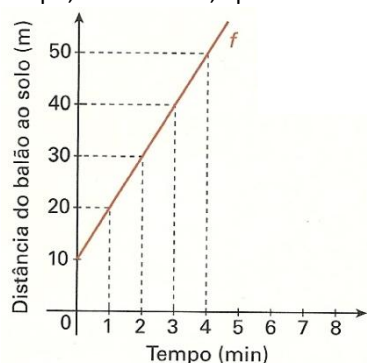
26.2. Em cada minuto, quantos centímetros subiu a água?

26.3. Qual era a altura da água após 3 minutos?

26.4. Após quanto tempo a altura da água atingiu 35 cm?

26.5. Representa graficamente a função.

27. O gráfico mostra a relação entre a altura, em metros, a que o balão se encontra do solo e o tempo, em minutos, após o seu lançamento. O balão foi lançado do cimo do terraço de um prédio.



27.1. A que distância do solo está o terraço do prédio de onde o balão foi lançado?

27.2. A que distância do solo se encontrava o balão três minutos após o seu lançamento?

27.3. Determina o tempo que tinha decorrido, após o lançamento do balão, quando este se encontrava a 50 metros acima do solo.

27.4. Desenha o gráfico da função linear g cujo gráfico é uma recta paralela ao gráfico da função dada.

27.5. Escreve as expressões algébricas de g e de f .



Unidade 6 – Isometrias

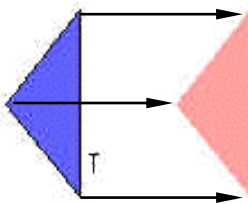
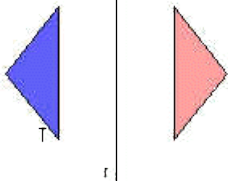
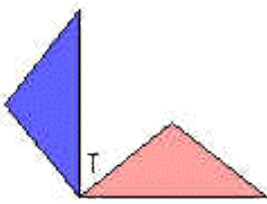
Uma **transformação geométrica** de uma figura **A** numa figura **B** é uma correspondência que a cada ponto da figura **A** faz corresponder um e um só ponto da figura **B**.

À figura **A** chama-se figura **original** e a cada um dos seus pontos chama-se **objecto**.

À figura **B** chama-se figura **transformada** e a cada um dos seus pontos chama-se **imagem**.

As **isometrias** são transformações geométricas que preservam as distâncias entre pontos e as amplitudes dos ângulos, transformando as figuras originais noutras figuras **congruentes** (geometricamente iguais).

Nesta unidade iremos estudar três tipos de isometrias: a translação, a simetria axial ou de reflexão e a rotação.

		
Translação	Simetria axial ou de reflexão	Rotação

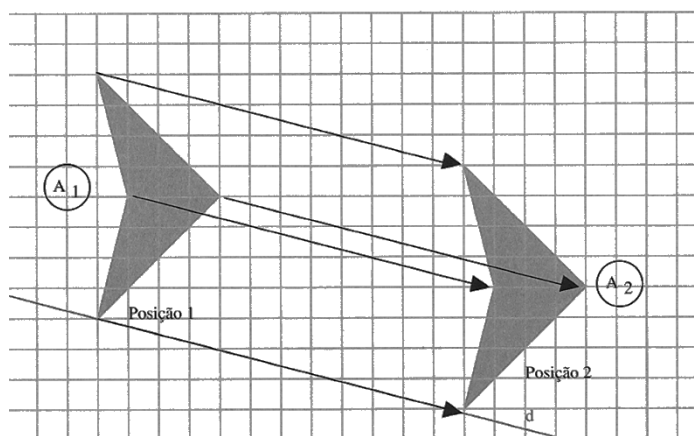
6.1. Translação

Muitas são as situações do dia-a-dia onde observamos movimentos de translação:

- O movimento do esquadro encostado à régua para traçar rectas paralelas;
- O jovem que desce a rampa de skate;
- O movimento de um elevador ao subir e descer.



No seu voo, a Asa Delta deslocou-se da **posição 1** para a **posição 2**.

