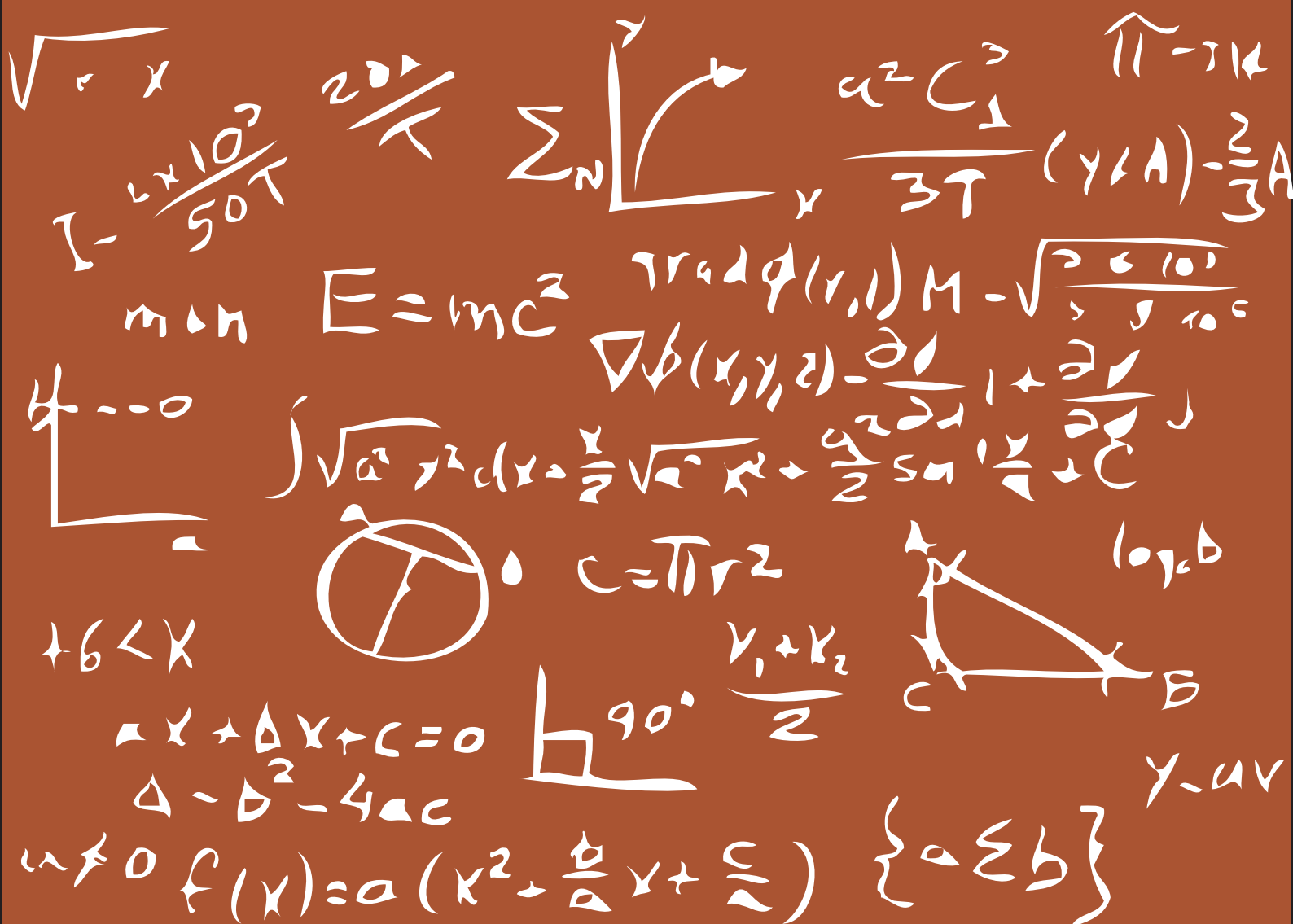


TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

7ª Classe - 1º Ciclo

MATEMÁTICA 7



MATEMÁTICA 7

TEXTO DE APOIO PARA OS ALUNOS

7ª Classe - 1º Ciclo

	Pág
UNIDADE 1 – Conhecer melhor os números	3
1.1. Cálculo mental e estimativas	3
1.2. Múltiplos, divisores e números primos	4
1.3. Operações com potências	6
1.4. Raiz quadrada e raiz cúbica. Arredondamentos.	8
1.5. Expressões com variáveis	12
UNIDADE 2 – Proporcionalidade directa	14
2.1. Razão e proporção	14
2.2. Proporcionalidade directa	18
Regra de três simples	20
Percentagens	21
UNIDADE 3 – Números racionais	24
3.1.Os números negativos. Conjuntos numéricos.	
Representação na recta numérica	24
3.1.Os números negativos. Conjuntos numéricos.	
Representação na recta numérica	24
3.2. Representação de pontos num referencial	26
3.3. Números simétricos. Valor absoluto de um número	28
3.4.Adição e subtracção de números inteiros relativos.	
Simplificação da escrita	29
3.5. Multiplicação e divisão de números inteiros relativos	32
3.6.Operações com números racionais	33
3.7. Potências de números racionais	35
UNIDADE 4 - Estatística	37
4.1. Recolha e organização de dados	37
Tabelas de frequências	37
Gráficos de barras. Gráficos circulares	39
Histogramas	42
4.2. Medidas de tendência central	44
UNIDADE 5 – Do espaço ao plano. Sólidos , triângulos e quadriláteros	46
5.1. Sólidos geométricos. Revisão	46
5.2. Posição relativa de rectas e planos	49
5.3. Ângulos	51
5.4. Triângulos	52
5.5. Quadriláteros	55
5.6. Áreas e volumes de sólidos	58
UNIDADE 6 – Equações	63
6.1.Noção de equação. Solução de uma equação	63
6.2. Príncipios de equivalência para a resolução de equações	64
6.3. Resolução de equações com parênteses	65
Classificação das equações	67
6.4. Resolução de problemas usando equações	68

Unidade 1 – Conhecer melhor os números

1.1. Cálculo mental e estimativas

➤ Cálculo mental



A *Sam Vivi* é vendedora de frutas no mercado de S. Tomé. Ela faz muitas “contas de cabeça” para saber quanto tem a receber das suas freguesas. No nosso dia-a-dia, muitas vezes é necessário efectuarmos cálculos mentais. Existem técnicas para desenvolver o cálculo mental.

Adição	Subtracção	Multiplicação	Divisão
$390 + 250 = ?$ Tem-se: $390 = 300 + 90$ $250 = 200 + 50$ $500 + 140$ Então: $390 + 250 = 500 + 140$ $= 640$	$500 - 280 = ?$ Tem-se: $280 = 200 + 80$ Então: $500 - 280 =$ $500 - 200 - 80 = 300 - 80$ $= 220$	$8 \times 299 = ?$ Tem-se: $299 = 300 - 1$ Então: $8 \times 299 = 8 \times (300 - 1)$ $= 2400 - 8 = 2392$	$175 : 25 = ?$ Dividir por 25 é o mesmo que multiplicar por 4 e dividir por 100, porque $4 \times 25 = 100$ Então: 17 $5 \times 4 : 100 = 700 : 100$ $= 7$

Embora aqui se apresentem alguns exemplos cada pessoa tem e deve desenvolver as suas próprias técnicas. Treina o teu cálculo mental porque isso te vai ajudar muito no decurso das aulas de matemática.

➤ Estimativas

A mãe do Denilson comprou os objectos abaixo indicados.

		
58.000,00	33.000,00	208.000,00

Quando chegou a casa disse ao Denilson o preço dos objectos e pediu-lhe para ela fazer uma estimativa de quanto tinha gasto.

O filho disse-lhe que tinha gasto aproximadamente 300.000,00. Estará certo? Como é que o Denilson terá calculado?

$$60.000,00 + 30.000,00 + 210.000,00 = 300.000,00$$

Usando a calculadora, vem: 299.000,00

Para fazer **estimativas**, normalmente arredonda-se os números dados para números terminados em zero ou zeros, por ser mais fácil fazer as contas com esses números.

Actividades de aplicação

1. Calcula mentalmente:

- 1.1.** $35 + 24$; **1.2.** $72 + 29$; **1.3.** $124 + 42$;
1.4. $262 + 128$; **1.5.** $53 - 28$;
1.5. $74 - 55$; **1.6.** 7×600 ; **1.7.** 70×601 ;
1.8. 4×901 ; **1.9.** 90×700 ; **1.10.** $52 : 25$;

2. Faz uma estimativa para cada uma das seguintes situações e, em seguida, confirma usando a calculadora.

- 2.1.** $6,2 \times 50$; **2.2.** $815 + 518 + 385$;
2.3. $218 + 510 - 280$; **2.4.** $6753 : 101$;
2.5. $210 : 4 \times 100$; **2.6.** $25,3 \times 12,8$;

3. Um livro pesa 102 g. Faz uma estimativa do peso de 36 livros.

4. Uma costureira comprou 4,7 m de tecido verde, 3,4 m de tecido branco e 7,2 m de tecido azul. Faz uma estimativa do tecido comprado pela costureira.

1.2. Múltiplos, divisores e números primos

➤ Múltiplos

Os múltiplos de 3 são: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18,

Assim, pode-se concluir que 12 é múltiplo de 3 porque existe um número inteiro que multiplicado por 3 é 12.

$$12 = 3 \times ?; \quad 12 = 3 \times 4$$

Por exemplo 16 não é múltiplo de 3 porque não existe nenhum número inteiro que multiplicado por 3 seja 16.

O número 0 (zero) é múltiplo de qualquer número.

Múltiplo de um número é todo o número que se obtém multiplicando o número dado por um número inteiro.

➤ Factores

Quando se escreve:

$$12 = 3 \times 4,$$

3 e 4 são os **factores** e 12 é o **produto**.

Também se diz que 12 é múltiplo de 3 e de 4 e que 3 e 4 são divisores de 12. Há várias formas de escrever 12 como um produto de factores:

$$12 = 3 \times 4;$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$12 = 6 \times 2$$

$$\underbrace{4 \times 5}_{\text{factores}} = \underbrace{20}_{\text{produto}}$$

➤ Divisores

Os divisores de 18 são: 1, 2, 3, 6, 9 e 18.

Repara que $18 = 3 \times 6$. Diz-se que 3 e 6 são divisores de 18 ou que 18 é divisível por 3 e por 6.

Divisor de um número é qualquer número inteiro que o divide um número exacto de vezes.

➤ Números primos

Chama-se **número primo** a um número que tem dois e só dois divisores: a unidade e o próprio número.

2 é o único número primo que é par.

São números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Os números que não são primos **são números compostos**. Um número composto pode ser escrito como um **produto de factores primos** de uma única forma.

Exemplo: $12 = 2 \times 2 \times 3$; $20 = 2 \times 2 \times 5$; $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$

Para **decompor um número em factores primos** pode-se usar o seguinte método:

80	2	66	2	105	5
40	2	33	3	21	3
20	2	11	11	7	7
10	2	1		1	
5	5				
1					
$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$		$66 = 2 \times 3 \times 11$		$105 = 5 \times 3 \times 7$	

O produto de factores iguais $2 \times 2 \times 2 \times 2$ pode ser escrito como forma de potência:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

em que 2 é a base e 4 é o expoente.

Nota

Numa potência a base é o factor que se repete e o expoente indica o número de vezes que o factor é repetido.

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Assim, escreve-se: $80 = 2^4 \times 5$.

➤ Critérios de divisibilidade

Para facilitar a decomposição em factores primos ou para resolvermos outros problemas, aplicam-se os critérios de divisibilidade. Os critérios de divisibilidade mais usados são os seguintes:

Divisibilidade por 2

O resto da divisão de um número por 2 é 0 (zero) ou 1, conforme o número é par ou ímpar.

Um número é divisível por 2 quando é par, ou seja, quando o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6, ou 8

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 quando o algarismo das unidades for 0 (zero) ou 5.

Os restos possíveis são 0, 1, 2, 3 ou 4

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma dos seus dígitos é múltiplo de 3.

O resto da divisão de um número por 3 é 0 (zero), 1 ou 2.

Assim:

- 1446 é divisível por 2, porque termina em 6.
- 1446 não é divisível por 5, porque não termina nem zero nem em cinco.
- Como $1 + 4 + 4 + 6 = 15$ e 15 é múltiplo de 3 pode concluir-se que 1446 é múltiplo de 3, logo 1446 é divisível por 3.

Exemplo 1

Determina o menor número de alunos de uma turma da 7ª classe, com menos de 50 alunos, se:

- Fazendo filas de 4 sobra 1;
- Fazendo filas de 3 sobra 1;
- Fazendo filas de 2 sobra 1;
- Fazendo filas de cinco não sobra nenhum.



Resolução

Formando filas de 5 não sobra nenhum, então o número termina em zero ou cinco.

Formando filas de 2 sobra 1, então o número não pode terminar em zero. Assim sendo, o número termina em 5.

Actividades de aplicação

5. Considera os números:

123; 144; 620; 1355; 1432; 1200.

Indica os que são:

- 5.1. divisíveis por 2;
- 5.2. divisíveis por 5;
- 5.3. divisíveis por 3;
- 5.4. divisíveis por 5 e não por 2.

6. Completa

4	3		
---	---	--	--

, de modo a obter um número que seja simultaneamente

- 6.1. múltiplo de 2 e de 5;
- 6.2. divisível por 2, 3 e 5.

7. Considera a seguinte tabela:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Segue as instruções para encontrares os números primos menores que 100:

- Risca o número 1.
- Faz um círculo à volta do menor número primo. Qual é esse número?
- Risca todos os outros múltiplos do menor número primo.
- Faz um círculo à volta do próximo número primo. Qual é?
- Risca todos os outros múltiplos desse número primo.
- Faz um círculo à volta do próximo número primo. Qual é?
- Risca todos os outros múltiplos desse número primo.
- Faz um círculo à volta do próximo número primo. Qual é?
- Risca todos os outros múltiplos desse número primo.
- Escreve todos os números primos menores que 100.

Teremos que pensar num número que termine em cinco e que dividido por 3 dá resto 1 e dividido por 4 também dá resto 1. Ora vejamos os números terminados em 5: 5 não obedece às condições; 15 também não porque é divisível por 3; 25 dividido por 3 dá resto 1 ($25 = 3 \times 8 + 1$) e dividido por 4 também dá resto 1 ($25 = 6 \times 4 + 1$). O número 25 é a solução para o problema.

Actividades de aplicação

8. Decompõe em factores primos os seguintes números:

90; 154; 528; 784; 91; 342.

9. A Tânia vai visitar a avó de dois em dois dias. O Carlos vai visitar a avó de cinco em cinco dias. Encontraram-se os dois em casa da avó no dia 25 de Abril. Qual é o próximo dia em que se podem encontrar de novo em casa da avó?

10. Num ginásio estão 28 pessoas. De que forma se podem formar grupos sem que nenhuma pessoa fique de fora?

1.3. Operações com potências

la eu a caminho de Neves quando encontrei um autocarro que levava 9 mulheres. Cada mulher levava 9 sacas, cada saca tinha 9 saquinhos, cada saquinho tinha 9 *açucarinhas* e cada *açucarinha* tinha 9 pedacinhos de coco. Quantas mulheres, sacas, saquinhos, *açucarinhas* e pedacinhos de coco iam para Neves?

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$$

Na potência 9^5 , nove é a base e cinco é o expoente.



Leitura de potências

Potência	Leitura
3^2	Três ao quadrado ou 3 elevado a 2.
2^3	Dois ao cubo ou 2 elevado a 3.
3^4	Três à quarta ou 3 elevado a 4.
5^7	Cinco à sétima ou 5 elevado a 7.

Multiplicação de potências com a mesma base

Considere-se a expressão: $2^3 \times 2^4$

Esta expressão pode ser escrita de outra forma:

$$2^3 \times 2^4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2^4} = 2^7$$

$$\text{Então } 2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$\text{Do mesmo modo: } 5^{200} \times 5^{400} = 5^{600}$$

Para multiplicar potências com a mesma base, dá-se a mesma base e adicionam-se os expoentes.

Divisão de potências com a mesma base

Seja a expressão $2^7 : 2^5$

Esta expressão pode ser escrita de outra forma:

$$2^7 : 2^5 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^2$$

$$\text{Então } 2^7 : 2^5 = 2^{7-5} = 2^2$$

$$\text{Do mesmo modo: } 5^{600} : 5^{500} = 5^{100}$$

Para dividir potências com a mesma base, dá-se a mesma base e subtraem-se os expoentes.

Multiplicação de potências com o mesmo expoente

Considere-se a expressão: $6^3 \times 2^3$

Esta expressão pode ser escrita de outra forma:

$$6^3 \times 2^3 = 6 \times 6 \times 6 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= \underbrace{6 \times 2}_{12} \times \underbrace{6 \times 2}_{12} \times \underbrace{6 \times 2}_{12}$$

$$= 12 \times 12 \times 12 = 12^3$$

$$\text{Então } 6^3 \times 2^3 = 12^3$$

$$\text{Do mesmo modo: } 8^{200} \times 3^{200} = 24^{200}$$

Para multiplicar potências com o mesmo expoente, multiplicam-se as bases e dá-se o mesmo expoente.

Divisão de potências com o mesmo expoente

Seja a expressão $12^2 : 6^2$

Esta expressão pode ser escrita de outra forma:

$$\frac{12^2}{6^2} = \frac{12 \times 12}{6 \times 6} = \frac{12}{6} \times \frac{12}{6} = \left(\frac{12}{6}\right)^2 = 2^2$$

$$\text{Então } 12^2 : 6^2 = 2^2$$

$$\text{Do mesmo modo: } 15^{500} : 5^{500} = 3^{500}$$

Para dividir potências com o mesmo expoente, dividem-se as bases e dá-se o mesmo expoente.

Potência de potência

Considere-se a expressão: $(4^2)^3$

Esta expressão pode ser escrita de outra forma:

$$(4^2)^3 = (4 \times 4)^3 = \\ = \underbrace{4 \times 4}_{4^2} \times \underbrace{4 \times 4}_{4^2} \times \underbrace{4 \times 4}_{4^2} = 4^6$$

Então, $(4^2)^3 = 4^{2 \times 3} = 4^6$

Do mesmo modo: $(2^5)^{10} = 2^{50}$

Uma potência de potência é igual à potência com a mesma base e cujo expoente é o produto dos expoentes

➤ Prioridade das operações

Tal como na vida real na matemática também existem regras para serem cumpridas.

Não existem regras específicas para o cálculo de potências se:

- Se as operações não são a multiplicação nem a divisão;
- As operações são a multiplicação e a divisão mas as potências não têm a mesma base nem o mesmo expoente.

Nestes casos recorre-se à definição de potência.

Exemplo 2

Calcula o valor da expressão:

$$1 + 2^3 \times 3^2 : 6 + 2^2 - 4 \times 3^0$$

Resolução

$ \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2^3 & \times & 3^2 & : & 6 + 2^2 - 4 \times 3^0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ = 1 + 8 \times 9 : 6 + 4 - 4 \times 1 = \\ & \uparrow & & & & & \\ = 1 + 72 : 6 + 4 - 4 \times 1 = \\ & \uparrow & & & & & \\ = 1 + 12 + 4 - 4 \times 1 = \\ & & & \uparrow & & & \\ = 1 + 12 + 4 - 4 = \\ \\ = 13 + 4 - 4 = \\ = 17 - 4 = \\ = 13 \end{array} $	Em primeiro lugar calcula-se o valor da potência. Em segundo lugar efectuam-se as operações de multiplicação e a divisão pela ordem indicada. Finalmente, efectuam-se as operações da adição e da subtracção pela ordem indicada.
---	--

Potência de expoente nulo

Calcule-se: $3^5 : 3^5$

Aplicando a regra de divisão de potência com a mesma base vem:

$$3^5 : 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

Aplicando a regra da divisão de potências com o mesmo expoente vem:

$$3^5 : 3^5 = \left(\frac{3}{3}\right)^5 = 1^5 = 1$$

Então para que as duas regras se mantenham: **$3^0 = 1$**

De uma forma geral,

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

Actividades de aplicação

11. Calcula e apresenta o resultado sob a forma de potência:

11.1. $2^6 \times 2^5 : 2^{10}$

11.2. $5^9 \times 5^5 \times 5^3 : 5$

11.3. $2^{200} \times 2^{500} : 2^{600}$

11.4. $3^{80} : 3^{40} \times 3^{101} : 3$

12. Calcula e apresenta o resultado sob a forma de potência:

12.1. $3^8 \times 2^8 : 5^8$

12.2. $4^{12} \times 3^{12} : 12^{12}$

12.3. $\frac{6^5 \times 6^5 \times 10^5}{12^5}$

12.4. $\frac{5^{300} : 5^{150} \times 5^{100}}{5^{250}}$

13. Calcula:

13.1. $(3^2)^8 \times (2^4)^4$

13.2. $(5 \times 3 - 2^2) : (2^4 - 5)^6$

13.2. $\frac{(2^{10} : 2^5) \times 2^2}{2^3 \times 2^4} + (1 + 2)^0$

14. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

14.1. Uma potência de base 1 é sempre igual a 1.

14.2. O quadrado de 3 é 6

14.3. $2^3 + 2^5 = 2^8$

14.4. Um número elevado a 1 é sempre igual a ele próprio.

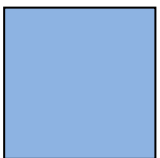
14.5. $183^0 + 1^{50} = 2$

14.6. O cubo de 3 é 9.

14.7. $8^2 - 2^2 = 2^2$

1.4. Raiz quadrada e raiz cúbica. Arredondamentos

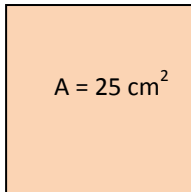
➤ Raiz quadrada



Qual é a área do quadrado?

4 cm

$A = 4 \times 4$
 $= 4^2$
 $A = 16 \text{ cm}^2$



Qual é a medida do lado do quadrado?

? cm

$A = 25 \text{ cm}^2$

$l = 5 \text{ cm}$, porque $5^2 = 25$

Como $5^2 = 25$, o lado do quadrado é 5 e diz-se que 5 é a **raiz quadrada** de 25. Escreve-se $5 = \sqrt{25}$

Elevar ao quadrado



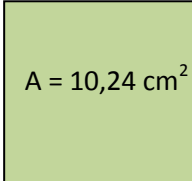
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Raiz quadrada

$$1^2 = 1; \quad \sqrt{1} = 1 \quad 2^2 = 4; \quad \sqrt{4} = 2 \quad 3^2 = 9; \quad \sqrt{9} = 3 \quad 4^2 = 16; \quad \sqrt{16} = 4 \quad 5^2 = 25; \quad \sqrt{25} = 5$$

A sequência **1, 4, 9, 16, 25, ...** é constituída por números que têm a designação de **quadrados perfeitos**. A raiz quadrada destes números são números inteiros (1, 2, 3, 4, 5, ...).



$A = 10,24 \text{ cm}^2$

$l = ?$

Neste caso é mais difícil determinar o comprimento do lado do quadrado.

Terá que ser um número que elevado ao quadrado seja 10,24, porque $l^2 = 10,24$.

Usando a tecla da calculadora  determina-se a medida do lado.

Medida do lado = $\sqrt{10,24}$; $3,2^2 = 10,24$; $l = 3,2 \text{ cm}$

Raiz quadrada de um número não negativo **a**, é um número **b**, não negativo, e que, elevado ao quadrado é igual a **a**.

Se $\sqrt{a} = b$, então $b^2 = a$, **a** e **b** são números não negativos.

Exemplo 3

Calcula $\sqrt{60}$.

Resolução

$6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$. Não há nenhum número inteiro que elevado ao quadrado seja 60.

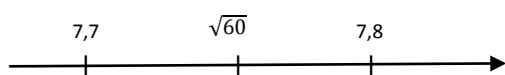
Apesar de $\sqrt{60}$ não ser um número inteiro temos a certeza que está entre 7 e 8. Mais ainda, como 60 está mais próximo de 64 do que de 49, podemos concluir que $\sqrt{60}$ está mais próximo de 8 do que de 7.

Com a calculadora, fazendo 6 0 $\sqrt{}$ = 7.7459666 que é uma representação decimal aproximada do seu valor exacto.

➤ Valores aproximados por excesso e por defeito

A representação decimal de $\sqrt{60}$ que obtivemos na calculadora tem um número excessivo de casas decimais. Podemos encontrar uma representação decimal com menos casas decimais.

Observa:



Nota

A raiz quadrada desfaz o que fez o elevar ao quadrado. Considere-se o número positivo 14:

- $14^2 = 196$
- $\sqrt{196} = 14$

Diz-se que 7,7 é um valor **aproximado por defeito** às décimas. 7,8 é um valor **aproximado por excesso** às décimas.

Da mesma forma, 7,74 é um valor aproximado por defeito às centésimas. 7,75 é um valor aproximado por excesso às centésimas.

7,745 é um valor aproximado às milésimas de $\sqrt{60}$, por defeito; e 7,746 é um valor aproximado às milésimas, por excesso.

Acabámos de proceder a arredondamentos da representação decimal de $\sqrt{60}$.

➤ Arredondamentos

Para proceder a um arredondamento, de um modo geral, fixado o número de casas decimais (c. d.), procede-se do seguinte modo:

Se a casa decimal imediatamente a seguir à escolhida for 5, 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se uma unidade à casa decimal escolhida.

Se a casa decimal imediatamente a seguir à escolhida for 0, 1, 2, 3 ou 4, deixa-se a casa decimal escolhida inalterada.

Se estivermos a resolver um problema nunca devemos arredondar os dados antes de efectuarmos todos os cálculos. As regras referidas para os arredondamentos são por vezes postas de lado atendendo ao contexto do problema.

Exemplo 4

A figura abaixo representa uma vista lateral de uma casa de madeira.

4.1. De acordo com os dados da figura, determina, com duas casas decimais, a área da parte de madeira.

4.2. Se cada lata de verniz dá para pintar $1,8 \text{ m}^2$, quantas latas de verniz são necessárias para envernizar a parte de madeira representada na figura.

Resolução

4.1.

A área da parte lateral da casa = área de um triângulo + área de um rectângulo – área da janela.

Medida, em m^2 , da área do triângulo do telhado:

$$A_{\Delta} = \frac{3,3 \times (4,8 - 2,9)}{2} = \frac{3,3 \times 1,9}{2} = 3,135$$

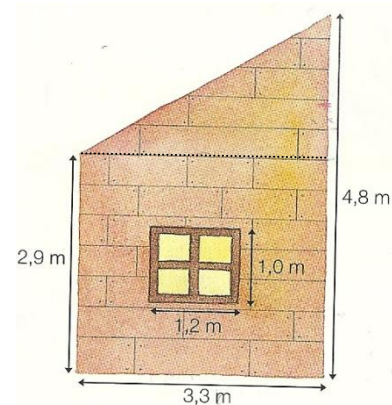
Medida, em m^2 , da área do rectângulo sem a janela:

$$A_{\square} = (3,3 \times 2,9) - (1,2 \times 1) = 8,37$$

Área da parte de madeira:

$$(3,135 + 8,37) \text{ m}^2 = 11,505 \text{ m}^2$$

A área pedida é $11,51 \text{ m}^2$ (segundo as regras do arredondamento)



4.2.

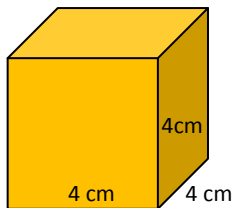
Para calcular o número de latas de verniz necessárias divide-se 11,505 por 1,8:

$$11,505 : 1,8 = \boxed{6.3916666}$$

Neste caso vamos arredondar o valor obtido para as unidades. No entanto, no contexto do problema, teremos que arredondar por excesso, pois não se deve deixar nenhuma parte da madeira por envernizar, concluindo-se que são necessárias 7 latas de verniz.

➤ Raiz cúbica

Qual será o volume do cubo de aresta igual a 4 cm?



$$V = 4^3; \quad V = 64 \text{ cm}^3$$

$$V_{\square} = a \times a \times a = a^3$$

Se conhecermos o volume do cubo e precisarmos de conhecer o comprimento da aresta, calcula-se a raiz cúbica.

$\sqrt[3]{} \rightarrow$ raiz cúbica

$$\sqrt[3]{64} = 4 \rightarrow \text{a raiz cúbica de 64 é 4 porque } 4^3 = 64$$

Elevar ao cubo



1	8	27	64	125	216	343
1	2	3	4	5	6	7



Raiz cúbica

Assim, a raiz cúbica desfaz o que faz o elevar ao cubo.

Raiz cúbica de um número a é um número b que elevado ao cubo é igual a a .

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ se e só se } b^3 = a$$

Algumas calculadoras permitem calcular a raiz cúbica, outras não. Se a tua calculadora não tem a possibilidade de determinar raízes cúbicas, terás de o fazer por tentativas ou consultar tabelas.

Exemplo 5

Calcular $\sqrt[3]{165}$

Resolução

$4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; donde se conclui que não existe nenhum número inteiro cujo cubo seja 165.

Portanto $\sqrt[3]{165}$ não é um número inteiro. Apenas sabemos que está entre 5 e 6 (mais próximo de 5 do que de 6, porque 165 é mais próximo de 125 do que de 216).

Com a calculadora, fazendo

1	6	5	$\sqrt[3]{}$	=	5.48480655
---	---	---	-------------------------	---	------------

que é uma representação

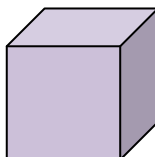
decimal aproximada do seu valor exacto. Arredondando para duas casas decimais (2 c. d.):

$$\sqrt[3]{165} = 5,48$$

Exemplo 6

A figura ao lado representa um cubo .

Uma das suas seis faces tem de área 6 cm^2 .

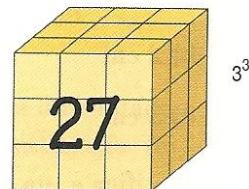
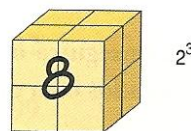


6.1. Determina um valor aproximado por defeito e por excesso, com erro inferior a 0,1, da aresta do cubo.

6.2. Determina um valor aproximado por defeito e por excesso, com erro inferior a 0,01, do volume do cubo.

Se a raiz cúbica de um número é um número inteiro, esse número diz-se **cubo perfeito**.

Primeiros cubos perfeitos



Porque:

$$\sqrt[3]{0} = 0; \quad \sqrt[3]{1} = 1; \quad \sqrt[3]{8} = 2; \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

Outros cubos perfeitos:

64 ; 125; 216; ... 1000, ... porque

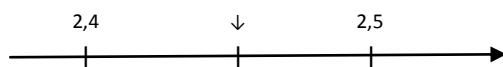
$$\sqrt[3]{64} = 4; \quad \sqrt[3]{125} = 5; \quad \sqrt[3]{216} = 6;$$

$$\dots \sqrt[3]{1000} = 10$$

Resolução

6.1. Temos $A = 6 \text{ cm}^2$ e $\sqrt{6} = 2.449489743$

Como pretendemos um erro inferior a 0,1 vamos considerar uma casa decimal apenas.



$$2,5 - 2,4 = 0,1$$

O valor exacto de $\sqrt{6}$ encontra-se entre 2,4 e 2,5. Assim, para a aresta do cubo temos:

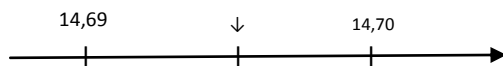
2,4 cm é um valor aproximado por defeito, com erro inferior a 0,1, e 2,5 cm é um valor aproximado por excesso, com erro inferior a 0,1.

6.2. Para calcular o volume do cubo calcula-se

$$\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 14.69693846$$

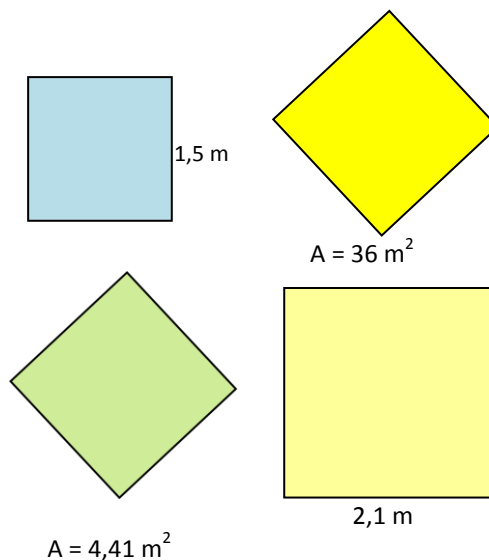
Usando duas casas decimais vem:



Logo, $14,69 \text{ cm}^3$ é um valor aproximado por defeito do volume do cubo com erro inferior a 0,01 (valor aproximado às centésimas, por defeito) e $14,70 \text{ cm}^3$ é um valor aproximado por excesso do volume do cubo com erro inferior a 0,01 (valor aproximado às centésimas, por excesso).

Actividades de aplicação

15. Observa os quadrados representados na figura. De uns conhece-se a área e de outros o lado. Se se conhece o lado, determina a área, se se conhece a área determina o lado.



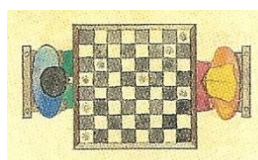
16. Usando a calculadora calcula, arredondando a 1, 2 e 3 casas decimais:

$$\sqrt{2}; \sqrt{17}; \sqrt{300}; \sqrt{700}$$

17. Um jardineiro quer comprar rede para vedar um canteiro quadrado que tem de área 44 m^2 . Que quantidade de rede deve comprar?

18. O tabuleiro de xadrez representado na figura, sem a moldura, tem 2401 cm^2 de área.

18.1. Determina a medida do comprimento do lado do tabuleiro.



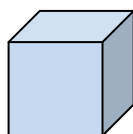
18.2. Determina a área e o comprimento do lado de cada um dos quadrados representados no tabuleiro.

20. Determina o comprimento da aresta de cada um dos seguintes cubos:

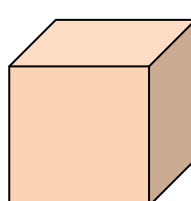
20.1. $V = 8 \text{ cm}^3$



20.2. $V = 27 \text{ cm}^3$



20.3. $V = 125 \text{ cm}^3$

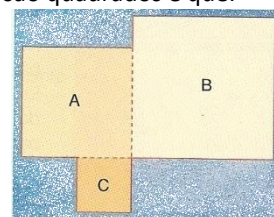


19. Calcula o perímetro da figura abaixo sabendo que os elementos A, B, e C são quadrados e que:

A área de A: 35 cm^2

A área de B: 50 cm^2

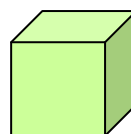
A área de C: 7 cm^2



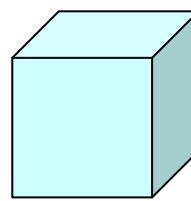
(Utiliza valores aproximados com duas casas decimais.)

21. Determina o comprimento da aresta de cada um dos seguintes cubos:

$V = 16 \text{ cm}^3$

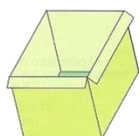


$V = 287 \text{ cm}^3$



21.1. a menos de 0,01.

21.2. a menos de 0,001



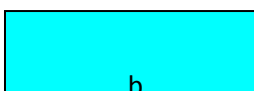
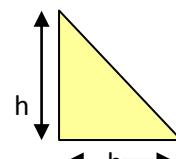
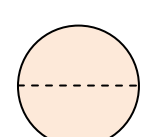
$V = 1,728 \text{ cm}^3$

22. Calcula o comprimento mínimo da aresta de uma caixa cúbica de modo a poder embalar 212 cubos idênticos ao da figura da direita.

$(V = 1,728 \text{ cm}^3)$

1.5. Expressões com variáveis

Já tens utilizado expressões com letras. Observa os exemplos:

O perímetro de um rectângulo:  Perímetro = $a + b + a + b$ $P = 2a + 2b$	A área de um triângulo:  $A = \frac{b \times h}{2}$	O perímetro de um círculo:  $P = \pi \times D$
--	---	--

Muitas vezes usam-se letras para representar números desconhecidos.

O André e a Nelma foram comprar pães. A Nelma comprou mais dois pães que o André. Observa a tabela:

André	Nelma
2	4
5	7
10	12
a	$a + 2$
15	17
$n - 2$	n

As expressões a , $a + 2$, n e $n - 2$ representam números.

Na expressão $a + 2$, 2 é **constante** e a é **variável**.

Se cada pão custar x dobras a expressão $10x$ representa o custo de 10 pães.

Nota

Elimina-se o símbolo da operação multiplicação entre:

- um número e uma letra

$$4 \times c \xrightarrow{\text{escreve-se}} 4c$$

- duas letras

$$a \times b \xrightarrow{\text{escreve-se}} ab$$

- um número ou uma letra e um parênteses

$$a \times (2 + b) \xrightarrow{\text{escreve-se}} a(2 + b)$$

Na expressão $10x$ $\xrightarrow{\text{coeficiente}}$ 10 $\xrightarrow{\text{parte literal}}$ x

As expressões com letras podem ser simplificadas se tiverem a mesma parte literal:

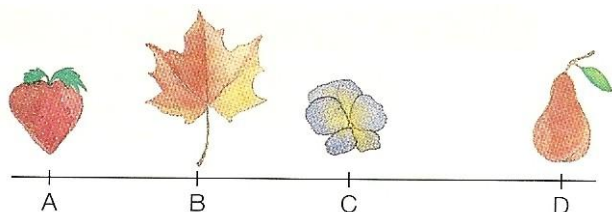
$$10x + 12x = (10 + 12)x = 22x$$

Quanto gastaram os irmãos se:

- Compraram pães de 1000 dobras
 $x = 1000$;
 $22 \times 1000 = 22\,000$
- Compraram pão de 2000 dobras
 $x = 2000$;
 $22 \times 2000 = 44\,000$

Exemplo 7

Na figura, $\overline{CD} = \overline{AB} + 2$



Resolução

$$7.1. \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

$$\overline{AD} = a + 3 + a + 2 + a + 3 + 2$$

$$\overline{AD} = a + a + a + 3 + 2 + 3 + 2$$

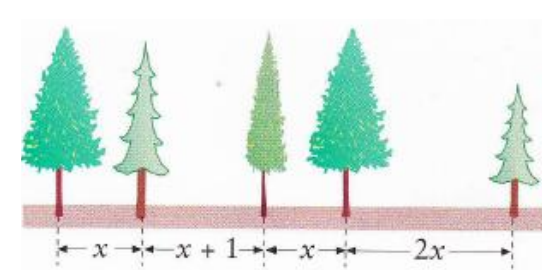
$$\overline{AD} = 3a + 10$$

$$7.2. \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

$$\overline{AD} = 2a + 1 + 3a + 2a + 1 + 2$$

$$\overline{AD} = 2a + 3a + 2a + 1 + 1 + 2$$

$$\overline{AD} = 7a + 4$$



As expressões com letras podem ser simplificadas se tiverem a mesma parte literal.

$$x + x + 1 + x + 2x = x + x + x + 2x + 1 = (1 + 1 + 1 + 2)x + 1 = 5x + 1$$

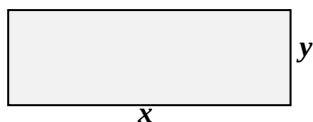
Determina $\overline{AD}$ se:

$$7.1. \overline{AB} = a + 3 \text{ e } \overline{BC} = a + 2$$

$$7.2. \overline{AB} = 2a + 1 \text{ e } \overline{BC} = 3a$$

Exemplo 8

O perímetro de um retângulo de dimensões x e y é: $P = 2x + 2y$



Determina P , em cm:

8.1. $x = 5$ e $y = 3$

8.2. $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{3}$

Resolução

8.1. $P = 2x + 2y$

Se $x = 5$ e $y = 3$

$P = 2 \times 5 + 2 \times 3$; $P = 10 + 6$

Em cm, a medida de P é 16.

8.2. $P = 2x + 2y$

Se $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{3}$

$P = 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3}$; $P = \frac{2}{2} + \frac{2}{3}$

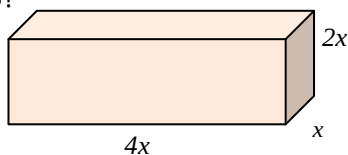
$P = 1 + \frac{2}{3}$; $P = \frac{3}{3} + \frac{2}{3}$

Em cm, a medida de P é $\frac{5}{3}$.

Exemplo 9

O Celso garante que consegue meter um milhar de cubinhos de 1,2 dm de aresta na caixa em forma de paralelepípedo da figura, se $x = 5$ dm.

Terá razão?



Resolução

Se $x = 5$ dm, as dimensões da caixa são:

Comprimento = $4 \times 5 = 20$ dm

Largura = $1 \times 5 = 5$ dm

Altura = $2 \times 5 = 10$ dm

$V = c \times l \times a$

$V_{\text{caixa}} = 20 \times 5 \times 10 = 1\,000 \text{ dm}^3$

$V_{\text{cubinho}} = a^3 = 1,2^3 = 1,728 \text{ dm}^3$

Volume de 1000 cubinhos = $1000 \times 1,728 = 1728 \text{ dm}^3$

O volume do milhar de cubinhos é muito superior ao volume da caixa portanto, o Celso não tem razão.

Actividades de aplicação

23. Simplifica as expressões:

23.1 $2x + 3x$ 23.2. $5a - 3a$ 23.3. $7a - 7a$

23.4. $2x + 3 + 4x - 1 + 3x$ 23.5. $3b + b + a + 2$

24. Sendo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 0,1$, calcula:

24.1. $a + b + c$

24.2. $2a + 3b - 4c$

24.3. $3a + c$

24.4. $a^2 + b + c$

25. Se o custo de um sumo é x dobras e o de um bolo é y dobras, o que representa cada uma das expressões?

25.1. $x + 2y$

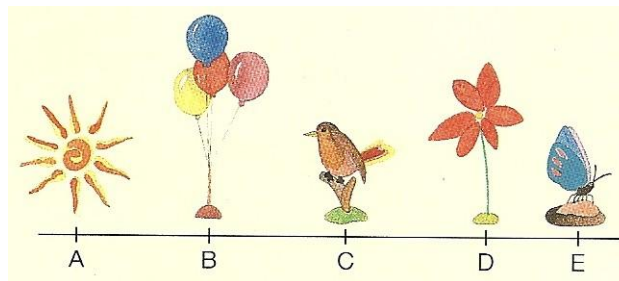
25.2. $3y$

25.4 $3x + 2y$

25.4. $4x + 6y + 5000$

26. Considera o segmento de recta $[AE]$ em que:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ e $\overline{DE} = 10$



Determina $\overline{AE}$ se:

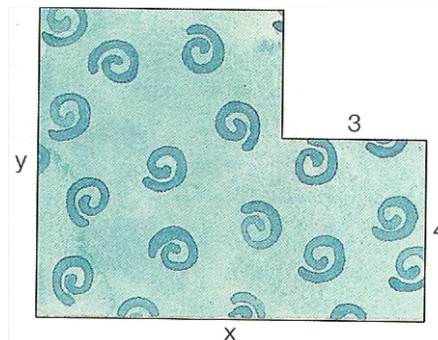
26.1. $\overline{AB} = 15$

26.2. $\overline{AC} = 7$

26.3. $\overline{AB} = x + 2$

26.4. $\overline{AB} = 2x + 3$

27. Considera a figura:



27.1. Escreve a expressão do seu perímetro.

27.2. Determina P se $x = 8$ e $y = 6$

28. x , $x + 1$ e $x + 2$ representam três números inteiros consecutivos. Se $x = 25$, que números estão representados?

29. $2x$, $2x + 2$ e $2x + 4$ representam três números pares consecutivos. Se $x = 17$, que números estão representados?

Unidade 2 – Proporcionalidade directa

2.1. Razão e proporção

➤ Razão



O Tomás, o Carlos e o Edmilson resolveram fazer um concurso de lançamentos de bolas de basquete no campo desportivo da sua escola.

O Tomás fez 11 lançamentos e entraram no cesto 6 bolas;

O Carlos fez 17 lançamentos e entraram no cesto 11 bolas;

O Edmilson fez 22 lançamentos e entraram no cesto 12 bolas.

Pode dizer-se que:

O número de lançamentos que o Tomás acertou está na **razão** de 6 para 11, escreve-se $6 : 11$ ou $\frac{6}{11}$;

O número de lançamentos que o Carlos acertou está na **razão** de 11 para 17, escreve-se $11 : 17$ ou $\frac{11}{17}$;

O número de lançamentos que o Edmilson acertou está na **razão** de 12 para 22, escreve-se $12 : 22$ ou $\frac{12}{22}$;

Quando acabaram o concurso estavam com muita sede e fome. Foram lanchar a casa da avó do Edmilson e esta ofereceu-lhes um sumo bem fresquinho. A avó disse-lhes que o sumo tinha sido feito com sumo de laranjas e água na **razão** de 2 : 3 ou $\frac{2}{3}$, ou seja, 2 medidas de sumo de laranja para 3 medidas de água.

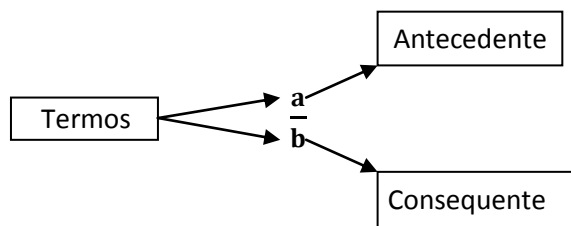
Uma **razão** é uma forma de comparação, pretende-se relacionar duas grandezas.

De um modo geral:

Dados dois números **a** e **b** (com $b \neq 0$), a **razão** entre **a** e **b** representa-se por:

$$a : b \text{ ou } \frac{a}{b} \text{ (ler: razão de a para b)}$$

Os números **a** e **b** são os **termos** da razão, **a** é o **antecedente** e **b** é o **consequente**.



Nota

Numa fracção $\frac{a}{b}$, a e b são números inteiros. Na razão $\frac{a}{b}$, a e b podem ser números quaisquer. Normalmente com uma fracção pretendemos relacionar uma parte com o todo e com uma razão pretendemos relacionar grandezas relativas a conjuntos disjuntos.

Exemplo 1

A Tatiana foi ao mercado comprar carambolas. Na banca A comprou 8 por 10 000 dobras e na banca B comprou 15 por 20 000 dobras. Onde fez a melhor compra?

Resolução

A razão entre o número de carambolas e o dinheiro gasto é:

$$\begin{aligned} \text{Banca A: } \frac{8}{10000} & ; & \text{Banca B: } \frac{15}{20000} \text{ . Tem-se:} \\ \frac{8}{10000} &= 0,0008 ; & \frac{15}{20000} &= 0,00075 \end{aligned}$$

Daqui concluímos que a melhor compra foi a que a Tatiana fez na banca A, comprou maior quantidade por menos dinheiro.

Nota

O betão é feito com areia e cimento na razão 3 : 1. Com esta informação ficamos a saber que para fazer betão se misturam três medidas de areia com uma medida de cimento.

Também podíamos dizer que o betão é feito com cimento e areia na razão de 1 : 3. A ordem de referência dos ingredientes é muito importante

➤ Proporção

A avó do Edmilson também lhes tinha preparado um bolo para o lanche. Como calculou que estivessem com muita fome fez um bolo maior, mas para este ter o mesmo sabor manteve as proporções da receita.

O bolo normal que a avó costuma fazer leva 4 ovos e 150 g de açúcar, este bolo levou 6 ovos e 225 g de farinha.



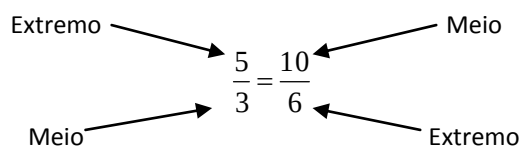
$$\frac{4}{150} = \frac{6}{225}$$

(Ler: 4 para 150 é igual a 6 para 225 ou 4 está para 150 assim como 6 está para 225.)

Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad b, d \neq 0$$

Numa proporção há quatro termos: os meios e os extremos.



➤ Propriedades das proporções

Sejam as proporções:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}; \quad \frac{5}{3} = \frac{15}{9}; \quad \frac{5}{3} = \frac{20}{12};$$

Multipliquem-se os meios e os extremos:

$$\begin{array}{lll} 5 \times 6 = 3 \times 10; & 5 \times 9 = 3 \times 15; & 5 \times 12 = 3 \times 20 \\ 30 = 30; & 45 = 45; & 60 = 60 \end{array}$$

Numa **proporção** o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad b \times c = a \times d$$

Actividades de aplicação

1. Duas máquinas produziram num dia 1530 peças de acordo com os dados da tabela.

	Peças com defeito	Peças sem defeito	Total
Máquina A	16	900	916
Máquina B	14	600	614
Total	30	1500	1530

1.1. Escreve as razões seguintes:

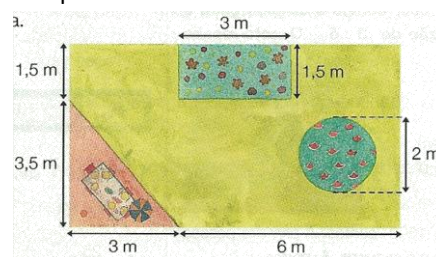
Número de peças com defeito produzidas por A : Número total de peças produzidas por A

e

Número de peças com defeito produzidas por B : Número total de peças produzidas por B

1.2. Se o encarregado da fábrica tiver que optar pela paragem de uma das máquinas, e se a sua primeira preocupação for a qualidade, que máquina escolherá?

2. Um jardim rectangular com 45 m² de área foi decorado como mostra a figura. Na área que sobrou das zonas marcadas foi plantada relva.



2.1. Calcula:

A área do canteiro rectangular, a área do canteiro circular, a área da zona de estar (triângulo) e a área relvada.

2.2. Escreve a razão entre:

2.2.1. a área do canteiro rectangular e a área do jardim;

2.2.2. a zona de estar e a área do canteiro circular;

2.2.3. a área da parte relvada e a área não relvada.

3. Compara as razões e diz em que casos é possível estabelecer uma proporção:

3.1. 1 : 6 e 2 : 24

3.2. 1 : 4 e 3 : 12

3.3. $\frac{5}{4}$ e $\frac{80}{64}$

3.4. $\frac{1,2}{3,5}$ e $\frac{12}{35}$

4. Completa, de modo a obters proporções:

4.1. 3 : 9 = 12 : □

4.2. $\frac{2}{5} = \frac{8}{\square}$

4.3. □ : 7 = 2 : 4

4.4. 6 : □ = 24 : 16

4.5. $\frac{\square}{3} = \frac{2}{4}$

4.6. $\frac{21}{7} = \frac{1,8}{\square}$

Exemplo 2

Para fazer um bolo, usam-se 8 ovos e 300 g de farinha. Se quisermos fazer um bolo com 6 ovos que quantidade de farinha devemos usar?



Resolução

Consideremos **a** como sendo a quantidade de farinha, em gramas, que vamos usar.

Temos: 8 ovos está para 300g de farinha assim como 6 ovos está para **a**, ou seja: $\frac{8}{300} = \frac{6}{a}$.

Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$$8 \times a = 300 \times 6; \quad 8 \times a = 1800$$

Para calcular **a** usa-se a divisão como operação inversa da multiplicação:

$$a = \frac{1800}{8}; \quad a = 225$$

Ou:

$$a = \frac{300 \times 6}{8}; \quad a = 225$$

Logo, devemos usar 225 g de farinha.

Numa **proporção** qualquer extremo é igual ao produto dos meios a dividir pelo outro extremo.

Exemplo 3



A partir de um inquérito chegou-se à conclusão que 6 em cada 10 pessoas de uma cidade vêem o telejornal na TVS.

Sabendo que a cidade tem 6 000 habitantes, quantas pessoas verão o telejornal?

Resolução

Consideremos **b** como sendo o número de pessoas que veem o telejornal.

Temos: 6 está para 10 assim como **b** está para 6 000, ou seja, $\frac{6}{10} = \frac{b}{6000}$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$$10 \times b = 6 \times 6000; \quad 10 \times b = 36000$$

Para calcular **b** usa-se a divisão como operação inversa da multiplicação:

$$b = \frac{36000}{10}; \quad b = 3600$$

Ou:

$$b = \frac{6 \times 6000}{10}; \quad b = 3600$$

Logo, há 3 600 habitantes da cidade que vêem o telejornal da TVS.

Numa **proporção** qualquer meio é igual ao produto dos extremos a dividir pelo outro meio.

Exemplo 4

A tia Leonilde deu 200.000,00 aos sobrinhos Tomé e Nilsa.

A distribuição da quantia pelos dois primos obedecia a uma condição: tinha que ser repartido na razão das suas idades. A Nilsa tem 10 anos e o Tomé tem 15. Quanto vai receber cada um?

Resolução

A razão das idades dos primos é $\frac{10}{15}$ ou $\frac{2}{3}$. O total vai ser dividido em $2 + 3 = 5$ partes.

Cada parte tem $200.000,00 : 5 = 40.000,00$.

A Nilsa vai receber 2 partes, ou seja, $40.000,00 \times 2 = 80.000,00$

O Tomé vai receber 3 partes, ou seja, $40.000,00 \times 3 = 120.000,00$

Exemplo 5

A maquete (modelo) de um avião *Airbus* tem de comprimento 25,4 cm e está feita à escala de 1 : 250.

Qual é o comprimento real do avião?



Resolução

A escala representa a razão entre o comprimento do modelo e o comprimento real do avião.

Escala 1 : 250 significa que a 1 cm do modelo corresponde 250 cm do avião.

Então:

$$\frac{1}{250} = \frac{24,5}{x};$$

Através das propriedades das proporções:

$$x = \frac{250 \times 24,5}{1}; \quad x = 6125$$

Como não é correcto indicar o comprimento de um avião em centímetros, reduzindo para metros:

$$6125 \text{ cm} = 61,25 \text{ m}$$

O comprimento real do avião *Airbus* é 61,25 m.

Exemplo 6

Numa cidade vai disputar-se um campeonato nacional de atletismo. No estádio estão atletas e espectadores na razão de 2 : 15.



Sabendo que no estádio estão 1020 pessoas, determina o número de atletas e o de espectadores.

Resolução

O total será dividido em $2 + 15 = 17$ partes, onde 2 representa o número de atletas e 15 o número de espectadores.

Assim:

$$\text{Atletas: } \frac{2}{17} \times 1020 = 120$$

$$\text{Espectadores: } \frac{15}{17} \times 1020 = 900$$

Logo, no estádio estão 120 atletas e 900 espectadores.

Actividades de aplicação

5. Para obter um certa quantidade de tinta cor-de-laranja juntaram-se 3 partes de tinta vermelha com 4 partes de tinta amarela. Quantos litros de tinta vermelha são necessários para obter 10,5 litros de tinta cor-de-laranja?

6. Numa escola a razão entre o número de rapazes e de meninas é de 4 : 5. Se há 720 rapazes, quantas meninas há na escola?

7. Uma receita de pudim de coco leva 6 ovos, 300 g de açúcar, 0,5 l de leite e 150 g de coco ralado.

A Dona Quita faz doces e tem uma encomenda de 8 pudins para uma festa de casamento. Ajuda-a a calcular os ingredientes necessários para fazer os 8 pudins.

8. Para fazer um sumo de frutas, a Sílvia costuma juntar 2 medidas de sumo de laranja com 3 medidas de sumo de manga. Calcula a quantidade de sumo de manga necessário para fazer 2 litros de sumo misto.

9. O Sr. Jacinto plantou no seu campo alfaces e tomateiros. A razão entre o número de tomateiros e o de alfaces é de 6 : 11. Sabendo que no total há 408 plantas no campo, determina o número de alfaces e de tomateiros.

10. Na aula de EVO o professor cortou uma tábua em duas partes na razão de 8 : 7.

Se a tábua tinha 3,80 m de comprimento, qual o comprimento de cada parte.

11. O Sr. Higino produz café de duas qualidades: *arábica* e *robusta*. Para fazer um bom café, depois deste ser torrado, ele faz um lote, com *arábica* e *robusta*, na razão 2 : 5.

Calcula:

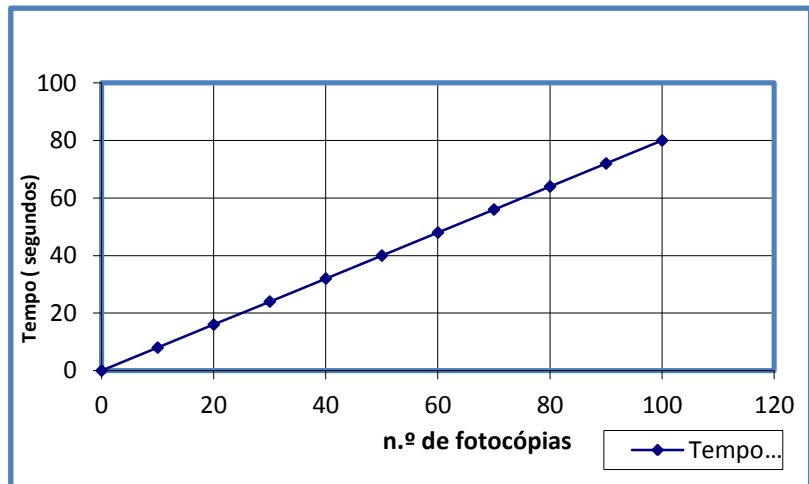
11.1. a quantidade de café *arábica* necessária para misturar com 10 Kg de café *robusta*.

11.2. a quantidade de cada um dos cafés que o Sr. Higino deve usar para fazer um lote de 70 Kg de café.

2.2. Grandezas directamente proporcionais

A fotocopiadora duma escola faz 10 fotocópias em 8 segundos. Registou-se numa tabela e num gráfico o tempo gasto a fazer 20, 30, 40, ... até 100 fotocópias.

Número de fotocópias	Tempo (em segundos)	Tempo Nº fotocópias
10	8	0,8
20	16	0,8
30	24	0,8
40	32	0,8
50	40	0,8
60	48	0,8
70	56	0,8
80	64	0,8
90	72	0,8
100	80	0,8



Na tabela podemos passar da 1ª coluna para a 2ª coluna multiplicando por 0,8. Por outro lado é **constante** o quociente entre os valores correspondentes das duas grandezas.

No **gráfico**, unindo os pontos obtemos uma recta que passa pela origem dos eixos.

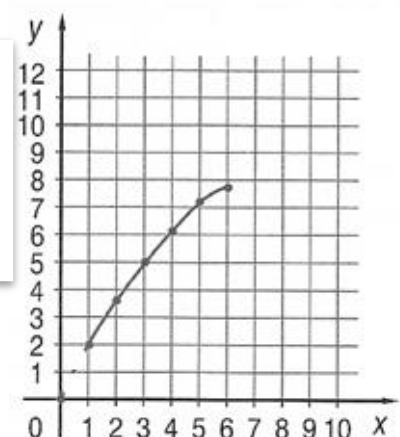
O tempo gasto é **directamente proporcional** ao número de fotocópias. O número 0,8 é a **constante de proporcionalidade**.

Duas grandezas dizem-se **directamente proporcionais** se é constante o quociente entre os valores correspondentes das duas grandezas, tomadas na mesma ordem.
Ao quociente constante dá-se o nome de **constante de proporcionalidade**.

Há 6 anos, no “Dia da Árvore”, o Sidney plantou uma árvore no seu quintal. Desde esse dia, todos os anos no mesmo dia, vai medi-la e faz o registo numa tabela. Será que a altura da árvore é directamente proporcional à sua idade?

Observa a tabela e o gráfico que o Sidney fez este ano:

x	1	2	3	4	5	6
Idade (anos)						
y	2	3,5	5	6	7,1	7,6
Altura (metros)						



Na tabela **não** podemos passar da 1ª linha para a 2ª multiplicando sempre pelo mesmo número.

O quociente entre a altura da árvore e a idade não é constante, logo **não existe constante de proporcionalidade**.

No gráfico, unindo os pontos **não** obtemos uma recta que passa pela origem.

Não existe proporcionalidade directa entre o crescimento da árvore e os anos decorridos.