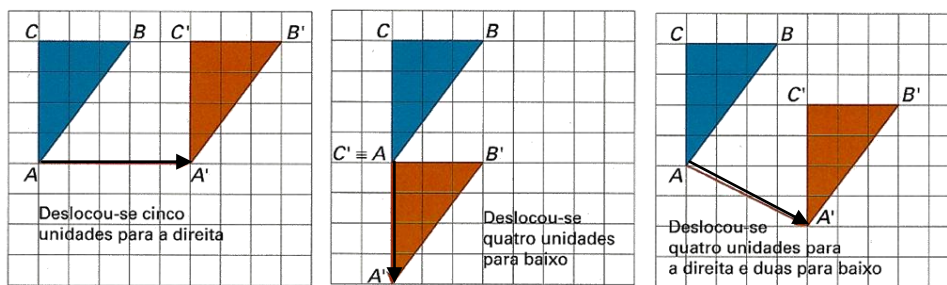


As setas indicam a direcção, o sentido do deslocamento, bem como a distância percorrida.

Repara que é possível levar o decalque da figura **A₁** a coincidir com a figura **A₂** fazendo-o deslizar ao longo da recta **d** e sempre paralelamente à posição inicial.

Diz-se que **A₂** é a **imagem** ou **transformado** da figura **A₁** por uma **translação**. A figura **A₁** e a sua imagem são geometricamente iguais.

Na figura seguinte podes observar três triângulos e os respectivos transformados por uma **translação** no plano. Em qualquer dos casos, o triângulo $[ABC]$ transforma-se no triângulo $[A'B'C']$ por uma **translação** definida por uma **direcção** (horizontal, vertical, diagonal, ...), um **sentido** (da esquerda para a direita, de cima para baixo, ...) e um **comprimento** (duas unidades, cinco unidades...).



- A **translação** é uma transformação geométrica em que uma figura é transformada noutra geometricamente igual.
- Numa translação a figura transformada pode ser obtida da original deslocando a primeira ao longo de uma recta e sempre paralela à posição inicial.

Propriedades da translação

- Um segmento de recta é transformado num segmento de recta paralelo ao primeiro e com o mesmo comprimento.
- Um ângulo é transformado num ângulo com a mesma amplitude e o mesmo sentido.

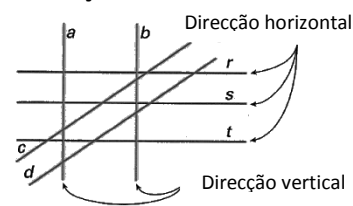
➤ Vector de uma translação

Nas figuras anteriores verificaste que às setas estão associados os conceitos de direcção, sentido e comprimento.

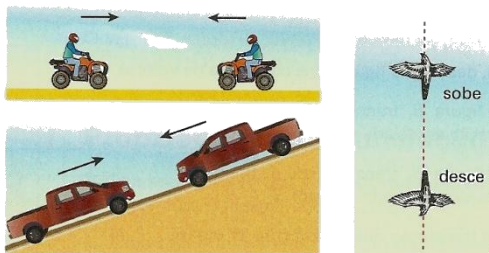
Direcção e sentido

Uma recta define uma direcção e todas as que lhe são paralelas têm a mesma direcção.

Na figura ao lado podes observar **sete** rectas e **três** direcções.



Para cada direcção há dois sentidos.

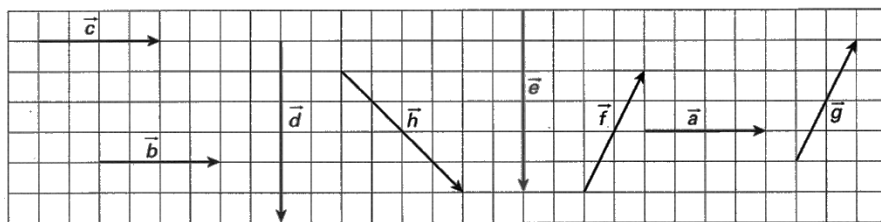


Repara que só depois de definida a direcção podemos definir o sentido.