Exemplo 7

Na tabela seguinte o número de *pof-pof* é directamente proporcional ao seu preço.

Completa a tabela.

Número de <i>pof-pof</i>	2	6		15
Preço em dobras	10.000		55.000	

Resolução

1º método

Usando a constante de proporcionalidade :

$$\frac{10.000}{2} = 5.000, \text{ um } pof-pof \text{ custa } 5.000 \text{ dobras.}$$

Logo:

$$6 \times 5.000 = 30.000$$

$$\frac{55.000}{5.000} = 11$$

$$15 \times 5.000 = 75.000$$

2º método

Usando proporções:

$$\frac{2}{10.000} = \frac{6}{x}; \quad (\text{um extremo é igual ao produto dos meios a dividir pelo outro extremo})$$

$$x = \frac{10.000 \times 6}{2}; \quad x = 30.000$$

$$\frac{2}{10.000} = \frac{x}{55.000};$$

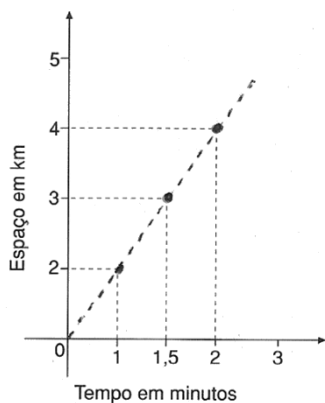
$$x = \frac{55.000 \times 2}{10}; \quad x = 11$$

Tabela completa:

Número de <i>pof-pof</i>	2	6	11	15
Preço em dobras	10.000	30.000	55.000	75.000

Exemplo 8

Considera o gráfico:



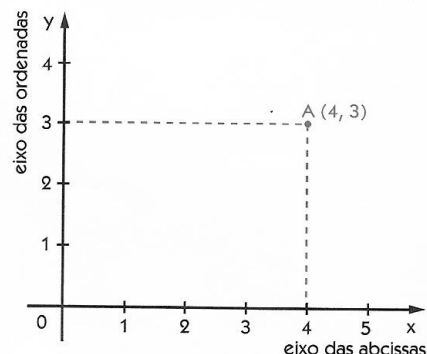
8.1. Constrói uma tabela que corresponda ao gráfico.

8.2. Determina em km /h, a velocidade média do móvel cujo movimento esteve na base da construção do gráfico.

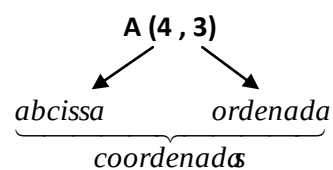
base da construção do gráfico.

Representação de pontos num sistema de eixos cartesianos

Dois eixos graduados, perpendiculares e com a mesma origem constituem um **sistema de eixos**.



Um ponto no sistema de eixos tem duas **coordenadas**.



Para representar, no sistema de eixos, o ponto **A** procura:

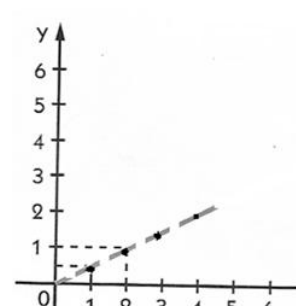
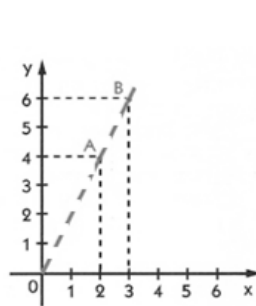
4 - no eixo das abcissas (ou eixo dos *xx*)

3 - no eixo das ordenadas (ou eixo dos *yy*) ; e traças paralelas aos eixos, que se intersectam em **A**.

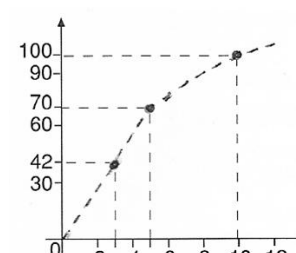
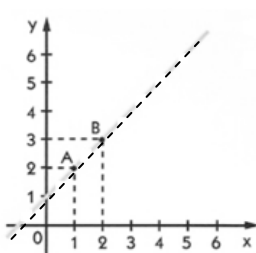
Gráficos de proporcionalidade directa

A representação gráfica de uma relação de proporcionalidade directa é um conjunto de pontos situados sobre uma recta que passa pela origem dos eixos.

São gráficos de proporcionalidade directa:



Não são gráficos de proporcionalidade directa:



Resolução

8.1.

Tempo (minutos)	1	1,5	2
Espaço (km)	2	3	4

$$k = \frac{\text{espaço}}{\text{tempo}} = 2$$

k é a constante de proporcionalidade

8.2.

A velocidade média é a constante de proporcionalidade entre o espaço e o tempo.

$V_{\text{média}} = 2 \text{ km / minuto}$.

Para calcular a velocidade média em km / h usamos uma proporção: (1 h = 60 m)

$$\frac{1}{2} = \frac{60}{x}; \quad x = \frac{2 \times 60}{1}; \quad x = 120$$

A velocidade média do móvel foi 120 km / h

Actividades de aplicação

12. As grandezas referidas nas tabelas são directamente proporcionais.

Indica o número que cada uma das letras representa.

12.1.

Número de CD	2	5	10	c	d
Custo (em dobras)	40.000	a	b	240.000	300.000

12.2.

Distância real (em km)	0,5	12,8	25	c	100
Distância no mapa (em cm)	a	b	5	4,2	d

12.3.

Número de sumos	10	1	b	100	d
Custo (em dobras)	120.000	a	420.000	c	360.000

12.4.

Número de euros comprados	a	10	b	100
Custo (em dobras)	122.500	245.000	1.225.000	c

13. Indica, justificando, se existe proporcionalidade directa em cada uma das situações:

13.1.

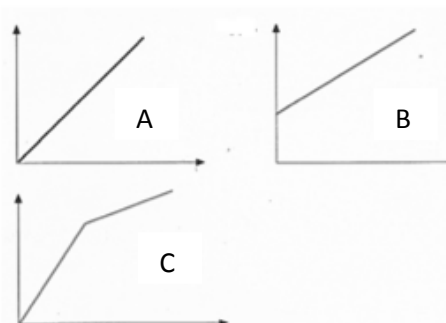
A

a	8	6	2	0
b	4	3	1	0

B

x	2	3	6	10
y	8	12	15	30

13.2.



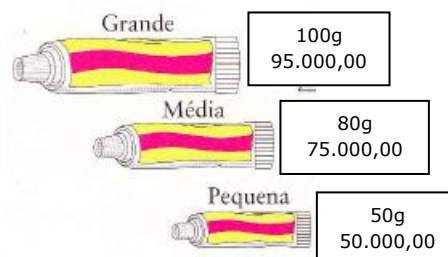
14. Observa a figura onde estão representados vários tamanhos de pastas de dentes e os seus preços.

14.1. Completa a tabela.

Pasta	Quantidade (em g)	Preço (em dobras)
Grande		
Média		
Pequena		

14.2. Existe proporcionalidade directa entre o custo e a quantidade?

14.3. Qual será a melhor compra? Justifica a tua resposta.

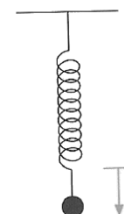


15. Fez-se a seguinte experiência: Numa mola colocaram-se sucessivamente objectos e mediram-se os respectivos alongamentos. Os resultados foram colocados na seguinte tabela:

Massa (em g)	10	20	30	40	50
Alongamento (em cm)	2,5	5	7,5	10	12,5

15.1 Mostra que o alongamento é directamente proporcional à massa do objecto.

15.2. Desenha um gráfico que relacione o alongamento da mola com a massa do objecto.



➤ Regra de três simples

O conhecimento de que duas grandezas são directamente proporcionais permite a resolução de muitos problemas de um modo simples, usando uma regra que tem a designação de **regra de três simples**.

Exemplo 9

Uma fotocopadora faz 10 fotocópias em 12 segundos. Quanto tempo leva a fazer 150 fotocópias?

Resolução

Colocam-se os nomes das grandezas em coluna.

Nº fotocópias		Tempo (segundos)
10	_____	12
150	_____	x

(Ler: 10 corresponde a 12; 150 corresponde a x)

Em seguida, calculamos como se se tratasse da proporção

$$\frac{10}{150} = \frac{12}{x}, \text{ ou seja, } x = \frac{150 \times 12}{10}; \quad x = 180$$

180 segundos = 3 minutos

Logo, a máquina faz 150 fotocópias em 3 minutos.

Exemplo 10

O Sr. Aníbal depositou no banco " Gold Bank" 2.000.000,00 que renderam, ao fim de um ano, 160. 000,00 de juros.

Calcula o juro que teria obtido se depositasse 3.000.000,00, durante um ano.

Resolução

Considera-se que o juro é directamente proporcional ao capital (valor) depositado. Para facilitar os cálculos com os valores em dobras fazemos: 1. 000.000,00 = 1 milhão de dobras

Capital		Juro
2	_____	0,16
3	_____	x

$$x = \frac{3 \times 0,16}{2}; \quad x = 0,24$$

0,24 x 1.000.000,00 = 240.000,00

Logo, o juro obtido seria 240.000,00.

Actividades de aplicação

16. Observa as figuras que representam as divisões da casa da Micaela.



A escala usada foi de 1 : 100

16.1. Determina as dimensões reais de cada uma das divisões.

16.2. Qual é a área real da sala da Micaela?

(Nota que não podes calcular a área real calculando a área do desenho e usando a escala. A escala foi definida para comprimento e não para áreas.)

17. Numa caixa de antibiótico lê-se:

“ Dosagem: uma colher e meia de chá para cada 12 Kg de peso, de oito em oito horas.”

Que quantidade de antibiótico deve ser dada a uma criança com:

17.1. 8 kg de peso;

17.2. 20 kg de peso.

➤ Percentagens

O conceito de percentagem é um dos mais aplicados no nosso dia-a-dia:

“A turma B teve 72% de positivas na disciplina de Matemática”; “a taxa de inflação foi de 4%”; “no jogo x a equipa A teve 48 % de posse de bola”; “ no país y apenas 70% da população tem acesso a água potável”.

O símbolo % é usado quando nos referimos a uma certa quantidade de 100. Por exemplo, se tivermos 100 rebuçados dos quais 26 são de limão e os restantes de laranja, diremos que 26% dos rebuçados são de limão e 74% são de laranja. Uma percentagem é uma razão com conseqüente 100.

Por exemplo: $26\% = \frac{26}{100}$

Exemplo 11

Numa turma de 52 alunos, 13 tiraram negativa no teste de Inglês. Qual a percentagem dos alunos que tirou negativa?

Resolução

1º método – usando a regra de três simples

Nº de alunos Nº de negativas

$$\begin{array}{ccccc} 52 & \text{---} & & 13 \\ 100 & \text{---} & & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 13}{52}; \quad x = 25$$

25% dos alunos tiraram negativa a Inglês

2º método – utilizando a tecla % da calculadora simples

1 3 : 5 2 % 25

Nota: se tiveres uma calculadora científica tens que fazer SHIFT antes de %

A percentagem também pode ser representada sob a forma decimal ou de fracção:		
Fracção	Representação decimal	Percentagem (%)
$\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$	0,5	50%
$\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$	0,4	40%
$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$	0,25	25%
$\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$	0,7	70%
$\frac{10}{10} = \frac{100}{100}$	1	100%

Exemplo 12

O Eddy anda na 7ª classe e a sua turma tem 42 alunos. Foi feito um inquérito sobre os programas que os alunos mais gostam de ver na televisão. O resultado foi:

Filmes	Telenovelas	Programas de informação	Programas musicais	Programas de desporto	Desenhos animados
25%	18%	12%	20%	7%	18%

12.1. Qual é o programa preferido da maioria dos alunos? Quantos alunos preferem esse programa?

12.2. Quantos alunos preferem ver programas de informação?

12.3. Quais são os programas que são preferidos pelo mesmo número de alunos?

12.4. Os alunos da turma do Eddy gostam mais de desporto ou de música? Justifica a tua resposta.

Resolução

12.1.

Como podemos ver na tabela a maior percentagem de alunos (25%) preferem ver filmes.

Vamos calcular 25% de 42 alunos.

1º método – através da regra de três simples

$$\begin{array}{ccccc} 42 & \text{---} & & x \\ 100 & \text{---} & & 25 \end{array}$$

$$x = \frac{42 \times 25}{100}; \quad x = 10,5$$

No contexto do problema, arredondamos 10,5 para a unidade, logo, 11 alunos preferem ver filmes.

2º método – através da representação decimal de 25%

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$42 \times 0,25 = 10,5$$

Arredondando, ficamos a saber que são 11 alunos que preferem ver filmes.

3º método – utilizando a tecla % da calculadora simples

4 2 x 2 5 % 10,5

Nota: se tiveres uma calculadora científica tens que fazer SHIFT antes de %

12.2. $12\% = 0,12$; $42 \times 0,12 = 5,04$

Há 5 alunos que preferem os programas de informação.

12.3. As telenovelas e os desenhos animados são preferidos pela mesma percentagem de alunos (18%).

$42 \times 0,18 = 7,56$; no contexto do problema pode afirmar-se que 8 alunos preferem telenovelas e outros 8 preferem desenhos animados.

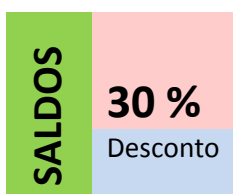
12.4. Gostam mais de música. Há 20% que preferem programas musicais e apenas 7% que preferem programas de desporto , e, $20\% > 7\%$.

Exemplo 13

A Vanda aproveitou os saldos da loja “Bué Chique” que estava a fazer saldos com 30% de desconto em todos os artigos. Comprou umas calças que estavam marcadas por 250.000,00 e uma t-shirt que custava 120.000,00. Quanto pagou pelas compras?

Resolução

As reduções de preço normalmente são apresentadas sob a forma de percentagem.



1º método

Calcula-se o desconto a que corresponde à % e em seguida subtrai-se ao preço inicial:

→ Preço das duas peças:

$$250.000,00 + 120.000,00 = 370.000,00$$

→ Cálculo do desconto de 30%:

$$370.000,00 \times 0,3 = 111.000,00$$

$$370.000,00 - 111.000,00 = 259.000,00$$

→ Total: 259.000,00

2º método

O cálculo do novo preço pode ser determinado efectuando um só cálculo.

Se o desconto é de 30% é porque só se paga 70%. ($100\% - 30\% = 70\%$)

Então:

$$370.000,00 \times 0,7 = 259.000,00$$

A Vanda pagou 259.000,00 pelas compras.

Exemplo 14

O primo da Ivânia trabalha nos Estados Unidos. Ganhava mensalmente 850 dólares mas agora vai ser aumentado 12%. Quanto passará a ganhar?

Resolução

Pode seguir-se o 2º método do exemplo anterior.

Se o aumento é de 12% ele passará a ganhar 112%.

$$(100\% + 12\%) = 112\%; \quad 112\% = 1,12$$

$$850 \times 1,12 = 952$$

O primo da Ivânia passará a ganhar 952 dólares americanos.

Actividades de aplicação

18. Na tabela abaixo indica-se, relativamente aos alunos da 7ª classe de uma escola, o número de rapazes e o número de raparigas, que indicaram preferir ir ao piquenique na praia ou ao festival de música.

	Rapazes	Raparigas	Total
Piquenique	50	40	90
Festival	110	87	197
Total	160	127	387

Calcula a percentagem de:

(Se necessário apresenta o resultado com uma casa decimal.)

18.1. Rapazes que frequentam a 7ª classe;

18.2. Alunos da 7ª classe que preferem ir ao piquenique;

18.3. Raparigas que preferem ir ao piquenique, no conjunto das raparigas;

18.4. Rapazes que preferem ir ao festival, no conjunto dos rapazes.

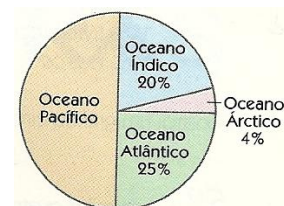
19. Numa turma de 45 alunos, 8 alunos tiveram nota superior a 14 na disciplina de Matemática. Qual é a percentagem de alunos com nota igual ou inferior a 14?

20. Numa loja faziam 20% de desconto sobre o preço de qualquer artigo. Calcula os valores **a** e **b**, de acordo com o quadro:

	Despesa sem descontos (em dobras)	Total a pagar com desconto (em dobras)
Sr. Ivo	580.000,00	a
Sr. Bruno	b	350.000,00

21. A Dona Berta é comerciante. Ela compra cada caixa com 24 latas de sumo por 170.000,00 e vende cada sumo a 10.000,00. Qual é a percentagem de lucro que tem em cada caixa de sumo que vende?

22.



22.1. Sabendo que o Oceano Atlântico ocupa 92 milhões de km², que superfície ocupam este quatro oceanos?

22.2. Coloca por ordem crescente a superfície, em km², dos quatro oceanos.

Unidade 3 – Números racionais

3.1. Os números negativos. Conjuntos numéricos. Representação na recta numérica

Como sabes, é desde criança que cada um de nós começa a conhecer os diversos tipos de números. Começámos por aprender os números naturais e com eles fizemos cálculos e resolvemos problemas. Mas cedo nos apercebemos que nem todos os problemas tinham solução se só existissem estes números.

Como dividir 3 chocolates por 2 meninos? $3 : 2 = 1,5$. Apareceram então os números decimais e os fraccionários.

$$3 : 2 = 1,5 \text{ ou } 3 : 2 = \frac{3}{2}$$

Assim, para tornar sempre possível a divisão de dois números naturais criaram-se os números decimais e os fraccionários.

Mas apareceram outras situações: qual é o meu dinheiro se devo 200.000,00 e só tenho 100.000,00?

Se tenho 100 e devo 200, pago 100 e ainda fico a dever 100.

$$100 - 200 = -100$$

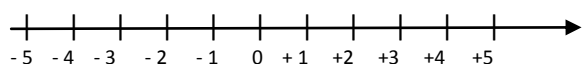
Para tornar sempre possível a subtracção de dois números naturais criaram-se os números negativos.

No nosso dia-a-dia encontramos diversas situações em que se utilizam números negativos:

Nas notícias ouvimos “a temperatura em Kiev, na Ucrânia, foi de 30 graus negativos”; “a economia do país Y tem um crescimento negativo”.

Nas embalagens de produtos congelados podemos ler “conservar a -18°C ”.

➤ Conjuntos numéricos



À recta assim constituída chama-se **eixo** ou **recta orientada**.

Os números colocados à direita de zero são chamados números positivos.

Os números colocados à esquerda de zero são números negativos.

O número zero não é positivo nem negativo.

Antárctida



A Antárctida é o continente mais frio e isolado do mundo. A temperatura média no Pólo Sul é de -49°C . Nos meses de Inverno é sempre noite e já foram registadas temperaturas de $-89,2^{\circ}\text{C}$. É também um dos locais mais ventosos da Terra – a velocidade do vento pode atingir 322 km / h.

Uma capa permanente de gelo cobre a maior parte do continente. Nalgumas zonas este gelo tem mais de 4 km de espessura.

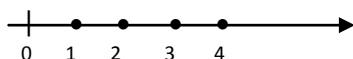
A Antárctida contém 90% de todo o gelo da Terra.

Atlas dos Animais

Aos principais **conjuntos numéricos** associou-se uma letra e um nome.

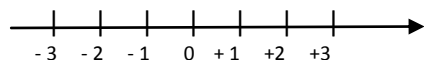
- **Conjunto dos números naturais**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$



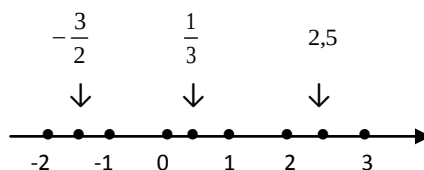
- **Conjunto dos números inteiros relativos**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

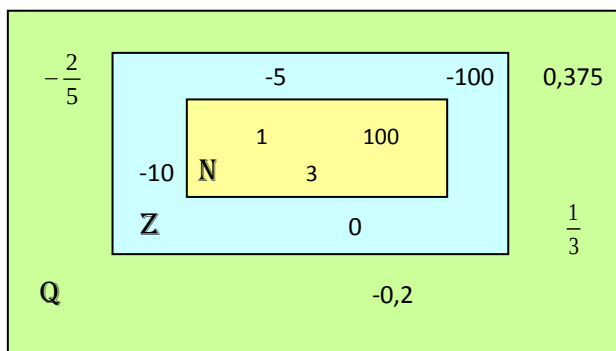


- **Conjunto dos números racionais relativos**

$$\mathbb{Q} = \{\text{números racionais relativos}\}$$



É fácil descobrires relações entre os vários conjuntos, se observares a figura de dentro para fora:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$\subset \rightarrow$ lê-se: "está contido em"

E ainda agrupar os números, formando outros conjuntos que são **subconjuntos de Z e de Q**.

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \{\text{números racionais positivos}\}$$

$$\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q}^- = \{\text{números racionais negativos}\}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

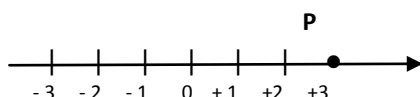
$$\mathbb{Q}_0^+ = \{\text{números racionais não negativos}\}$$

$$\mathbb{Z}_0^- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

$$\mathbb{Q}_0^- = \{\text{números racionais não positivos}\}$$

➤ Representação na recta numérica. Comparação de números racionais

Para compararmos os números racionais facilita a tarefa colocá-los num eixo ou recta orientada.



A cada número racional corresponde um ponto na recta orientada. Ao número chama-se **abscissa** do ponto. O ponto **P** tem **abscissa 3** ou **$P \mapsto 3$** .

Quando os números estão colocados num eixo, o maior é o que está mais à direita.

$$600 > 300 > 0 > -300 > -600$$

Quando os números estão colocados num eixo, o menor é o que está mais à esquerda.

$$-600 < -300 < 0 < 300 < 600$$

Exemplo 1

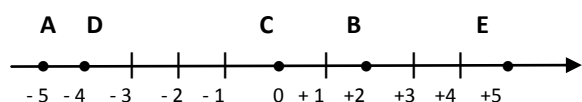
Representa na recta numérica os pontos e em seguida escreve por ordem decrescente as suas abscissas.

$$A \mapsto -5; \quad B \mapsto +2; \quad C \mapsto 0; \quad D \mapsto -4; \quad E \mapsto +5$$

Resolução

Desenhamos uma recta com uma seta para indicar o sentido do crescimento. Marcamos um ponto (origem) ao qual fazemos corresponder o número zero. Definimos uma unidade de comprimento e marcamos o ponto que corresponde ao número 1.

Completamos o eixo com os restantes números.



Por ordem decrescente: $+5 > +2 > 0 > -4 > -5$

Actividades de aplicação

1. Num jogo de computador, existiam as seguintes regras:

- ganha 10 pontos se abater alvos do tipo A;
- ganha 50 pontos se abater alvos do tipo B;
- perde 15 pontos sempre que falhe um alvo;
- perde 35 pontos se abater alvos do tipo C.

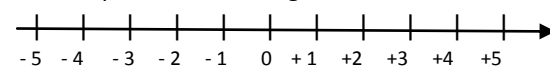
1.1. Descreve o que aconteceu a um jogador que obteve a seguinte sequência:

$$+10 \quad -15 \quad -15 \quad +50 \quad -35 \quad +10$$

1.2. Escreve a pontuação de um jogador correspondente à seguinte sequência:

Abateu alvo tipo C; falhou; abateu alvo tipo A; falhou; abateu alvo tipo B.

2. Numa cidade da Noruega a temperatura à meia-noite é -5°C . Qual será a temperatura às 9 horas se a temperatura subir 7 graus.



3. Completa com um dos símbolos $\in$ ou $\notin$.

$$3.1. \frac{1}{2} \dots \mathbb{Q}_0^+; \quad 3.2. -1 \dots \mathbb{IN}_0;$$

$$3.3. -1,3 \dots \mathbb{Z}^-; \quad 3.4. 0,02 \dots \mathbb{Q}^+;$$

$$3.5. -1,2 \dots \mathbb{Q}^+; \quad 3.6. (3,2 - 0,2) \dots \mathbb{IN};$$

$$3.7. -\frac{8}{4} \dots \mathbb{Z}; \quad 3.8. 0 \dots \mathbb{Z}_0^+$$

Exemplo 2

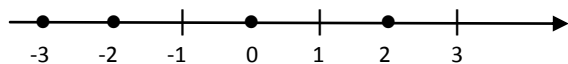
Considera o conjunto A.

Escreve os seus elementos por ordem crescente depois de os colocares num eixo.

$$A = \left\{ -\frac{1}{6}; -3; 0; -2; -0,15; \frac{7}{3}; 2,332 \right\}$$

Resolução

Para alguns elementos do conjunto A não temos qualquer dúvida acerca da sua posição relativa: -3, -2, 0 e 2



Acerca dos números positivos 2,332 e $\frac{7}{3}$ vamos usar uma calculadora.

$$7 : 3 = 2,33333333333$$

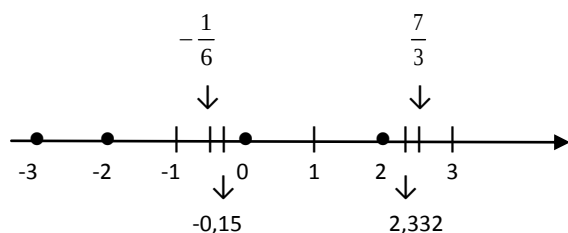
Logo, $\frac{7}{3}$ é maior que 2,332 e como tal está à direita.

Acerca dos números $-\frac{1}{6}$ e -0,15, vem:

$$1 : 6 = 0,16666666666$$

Logo, $-\frac{1}{6}$ está à esquerda de -0,15.

Assim, vem:

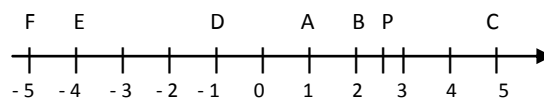


Por ordem crescente vem:

$$-3 < -2 < -\frac{1}{6} < -0,15 < 0 < 2,332 < \frac{7}{3}.$$

Actividades de aplicação

4. Considera a recta numérica:



4.1. Qual é a abcissa do ponto E?

4.2. Entre que pontos está o ponto G se a sua abcissa é -2?

4.3. Dos valores dados, diz qual deles pode ser a abcissa do ponto P?

$$4,2; \quad 3,17; \quad 2,9$$

4.4. Com os símbolos $>$ ou $<$, completa as expressões de modo a obteres afirmações verdadeiras:

$$0 \dots -2; \quad -3 \dots -2; \quad 3 \dots 2; \quad -4 \dots 0$$

5. Indica um número para colocares no $\square$ de modo que fiquem verdadeiras as afirmações:

$$5.1. 1 < \square < 2;$$

$$5.2. -2 < \square < -1;$$

$$5.3. -1,2 < \square < -1,3;$$

$$5.4. -7,8 < \square < -7,6;$$

6. Representa graficamente (numa recta orientada) os elementos de cada um dos conjuntos e, em seguida, escreve-os por ordem crescente:

$$6.1. A = \{-5; -3; -4; 0; -2; +1\}$$

$$6.2. B = \{3; 1,5; -3,5; -0,5; -2\}$$

$$6.3. C = \left\{ 0,3; -0,67; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right\}$$

7. Dá exemplo de um número p , sabendo que:

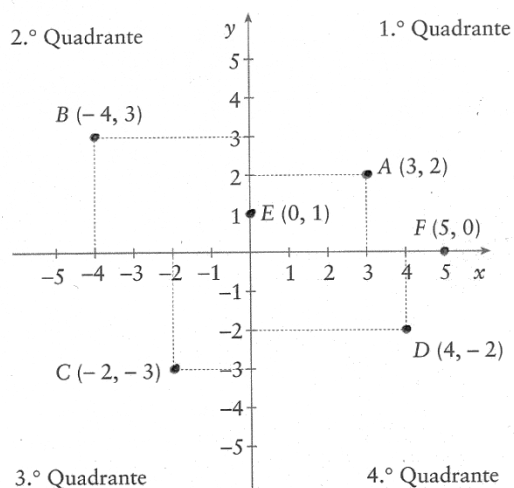
7.1. É maior que $\frac{1}{2}$ mas é menor que 1.

7.2. É maior que -0,1 mas menor que zero.

7.3. É maior que 1,0001 mas menor que 1,001.

7.4. $-1,2 < p < -1,15$

3. 2. Representação de pontos num referencial



Um referencial cartesiano divide o plano em quatro quadrantes.

No referencial o eixo das abcissas (ou dos xx) está orientado da esquerda para a direita e o das ordenadas (ou dos yy) de baixo para cima; a origem dos eixos é o ponto zero; foi escolhida a mesma unidade nos dois eixos.

Os pontos à esquerda do eixo das ordenadas têm abcissas negativas e à direita positivas.

Por exemplo: ponto B $\rightarrow$ abcissa -4; ponto A $\rightarrow$ abcissa 3

Os pontos acima do eixo das abcissas têm ordenadas positivas e abaixo do referido eixo têm ordenadas negativas.

Por exemplo: ponto B $\rightarrow$ ordenada 3; ponto C $\rightarrow$ ordenada -3.

A cada par ordenado de números corresponde um ponto do plano e vice-versa.

Por exemplo, $A \mapsto (3, 2)$

3 é a **abscissa** do ponto A, 2 é a **ordenada** do ponto A.

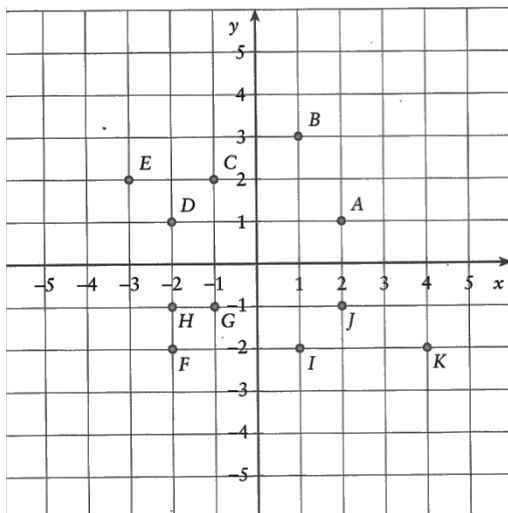
3 e 2 são as **coordenadas** do ponto A.

Os pontos pertencentes ao eixo dos xx têm ordenada nula (a ordenada do ponto F é 0).

Os pontos pertencentes ao eixo dos yy têm abscissa nula (a abscissa do ponto E é 0).

Exemplo 3

Indica as coordenadas de cada um dos pontos assinalados no referencial da figura seguinte:

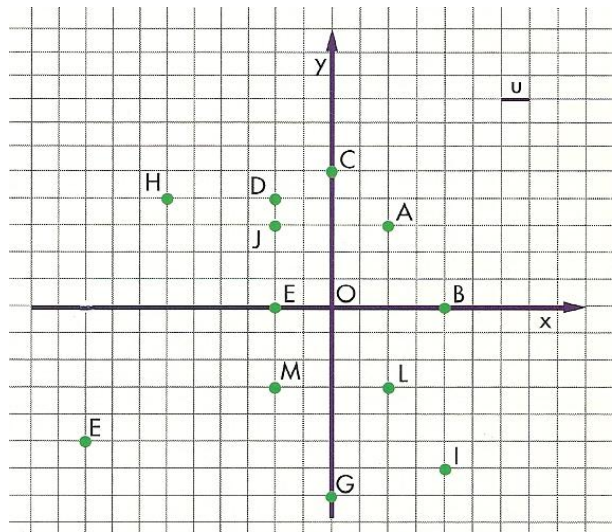


Resolução

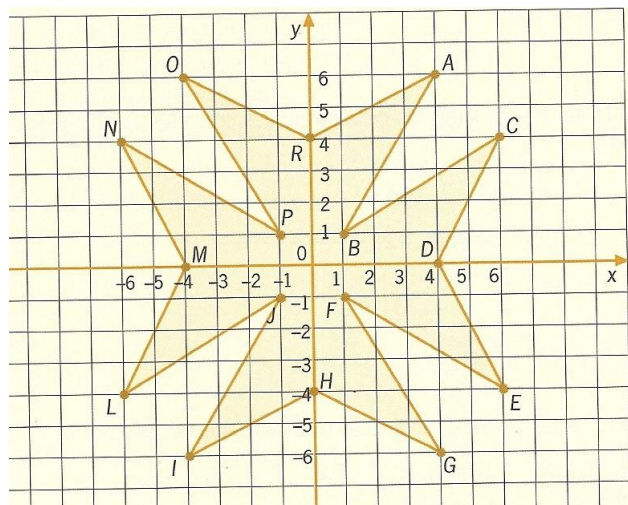
- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| $A \mapsto (2, 1);$ | $B \mapsto (1, 3);$ |
| $C \mapsto (-1, 2);$ | $D \mapsto (-2, 1);$ |
| $E \mapsto (-3, 2);$ | $F \mapsto (-2, -2);$ |
| $G \mapsto (-1, -1);$ | $H \mapsto (-2, -1);$ |
| $I \mapsto (1, -2);$ | $J \mapsto (2, -1);$ |
| $K \mapsto (4, -2).$ | |

Actividades de aplicação:

8. Indica as coordenadas dos pontos assinalados no referencial da figura seguinte:

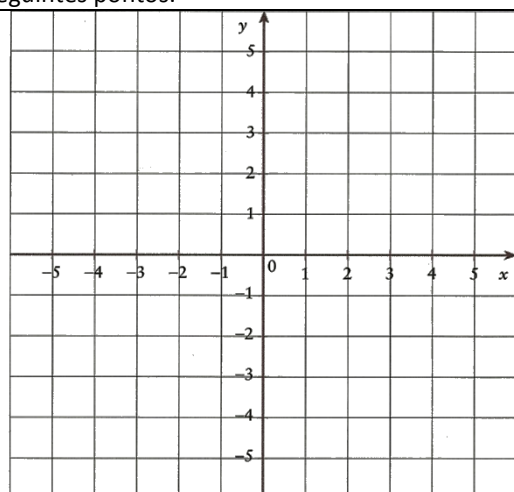


9. Indica as coordenadas dos pontos assinalados na figura:



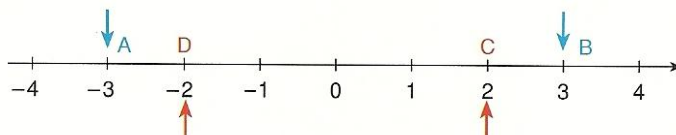
10. Representa no referencial os seguintes pontos:

- | |
|-----------------------|
| $A \mapsto (3, 5);$ |
| $B \mapsto (-1, 2);$ |
| $C \mapsto (-2, -3);$ |
| $D \mapsto (4, -3);$ |
| $E \mapsto (1, -3);$ |
| $F \mapsto (-1, -3);$ |
| $G \mapsto (-3, 3);$ |
| $H \mapsto (-2, 0);$ |
| $I \mapsto (0, -3).$ |



3.3. Números simétricos. Valor absoluto de um número

Num eixo existem sempre dois pontos que estão à mesma distância da origem (o ponto de abscissa zero).



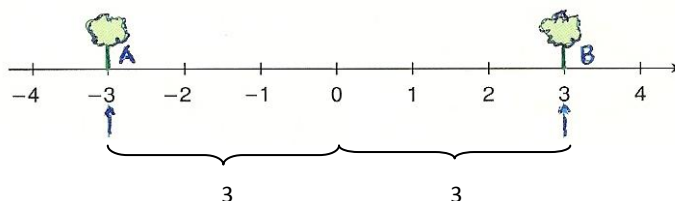
A e B distam 3 unidades da origem, C e D distam 2 unidades da origem. Diz-se que:

-3 é simétrico de 3 ;

$+2$ é simétrico de -2

Dois números são simétricos se têm sinais contrários e se os pontos a que correspondem no eixo estão à mesma distância da origem. De um modo geral o **simétrico de a é $-a$** .

Diz-se que o **valor absoluto** da abscissa de A é igual ao valor absoluto da abscissa de B, porque é igual a distância dos pontos A e B à origem



Simbolicamente, escreve-se: $|-3| = |+3| = 3$ e lê-se:

Valor absoluto de -3 é igual ao valor absoluto de $+3$; é igual a 3.

Módulo ou valor absoluto da abscissa de um ponto é a distância desse ponto à origem.

Dois números simétricos têm o mesmo valor absoluto.

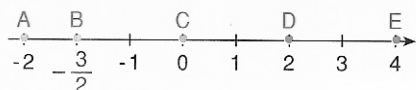
Exemplo 4

Completa a tabela:

Número	Simétrico	Valor absoluto
$+3$	-3	3
$+4$	-4	4
$-\frac{2}{5}$	$+\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$+0,33$	$-0,33$	$0,33$
$+20$	-20	20

Exemplo 5

Considera os pontos assinalados na recta numérica.



A distância à origem de cada um dos pontos é: $A = 2$; $B = 1,5$; $C = 0$; $D = 2$ e $E = 4$.

O valor absoluto da abscissa de cada um dos pontos é: $|-2| = 2$; $|\frac{-3}{2}| = \frac{3}{2}$; $|0| = 0$; $|2| = 2$; $|4| = 4$

Actividades de aplicação

11. Considera os elementos do conjunto A:

$$A = \left\{ -5; -2; -0,8; 0; \frac{1}{5}; -\frac{4}{3}; 3,5; 5 \right\}$$

11.1. Indica os elementos de A que são números simétricos.

11.2. Escreve o conjunto B formado pelos valores absolutos dos elementos de A.

11.3. Representa na recta numérica os elementos de A e escreve-os por ordem crescente.

12. Completa com os sinais $>$, $<$ ou $=$ de forma a obteres afirmações verdadeiras:

12.1. Simétrico de -2 $|-2|$

12.2. $-3,5$ $|-3,5|$ **12.3.** $|-12|$ $|+12|$

12.4. $|-15|$ $|+5|$ **12.5.** $8,33$ $|-8,33|$

3.4. Adição e subtração de números inteiros relativos. Simplificação da escrita.

Para calcular a soma de dois números inteiros relativos vamos observar a expressão e dar-lhe um sentido. Observa o quadro seguinte que se refere à “contabilidade” das folhas de teste do Rogério.

Expressão	Situação real	Conclusão
O que significa a expressão: $(+3) + (-5)$? $(+3) + (-5) = -2$	Tenho 3 e devo 5 ao Jassy, então devo 2. 	Parcelas com sinais contrários: Subtraem-se os valores absolutos e dá-se o sinal da parcela com maior valor absoluto.
O que significa a expressão: $(-8) + (+10)$? $(-8) + (+10) = +2$	Devo 8 à Antónia e tenho 10, então tenho 2. 	
O que significa a expressão: $(-8) + (-2)$? $(-8) + (-2) = -10$	Devo 8 à Antónia e 2 ao Jassy, então devo 10. 	Parcelas com o mesmo sinal: Adicionam-se os valores absolutos e mantém-se o sinal.
O que significa a expressão: $(+7) + (+2)$? $(+7) + (+2) = +9$	Tenho 7 na mochila e 2 no caderno, então tenho 9. 	
O que significa a expressão: $(+10) + (-10)$? $(+10) + (-10) = 0$	Tenho 10 e devo 10, então tenho 0. 	A soma de dois números simétricos é zero.

Outros exemplos:

$(-200) + (+300) = +100 \rightarrow$ tenho mais do que devo. O resultado é positivo.

$(-500) + (+200) = -300 \rightarrow$ devo mais do que devo. O resultado é negativo.

Actividades de aplicação		
13. Qual é a situação financeira da Selma se: (as quantias referem-se a milhares de dobras) 13.1. Deve 10 e tem 15? 13.2. Deve 5 e tem 4? 13.3. Deve 2 e tem 2? 13.4. Tem 5 no bolso e 15 na carteira? 13.5. Deve 2 à irmã e 5 à mãe.	14. Completa:	
	14.1. $(-3) + (+8) =$ _____	14.2. $(-1) + (+1) =$ _____
	14.3. $(-5) + (-2) =$ _____	14.4. $(-15) + (+8) =$ _____
	14.5. $(+10) + (-11) =$ _____	14.6. $(+31) + (+68) =$ _____
	14.7. $(+70) + (-70) =$ _____	14.8. $(+10) + (-15) =$ _____
	14.9. $(-13) + (-22) =$ _____	14.10. $(+12) + (-50) =$ _____

➤ Subtração de números inteiros relativos

Como calcular: $(+8) - (+3)$?

O Rogério tinha 8 e tirou 3, então ficou com 5.

$$(+8) - (+3) = +5$$

Ou $\downarrow \downarrow$

$$(+8) + (-3) = +5$$

Subtrair corresponde a adicionar o simétrico.

Como calcular $(-8) - (-2)$?

O Rogério devia 8 pagou uma dívida de 2, então só ficou a dever 6.

$$(-8) - (-2) = -6$$

Ou $\downarrow \downarrow$

$$(-8) + (+2) = -6$$

Subtrair dois números relativos corresponde a adicionar ao aditivo o simétrico do subtractivo.

$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$$

Exemplos:

- $(-100) - (+90) = (-100) + (-90) = -190$
- $(+200) - (-20) = (+200) + (+20) = +220$

➤ Simplificação da escrita

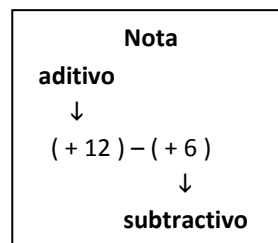
Atendendo:

- a que o símbolo + como sinal posicional pode ser omitido ($+2$ é o mesmo que 2; $+(-2)$ é o mesmo que -2 ;
- a que o simétrico do simétrico de um número é o próprio número ($-(-2) = 2$;
- a que o simétrico de um número positivo é um número negativo ($-(+2) = -2$; tem-se:

$$+ (+a) = a; \quad + (-a) = -a; \quad - (+a) = -a; \quad - (-a) = +a$$

A partir de agora pode-se adicionar ou subtrair números inteiros relativos começando por simplificar a escrita. Observa:

Expressão	Escrita simplificada	Situação real
$(-2) + (-3) =$	$-2 - 3 = -5$	 Devo 2 e devo 3, então devo 5.
$(-3) - (+3) =$	$-3 - 3 = -6$	Devo 3 e devo 3, então devo 6. 
$(-5) + (+3) =$	$-5 + 3 = -2$	 Devo 5 e tenho 3, então devo 2.
$(-5) - (-8) =$	$-5 + 8 = +3$	Devo 5 e tenho 8, então tenho 3. 
$(-7) - (-7) =$	$-7 + 7 = 0$	 Devo 7 e tenho 7, então tenho zero.



Actividades de aplicação

15. Calcula:

15.1. $(-10) - (-11) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

15.2. $(-5) - (+5) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

15.3. $(+10) - (-11) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

15.4. $(-70) - (-70) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

15.5. $(+35) - (+20) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

➤ **Simplificação de expressões. Cálculo do valor numérico numa expressão**

Exemplo 6

A Kátia, num jogo de computador, em 5 jogadas ganhou 10, perdeu 15, ganhou 8, perdeu 5 e ganhou 2. Qual a pontuação da Kátia no final das cinco jogadas?

Resolução

$$\begin{aligned}
 & (+10) + (-15) + (+8) + (-5) + (+2) = \\
 & = 10 - 15 + 8 - 5 + 2 = \quad (\text{simplificar a escrita}) \\
 & = -15 - 5 + 10 + 8 + 2 = \quad (\text{associar as perdas e os ganhos, aplicando a propriedade comutativa}) \\
 & = -20 + 20 = \quad (\text{cálculo final}) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

A Kátia não perdeu nem ganhou. Ficou com zero pontos.

Outra forma de efectuar os cálculos era seguir a ordem das operações. Observa:

$$\begin{aligned}
 & = 10 - 15 + 8 - 5 + 2 = \\
 & \quad \downarrow \\
 & = -5 + 8 - 5 + 2 = \\
 & \quad \downarrow \\
 & = +3 - 5 + 2 = \\
 & \quad \downarrow \\
 & = -2 + 2 = \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Exemplo 7

Calcula o valor da expressão:

$$-(-5) + (-3) - (-10) + (-8) + (-7)$$

Resolução

$$\begin{aligned}
 & -(-5) + (-3) - (-10) + (-8) + (-7) = \\
 & +5 - 3 + 10 - 8 - 7 \quad (\text{simplificar a escrita})
 \end{aligned}$$

Podemos agora seguir dois processos diferentes

1º Processo: adicionando os números positivos e adicionando os números negativos:

$$= \underbrace{+5+10}_{\text{positivos}} - \underbrace{3-8-7}_{\text{negativos}} = \text{(aplicam-se as propriedades comutativa, associativa da adição. Troca-se a ordem das parcelas, associam-se os números positivos e os números negativos)}$$

e associativa da adição. Troca-se a ordem das parcelas, associam-se os números positivos e os números negativos)

$$\begin{aligned}
 & = +15 - 18 = \\
 & = -3
 \end{aligned}$$

2º Processo: Seguindo a ordem das operações

$$\begin{aligned}
 & +5 - 3 + 10 - 8 - 7 = \\
 & = \underbrace{+5-3} + 10 - 8 - 7 = \\
 & = \underbrace{+2+10} - 8 - 7 = \\
 & = \underbrace{+12-8} - 7 = \\
 & = \underbrace{+4-7} = \\
 & = -3
 \end{aligned}$$

Actividades de aplicação

16. Simplifica a escrita, tirando os parênteses e em seguida calcula:

16.1. $7 + (+2) - (-3)$; **16.2.** $-(-8) + (-2) - (+5)$;

16.3. $(-15) + 10 - 60 - (-80)$;

16.4. $-10 - (-8) + (-3) + (+2) - (+5)$;

16.5. $(-1800) - (-2001) + (-1500)$;

16.6. $-13 + (-57) - (-83) + (+215)$;

16.7. $-120 + (+80) - (-40) - (-10)$;

16.8. $-880 - (-410) - 280 - (-300)$;

17. O Abdulay esteve a jogar na consola “Play Game” e a contagem era em pontos. Em 10 jogadas aconteceu o seguinte:

Perdeu 5, ganhou 18, perdeu 12, ganhou 7, ganhou 18, perdeu 2, perdeu 5, perdeu 7, ganhou 25 e perdeu 32.

Qual foi a pontuação final do Abdulay?

18. Determina o número que deves colocar no de modo a obteres afirmações verdadeiras:

18.1. $\square - (-5) = -3$;

18.2. $8 - \square = -20$;

18.3. $\square + 10 - (-3) = 15$;

18.4. $-100 + 30 + \square = -3$.

19. Completa a tabela de forma que a soma de x com y seja sempre -20.

x	y	x + y
10		-20
	-5	-20
-18		-20
120		-20
	-115	-20

3.5. Multiplicação e divisão de números inteiros relativos

Ambos os factores são positivos:

$$(+4) \times (+2) = 4 \times 2 = 8 = +8 \quad \text{o produto é positivo}$$

Considera o seguinte padrão:

$$\begin{array}{l} (+4) \times (+3) = +12 \\ (+4) \times (+2) = +8 \\ (+4) \times (+1) = +4 \\ (+4) \times 0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{o produto diminui de 4 em 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (+4) \times (-1) = -4 \\ (+4) \times (-2) = -8 \\ (+4) \times (-3) = -12 \\ (+4) \times (-4) = -16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{para manter o padrão} \end{array}$$

Concluis que: **o produto de um número positivo por um número negativo é negativo.**

Admitindo que a multiplicação em $\mathbb{Z}$ goza da propriedade comutativa, será: $(-4) \times (+3) = -12$

Concluis que: **o produto de um número negativo por um número positivo é negativo.**

Considera agora o seguinte padrão:

$$\begin{array}{l} (-4) \times (+3) = -12 \\ (-4) \times (+2) = -8 \\ (-4) \times (+1) = -4 \\ (-4) \times 0 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{o produto aumenta de 4 em 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (-4) \times (-1) = +4 \\ (-4) \times (-2) = +8 \\ (-4) \times (-3) = +12 \\ (-4) \times (-4) = +16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{para que se mantenha o padrão} \end{array}$$

Concluis que: **o produto de dois números negativos é um número positivo.**

Sinal, número, sinal, número ...

Era o jogo do tenho e devo.

Tudo parecia fácil.

Adicionar já era um sossego.

Vem aí a multiplicação

E de novo a complicação.

As regras agora são outras,

É preciso muita atenção.

Maria Augusta

O **produto** de dois números com o **mesmo sinal** é **positivo**.

O **produto** de dois números com **sinais contrários** é **negativo**.

$$(+2) \times (+3) = +6 \quad ; \quad (-2) \times (-3) = +6$$

$$(+2) \times (-3) = -6 \quad ; \quad (-2) \times (+3) = -6$$

A **divisão** é a operação inversa da multiplicação e, como tal, **as regras dos sinais são as mesmas**.

$$(+12) : (+3) = +4 \quad ; \quad (-12) : (-3) = +4$$

$$(+12) : (-3) = -4 \quad ; \quad (-12) : (+3) = -4$$

Actividades de aplicação

20. Calcula:

20.1. $(-2) \times (-5)$;

20.2. $(+12) \times (-3)$;

20.3. $(-150) \times (-10)$;

20.4. $(+8) \times (-6)$;

20.5. $(+32) \times (+3)$;

20.6. $(-45) \times (+5)$;

21. Calcula mentalmente:

21.1. $(-18) \div (-6)$;

21.2. $(-16) \div (+2)$;

21.3. $(+55) \div (-5)$;

21.4. $(-13) \div (-13)$;

21.5. $(-22) \div (-11)$;

21.6. $(+50) \div (-1)$;

22. Calcula:

22.1. $(-100) \times (-10) \times (-1)$;

22.2. $(-15) \times (-10) \div (-30)$;

22.3. $(-1) \times (-3) + (-2) \times (-5)$;

22.4. $(-5) + (-10) + (-3) \times (-2)$;

22.4. $(-10) + (-5) \times (-20) \div (-10)$;

22.6. $[(-5) + (-3) \times (-2)] \div [(-2) - (-3)]$

Podemos resumir as regras dos sinais exemplificados, nas seguintes tabelas:

Multiplicação e divisão

+	x ou :	+	=	+
Positivo		positivo		positivo
-	x ou :	-	=	+
negativo		negativo		positivo
+	x ou :	-	=	-
Positivo		negativo		negativo
-	x ou :	+	=	-
negativo		positivo		negativo

3.6. Operações com números racionais

➤ Adição algébrica de números racionais

Na adição algébrica de números racionais tem-se em conta os conhecimentos já adquiridos. As propriedades da adição de números naturais são também válidas para os números racionais.

Exemplos	Propriedades
$-3 + (-5) = -5 + (-3)$	Comutativa $a + b = b + a$
$-7 + (5 + 3,5) = (-7 + 5) + 3,5$	Associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$
$-3,6 + 0 = 3,6$	Existência de elemento neutro : o zero $a + 0 = a$
$-3 + 3 = 0$	Existência de elemento simétrico $a + (-a) = 0$

Exemplo 8

Calcula o valor da expressão:

$$-\frac{1}{3} + 0,2 + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{5}\right)$$

Resolução

$$-\frac{1}{3} + 0,2 + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} + 0,2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \quad (\text{Tiram-se os parênteses})$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = (\text{reduz-se } 0,2 \text{ a fracção}) \quad (\text{m. m. c. } (2, 3, 5, 10) = 30)$$

$$= -\frac{10}{30} + \frac{6}{30} + \frac{15}{30} + \frac{6}{30} = (\text{Igualam-se os denominadores})$$

$$= -\frac{10}{30} + \frac{27}{30} = (\text{adicionaram-se os números positivos})$$

$$= \frac{17}{30}$$

Exemplo 9

Calcula o valor da expressão:

$$-2 - (-1,2 + 0,5) + \frac{1}{5}$$

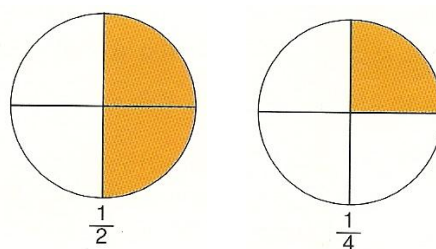
Resolução

$$-2 - (-1,2 + 0,5) + \frac{1}{5} \quad (\text{Tiram-se os parênteses})$$

$$= -2 + 1,2 - 0,5 + \frac{1}{5} =$$

$$= -2,5 + 1,2 + \frac{1}{5} = (\text{adicionam-se os números decimais negativos})$$

Adição de números representados por fracções:



Recorda:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(2) (1)

Reduzir ao mesmo denominador e efectuar a operação.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20}$$

(4) (5)

Reduzir ao mesmo denominador e efectuar a operação.

Actividades de aplicação

23. Calcula:

23.1. $(-2) - \left(-\frac{1}{3}\right)$; 23.2. $0,2 + \left(-\frac{1}{2}\right)$;

23.3. $0 - \left(-\frac{1}{4}\right)$; 23.4. $-\frac{1}{3} - \frac{7}{3} + \frac{5}{3}$;

23.5. $\left(-\frac{7}{10}\right) + \frac{2}{5}$; 23.6. $\left(-\frac{1}{6}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right)$;

23.7. $(-2,7) + \frac{1}{2}$; 23.8. $0 - \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{2}{15}\right)$;

23.9. $-0,5 + \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}$;

$$= -1,3 + \frac{1}{5} = \text{(adicionam-se os números decimais de sinais contrários)}$$

$$= -\frac{13}{10} + \frac{1}{5} = \text{(transforma-se o número decimal 1,3 em fracção)}$$

$$= -\frac{13}{10} + \frac{2}{10} = \text{(Igualam-se os denominadores)}$$

$$= -\frac{11}{10} = 1,1$$

Na adição algébrica de números racionais, números decimais podem representar-se na forma de fracção e os números fraccionários que são dizimas finitas podem representar-se na forma decimal. Os números fraccionários que não são dizimas finitas não podem representar-se na forma decimal, como por exemplo $\frac{1}{3} = 0,333333\ldots$

24. Efectua as seguintes operações e apresenta o resultado com duas casas decimais:

24.1. $2,36 - 5,2 + \left(-\frac{1}{4}\right);$

24.2. $-\frac{7}{10} + 0,06 - (-1,34) + \frac{1}{5};$

24.3. $-\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1,34 - (-3);$

24.4. $-\frac{1}{4} + \left(-\frac{11}{8}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right) + 1,84;$

24.5. $-\frac{1}{3} + 0,2 + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{5}\right);$

➤ Multiplicação e divisão de números racionais

As regras de sinais são as mesmas que usamos na multiplicação e na divisão de números inteiros relativos.

Nas expressões numéricas a multiplicação e a divisão têm prioridade sobre a adição e a subtracção.

As propriedades dos números naturais são válidas também para os números racionais.

Exemplos	Propriedades
$-3 \times (-5) = -5 \times (-3)$	Comutativa $a \times b = b \times a$
$-7 \times (5 \times 3,5) = (-7 \times 5) \times 3,5$	Associativa $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
$-3,6 \times 1 = 3,6$	Existência de elemento neutro $a \times 1 = a$
$-4,8 \times 0 = 0$	Existência de elemento absorvente $a \times 0 = 0$
$-3 \times (-5 + 2) = -3 \times (-5) + (-3) \times 2$	Distributiva da multiplicação em relação à adição $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$; $\frac{4}{7} \times \frac{7}{4} = \frac{28}{28} = 1$	Elemento inverso $a \times \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0$

Nota

Multiplicação de fracções

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} ; 2 \times \frac{7}{9} = \frac{14}{9} ; \frac{3}{7} \times 4 = \frac{12}{7}$$

Divisão de fracções

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \quad \left(\frac{4}{3} \text{ é o inverso de } \frac{3}{4}\right);$$

$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{1}{3} \text{ é o inverso de } 3\right);$$

$$5 \div \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \quad \left(\frac{4}{3} \text{ é o inverso de } \frac{3}{4}\right);$$

Multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.

Exemplo 10

Calcula: $-\frac{1}{3} \times (0,2) - \left(-\frac{1}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{4}\right)$

Resolução

$$-\frac{1}{3} \times (0,2) - \left(-\frac{1}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{10}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{1}\right) = \quad \left(0,2 = \frac{2}{10}\right)$$

$$= -\frac{2}{30} - \left(+\frac{4}{3} \right) = -\frac{2}{30} - \frac{40}{30} = -\frac{42}{30} = -\frac{21}{15} = -\frac{7}{5}$$

(1) (10)

(efectuou-se a multiplicação, reduziu-se ao mesmo denominador,

efectuou-se a adição algébrica e simplificou-se o resultado)

Actividades de aplicação

25. Calcula:

25.1. $-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$; 25.2. $-\frac{3}{2} \times \left(+\frac{1}{5}\right)$; 25.3. $-\frac{1}{5} \div 2$; 25.4. $-\frac{1}{3} \div \left(-\frac{1}{4}\right)$; 25.5. $-\frac{5}{6} \div 0,1$; 25.6. $-\frac{1}{3} \div 0,3$

25.7. $-\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)$; 25.8. $2,5 \times (-0,2) \div \left(-\frac{1}{10}\right)$; 25.9. $-\frac{1}{4} \div \left(+\frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{5} \div (-0,3)$; 25.10. $\frac{2 \div (-7)}{1 \div \frac{7}{2}} \times (-3)$

26. Calcula o valor das expressões:

26.1. $-\frac{1}{3} + (-1 + 5 \times 0)$; 26.2. $-3 \times \frac{1}{5} - 3 \left(2 - \frac{4}{5}\right)$; 26.3. $\frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{3}{4}}$; 26.4. $\frac{-\frac{1}{2} \times (-3) \div \left(-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)}$;

26.5. $5 \left(2 - \frac{2}{3}\right) + 3 \times \frac{7}{6} - \frac{3}{2} \left(5 - \frac{2}{3}\right)$; 26.6. $0,5 - 0,5(2 - 12) + 5 \times 1,1 - \frac{0,9}{0,03}$;

3.7. Potências de números racionais

As regras de potências de base racional e expoente natural são as mesmas regras das potências de base natural.

➤ Sinal de potência

Observe-se que:

$$(-2)^1 = -2;$$

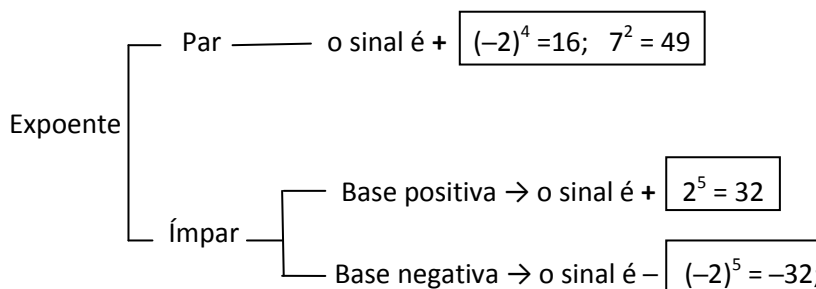
$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4;$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8;$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16;$$

$$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32;$$

Os resultados obtidos obedecem a uma regularidade:



Exemplo 11

Calcula: $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \div \left(\frac{5}{6}\right)^3$

Resolução

Como as potências têm o mesmo expoente, aplicam-se as regras das operações com potências e as regras dos sinais de potências

Regras das operações com potências	
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
$a^m \times b^m = (a \times b)^m$	$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$a^0 = 1; \quad a \neq 0$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{1}{12}\right)^3 \div \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \text{(aplicou-se a regra da multiplicação de potências com o mesmo expoente e a regra de base negativa e expoente ímpar)}$$

$$= \left(-\frac{1}{12}\right)^3 \times \left(-\frac{6}{5}\right)^3 = \text{(para efectuar a divisão de fracções multiplica-se pelo inverso do divisor)}$$

$$= \left(-\frac{1}{12}\right)^3 \times \left(-\frac{6}{5}\right)^3 = \left(-\frac{6}{60}\right)^3 = \left(-\frac{1}{10}\right)^3 \text{ (aplicou-se a regra da multiplicação de potências com o mesmo expoente e a regra de base negativa e expoente ímpar, em seguida simplificou-se o resultado)}$$

Exemplo 12

Calcula: $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \div (-2)^3 - (-1)^6 \times (-2)^2$

Resolução

No cálculo de expressões onde aparecem potências, e não é possível aplicar as regras, deve-se calcular em primeiro lugar, as potências e, em seguida, efectuar as operações.