Vector é um objecto matemático definido por uma **direcção**, um **sentido** e um **comprimento**.

Habitualmente representa-se por uma letra minúscula com uma seta por cima $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right)$.

Na figura seguinte estão representados oito vectores.



Os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ têm a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, são considerados iguais.

$$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$$

Do mesmo modo $\vec{d} = \vec{e}$ e $\vec{f} = \vec{g}$. Qualquer vector $\vec{u}$ define uma translação de uma

figura. A translação definida pelo vector $\vec{u}$ representa-se por $T_{\vec{u}}$. Se $\vec{u} = \vec{AB}$, $T_{\vec{u}} = T_{\vec{AB}}$

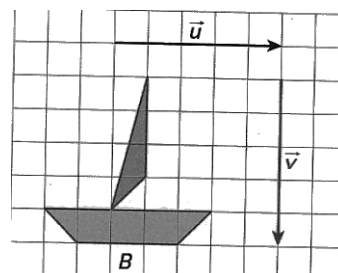
Exemplo 10

No teu caderno, desenha a figura B e considera os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

1.1. Desenha a figura B_1 transformada da figura B pela translação associada ao vector $\vec{u}$.

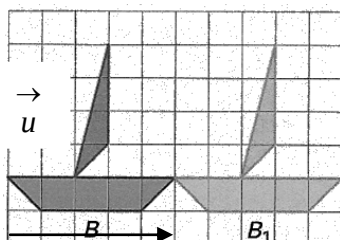
1.2. Desenha a figura B_2 transformada da figura B pela translação associada ao vector $\vec{v}$.

1.3. Descreve a translação que transforma B em B_2 .



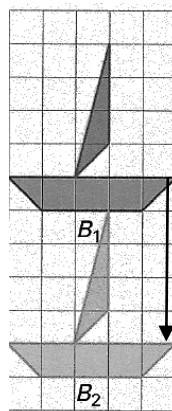
Resolução

1.1.



A figura B_1 é transformada da figura B pela translação associada ao vector $\vec{u}$

1.2.

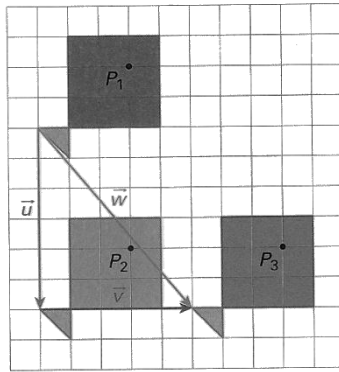


A figura B_2 é transformada da figura B pela translação associada ao vector $\vec{v}$.

1.3. Cada ponto da figura B deslocou-se 5 unidades para a direita e 5 unidades para baixo.

➤ Adição de vectores e composição de translações

Observa a figura.



• P_2 foi obtido de P_1 por $T_{\vec{u}}$

• P_3 foi obtido de P_2 por $T_{\vec{v}}$

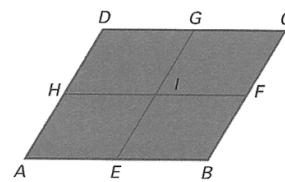
• P_3 foi obtido de P_2 por $T_{\vec{w}}$

Ao vector $\vec{w}$ chama-se
vector soma do vector $\vec{u}$
com o vector $\vec{v}$ e escreve-se:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

Actividades de aplicação

1. A figura representa um paralelogramo $[ABCD]$, dividido em quatro paralelogramos congruentes.



Escreve o vector soma:

1.1. $\vec{AE} + \vec{FC}$

1.2. $\vec{HF} + \vec{HD}$

1.3. $\vec{DC} + \vec{BA}$

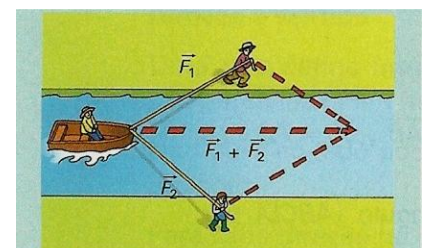
1.4. $\vec{AB} + \vec{CG}$

Como se adicionam dois vectores?