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \div (-2)^3 - (-1)^6 \times (-2)^2 = \frac{1}{9} \div (-8) - (+1) \times 4 =$$

(calculou-se as potências)

$$= \frac{1}{9} \times \left(-\frac{1}{8}\right) - (+1) \times 4 =$$

$$= -\frac{1}{72} - 4 =$$

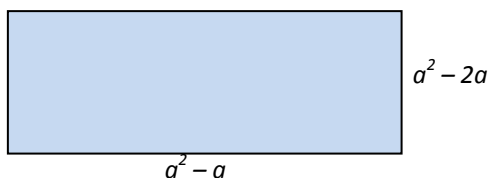
(resolveu-se as operações de multiplicação da esquerda

para a direita)

$$= -\frac{1}{72} - \frac{288}{72} = -\frac{289}{72}$$

Exemplo 13

Observa o rectângulo representado na figura. Numa certa unidade de comprimento a medida dos lados do rectângulo é representada pelas expressões dadas.



13.1. Escreve uma fórmula para calcular o perímetro do rectângulo.

13.2. Calcula o perímetro se $a = 4$.

Resolução

13.1. $P = 2(a^2 - a) + 2(a^2 - 2a) = 2a^2 - 2a + 2a^2 - 4a =$

$$P = 4a^2 - 6a$$

13.2. $P = 4 \times 4^2 - 6 \times 4$

$$P = 4 \times 16 - 6 \times 4 = 64 - 24 = 40$$

Actividades de aplicação

27. Calcula:

27.1. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ **27.2.** $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ **27.3.** $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

28. Escreve sob a forma de potência:

28.1. -8 **28.2.** $-\frac{1}{27}$ **28.3.** $0,01$

29. Escreve sob a forma de uma só potência:

29.1. $4 \times (-4)^6$ **29.2.** $\left(-\frac{3}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{7}\right)^7$

29.3. $(3^4)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{12}$ **29.4.** $(10^2)^5 : 10^7$

30. Calcula:

30.1. $(-5)^2 + (-3)^2$ **30.2.** $2^3 - (-2)^3$

30.3. $4 + (-2)^2 - 4 \times \frac{2}{3}$

30.4. $(2-3)^3 - (2-3^3)$

31. Verifica que:

31.1. $4^3 + 0^3 + 7^3 = 407$

31.2. $(-1)^3 + (-5)^3 + (-3)^3 = -153$

32. Efectua e simplifica:

32.1. $\frac{2^2 \div 2}{(-1)^5 \times 3}$ **32.2.** $\frac{(-1)^2 \times (-3)^2}{-1 + (-3)}$

32.3. $\left(\frac{-1-3}{-1}\right)^2 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

32.4. $\left[\left(-\frac{2}{7}\right)^3\right]^4 \div \left(-\frac{2}{7}\right)^7 \times [(-1)^5]^3$

32.5. $\frac{[(-2)^2]^3 \div (-4)^6}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2}$

Unidade 4 – Estatística

4.1. Recolha e organização de dados

Estatística é um ramo da Matemática que nos ajuda a recolher, organizar e interpretar dados para tirar conclusões e fazer previsões.

➤ População e amostra. Censo e sondagem

Na vida de todos os dias, cada vez é mais reconhecida a importância da estatística. No intuito de conhecerem melhor a população e as suas necessidades, os governos de quase todos os países, a partir do século XIX, recorrem à estatística.

O INE, Instituto Nacional de Estatística, tem a seu cargo a elaboração de estudos estatísticos, de modo a informar o Governo sobre as mais variadas características do nosso povo.

Todo o estudo de uma variável estatística incide sobre uma **população**, sendo cada indivíduo uma **unidade estatística**.

Nalguns casos observa-se a, ou as, variáveis em toda a população – faz-se um **recenseamento** ou **censo**.

Noutras situações escolhe-se criteriosamente uma **amostra**, ou seja uma parte da população, e estuda-se essa amostra – faz-se uma **sondagem**. A validade da sondagem depende da escolha da amostra.

Por exemplo:

Censo: fazer um estudo estatístico sobre o programa de televisão favorito dos alunos de uma escola questionando todos os alunos da escola.

Sondagem: fazer um estudo estatístico sobre o programa de televisão favorito dos alunos de uma escola usando 100 dos 1500 alunos dessa escola aleatoriamente selecionados.

Em 2012, o INE realiza em São Tomé e Príncipe, o IV Recenseamento Geral da População e Habitação.

As tabelas e os gráficos são formas de resumir as informações obtidas nos mais diversos ramos de actividades. Para construir tabelas e gráficos temos, em primeiro lugar, de recolher dados.

➤ Tabelas de frequências

Em 30 jogos de futebol o guarda-redes Hélio da equipa de futebol *Atlético Futebol Clube* sofreu os seguintes golos:

0	1	2	2	3	0	1	3	2	1
1	0	3	4	1	0	2	3	0	1
2	3	2	1	0	3	2	1	4	1

Com os dados sobre o número de golos construímos uma **tabela de frequências**:

Número de golos	Contagem	Frequência absoluta	Frequência relativa
0		6	$\frac{6}{30} = 0,2 = 20\%$
1		9	$\frac{9}{30} = 0,3 = 30\%$
2		7	$\frac{7}{30} = 0,23 = 23\%$
3		6	$\frac{6}{30} = 0,2 = 20\%$
4		2	$\frac{2}{30} = 0,07 = 7\%$
TOTAL		30	1 = 100%

A **frequência absoluta** de um acontecimento é o número de vezes que ele é observado.

A **frequência relativa** de um acontecimento é o quociente entre a frequência absoluta e o número total de elementos em estudo.



Instituto Nacional de Estatística
de São Tomé e Príncipe



Como a **frequência relativa** é uma razão, pode-se exprimir por uma **fracção**, um **decimal** ou uma **percentagem**.

$$\frac{6}{30} \rightarrow 0,2 \rightarrow 20\%$$

- Em 6 jogos o Hélio não sofreu nenhum golo; dizemos que a **frequência absoluta** de jogos sem sofrer golos é 6.

- Na maioria dos 30 jogos o Hélio sofreu um golo, é o dado mais frequente.

- O segundo dado mais frequente é 2 golos.

Em 23% dos jogos o Hélio sofreu 2 golos. 23% é a **frequência relativa em percentagem** do número de jogos em que sofreram 2 golos.

Exemplo 1

Considera a seguinte tabela que representa o número de pacotes de sumo vendidos na loja do Sr. Tomás durante uma semana:

Sabor	Nº de pacotes vendidos
Cenoura	36
Manga	84
Limão	28
Ananás	69
Laranja	82

Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas em percentagem.

Resolução

Sabor	Frequência absoluta	Frequência relativa em %
Manga	84	$\frac{84}{299} = 0,28(0) = 28\%$
Ananás	69	$\frac{69}{299} = 0,23(0) = 23\%$
Laranja	82	$\frac{82}{299} = 0,27(4) = 27\%$
Limão	28	$\frac{28}{299} = 0,09(3) = 9\%$
Cenoura	36	$\frac{36}{299} = 0,12(0) = 12\%$
TOTAL	299	=0,99 = 99%

Neste caso, as frequências relativas traduzem-se em dízimas infinitas periódicas. Procedeu-se ao arredondamento correctamente, mas verificou-se que a soma das frequências relativas em decimal não era 1 e em percentagem não era 100%.

Observando a tabela verifica-se que se comete um erro menor se arredondarmos para $0,28 = 28\%$ a frequência relativa dos sumos de laranja.

Assim, a tabela correcta será a seguinte:

Actividades de aplicação

1. No final do 2º período o director de uma turma da 7ª classe fez um estudo estatístico sobre o número de faltas injustificadas dadas pelos seus 50 alunos e obteve os seguintes resultados:

1	4	2	0	3	3	0	0	2	1
5	2	1	2	1	2	3	0	6	2
0	0	0	1	1	2	1	3	1	1
2	1	0	5	0	4	0	2	1	0
0	1	3	4	0	1	3	3	2	0

Passa para o teu caderno a seguinte tabela de frequências e completa-a.

Nº de faltas	Contagem	Frequência absoluta	Frequência relativa
0		14	$\frac{14}{50} = 0,28 = 28\%$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
Total		50	

2. Perguntou-se a um grupo de crianças qual era a sua fruta preferida. As respostas foram as seguintes:

Fruta	Frequência absoluta
Jaca	7
Manga	10
Cajamanga	5
Banana	4
Mamão	3
Ananás	9
Carambola	7

2.1. Quantas crianças foram inquiridas?

2.2. Qual é a fruta preferida da maioria das crianças?

2.3. Qual é a percentagem de crianças que prefere ananás?

2.4. Uma das frutas é preferida por 11% das crianças. Qual é?

2.5. Qual é a percentagem que corresponde à fruta que menos crianças preferem?

3. Os dados mostram o tempo gasto, em minutos, pelos 28 alunos de uma turma, a construírem uma tabela de frequências.

10	8	11	9	10	9	11	12	10	8
9	8	12	12	10	8	8	8	10	9
12	11	12	12	10	8	9	8		

Com os dados constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas.

Sabor	Frequência absoluta	Frequência relativa em %
Manga	84	28%
Ananás	69	23%
Laranja	82	28%
Limão	28	9%
Cenoura	36	12%
TOTAL	299	100%

A soma das frequências relativas, quando estão representadas em percentagem, deve ser 100%

➤ Gráficos de barras. Gráficos circulares

O professor de Matemática de uma turma da 7ª classe registou numa tabela de frequências as idades dos alunos.

Idades	Frequência absoluta	Frequência relativa
12	5	$0,11 = 11\%$
13	28	$0,58 = 58\%$
14	12	$0,25 = 25\%$
15	3	$0,06 = 6\%$
Total	48	$1,00 = 100\%$

Com os dados constantes na tabela elaborou os **gráficos de barras** ao lado.

Regras para construir um gráfico de barras:

- as barras devem ter todas a mesma largura;
- o comprimento das barras deve ser proporcional à frequência (absoluta ou relativa);
- as barras devem estar separadas por espaços iguais;
- os gráficos de barras devem ter sempre um título e, se necessário uma legenda.

Construiu um **pictograma**.

Um **pictograma** é um gráfico de barras em que cada uma das barras é formada pela sobreposição de elementos simbólicos da variável. O símbolo ou símbolos utilizados devem ser do mesmo tamanho e separados por espaços iguais.

Pictograma

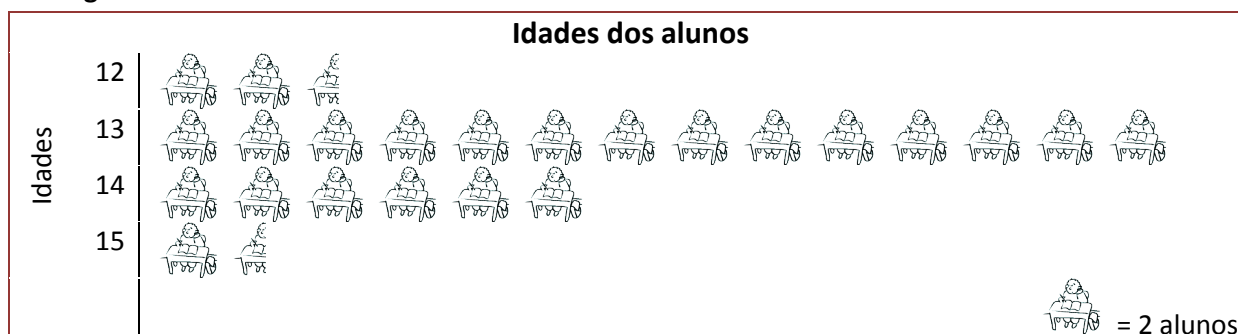


Gráfico de barras – usando a frequência absoluta

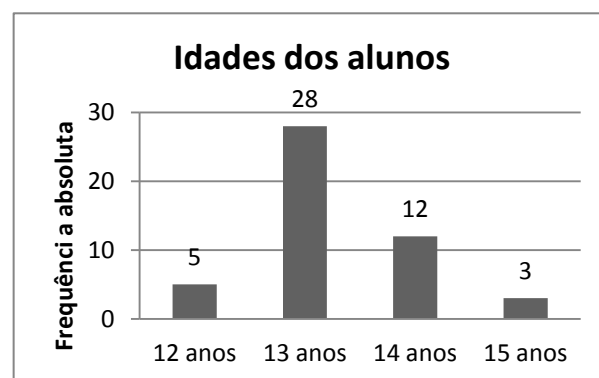
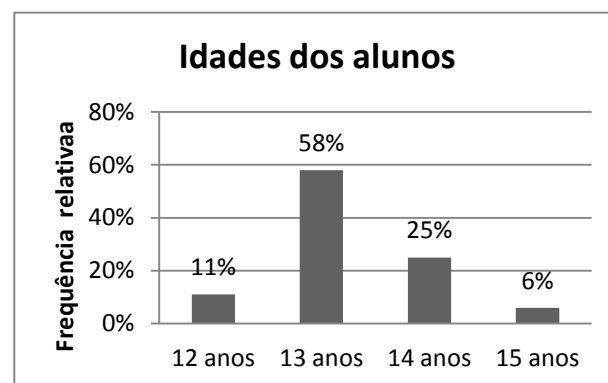
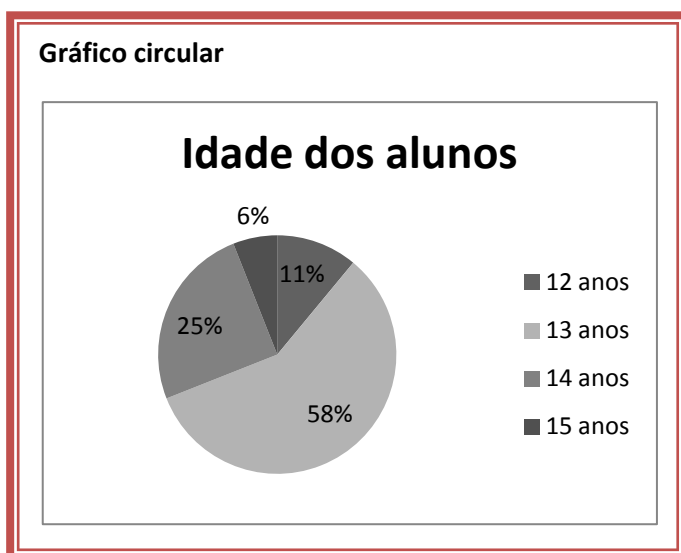


Gráfico de barras – usando a frequência relativa



Construiu ainda um **gráfico circular**:



Um **gráfico circular** é representado através de um círculo dividido em sectores. Na sua construção deve ter-se em atenção o seguinte:

- o gráfico deve ter um título;
- a amplitude de cada sector é proporcional à frequência que representa;
- os sectores devem ter cores diferentes;
- devem ser colocadas legendas relativas aos sectores de modo a ser possível interpretar o gráfico.

Exemplo 2

Pretende-se estudar o efeito de um novo medicamento que melhore as condições de vida das pessoas que têm *células falciformes*.

Para tal, 25 doentes foram submetidas a um tratamento, verificando-se melhoras decorridos os seguintes dias:

2	1	2	3	4	5	2	3	2	3	2	5	1
3	4	3	5	5	3	1	6	4	4	6	10	

2.1. Dispõe os dados numa tabela de frequências.

2.2. Apresenta os dados através de gráficos de barras e circular

Resolução

Tabela de frequências

Nº de dias	Frequência absoluta	Frequência relativa	Amplitude do sector circular
1	3	$0,12 = 12\%$	$0,12 \times 360^\circ = 43,2^\circ \approx 43^\circ$
2	5	$0,20 = 20\%$	$0,20 \times 360^\circ = 72^\circ$
3	6	$0,24 = 24\%$	$0,24 \times 360^\circ = 86,4^\circ \approx 86^\circ$
4	4	$0,16 = 16\%$	$0,16 \times 360^\circ = 57,6^\circ \approx 58^\circ$
5	4	$0,16 = 16\%$	$0,16 \times 360^\circ = 57,6^\circ \approx 58^\circ$
6	2	$0,08 = 8\%$	$0,08 \times 360^\circ = 28,8^\circ \approx 29^\circ$
10	1	$0,04 = 4\%$	$0,04 \times 360^\circ = 14,4^\circ \approx 14^\circ$
Total	25	$1,00 = 100\%$	$= 360^\circ$

Gráfico de barras

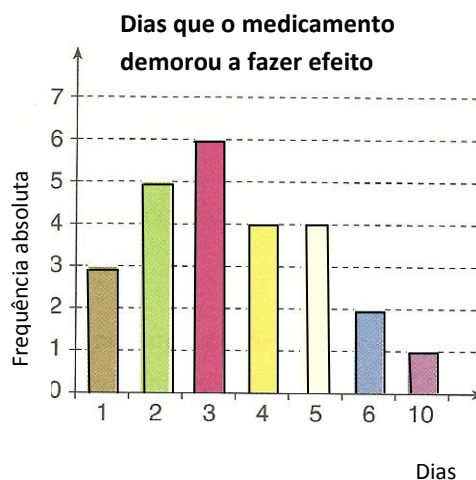
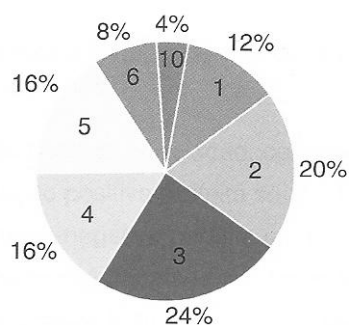


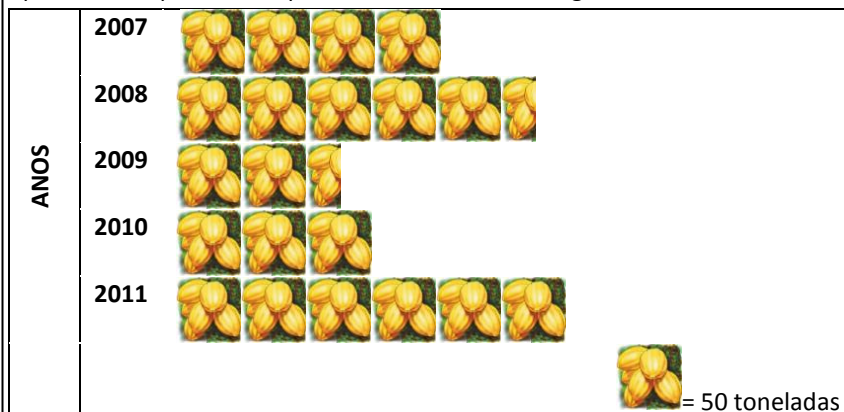
Gráfico circular

Dias que o medicamento demorou a fazer efeito



Actividades de aplicação:

4. O seguinte pictograma indica a quantidade de cacau produzido anualmente por uma cooperativa de produtores de cacau biológico.



Nota: 1 tonelada = 1 000 quilos

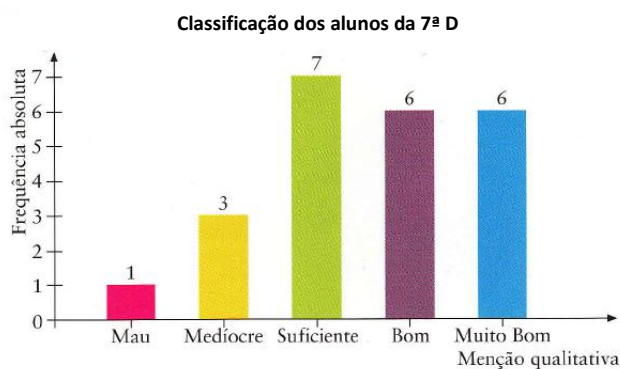
4.1. Em que ano é que a cooperativa teve maior produção?

4.2. Qual foi a produção do ano de 2010?

4.3. Qual foi o ano em que a cooperativa produziu 275 toneladas de cacau?

4.4. Qual foi a quantidade de cacau produzido de 2007 a 2011?

5. Considera o seguinte gráfico.



5.1. Quantos alunos tiraram “Bom”?

5.2. Qual foi a menor classificação? Quantos alunos tiveram essa classificação?

5.3. Qual foi a nota mais frequente?

5.4. Considerando que as notas são positivas a partir de “Suficiente”, quantos alunos tiveram positiva? Qual foi a percentagem de positivas?

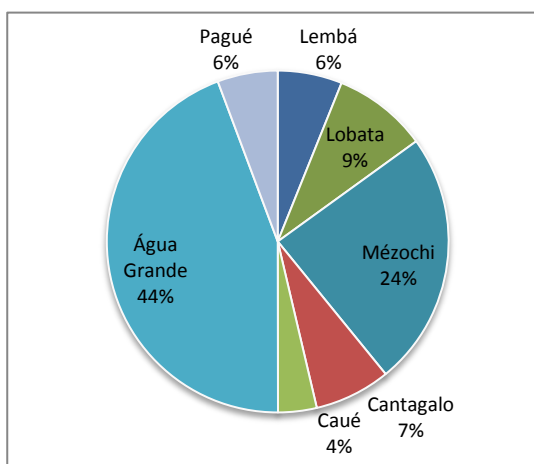
7. O Danilo e a Vera resolveram organizar um grupo de danças tradicionais são-tomenses na sua localidade. Perguntaram a 30 jovens qual era a sua dança preferida e obtiveram as seguintes respostas:

Puíta	Rumba	Ússua	Tafua
12	4	8	6

7.1. Organiza os dados numa tabela de frequências absolutas e relativas.

7.2. Constrói um gráfico de barras para ilustrar os dados da tabela.

6. O gráfico seguinte mostra a distribuição por distritos dos 13 979 alunos matriculados no ensino secundário no início do ano lectivo de 2011/12, em São Tomé e Príncipe.



Fonte: Projecto Escola +

6.1. Qual era o distrito onde havia mais alunos matriculados?

6.2. Quais eram os distritos que tinham o mesmo número de alunos?

6.3. Qual era a percentagem total de alunos nos distritos da zona sul de São Tomé?

6.4. Quantos alunos frequentavam o ensino secundário no distrito de Pagué?

6.5. A partir do gráfico elabora uma tabela de frequências absolutas.

8. Na escola da prima do Denilson, que vive em Espanha, fez-se um estudo acerca da cor dos olhos dos 1000 alunos da escola.

8.1. Quantos alunos têm olhos castanhos?

8.2. Qual é a percentagem relativa a “Outros”?

8.3. Constrói uma tabela de frequências absolutas e relativas, em percentagem, referente aos dados apresentados.



➤ Histogramas

O professor de Educação Física de uma turma da 7ª classe fez um estudo estatístico sobre a altura dos alunos da turma. As alturas dos alunos, em cm, eram as seguintes:

145	162	151	155	156	161	154	159	159	153	153	163	152
167	157	171	164	164	167	153	172	160	158	154	170	



Organizou os dados numa tabela de frequências.

Altura	Contagem	Frequência absoluta
[145, 150[		1
[150, 155[		7
[155, 160[		6
[160, 165[		6
[165, 170[		2
[170, 175[		3
Total		25

A partir da tabela de frequência organizou o gráfico seguinte que se designa por **histograma**:

Dados agrupados em classes

Nesta tabela os dados encontram-se agrupados em classes ou categorias, porque há muitos dados diferentes.

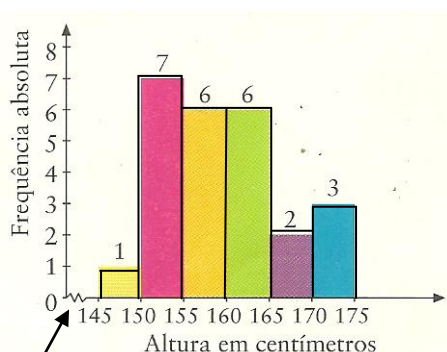
[145, 150[é uma categoria ou classe.

Por vezes também se escreve 145 – 150.

Pertencem a esta categoria: 145, 146, 147, 148 e 149 ou qualquer outro entre estes. O 150 já pertence à classe seguinte.

Para definirmos as classes consideramos o valor máximo (neste caso 174) e o valor mínimo (neste caso 149) e, normalmente, usamos múltiplos de 5 para os extremos.

Altura dos alunos da turma



Para respeitar a escala e não ter de prolongar o eixo coloca-se este desenho no eixo.

Um **histograma** é um gráfico formado por um conjunto de rectângulos adjacentes, tendo cada um deles por base um intervalo de classe e por altura a respectiva frequência.

Na construção de um histograma é necessário considerar o seguinte:

- o gráfico deve ter um título;
- os dados devem ser agrupados em classes;
- no eixo horizontal representam-se os intervalos das classes;
- no eixo vertical representam-se as frequências absolutas ou relativas;
- as barras são desenhadas verticalmente sem espaços entre elas.

Exemplo 3

Perguntou-se a 43 estudantes quanto tempo, em segundos, gastavam a lavar os dentes. As respostas foram as seguintes:

35	27	19	9	15	22	35	18	17	29	31	42	38	28	16	29	46	15	17
35	42	8	16	22	25	31	40	42	19	48	21	17	18	25	45	39	24	15
22	35	41	39															

3.1. Elabora uma tabela de frequências absolutas e relativas.

3.2. Com os dados constrói um histograma.

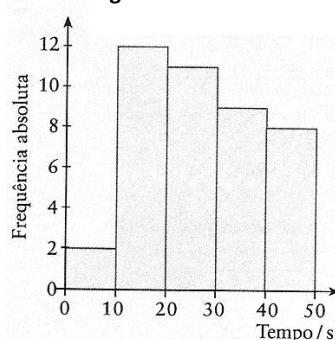
Resolução

3.1. Como são muitos dados (42) vamos agrupá-los em classes em que os extremos são múltiplos de 10.

Classes	Contagem	Frequência Absoluta	Frequência relativa
[0, 10[		2	0,05
[10, 20[		12	0,29
[20, 30[		11	0,26
[30, 40[		9	0,21
[40, 50[		8	0,19
Total		42	1,00

3.2. Histograma

Distribuição dos tempos gastos a lavar os dentes



Actividades de aplicação

9. O gráfico representa os registos dos tempos conseguidos pelos alunos de uma escola numa corrida de corta – mato.



9.1. Quantos jovens participaram na corrida?

9.2. Quantos jovens demoraram entre 25 a 30 minutos a terminar a corrida?

9.3. Qual foi a percentagem de jovens que demorou mais de 30 minutos para terminar a corrida?

9.4. Quantos jovens demoraram pelo menos 20 minutos para terminar a corrida?

11. Um grupo de jovens participou numa prova de atletismo para seleccionar atletas para integrarem a Federação de Atletismo. Na corrida de 100 m obtiveram-se os seguintes tempos, em segundos:

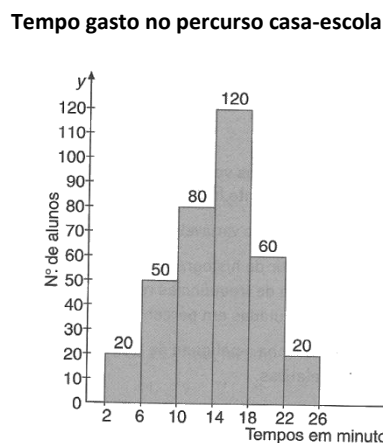
15,5	16,2	15,3	14,0	14,5	17,2	15,1	12,0
13,6	14,2	15,5	13,1	13,0	12,7	12,8	12,2
12,9	13,2	14,1	13,5	12,5	11,6	13,2	12,0

11.1. Agrupa os dados numa tabela de frequências considerando seis classes.

11.2. Constrói um histograma relativo aos dados.

11.3. Dá exemplos de outras situações em que o gráfico mais adequado para apresentar os dados seja um histograma.

10. Os tempos, em minutos, gastos por 350 alunos no percurso casa-escola foram registados e elaborou-se o seguinte histograma:



10.1. A partir do histograma elabora uma tabela de frequências absolutas e relativas.

10.2. Quantos alunos demoram pelo menos 22 minutos no percurso?

10.3. Qual é a percentagem de alunos que demora mais tempo no percurso casa-escola?

12. As notas do 1º período da disciplina de Educação Visual e Oficinal dos alunos da turma 7ª F foram registadas na seguinte tabela:

10	8	12	12	13	15	13	10
9	9	10	15	16	12	17	11
14	13	14	12	13	9	9	8
10	10	15	16	12	13	14	14
9	8	9	12	11	11	13	13

12.1. Agrupa os dados numa tabela de frequências absolutas e relativas, considerando cinco classes.

12.2. Constrói um histograma relativo aos dados.

4.2. Medidas de tendência central

➤ Média

Perguntou-se a cinco meninos quanto dinheiro tinham no bolso. Os dados, em milhares de dobras são os seguintes:

30	0	5	20	20
----	---	---	----	----

Se os meninos quisessem repartir igualmente o total do dinheiro que tinham entre si, deveriam calcular a **média**.

$$\text{Média} = \frac{30+0+5+20+20}{5} = 15$$

Em **média** cada menino ficaria com 15 000 dobras.

Chama-se **média** de um conjunto de dados numéricos ao número que se obtém dividindo a soma do valor de todos os dados pelo número total de dados.

A média representa-se por $\bar{x}$.

➤ Moda

No exemplo anterior o dado que aparece mais vezes é 20. Diz-se que a **moda** é 20 000 dobras, pois é o dado que ocorre com mais frequência.

Chama-se **moda** de um conjunto de dados estatísticos ao dado que ocorre com maior frequência

Nota:

Nem sempre um conjunto de dados estatísticos tem moda. Também pode haver conjuntos de dados com mais de uma moda.

Exemplo:

Dados	Moda
Azul, azul, verde, amarelo	Azul
3, 1, 4, 4, 5, 4	4
2, 2, 3, 3, 4, 4,	Amodal (não tem moda)
2, 2, 3, 3, 4, 5	Bimodal (tem duas modas): 2 e 3

➤ Mediana

Voltando ao dinheiro que os meninos têm no bolso vamos escrever os dados por ordem crescente e ver qual é o **valor central**:

0, 5, 20, 20, 30

↑

Valor central

O **valor central** é 20. Dizemos que a **mediana** é 20 e escreve-se:

$$\tilde{x} = 20 \text{ 000 dobras}$$

E se tivermos um **número par** de dados, como se determina a mediana?

0, 5, 10, 20, 20, 30

↑

Valores centrais

Neste caso há **dois valores centrais**. Assim, a mediana é a média dos valores centrais.

$$\tilde{x} = \frac{10+20}{2} = 15$$

Logo, a mediana é 15 000 dobras.

Mediana

Depois de escritos por ordem crescente ou decrescente e se o número de dados é:

- ímpar, a mediana é igual ao valor central;
- par, a mediana é igual à média dos dois valores centrais.

Nota

Como podes observar 50% dos dados são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais.

A **média**, a **moda** e a **mediana** são designadas por **medidas de tendência central**. Depois de determinadas para cada situação real, deve-se analisar e decidir qual ou quais são mais adequadas para sintetizar os dados obtidos num estudo estatístico.

Actividades de aplicação

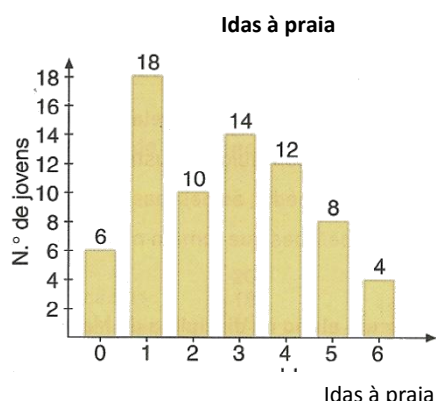


10. O Vanilson é um jogador avançado do *Clube Ossobô*. Nas 10 primeiras jornadas marcou os seguintes golos:

2	0	1	2	3
1	0	3	1	3

10.1. Indica a média, a moda e a mediana dos golos marcados pelo Vanilson.

12. Fez-se um inquérito a um grupo de jovens sobre as idas à praia no mês de Dezembro e os resultados estão sintetizados no gráfico seguinte:



12.1. Quantos jovens foram inquiridos?

12.2. Quantas vezes, em média, foi à praia cada um dos jovens?

12.3. Indica a moda e a mediana desta distribuição.

11. Determina a média, a moda e a mediana dos seguintes conjuntos de dados:

11.1. 5kg; 5kg; 0kg; 5kg; 8kg; 4kg; 7kg; 7kg; 8kg; 10kg

11.2. 4dl; 6dl; 0dl; 5dl; 4dl; 0dl; 4dl; 8dl

11.3. 1,6m; 2,4m; 1,9m; 1,6m; 1,7m; 0,8m; 2m

13. Numa oficina de reparação de motos, em 6 dias foi reparado o seguinte número de motos:



Segunda	Terça	Quarta	Quinta	sexta	Sábado
10	8	6	8	7	11

13.1. Determina a média a moda e a mediana.

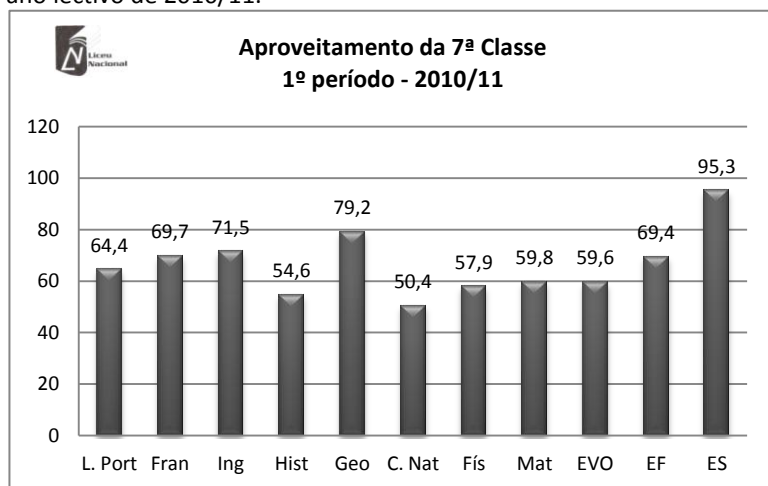
13.2. Modifica o dado de quarta-feira de modo que o conjunto de dados passe a ser bimodal.

14. A Manuela pretende obter uma média de 17 em três testes.

14.1. Se apenas obtiver 4 no primeiro teste, será que ainda é possível atingir aquele objectivo? Qual é a média máxima para os três testes? Apresenta o valor da média com uma casa decimal.

14.2. Se nos dois primeiros testes tirou 16 e 15,6, qual deverá ser a nota do 3º teste?

15. O gráfico mostra a percentagem de positivas obtidas pelos 340 alunos da 7ª classe do Liceu Nacional no 1º período do ano lectivo de 2010/11.



Fonte: Liceu Nacional

15.1. Quantos alunos tiveram positiva a Matemática? E a História?

15.2. Qual foi a disciplina onde menos alunos tiveram positiva?

15.3. Quantos alunos tiveram negativa nas disciplinas de Língua Portuguesa e Física.

15.4. Quais são as disciplinas que tiveram uma percentagem de positivas abaixo de 60%?

15.5. Com os dados do gráfico elabora uma tabela de frequências absolutas. Apresenta os valores arredondados às unidades.

15.6. Calcula a percentagem média de positivas.

15.7. Indica a moda e a mediana desta distribuição.

Unidade 5 – Do espaço ao plano: sólidos, triângulos e quadriláteros

5.1. Sólidos geométricos - Revisão

Olhando à nossa volta podemos observar formas geométricas nossas conhecidas.



Jalé Ecolodge- Praia da Jalé



Roça de Monte Café

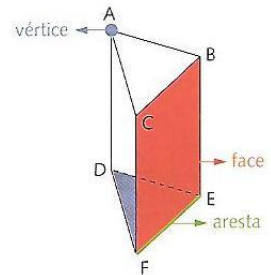


Antiga locomotiva - Príncipe



Bola de futebol

Nos sólidos geométricos existem elementos que devemos saber identificar:

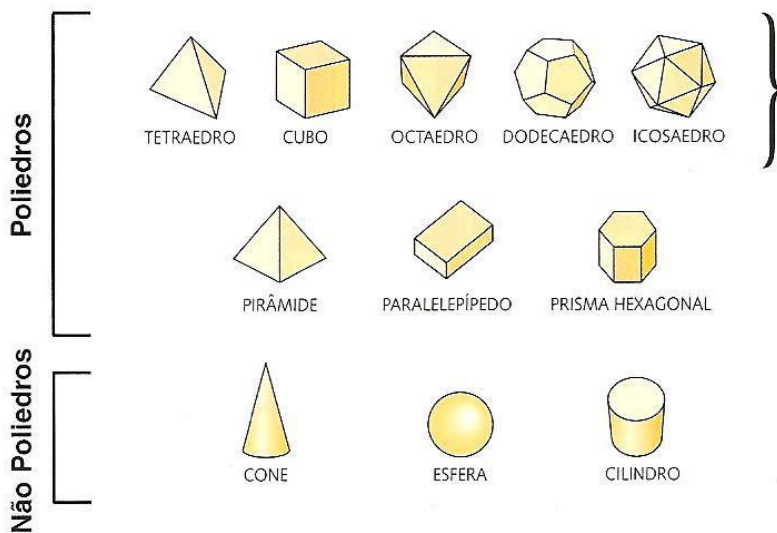


Faces: figuras planas que limitam o sólido.

Arestas: segmentos de recta que limitam as faces.

Vértices: pontos de encontro das arestas.

Podemos dividir os sólidos geométricos em dois grupos:



Sólidos Regulares: as faces são polígonos regulares e em cada vértice concorrem o mesmo número de arestas

Recorda:

Polígono Regular é aquele que tem os lados e os ângulos todos iguais.

Um **poliedro** é um sólido geométrico limitado apenas por superfícies planas - faces.

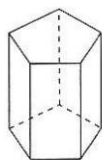
Um **não poliedro** é um sólido geométrico limitado por, pelo menos, uma superfície não plana.

De entre os poliedros, existem dois grandes grupos:

- os **prismas**:

As bases são iguais e paralelas.

As arestas laterais são paralelas.

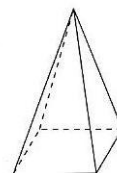


Prisma pentagonal

- as **pirâmides**:

As arestas laterais concorrem num ponto – vértice.

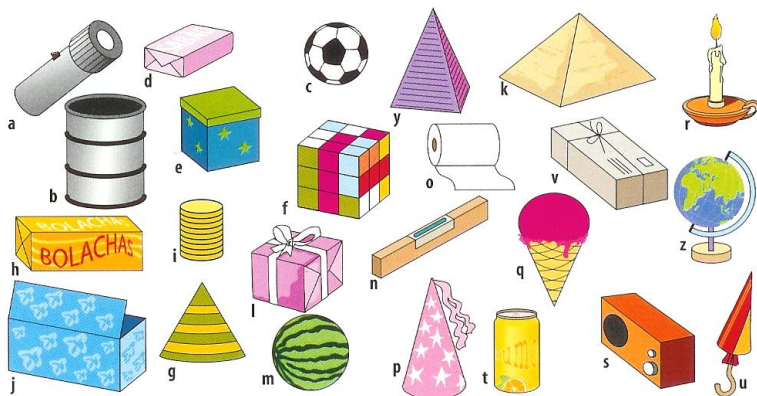
As faces laterais são triângulos.



Pirâmide quadrangular

Actividades de aplicação:

1. Na figura estão desenhados alguns objectos de uso de corrente. A cada um deles pode associar-se um sólido geométrico.



1.1. Indica os objectos que correspondem a poliedros.

1.2. Copia e completa:

Cubo: f, _____

Cilindro: t, _____

Paralelepípedo: h.

2. Observa a pirâmide da figura e indica:

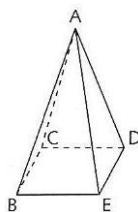
2.1. Os vértices.

2.2. As arestas da base.

2.3. As faces laterais.

2.4. As arestas laterais.

2.5. A base.



3. Das seguintes afirmações indica as que são verdadeiras e as que são falsas:

3.1. Qualquer sólido geométrico é um poliedro.

3.2. Existem poliedros com três faces.

3.3. Qualquer poliedro ou é pirâmide ou é prisma.

3.4. Qualquer poliedro tem um número par de faces.

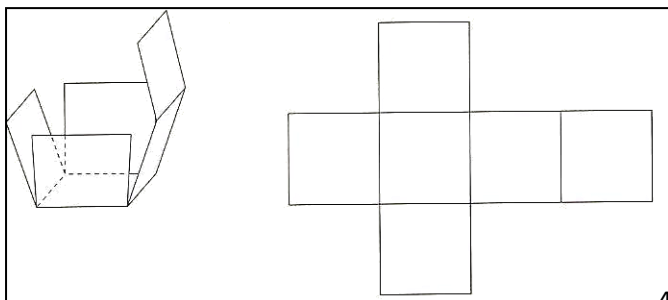
➤ **Planificações**

Como já atrás foi referido, as faces dos poliedros são figuras planas.

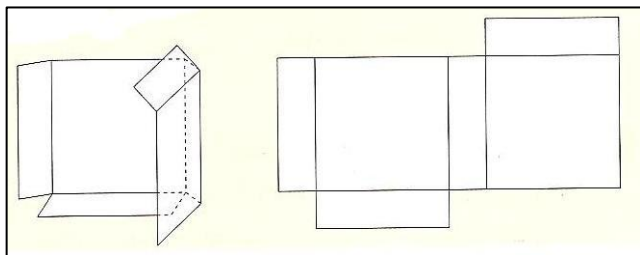
Especificamente, as faces laterais do prisma são sempre paralelogramos, tal como as faces laterais das pirâmides são sempre triângulos, encontrando-se ligadas entre si e com as bases, por arestas.

Torna-se por isso, simples “desmontar” os sólidos geométricos sem separar todas as faces, ou seja, planificá-los.

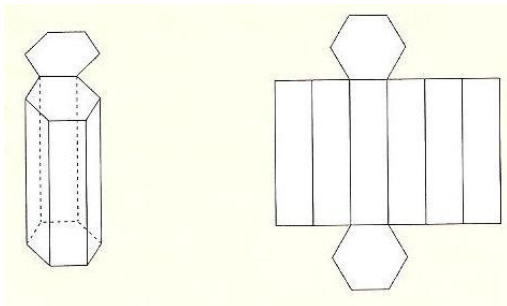
Exemplo 1: Planificação de um cubo:



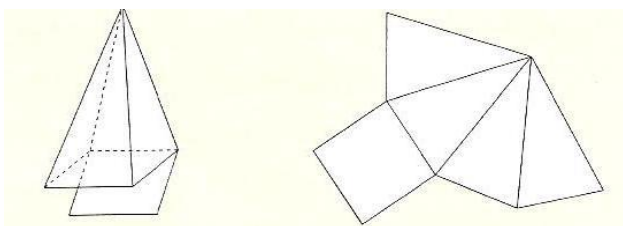
Exemplo 2: Planificação de um paralelepípedo:



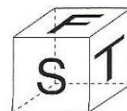
Exemplo 3: Planificação de um prisma hexagonal



Exemplo 4: Planificação de uma pirâmide quadrangular

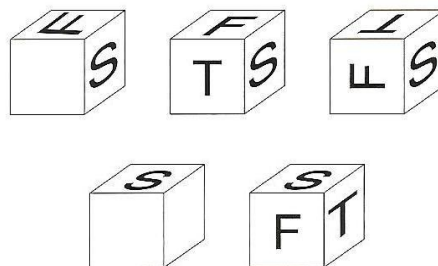


Atividades de aplicação:



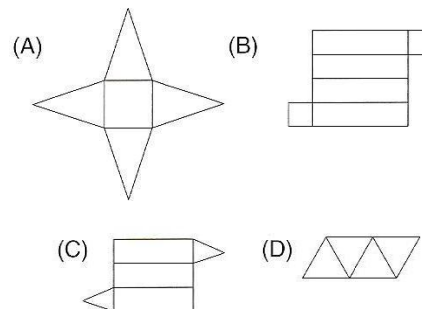
4. Este cubo tem três faces com letras e três faces em branco.

4.1. Das figuras que se seguem, indica as que podem representar este cubo em diferentes posições e as que não o podem representar.

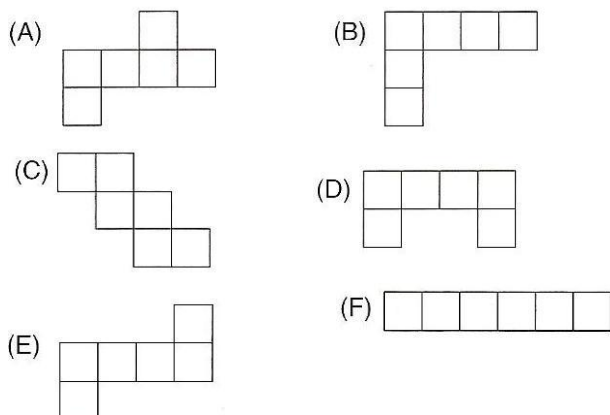


4.2. Constrói uma planificação possível do cubo inicial.

5. Indica o nome dos sólidos correspondente às planificações aqui representadas.



6. Quais das seguintes representações são planificações de um cubo?



7. A Inês quer construir uma embalagem com a forma de um prisma quadrangular de medidas 5 e 12cm.

7.1. Faz uma planificação da embalagem da Inês.

7.2. Recorta-a e constrói a embalagem.

7.3. Os seus colegas obtiveram uma embalagem igual? Porquê?

8. Considera um paralelepípedo com as seguintes dimensões: 3, 5 e 8cm.

Faz a sua planificação e constrói-o.

5.2. Posição relativa de rectas e planos

Os pontos representam-se por letras maiúsculas, as rectas por letras minúsculas ou por dois dos seus pontos. Os planos representam-se por letras gregas ou por três dos seus pontos não-colineares.

Pontos: A, B e C

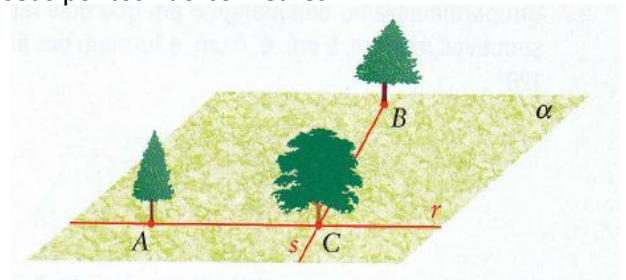
Rectas: AC ou recta r

Semi-recta: $\overrightarrow{AC}$

Segmento de recta: $[AC]$

Plano ABC ou α

$\overline{AB}$ representa o comprimento do segmento de recta $[AB]$



➤ Posição relativa de dois planos

estritamente paralelos 	coincidentes 	perpendiculares 	Oblíquos
Planos paralelos		Planos concorrentes	

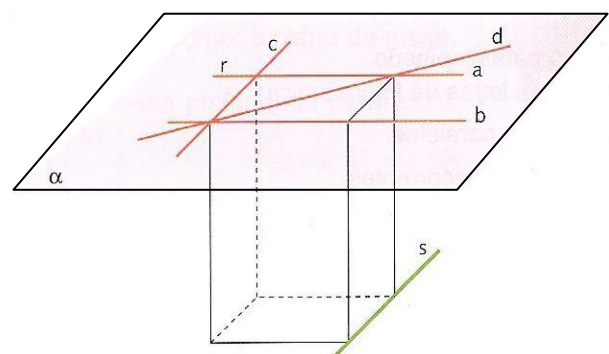
➤ Posição de uma recta relativamente a um plano

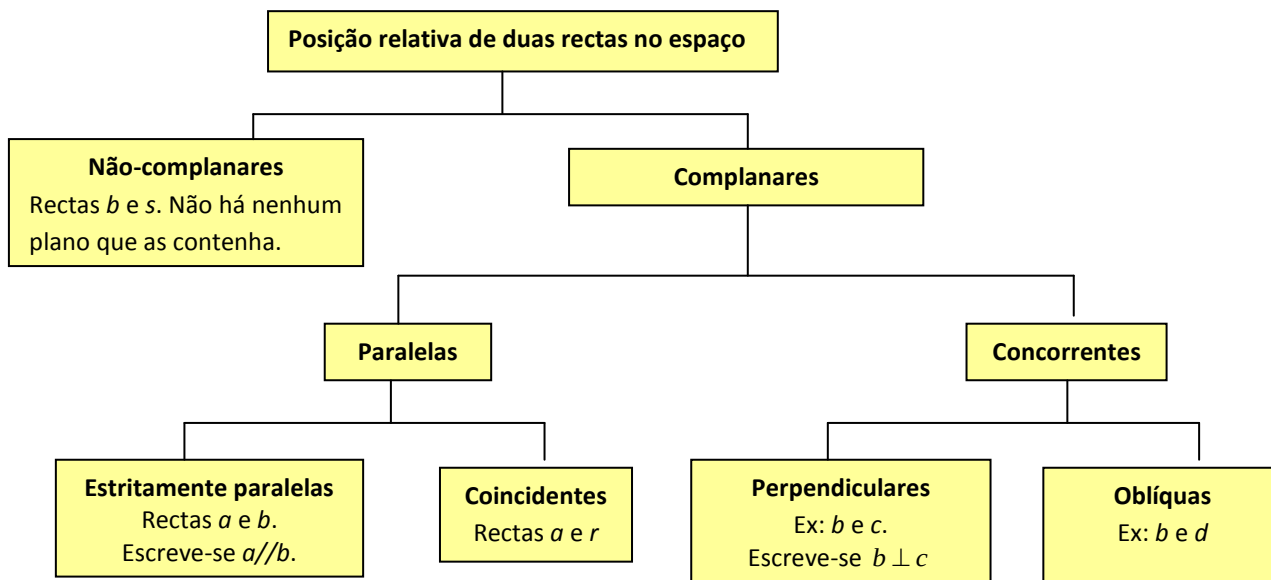
Estritamente paralela ao plano 	Contida ou aposta ao plano 	Perpendicular ao plano 	Oblíqua ao plano
Rectas paralelas ao plano		Rectas concorrentes	

➤ Posição relativa de rectas no espaço

Considere-se as rectas e os planos que contêm respectivamente as arestas e as faces deste paralelepípedo.

- As rectas a , b , c e d estão contidas no mesmo plano α . Dizem-se então rectas **complanares**
- Não existe nenhum plano que contenha as rectas b e s . Dizem-se então rectas **não complanares**.

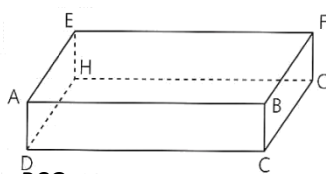




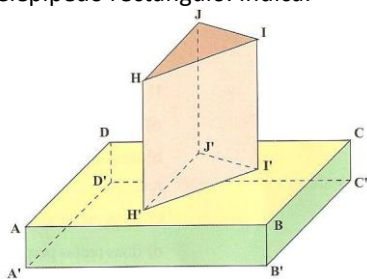
Actividades de aplicação

9. Observa o paralelepípedo. Utilizando as letras da figura indica:

- 9.1. dois planos paralelos.
- 9.2. dois planos concorrentes.
- 9.3. uma recta paralela ao plano BCG.
- 9.4. um plano perpendicular à recta EH.
- 9.5. um plano que contenha a recta BF.
- 9.6. duas rectas perpendiculares.
- 9.7. duas rectas não coplanares.



11. A figura representa um prisma triangular assente num paralelepípedo rectângulo. Indica:

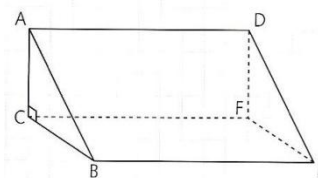


- 11.1. 5 rectas que sejam paralelas ao plano HIJ.
- 11.2. 5 rectas que sejam perpendiculares ao mesmo plano.
- 11.3. 2 planos paralelos ao plano HIJ.
- 11.4. 2 planos perpendiculares ao plano HIJ.
- 11.5. duas rectas oblíquas.
- 11.6. duas rectas perpendiculares.

10. Considera o prisma triangular.

Indica a posição relativa:

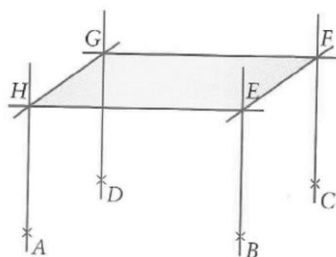
- 10.1. dos planos ABC e DEF.
- 10.2. dos planos ABC e ADE.
- 10.3. da recta BC e o plano CBF.
- 10.4. da recta BE e o plano ADF.
- 10.5. das rectas BE e AD.
- 10.6. das rectas CF e DE.



12. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (A) Se α e β são planos concorrentes, a sua intersecção pode ser um plano.
- (B) Se α e β são planos concorrentes, todas as rectas contidas em α são concorrentes com β .
- (C) Se α e β são planos paralelos, todas as rectas contidas em α são paralelas a β .
- (D) Numa pirâmide não pode haver faces contidas em planos paralelos.
- (E) Num cubo os planos que contêm duas faces consecutivas são concorrentes perpendiculares.

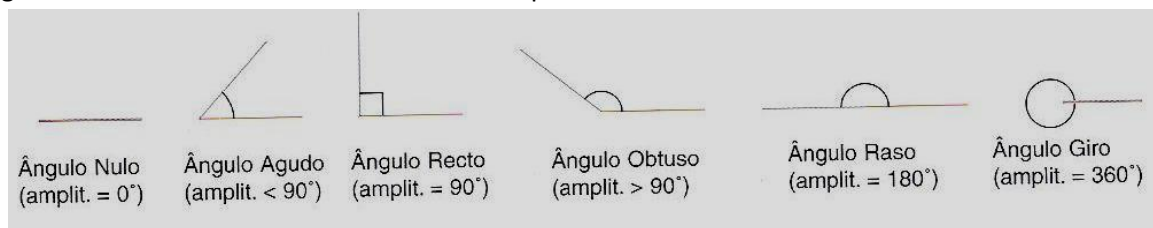
13. Indica, usando as letras da figura seguinte:



- 13.1. Um par de rectas paralelas.
- 13.2. Um par de rectas não-coplanares.
- 13.3. Uma recta e um plano perpendiculares entre si.
- 13.4. Uma recta e um plano paralelos entre si.
- 13.5. dois planos paralelos.
- 13.6. dois planos concorrentes mas não perpendiculares.

5.3. Ângulos

Os ângulos classificam-se de acordo com a sua amplitude.



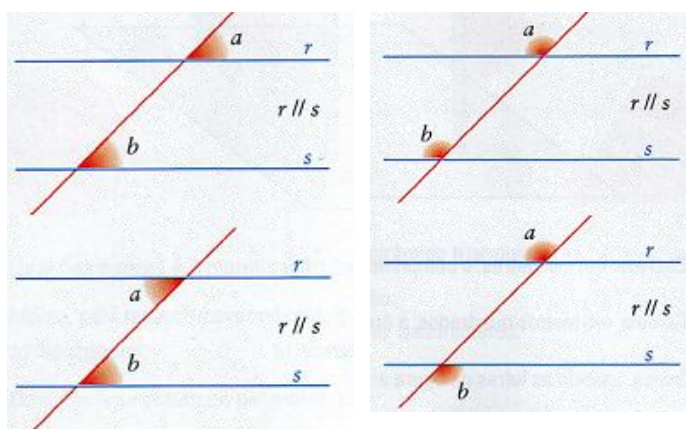
Alguns pares de ângulos têm designações específicas:

Ângulos complementares São ângulos cuja soma das amplitudes é 90°	Ângulos suplementares São ângulos cuja soma das amplitudes é 180°	Ângulos adjacentes São ângulos que têm um lado comum que os separa
---	---	--

➤ Ângulos de lados paralelos

Dois ângulos de lados paralelos e do mesmo tipo (os dois agudos, ou os dois obtusos) são sempre iguais.

Nas figuras $a = b$.



➤ Ângulos verticalmente opostos

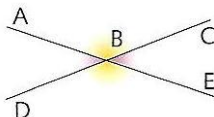
Sempre que duas rectas se cruzam formam-se dois pares de ângulos verticalmente opostos.

Ângulos verticalmente opostos são os que têm o mesmo vértice e os lados de um são o prolongamento dos lados do outro.

Na figura:

ângulo ABC = ângulo DBE;

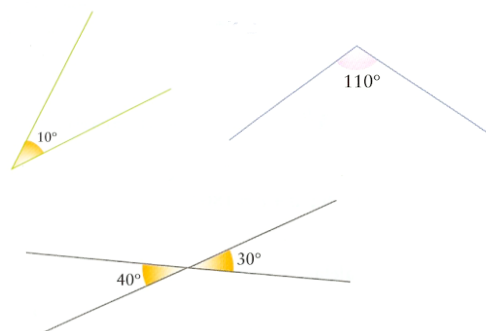
ângulo ABD = ângulo CBE



Dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude.

Actividades de aplicação

14. Está correcta a informação dada nas figuras seguintes? Porquê?

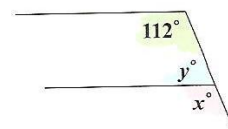


15. Um ângulo tem de amplitude 35° . Qual é a amplitude do seu:

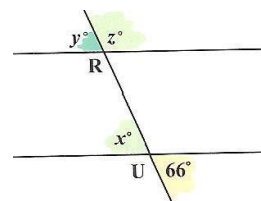
15.1. complementar. 15.2. suplementar.

16. Para cada uma das situações indica a amplitude dos ângulos representados pelas letras.

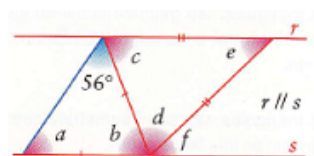
16.1.



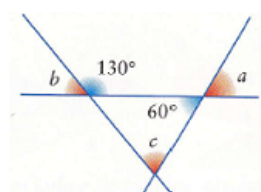
16.2.



16.3



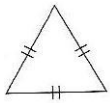
16.4.



5.4. Triângulos

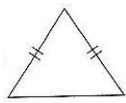
Os triângulos podem ser classificados:

Quanto aos **lados**:



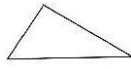
Equilátero

(3 lados iguais)



Isósceles

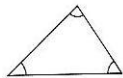
(2 lados iguais)



Escaleno

(3 lados diferentes)

Quanto aos **ângulos**:



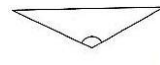
Acutângulo

(3 ângulos agudos)



Rectângulo

(1 ângulo recto)



Obtusângulo

(1 ângulo obtuso)

➤ Construção de triângulos. Desigualdade triangular

Será que é possível construir um triângulo, quaisquer que sejam os comprimentos dos seus lados?

Recorda que podemos construir um triângulo, usando régua e compasso. Vamos utilizar este processo para responder à questão anterior.

Exemplo 5

Construir um triângulo cujos lados medem: 4, 3, e 2cm.

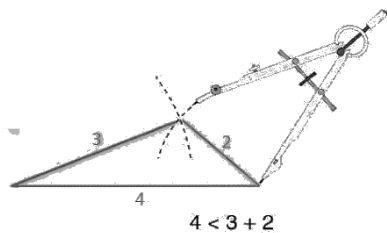
Resolução

Traça-se um segmento de recta com 4cm.

Coloca-se a ponta do compasso num extremo do segmento e com a abertura de 3cm, marca-se essa distância.

Procede-se da mesma forma no outro extremo do segmento, abrindo o compasso 2cm.

É possível construir o triângulo.



Exemplo 6

Construir um triângulo cujos lados medem: 4, 3, e 1cm.

Resolução

Não se obtém um triângulo.