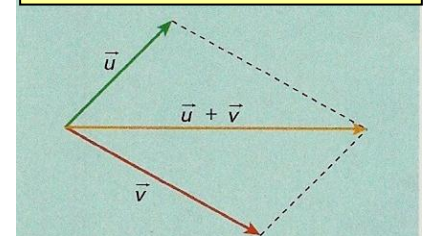
Regra do triângulo

Dados dois vectores quaisquer $\vec{a}$ e $\vec{b}$ adicionamos os dois vectores procedendo do seguinte modo:	
1º Passo Desenhamos $\vec{a}$ e onde termina $\vec{a}$ começamos a desenhar $\vec{b}$	
2º Passo Desenhamos o vector que começa onde começa $\vec{a}$ e termina onde termina $\vec{b}$. O vector obtido é o vector $\vec{a} + \vec{b}$	

Regra do paralelogramo



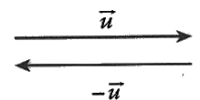
O vector soma de dois vectores pode ser obtido pela regra do paralelogramo.



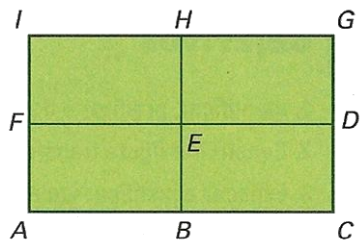
O vector $\vec{u} + \vec{v}$, soma do vector $\vec{u}$ e do vector $\vec{v}$, está representado pela diagonal do

➤ Vector simétrico e vector nulo

O vector simétrico do vector $\vec{u}$ representa-se por $-\vec{u}$ e tem a direcção e o comprimento de $\vec{u}$ e o sentido oposto ao do vector $\vec{u}$. A soma de dois vectores simétricos é o vector nulo e representa-se por $\vec{0}$. Este vector tem comprimento nulo e direcção e sentidos indeterminados.



Exemplo 2



Na figura está representado o rectângulo $[ACGI]$, dividido em quatro rectângulos congruentes. Usando as letras da figura, escreve o vector soma:

2.1. $\vec{AB} + \vec{CD}$ 2.2. $\vec{FE} + \vec{HD}$ 2.3. $\vec{AB} + \vec{GH}$

Resolução

Vamos aplicar a regra do triângulo porque esta regra permite facilmente obter a soma de dois vectores.

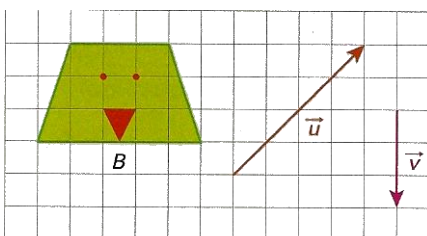
2.1. Por exemplo $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AE}$

2.2. Por exemplo $\vec{FE} + \vec{HD} = \vec{FC}$

2.3. Por exemplo $\vec{AB} + \vec{GH} = \vec{AA} = \vec{0}$

Repara que $\vec{AE} = \vec{BD} = \vec{EG} = \vec{FH}$ e, por isso, também é correcto escrever por exemplo $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{FH}$.

Actividades de aplicação



2. Observa a figura. Para cada questão desenha no teu caderno a figura. Desenha no teu caderno:

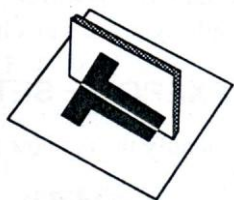
2.1. A figura transformada de B associada ao vector $\vec{v}$. Chama-lhe B';