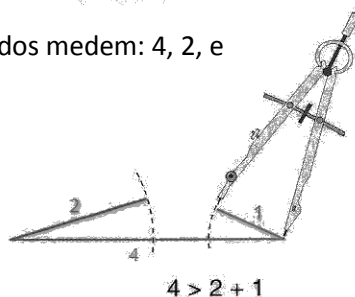


Exemplo 7

Construir um triângulo cujos lados medem: 4, 2, e 1cm.

Resolução

Não é possível construir o triângulo.



Destes exemplos pode-se tirar a seguinte conclusão conhecida por **desigualdade triangular**.

Num triângulo, o comprimento de qualquer um dos lados é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois.

Actividades propostas:

17. Indica três números:

17.1. que possam ser as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo.

17.2. que não sirvam para as medidas dos lados de um triângulo.

18. Diz, justificando, se é possível construir um triângulo cujos lados meçam:

18.1. 6cm, 10cm, 8cm

18.2. 4,2cm ; 2,8cm ; 7cm

18.3. 5,3dm ; 20cm ; 12cm

18.4. 60mm ; 1dm ; 0,8m

19. Num triângulo, dois dos lados medem 10cm e 4cm. Então:

19.1. O lado que mede 10cm tem de ser maior o maior dos três?

19.2. O lado que mede 4cm tem de ser o menor dos três?

19.3. Entre que valores pode variar o comprimento do terceiro lado?

20. Utilizando uma régua e um compasso constrói os triângulos cujos lados tenham as medidas indicadas:

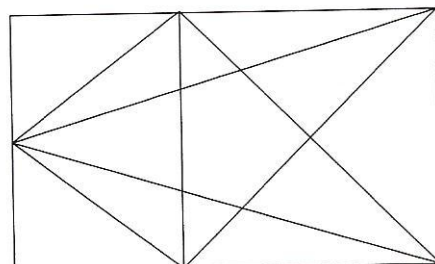
20.1. 5cm ; 4cm ; 3cm

20.2. 10cm ; 7cm ; 4cm

20.3. 8cm ; 5cm ; 5cm

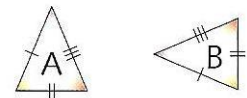
20.4. 7cm ; 7cm ; 7cm

21. Descobre quantos triângulos há neste desenho.



➤ Critérios de igualdade de triângulos

O triângulo **A** é igual ao triângulo **B** se os três lados e os três ângulos de **A** são iguais aos três lados e aos três ângulos de **B**.



Mas para se concluir que dois triângulos são geometricamente iguais não é necessário conhecer todas as medidas dos seus lados e dos seus ângulos, apenas são necessárias três medidas:

- os três lados (*l . l . l*);
- dois lados e o ângulo por ele formado (*l . a . l*);
- um lado e os ângulos adjacentes a esse lado (*a . l . a*);

Critérios de igualdade de triângulos

 Dois triângulos são iguais quando têm os três lados iguais. <i>l . l . l</i>	 Dois triângulos são iguais quando têm um ângulo igual e os lados que o formam iguais. <i>l . a . l</i>	 Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual e os ângulos adjacentes a esse lado iguais. <i>a . l . a</i>
---	---	---

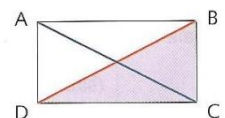
Actividades de aplicação

22. Diz justificando, se os seguintes pares de triângulos são geometricamente iguais.

- 22.1.**
- 22.2.**
- 22.3.**
- 22.4.**

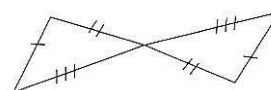
23. Considera a seguinte figura:

As diagonais dos rectângulos são iguais?
(utiliza os critérios de igualdade de triângulos)

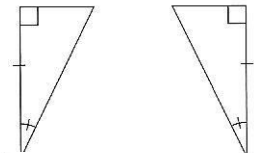


24. Verifica para cada alínea, se os triângulos são iguais e justifica a resposta:

24.1.



24.2.



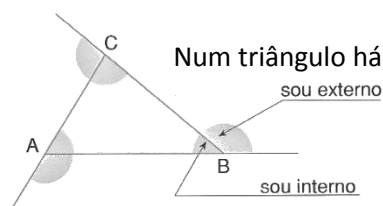
24.3.



24.4.

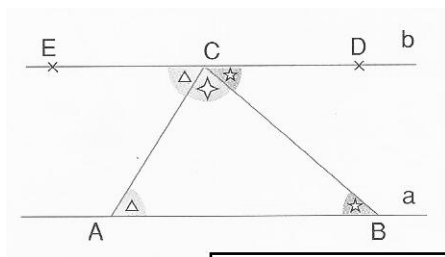


➤ Ângulos num triângulo



Num triângulo há três ângulos internos e três ângulos externos.

Convencionou-se que quando se diz ângulos do triângulo se refere aos ângulos internos.

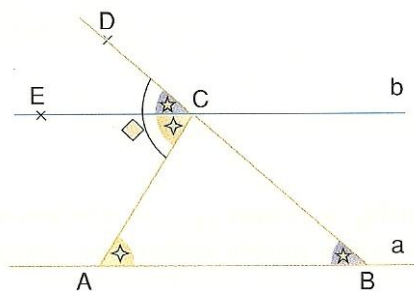


Observa:

- $\hat{CAB} = \hat{ECA} \rightarrow$ ângulos agudos de lados paralelos
- $\hat{CBA} = \hat{DCB} \rightarrow$ ângulos agudos de lados paralelos
- $\hat{ECD} = \hat{ECA} + \hat{CAB} + \hat{CBD} = \hat{CAB} + \hat{CAB} + \hat{CBA} = 180^\circ$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°

Observa a figura:



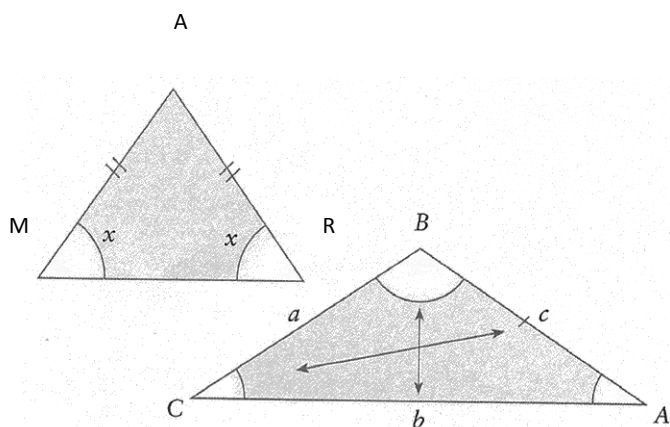
- $\hat{BAC} = \hat{ECA} \rightarrow$ ângulos agudos de lados paralelos
- $\hat{CBA} = \hat{DCE} \rightarrow$ ângulos agudos de lados paralelos
- $\hat{DCA} = \hat{DCE} + \hat{ECA}$

Então, $\hat{DCA} = \hat{CBA} + \hat{BAC}$

Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.

➤ Relação entre os lados e os ângulos de um triângulo

Observa os triângulos [MAR] e [ABC].



O triângulo [MAR] tem dois lados iguais e dois ângulos iguais.

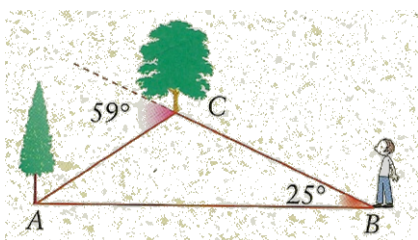
Num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais e vice-versa.

Observa o triângulo [ABC]. O ângulo B é o maior e é oposto ao maior lado b. O menor lado é c e é oposto ao ângulo C.

Num triângulo ao maior lado opõe-se o maior ângulo e ao menor lado opõe-se o menor ângulo.

Exemplo 8

O Abdulay estava no ponto B e observou duas árvores que estavam nos pontos A e C, como se mostra na figura. De acordo com os dados da figura :



8.1. Determina:

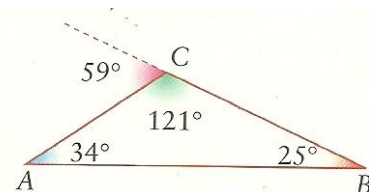
- a) $\hat{ACB}$;
- b) $\hat{CAB}$;

8.2. Diz, justificando, qual é maior:

- a) $\overline{BC}$ ou $\overline{AB}$
- b) $\overline{AC}$ ou $\overline{BC}$

Resolução 8.1.

- a) $\hat{ACB} = 180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$ Ângulos suplementares
b) $\hat{CAB} = 180^\circ - 121^\circ - 25^\circ = 34^\circ$ Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo

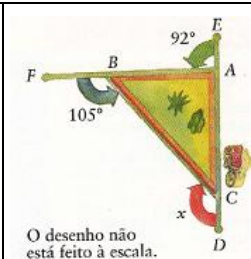


- 8.2. a) $\overline{AB}$ é maior do que $\overline{BC}$ porque o ângulo oposto a $[AB]$ é maior do que o ângulo oposto a $[BC]$.
b) $\overline{BC}$ é maior que $\overline{AC}$ porque o ângulo oposto a $[BC]$ é maior do que o ângulo oposto a $[AC]$.

Actividades de aplicação

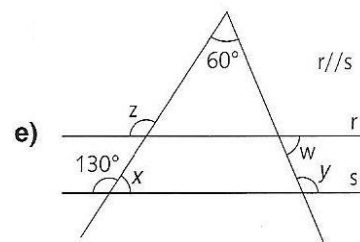
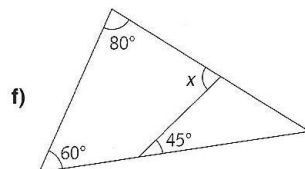
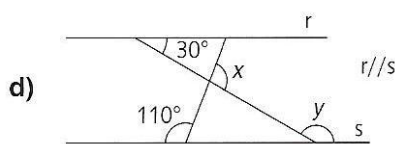
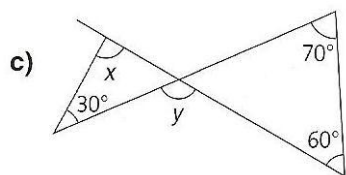
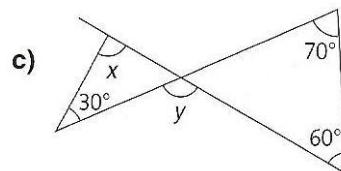
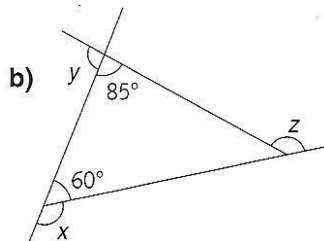
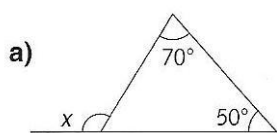


25. Na figura $[ABC]$ é um triângulo.
25.1. Determina $\hat{ACB}$.
25.2. Indica justificando qual é:
a) o maior lado do triângulo;



26. O Pedro está a dar um passeio à volta de um jardim triangular como se mostra na figura.
26.1. Determina $\hat{BCD}$.
26.2. Qual é maior? $\overline{AB}$ ou $\overline{AC}$? Porquê?

27. Indica a amplitude dos ângulos assinalados por letras.

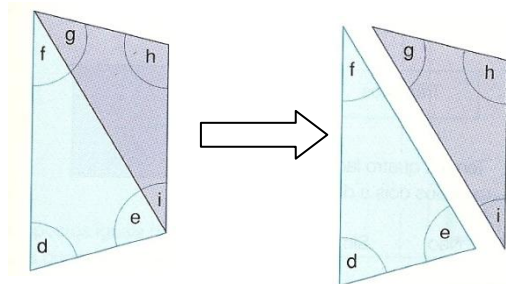


5.5. Quadriláteros

Um quadrilátero é um polígono com quatro lados.

➤ Ângulos dos quadriláteros

Desenhando uma das diagonais de um quadrilátero obtemos sempre dois triângulos.

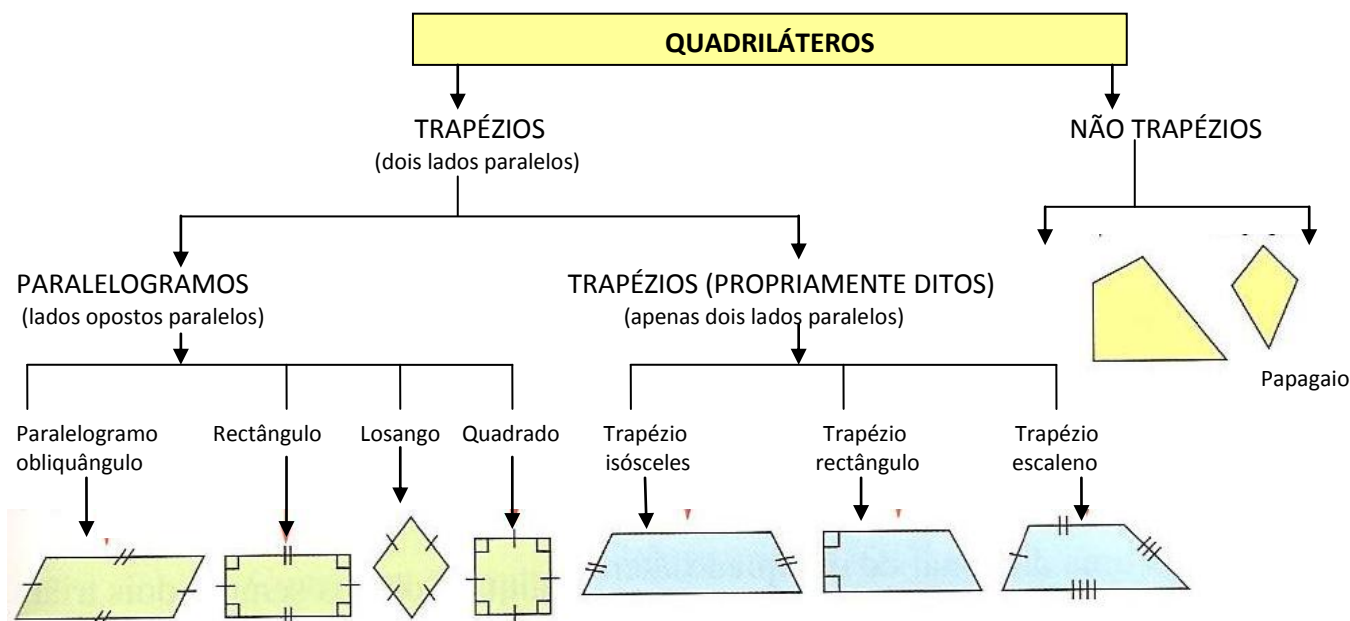


Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a duas vezes 180° , ou seja, é igual a 360° .

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

➤ Classificação dos quadriláteros

Os quadriláteros podem classificar-se:



Exemplo 9

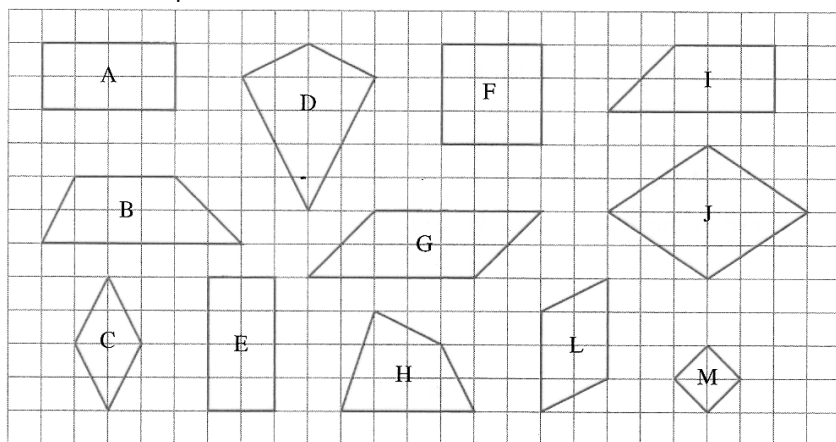
Caracteriza os paralelogramas que conheces e refere-te às respectivas diagonais.

Resolução

Paralelogramo oblíquângulo • ângulos e lados opostos geometricamente iguais; • diagonais com comprimentos diferentes.	Rectângulo • quatro ângulos rectos • lados opostos geometricamente iguais • diagonais com o mesmo comprimento	Losango • Quatro lados geometricamente iguais • ângulos opostos geometricamente iguais • diagonais perpendiculares	Quadrado • quatro ângulos rectos • Quatro lados geometricamente iguais • diagonais perpendiculares e com o mesmo comprimento

Actividades de aplicação

28. Observa os quadriláteros:



28.1. Identifica:

- os trapézios;
- os paralelogramos;
- os rectângulos;
- os losangos;
- os quadrados;

28.2. Copia e completa as frases seguintes:

a) **Trapézios** são quadriláteros que têm, pelo menos, dois lados

b) **Paralelogramos** são trapézios que têm os lados opostos

c) **Rectângulos** são paralelogramos que têm todos os ângulos

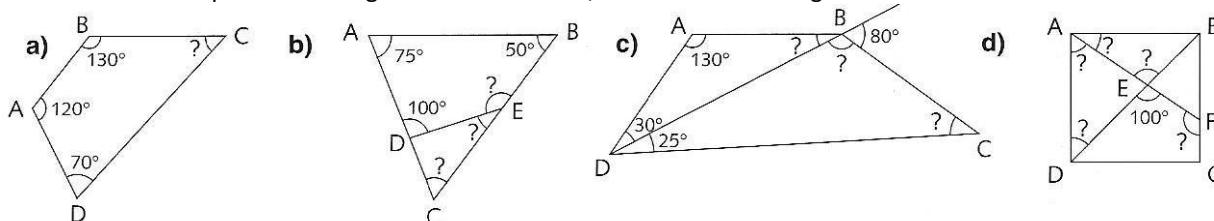
d) **Losangos** são paralelogramos que têm todos os lados geometricamente

e) **Quadrados** são paralelogramos que têm todos os lados e todos os ângulos geometricamente

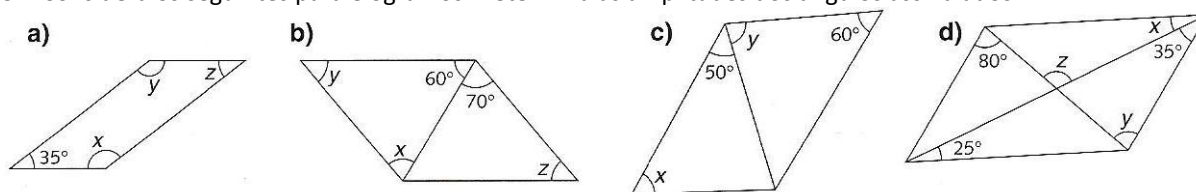
29. Em São Tomé e Príncipe podemos apreciar com frequência o seguinte padrão geométrico nos gradeamentos. Identifica e classifica os diferentes quadriláteros representados na figura seguinte.



30. Determina a amplitude dos ângulos desconhecidos, em cada uma das figuras:



31. Considera os seguintes paralelogramos. Determina as amplitudes dos ângulos assinalados



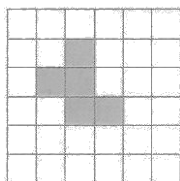
➤ Áreas de figuras planas

Recordemos algumas fórmulas que nos permitem calcular a área de figuras planas nossas conhecidas.

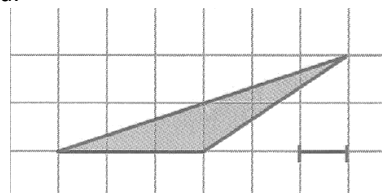
Figuras planas		Áreas
Quadrado		$A = \ell^2$
Rectângulo		$A = b \times h$
Paralelogramo		$A = b \times h$
Triângulo		$A = \frac{b \times h}{2}$
Círculo		$A = \pi r^2$

Actividades de aplicação

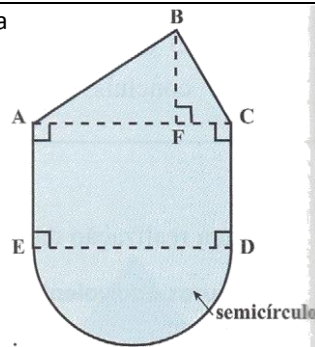
32. Desenha numa folha quadriculada três figuras equivalentes à dada, mas que não sejam geometricamente iguais entre si.



33. Calcula a medida da área do triângulo, tomando como unidade de comprimento o lado de uma quadricula.



Calcula a área da superfície



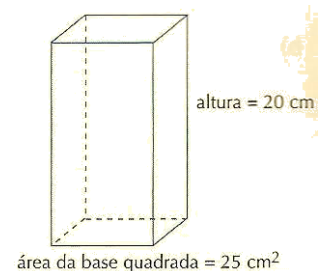
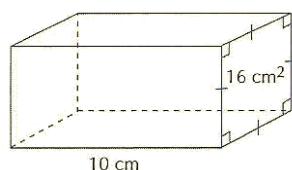
70 m

105 m

Diagram illustrating the net of a rectangular prism. The net consists of six rectangles arranged in a cross shape. The top rectangle is blue and labeled A_1 . The middle row consists of four rectangles: a red rectangle, a yellow rectangle labeled A_2 , a red rectangle labeled A_3 , and a yellow rectangle. The bottom rectangle is blue. The dimensions are given as follows: the width of the red rectangles is 3 cm, the width of the yellow rectangles is 4 cm, and the height of the yellow rectangles is 5 cm. A right triangle is shown in the top right corner with a horizontal leg of 5 cm and a vertical leg of 4 cm.

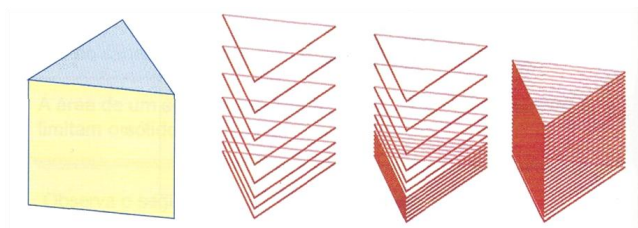


A 3D diagram of a rectangular prism. The front horizontal edge is labeled 'a' and the receding horizontal edge on the right is labeled 'b'.



➤ Áreas e volumes de prismas e pirâmides

Observa o prisma triangular e a sequência seguinte:



O princípio acima ilustrado aplica-se a qualquer prisma.

Assim, tal como no paralelepípedo.

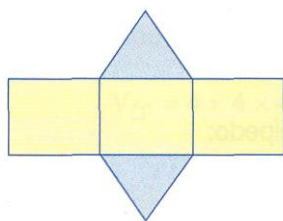
O **volume de um prisma** é igual ao produto da área da base pela altura.

$$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

No exemplo anterior, se a área da base for 18 cm^2 e a altura for 10 cm , então:

$$\text{Volume}_{\text{prisma}} = 18 \times 10 = 180 \text{ cm}^3$$

Para calcular a área do prisma, recorreremos à sua planificação.



O prisma tem 2 bases triangulares (pois é um prisma triangular) e três faces rectangulares (pois é um prisma)

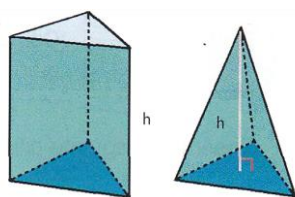
Pode fazer-se uma contagem deste tipo em todos os prismas.

Área de um prisma $A_{\text{Total}} = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

onde $A_{\text{lateral}} = \text{Perímetro}_{\text{base}} \times \text{altura}$

Consideremos agora uma pirâmide com a mesma base e com a mesma altura do prisma do exemplo anterior.

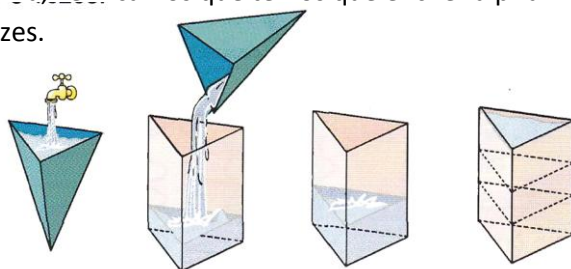
Haverá alguma relação entre os volumes dos dois sólidos?



Para responder a esta questão realizamos a seguinte experiência:

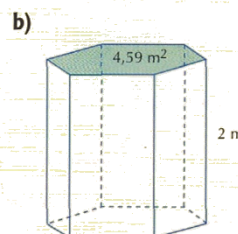
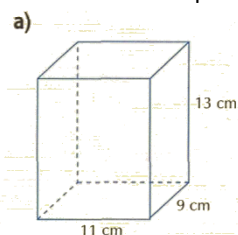
Enchemos a pirâmide com água e transferimo-la para o prisma.

Para encher o prisma, verificamos que temos que encher a pirâmide exactamente 3 vezes.

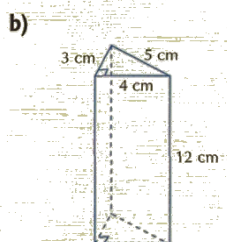
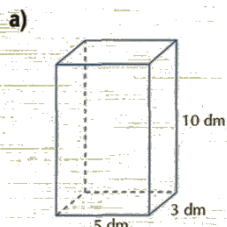


Actividades de aplicação

37. Calcula o volume dos prismas:



38. Calcula a área total dos prismas:



O resultado desta experiência acontece para quaisquer primas e pirâmides correspondentes (com a mesma base e com a mesma altura).

O **volume de uma pirâmide** é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

O volume da pirâmide do exemplo anterior pode ser calculado de duas formas:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$= \frac{1}{3} \times 18 \times 10$$

$$= 60 \text{ cm}^3$$

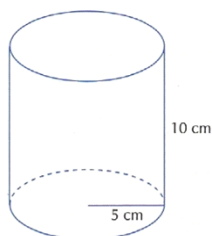
$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times V_{\text{prisma}}$$

$$= \frac{1}{3} \times 180$$

$$= 60 \text{ cm}^3$$

Para calcularmos um valor aproximado da área da pirâmide podemos recorrer à sua planificação.

➤ Áreas e volumes de cilindros e cones



Para finalizar o estudo das áreas e volumes de sólidos, consideremos os casos de dois não poliedros: o cilindro e o cone.

Aplicando o mesmo princípio que aplicamos ao paralelepípedo e aos prismas constatamos que:



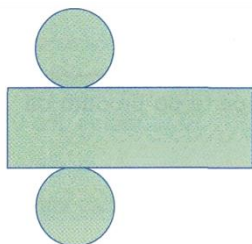
O **volume do cilindro** é igual ao produto da área da base pela altura.

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

No caso da figura:

$$\text{Volume}_{\text{cilindro}} = 3,14 \times 5^2 \times 10 \approx 785 \text{ cm}^3$$

Para calcular a área do cilindro, recorreremos à sua planificação.



A face lateral é um retângulo cujas dimensões verificam:

- a largura é igual à altura do cilindro.
- o comprimento é igual ao perímetro da base circular.

$$\text{No cilindro: } P_{\text{base}} = 2 \times \pi \times \text{raio}$$

Área de um cilindro: $A_{\text{Total}} = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

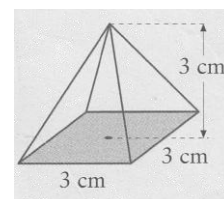
onde $A_{\text{lateral}} = P_{\text{base}} \times \text{altura}$

As fórmulas da área e do volume do prisma e do cilindro são respectivamente idênticas.

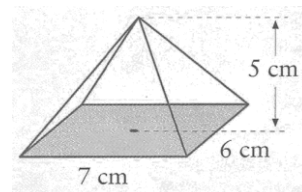
Actividades de aplicação

39. Calcula o volume das seguintes pirâmides:

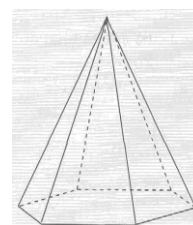
a)



b)



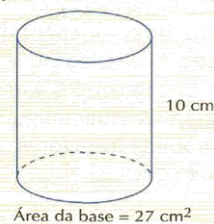
c)



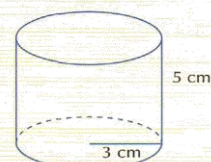
Área da base = 144 m^2
Altura = 9 m

40. Calcula o volume dos seguintes cilindros:

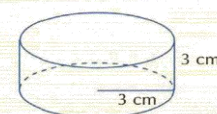
a)



b)

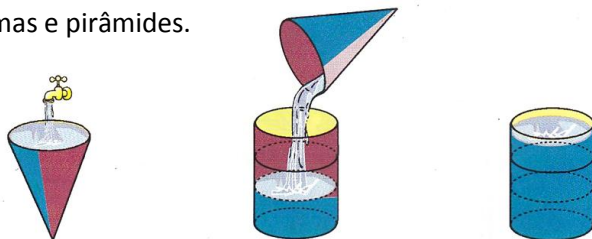


c)



Finalmente analisemos o cone.

Consideremos um cone com a mesma base e altura que o cilindro inicial e realizemos a experiência análoga aplicada anteriormente aos prismas e pirâmides.



Concluimos que:

O volume de um cone é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

O volume do cone do exemplo anterior pode ser calculado de dois modos:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$\approx \frac{1}{3} \times 3,14 \times 5^2 \times 10$$

$$\approx 261,67 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times V_{\text{cilindro}}$$

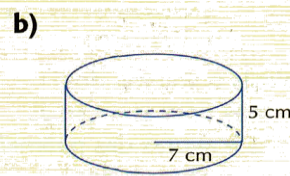
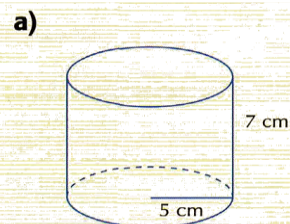
$$\approx \frac{1}{3} \times 785$$

$$\approx 261,67 \text{ cm}^3$$

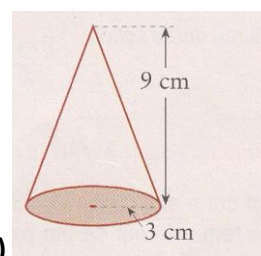
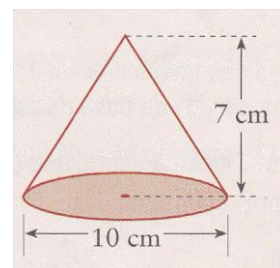
As fórmulas da área e do volume da pirâmide e do cone são respectivamente idênticas.