2.2. A figura transformada de B' associada ao vector $\vec{u}$. Chama-lhe B'';

2.3. Identifica o vector que transforma, por uma única translação, B em B''.

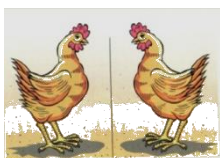
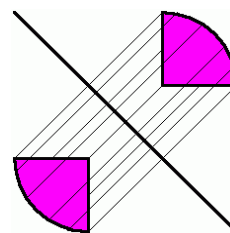
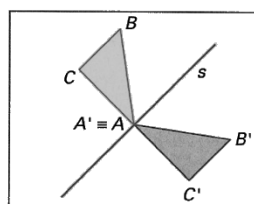
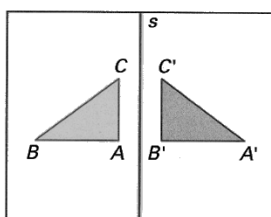
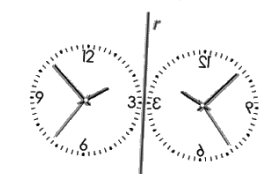
2.4. Desenha o vector soma de $\vec{u}$ com o simétrico do vector $\vec{v}$.

6.2. Simetria axial ou reflexão



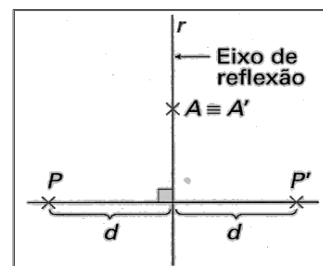
A figura ao lado mostra a letra T, um espelho e a imagem da letra reflectida no mesmo.

A figura abaixo mostra duas situações em que o triângulo $[ABC]$ é transformado no triângulo $[A'B'C']$ por uma simetria de reflexão ou simetria axial de eixo s .

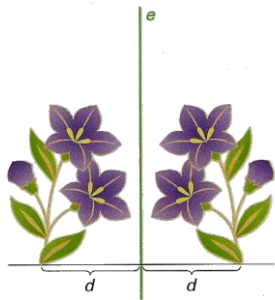


Numa **reflexão** ou **simetria axial** existe sempre um eixo de reflexão (ou eixo de simetria).

Dada uma recta r (eixo de reflexão) dá-se o nome de **reflexão, ou simetria axial**, de eixo r à isometria que transforma os pontos de r em si próprios e que, a cada ponto P não pertence a r , faz corresponder um ponto P' tal que o eixo r é a mediatriz de $[PP']$.

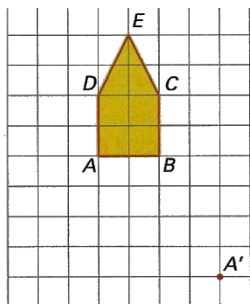


Propriedades da simetria de reflexão (ou simetria axial)



- Um segmento de recta é transformado num segmento de recta com o mesmo comprimento.
- Uma recta e uma semi-recta são transformadas numa recta e numa semi-recta, respectivamente.
- Um ângulo orientado é transformado num ângulo orientado com a mesma amplitude mas com sentido inverso.
- Qualquer ponto do eixo de reflexão é transformado em si próprio.
- A distância de um ponto original ao eixo de reflexão é igual à distância da imagem desse ponto ao eixo.

Exemplo 3

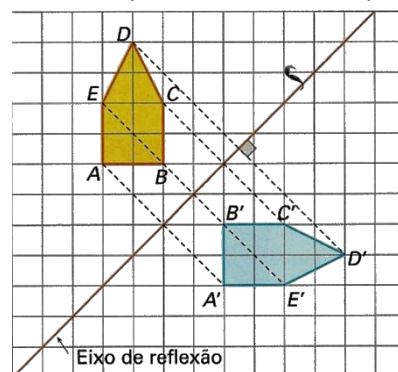


Desenha a figura transformada de $[ABCDE]$, da figura ao lado, por uma reflexão que transforma o ponto A no ponto A' .

Resolução

Vamos começar por desenhar o eixo de reflexão que é a mediatriz do segmento de recta $[AA']$, porque uma reflexão fica definida conhecido o seu eixo de reflexão. Como conheces um ponto e o seu transformado, por definição, o eixo de reflexão é a mediatriz do segmento $[AA']$, $[BB']$,

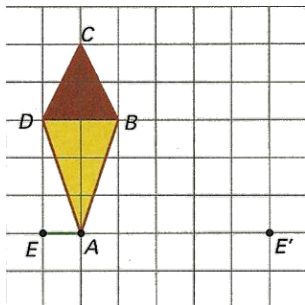
$[CC']$, $[DD']$ e $[EE']$.



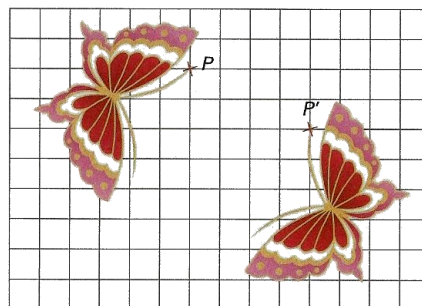
Actividades de aplicação

3.

Desenha no teu caderno $[A'B'C'D'E']$ transformado de $[ABCDE]$ pela reflexão que transforma E em E' .



4. O ponto P' é a imagem do ponto P pela reflexão de eixo r .



Desenha no teu caderno os pontos P e P' de acordo com a figura e, com a ajuda da régua e do compasso desenha o eixo de reflexão, r , que transforma P em P' .

6.3. Rotação

Repara que no movimento de rotação das hélices dos aerogeradores (geradores de energia eólica), do helicóptero e nos ponteiros do relógio há sempre um ponto fixo (centro de rotação) e um ângulo (ângulo de rotação).

Para descrever uma **rotação** é necessário conhecer:

- O centro de rotação;
- A medida da amplitude do ângulo
- O sentido do ângulo de rotação (o sentido positivo é o sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio, enquanto que o sentido negativo é o sentido do movimento dos ponteiros do relógio).

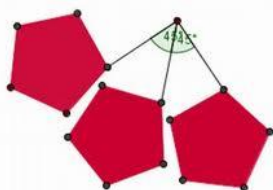
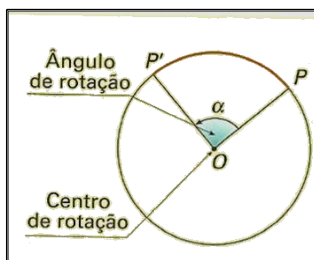


Rotação

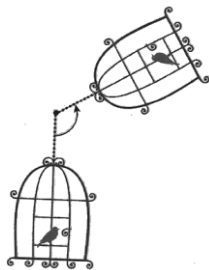
Dado um ponto O , centro de rotação, e a amplitude α , chama-se **rotação** de centro O e amplitude α , à isometria que a um ponto P , faz corresponder um ponto P' , tal que:

- a distância de O a P é igual à distância de O a P' (imagem de P);
- a amplitude do ângulo orientado definido por P , O e P' é igual a α .

Ou seja, $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $\widehat{POP'} = \alpha$. Representa-se por $R_{O,\alpha}$.

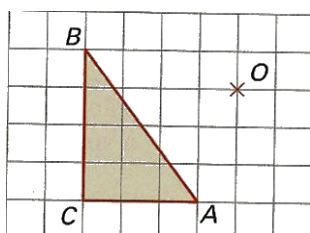


Propriedades da rotação



- Um segmento de recta é transformado num segmento de recta com o mesmo comprimento.
- Uma recta e uma semi-recta são transformadas numa recta e numa semi-recta, respectivamente.
- Um ângulo orientado é transformado num ângulo orientado com a mesma amplitude e com o mesmo sentido.
- O centro de rotação é o único ponto que se mantém fixo se o ângulo de rotação não for um múltiplo de 360° .

Exemplo 4

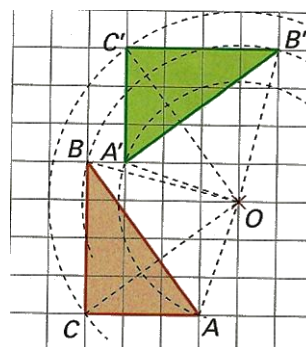


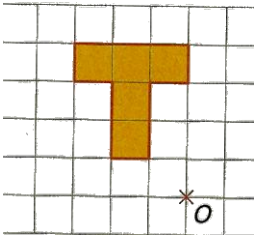
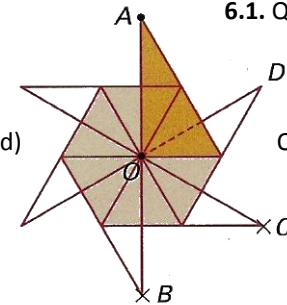
Observa a figura. Desenha a figura transformada do triângulo $[ABC]$ dada por uma rotação de centro O e amplitude -90° .

Resolução

Vamos aplicar a definição de rotação. Sabemos que cada ponto da figura roda em torno de O , 90° no sentido dos ponteiros do relógio.

- 1.º Desenharm-se $[OA]$, $[OC]$ e $[OB]$.
- 2.º Desenharm-se arcos de circunferência de centro O e raios $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$.
- 3.º Com a ajuda do transferidor medem-se ângulos de modo que $\widehat{A'OA} = 90^\circ$; $\widehat{B'OB} = 90^\circ$ e $\widehat{C'OC} = 90^\circ$
- 4.º Desenha-se o triângulo $[A'B'C']$



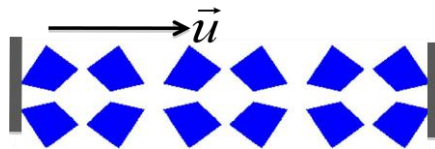
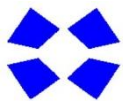
Actividades de aplicação 5. Desenha no teu caderno a imagem (T) por uma rotação de centro O e amplitude -90°. 	6. Observa a figura.  6.1. Qual é o ângulo de rotação que transforma: a) O ponto A no ponto B? b) O ponto A no ponto C? c) O ponto C no ponto B? O ponto D no ponto A? 6.2. Quantas rotações de ponto A com centro em O, podes observar na figura?
---	---

➤ **Frisos, padrões e rosáceas**

Através da aplicação das várias isometrias (translação, reflexão e rotação) podem construir-se:

➤ **Frisos**

Elemento simples



Friso

Figura infinita caracterizada por apresentar sempre simetrias de translação com a mesma e uma só direcção.

➤ **Rosáceas**

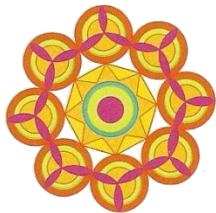


Figura plana que possui um número finito de simetrias de rotação e de reflexão.

➤ **Padrões**

Um padrão é uma figura plana que possui uma infinidade de simetrias de translação em mais que uma direcção.



Padrão de tecido africano

BIBLIOGRAFIA E IMAGENS

NEVES, Maria Augusta Ferreira; FARIA, Maria Luísa Monteiro – Matemática 8.º ano – 1.ª Parte - Porto Editora, 1999

MENDES, Esmeralda; SANTOS, Lurdes – Matemática 8 – Órbita – Volume 1 – Constância Editores, 2003

PASSOS, Iolanda Centeno; CORREIA, Olga Flora – Matemática em Acção – Parte 1 – 8.º ano – Lisboa Editora, 2008

MARQUES, Manuel; Ferreira, Paula – Desafios de Matemática 8.º ano – Volume 2 – Edições Santillana – Constância, 2011

NEVES, Maria Augusta Ferreira; FARIA, Maria Luísa Monteiro – Matemática 7 - Porto Editora, 1998

NEVES, Maria Augusta Ferreira; SILVA, António Pinto; RAPOSO, Maria José; SILVA, Jorge Nuno – Matemática 8º Ano - Porto Editora, 2011

Sites da Internet

www.matematica.no.sapo.pt; www.educ.fc.ul.pt; <http://math.about.com>; www.amatoso.org;

www.redematematica.wordpress.com ; www.dgidc.min-edu.pt .