Atividades de aplicação

41. Calcula a área total dos seguintes cilindros:



42. Calcula o volume dos seguintes cones:

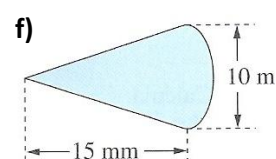
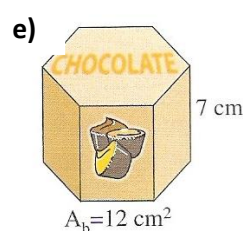
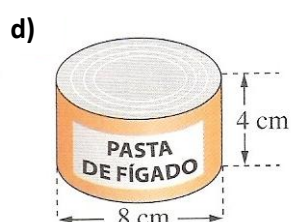
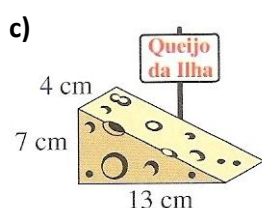
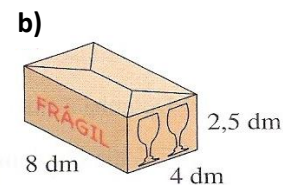
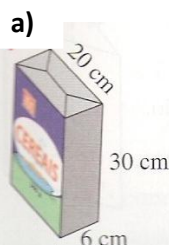


Atividades de aplicação

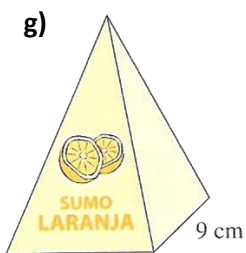
43. Copia e completa a tabela:

	Área da base	Altura	Volume
		5,5	412,5
	35		140

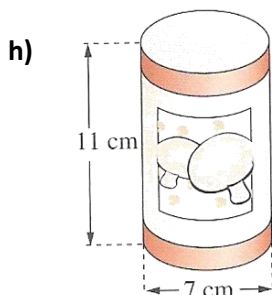
44. Calcula o volume dos seguintes sólidos:



Actividades de aplicação



Pirâmide quadrangular de 14 cm de altura

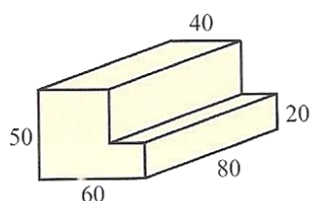


45. Determina o volume de um cone de 3 dm de altura, sabendo que o diâmetro da base é 10 dm.

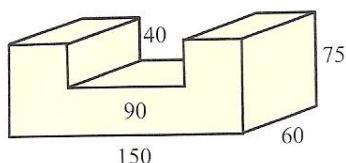
46. Determina a aresta de um cubo com 150 cm^2 de área total.

47. Calcula o volume das peças seguintes, sabendo que as medidas estão expressas em centímetros.

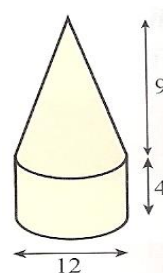
a)



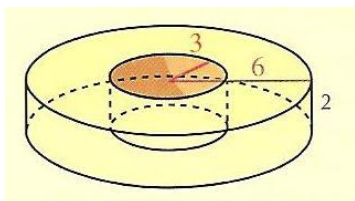
b)



c)



48. É provável que já tenhas comido uma bolacha com um furo circular, como a representada a seguir:

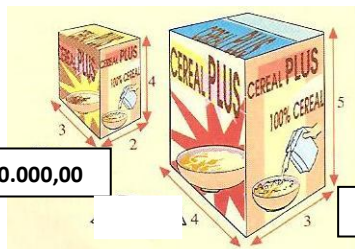


48.1. Que quantidade de massa é poupada numa bolacha como a da figura?

48.2. Qual a razão entre a quantidade poupada e a total sem o furo?

48.3. Se as dimensões fossem 4 e 8, necessitavas de repetir os cálculos? Justifica.

49. Uma marca de cereais pode ser vendida em 2 tamanhos:



50.000,00

100.000,00

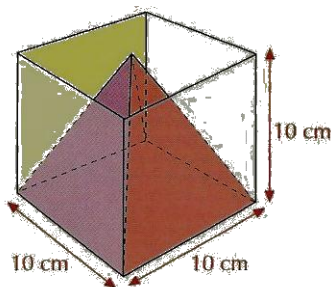
49.1. Qual a embalagem que oferece melhor relação quantidade-preço?

49.2. Qual deveria ser o preço da embalagem maior, para a relação quantidade-preço ser igual?

Caixa menor → comprimento: 3; largura: 2 e altura: 4

Caixa maior → comprimento: 4; largura: 3 e altura: 5

50. Um frasco de perfume com a forma de pirâmide quadrangular está guardado numa caixa paralelepípedica com a mesma base e a mesma altura do frasco:



50.1. Qual o espaço que fica livre no interior da caixa?

50.2. Determina a quantidade de papel que é necessário para embalar a caixa.

Unidade 6 – Equações

6.1. Noção de equação. Solução de uma equação.

Consideremos os seguintes esquemas que representam balanças em equilíbrio.



Em cada uma das situações, qual o peso de cada boneca?

Podemos representar o peso desconhecido de cada boneca por uma letra (por exemplo x ou y) e traduzir o equilíbrio da balança em linguagem matemática por uma igualdade, assim:

$$x + 10 = 60$$

e

$$y + y + 5 = 25$$

A cada uma destas igualdades chama-se **equação**.

Às letras x e y , que representam os valores desconhecidos, chama-se **incógnita**.

Uma **equação** é uma igualdade onde aparecem uma ou mais letras (incógnitas), que representam valores desconhecidos.

À letra (ou às letras) que aparece na equação chama-se **incógnita**.

Nestes exemplos facilmente se encontram, por observação, os pesos pretendidos.

Na 1ª balança a boneca pesa 50 e na 2ª balança cada uma das bonecas pesa 10.

No nosso estudo apenas vamos considerar equações com uma só incógnita.

Na equação $x + 10 = 60$, x é a **incógnita** e 50 é a **solução**.

Raiz ou **solução** de uma equação é um número que quando concretiza a incógnita a transforma numa igualdade numérica verdadeira.

Na equação, 50 é a solução e pode escrever-se: $S = \{50\}$, sendo S o **conjunto** – **solução** da equação.

Resolver uma equação é determinar o seu conjunto solução.

Nota:

1. Concretizar uma incógnita é substituir a incógnita por um número.
2. A incógnita pode ser representada por qualquer letra.

➤ Membros e termos de uma equação

Numa equação o sinal $=$ separa duas expressões que se chamam **membros** da equação.

$$\begin{array}{c} 10 + x + 2x = 100 \\ \text{1º membro} \quad \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \quad \text{2º membro} \end{array}$$

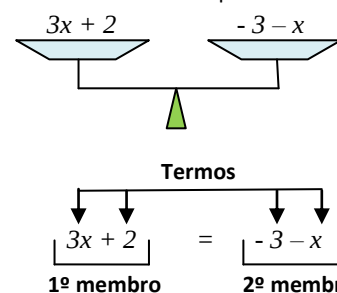
Cada membro é constituído por termos.

Na equação: $10 + x + 2x = 100$, 10 , $+x$ e $+2x$, são os termos do 1º membro e 100 é o termo do 2º membro.

Os termos $+x$ e $+2x$, têm incógnita e os termos 10 e 100 não têm

Nota

Uma equação lembra uma balança de pratos em equilíbrio em que cada membro está num dos pratos.



incógnita e por isso, a estes dois últimos termos, chamamos **termos independentes**, enquanto que aos dois primeiros chamamos **termos dependentes**.

Exemplo 1

Considera a equação: $2x + 1 = 21 - 2x$

1.1. Indica: **a)** o 1º membro; **b)** os termos do 2º membro; **c)** os termos independentes.

1.2. Mostra que: **a)** 3 não é solução da equação; **b)** 5 é solução da equação.

Resolução

1.1. **a)** $2x + 1$ **b)** 21 e $-2x$; **c)** 1 e 21

1.2. **a)** $2 \times 3 + 1 \neq 21 - 2 \times 3$, ou seja, $7 \neq 15$, logo 3 não é solução da equação.

b) $2 \times 5 + 1 = 21 - 2 \times 5$, ou seja, $11 = 11$, logo 5 é solução da equação.

6.2. Princípios de equivalência para a resolução de equações

Consideremos as equações:

$$\begin{array}{ccc} 6x + 11 = 7x + 3 & \text{e} & 3x + 1 = 25 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{a solução é 8} & & \text{a solução é 8} \end{array}$$

Quando duas equações têm a mesma solução dizemos que **são equivalentes**.

Equações equivalentes são equações que têm o mesmo conjunto-solução.

Duas equações equivalentes ligam-se pelo símbolo $\Leftrightarrow$ (lê-se “é equivalente a”).

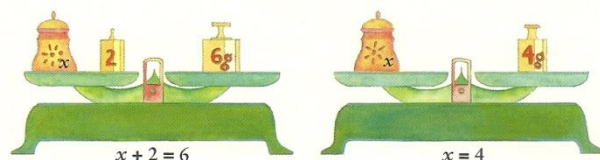
Neste caso escrevemos:

$$6x + 11 = 7x + 3 \Leftrightarrow 3x + 1 = 25$$

Os princípios para a resolução de equações a seguir enunciados, permitem passar de uma equação a outra equivalente mais simples para encontrar a solução.

➤ Princípio da adição

Observa que:



Pode escrever-se:

$$\begin{array}{l} x + 2 = 6 \Leftrightarrow x + 2 - 2 = 6 - 2 \\ \Leftrightarrow x = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Subtrai-se 2 a cada} \\ \text{membro da equação} \end{array}$$

Actividades de aplicação

1. Para cada uma das seguintes expressões, indica, justificando, se se trata ou não de uma equação:

1.1. $2 + 5 = 7$ **1.2.** $2 + x > \frac{7}{2}$ **1.3.** $-3 + 5x = 10$

1.4. $8 < 5$ **1.5.** $\frac{a}{2} + 3 = 20$ **1.6.** $x = 3$

2. Traduz através de uma equação:

2.1. A soma de um número com 2 é igual a zero.

2.2. A diferença entre 9 e o dobro de um número é 1.

2.3. O dobro da diferença entre um número e 6 é igual a 10.

2.4. Metade de um número somado de 5 unidades é igual a esse número.

2.5. A soma de dois números inteiros consecutivos é igual a 31.

3. Preenche os espaços com números de modo que 2 seja solução das equações:

3.1. $___ + x = 5$ **3.2.** $___ - x = 6$ **3.3.** $___ + x = 3$

3.4. $___ + 7 = x$ **3.5.** $___ - 10 = x$ **3.6.** $___ - x = 4x$

4. Verifica se o número 3 é solução das seguintes equações:

4.1. $6 - x = 9$ **4.2.** $2a + 10 = 16$

4.3. $1 - y = 2y - 8$ **4.4.** $t - 7 = -4$

4.5. $2y - 5 = 3 + y$

5. Escreve uma equação cuja solução seja:

5.1. 1 **5.2.** 0 **5.3.** -1

6. Copia e preenche o seguinte quadro:

Equações	1º membro	2º membro	incógnita	Termos com incógnita	Termos independentes
$2y + \frac{3}{2} = -8y - 7 + y$					
$-3x + 4 = \frac{2}{5}x$					
$1 - a + 3 = -\frac{5}{2} + 2a$					

Princípio da adição: podemos adicionar ou subtrair a ambos os membros de uma equação o mesmo número, que obtemos uma equação equivalente à dada.

Repara que:

$$x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 6 - 2$$

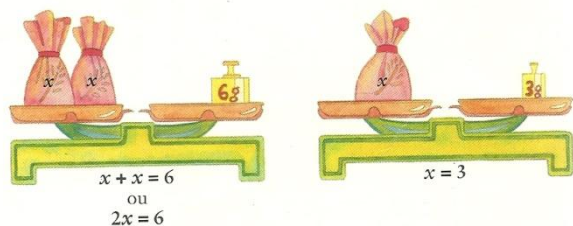
O princípio da adição conduz a uma regra prática que diz o seguinte:

Regra prática

Se numa equação passarmos um termo de um membro para o outro, desde que se lhe troque o sinal, obtém-se uma equação equivalente à dada.

➤ Princípio da multiplicação

Observa que:



Princípio da multiplicação: podemos multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por um mesmo número, diferente de zero, que obtemos uma equação equivalente à dada.

Pode escrever-se:

$$2x = 6 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Dividiu-se por 2 os dois membros da equação.

Exemplo 2

Resolve a equação $2x + 5 = x + 9$

Resolução

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= x + 9 \Leftrightarrow \text{Aplica-se o princípio da adição.} \\ &\quad \text{A cada membro adiciona-se } -5 - x \\ \Leftrightarrow 2x + \cancel{5-5} - \cancel{x} &= \cancel{x} + 9 - 5 - \cancel{x} \\ \Leftrightarrow 2x - x = 9 - 5 &\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{Simplificam-se os membros.} \\ S = \{4\} &\quad \text{Apresenta-se o conjunto-solução.} \end{aligned}$$

Exemplo 3

Resolve a equação $6x + 3 = 3x - 9$

Resolução

$$\begin{aligned} 6x + 3 &= 3x - 9 \Leftrightarrow \text{Os termos com incógnita passam para o 1º membro e os termos independentes para o 2º membro, trocando os sinais aos termos que mudam de membro.} \\ \Leftrightarrow 6x - 3x &= -9 - 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= -12 \Leftrightarrow \text{Simplificam-se os membros.} \\ \Leftrightarrow \frac{3x}{3} &= \frac{-12}{3} \Leftrightarrow x = -4 \quad \text{Aplica-se o princípio da multiplicação.} \\ S = \{-4\} &\quad \text{Apresenta-se o conjunto-solução.} \end{aligned}$$

Actividades de aplicação

7. Escreve uma equação equivalente a cada uma das equações:

- 7.1. $3x = 15$ 7.2. $2x - 4 = 12$ 7.3. $x + 7 = 1$
7.4. $4a + 28 = 0$ 7.5. $5 - b = 18$ 7.6. $c + 3 = 2$

8. Faz corresponder as equações que são equivalentes.

- | | | |
|-------------|---|--------------|
| $x + 2 = 5$ | • | $x - 7 = -8$ |
| $9x = 9$ | • | $3x = 9$ |
| $x - 2 = 4$ | • | $2x - 5 = 7$ |
| $5x = -5$ | • | $8 - x = 7$ |

9. Resolve cada uma das seguintes equações:

- 19.1. $2x - 5 = 7$ 9.2. $2a = -8$
9.3. $2 - 3y = 6 + 5y$ 9.4. $-y = -9$
9.5. $14 - 5x = 2 - x$ 9.6. $\frac{x}{3} + 3 = 3$
9.7. $y + y + y = 3$ 9.8. $4x + 1 = 3x + 4$

10. Escreve as equações que traduzem os seguintes problemas e depois resolve-as.

- 10.1. Somando 7 o triplo de um número, o resultado obtido é 40. Qual é o número?
10.2. O dobro de um número é igual à soma desse número com 5. Qual é o número?
10.3. A soma do triplo de um número com 2 é igual à diferença entre 14 e esse número. Qual é o número?

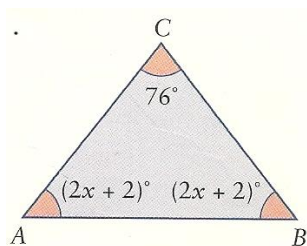
6.3. Resolução de equações com parênteses

Não há um único processo de resolver uma equação mas, normalmente, seguem-se os seguintes passos para resolver uma equação com parênteses.

	$2 - (x + 6) = 3(x - 1)$
1º Passo Tirar os parênteses.	$2 - x - 6 = 3x - 3$
2º Passo Passar para o 1º membro os termos com incógnita e para o 2º membro os termos independentes, trocando o sinal a todos os que mudam de membro.	$-x - 3x = -3 - 2 + 6$
3º Passo Simplificar as expressões em cada um dos membros.	$-4x = 1$
4º Passo Dividir ambos os membros pelo coeficiente de x.	$\frac{-4x}{-4} = \frac{1}{-4}$
5º Passo Efectuar o cálculo, explicitando x.	$x = -\frac{1}{4}$
6º Passo Indicar o conjunto-solução.	$S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$

Exemplo 4

A figura representa um triângulo [ABC]. De acordo com os dados, determina x.



Resolução

Como sabes, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Então:

$$76 + 2(2x + 2) = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 76 + 4x + 4 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 180 - 76 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{100}{4} \Leftrightarrow x = 25$$

Tirar os parênteses.

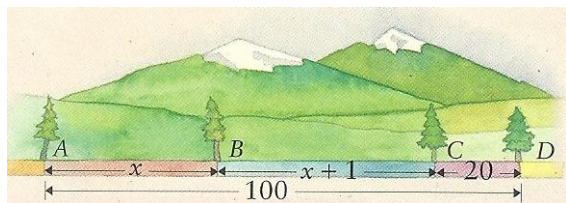
Passar para o 2º membro os termos independentes.

Simplificar o 2º membro

Dividir ambos os membros pelo coeficiente de x. Efectuar o cálculo indicando o valor de x.

Exemplo 5

Observa o esquema seguinte:



Com base no desenho escreveram-se as equações. Resolve cada uma das equações.

5.1. $100 = x + 1 + x + 20$; **5.2.** $x + 1 = 100 - (x + 20)$

Resolução

5.1. $100 = x + 1 + x + 20 \Leftrightarrow 100 - 1 - 20 = x + x \Leftrightarrow 79 = 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{79}{2} = \frac{2x}{2} \Leftrightarrow 39,5 = x \Leftrightarrow x = 39,5$

Actividades de aplicação

11. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações e corrige as que são falsas:

11.1. $2(x + 3) = 4 \Leftrightarrow 2x + 6 = 8$

11.2. $-3(4 - x) = x \Leftrightarrow -12 + 3x = x$

11.3. $-3 = -(x + 12) \Leftrightarrow -3 = -x + 12$

11.4. $3(1 - x) = 5 - (x - 6) \Leftrightarrow 3 - 3x = 11 - x$

12. Resolve cada uma das equações:

12.1. $2x - 3 = 4(x - 1)$ **12.2.** $4(y - 2) = 7$

12.3. $5 - 2(a + 8) = 6a$

12.4. $1 - 3(x - 2) = -7(x + 1)$

12.5. $6y + 3 = 4(1,5y - 3)$ **12.6.** $5\left(2b - \frac{1}{5}\right) = 2$

12.6. $x + 12,5 = 2(3,5 - x)$ **12.7.** $3x - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$

12.8. $1 - (2 - 3x) = 5 - 3(-x + 2)$

$$5.2. \quad x+1=100-(x+20) \Leftrightarrow x+1=100-x-20 \Leftrightarrow x+x=100-1-20 \Leftrightarrow 2x=79 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{79}{2} \Leftrightarrow x=39,5$$

➤ Classificação das equações

Será que todas as equações têm solução?

A equação $p = p+1$ terá solução? Será que existe algum número que é igual a si próprio adicionado de uma unidade? Vejamos, resolvendo a equação: $p = p+1 \Leftrightarrow p-p=1 \Leftrightarrow 0p=1$. Esta equação não tem solução, não há nenhum número que multiplicado por zero seja igual a 1. A equação é **impossível**.

Uma equação é **impossível** quando não tem solução.

O conjunto-solução de uma equação impossível é o conjunto vazio e representa-se por $\emptyset$ ou $\{ \}$.

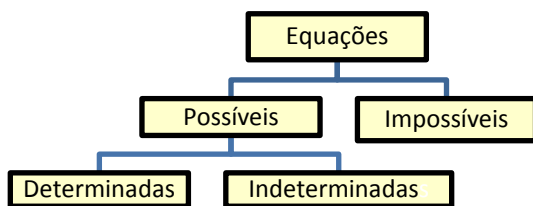
A equação $2p = p+3$ tem solução, ou seja $p = 3$. Esta equação é **possível e determinada**.

Uma equação **possível** é **determinada** se tem um número finito de soluções.

A equação $p + p = 2p \Leftrightarrow p + p - 2p = 0 \Leftrightarrow 0p = 0$, tem infinitas soluções, ou seja, p pode ser qualquer número. É uma equação **possível e indeterminada**.

Uma equação **possível** é **indeterminada** quando tem uma infinidade de soluções.

Classificação das equações



Exemplo 6

Resolve e classifica cada uma das seguintes equações:

6.1. $2x - 0,3 = -x + 5,2 + 2 + 3x$;

6.2. $2x - 5 = -x + 7,2 + 1,5$;

6.3. $0,8x - 5 = -0,1x + 2 - 7 + 0,9x$

Resolução

6.1.

$$2x - 0,3 = -x + 5,2 + 2 + 3x \Leftrightarrow 2x + x - 3x = 5,2 + 2 + 0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0x = 7,5 \text{ A equação é impossível}$$

$$S = \emptyset$$

6.2. $2x - 5 = -x + 7,2 + 1,5 \Leftrightarrow 2x + x = 7,2 + 1,5 + 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x = 13,7 \Leftrightarrow x = \frac{13,7}{3} \Leftrightarrow x = \frac{137}{30}$$

$$S = \left\{ \frac{137}{30} \right\} \text{ A equação é possível e determinada.}$$

6.3. $0,8x - 5 = -0,1x + 2 - 7 + 0,9x \Leftrightarrow 0,8x + 0,1x - 0,9x = 2 - 7 + 5 \Leftrightarrow 0,9x - 0,9x = -5 + 5 \Leftrightarrow 0x = 0$

A equação é possível e indeterminada.

Actividades de aplicação

13. Entre as equações que se apresentam a seguir, umas são impossíveis e outras são indeterminadas. Identifica cada uma delas:

13.1. $x + 2x = 3x$

13.2. $y + 2y = 4y$

13.3. $a - 1 = a$

13.4. $2(x + 10) = 2x + 5$

14. Classifica as seguintes equações:

14.1. $2x + 2 = 16$

14.2. $3x = 1$

14.3. $x = x + 1$

14.4. $3x = 1 \text{ (em } \mathbb{Z})$

14.5. $2 - (x - 3) = -2(x + 5)$

15. Escreve uma equação:

15.1. impossível;

15.2. possível e indeterminada;

15.3. possível e determinada.

16. Inventa um problema que possa ser traduzido por uma equação impossível.

6.4. Resolução de problemas usando equações

Por vezes, deparamo-nos com problemas que não são de resolução imediata. Para os resolver, torna-se útil traduzi-los por equações.

Exemplo 7

Na roça do Sum Ambrósio há galinhas e coelhos, perfazendo 80 cabeças e 260 patas no total. Quantas galinhas e coelhos há na roça do Sum Ambrósio?



Resolução

1º Passo: Compreender o enunciado

Deves ler e interpretar o enunciado de modo a

compreenderes a “história do problema”. Terás de saber conta-la pelas tuas próprias palavras.

Em seguida, deves tomar nota dos dados e designar por uma letra a incógnita. Também deves escrever expressões algébricas relativas aos elementos desconhecidos.

Se possível faz desenhos ou esquemas que facilitem a interpretação do problema e a anotação dos dados.

$x \rightarrow$ número de galinhas; $80 - x \rightarrow$ número de coelhos; $2x \rightarrow$ número de patas das galinhas

$4(80 - x) \rightarrow$ número de patas dos coelhos

2º Passo: Escrever a equação

Lê de novo o enunciado e, usando as expressões algébricas que já escreveste, forma uma equação.

$$2x + 4(80 - x) = 260$$

3º Passo: Resolver a equação

Resolve a equação usando os teus conhecimentos sobre a resolução de equações

$$2x + 4(80 - x) = 260 \Leftrightarrow 2x + 320 - 4x = 260 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4x = 260 - 320 \Leftrightarrow -2x = -60 \Leftrightarrow x = 30$$

4º Passo: Verificar a solução e dar a resposta ao problema

Lê de novo o enunciado e verifica se a solução da equação é a resposta que pretendes ou é apenas uma ajuda para dar a resposta à questão do problema.

Na roça há 30 galinhas (x) e 50 coelhos ($80 - 30 = 50$).

Verificação: $2 \times 30 + 4 \times 50 = 260$

R: Na roça do Sum Ambrósio há 30 galinhas e 50 coelhos.

Passos para a resolução de problemas

1º Passo: Compreender o enunciado. Identificar a incógnita.

2º Passo: Escrever a equação.

3º Passo: Resolver a equação.

4º Passo: Verificar a solução. Dar resposta ao problema.

Exemplo 8

Uma mãe tem 48 anos e a sua filha tem 12. Quantos anos terão que passar para que a idade da mãe seja o triplo da idade da filha?

Resolução

1º passo: Compreender o enunciado

	Hoje		Dentro de x anos
Mãe	48	$\longrightarrow$	$48 + x$
Filha	12	$\longrightarrow$	$12 + x$
			$48 + x = 3(12 + x)$

2º passo: Escrever a equação

$$48 + x = 3(12 + x)$$

A idade da mãe daqui a x anos é igual ao triplo da idade da filha daqui a x anos.

3º Passo: Resolver a equação

$$48 + x = 3(12 + x) \Leftrightarrow 48 + x = 36 + 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3x = 36 - 48 \Leftrightarrow -2x = -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12}{-2} \Leftrightarrow x = 6$$

4º Passo: Verificar a solução

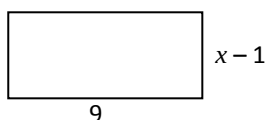
Dentro de 6 anos a mãe terá 54 anos e a filha 18. Logo, $54 = 3 \times 18$.

R: Daqui a seis anos a idade da mãe será tripla da idade da filha.

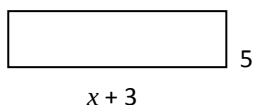
Actividades de aplicação

17. A área de cada um dos rectângulos apresentados é 45cm^2 . Calcula, para cada caso, o valor de x .

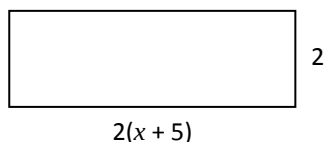
17.1.



17.2.



17.3.



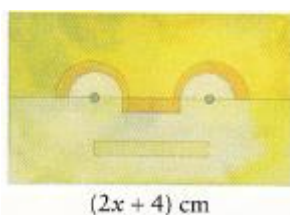
18. Observa as figuras e determina x .

18.1.



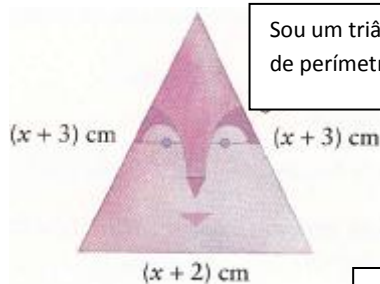
Sou um quadrado de perímetro 12 cm

18.2.



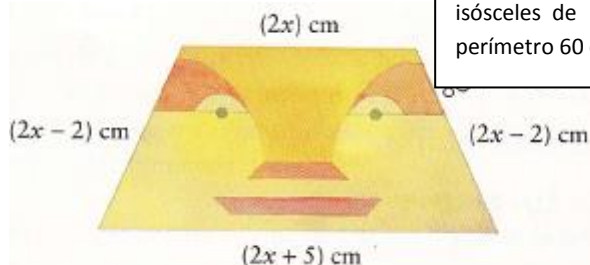
Sou um rectângulo de perímetro 60 cm

18.3.



Sou um triângulo isósceles de perímetro 60 cm

18.4.



Sou um trapézio isósceles de perímetro 60 cm

19. De dois ângulos complementares sabe-se que a amplitude dum deles é tripla da do outro. Determina a amplitude de cada um dos ângulos.

20. Num triângulo isósceles o ângulo menor tem de amplitude 20° . Qual a amplitude dos outros ângulos?

20. A Mirian comprou 3 cadernos e 2 canetas e gastou no total 48 mil dobras. Sabendo que o preço de cada caderno é o dobro do preço de cada caneta, calcula o preço de cada um.

21. O Abdel pensou num número, adicionou-lhe 3 e obteve o quádruplo do número em que pensou. Qual foi o número em que o Abdel pensou?

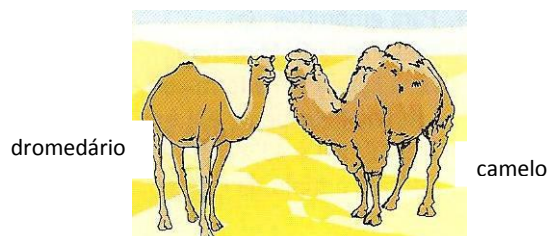
22. Num cesto há mangas, carambolas e cajamangas num total de 33 frutos. Há mais duas carambolas do que mangas e há mais quatro cajamangas do que mangas. Quantos frutos de cada tipo há no cesto?

23. Verifica se existem três números consecutivos múltiplos de cinco cuja soma seja igual ao triplo do número intermédio. Quantas soluções tem o problema?

24. Para vedar um terreno rectangular gastaram-se 205 m de rede. Se o comprimento do terreno tem mais 10 m do que a largura, qual é a área do terreno?

25. A Rute e o Josimar são amigos e, juntos têm 11 irmãos. A Rute tem mais 3 irmãos que o Pedro. Quantos irmãos tem cada um dos amigos?

26. Num deserto existem camelos e dromedários, num total de 63 bossas. O número de camelos é igual ao triplo do número de dromedários. Quantos animais de cada espécie existem nesse deserto?



27. A Vanda tem o dobro do dinheiro da Edneyse. O Abel tem 30 mil dobras. Os três têm 105 mil dobras. Quanto dinheiro tem cada um?

28. A diferença entre as idades das irmãs Ana e Alice é 4 anos. Daqui a 3 anos, a soma da idade da Ana com o triplo da idade da Alice é 36. Determina as idades actuais das duas irmãs. Quantas soluções tem o problema?

29. Quando o Tomé nasceu, o pai tinha 31 anos. Há cinco anos, o pai do Tomé tinha o dobro da idade do filho. Determina a idade actual do pai e do filho.

30. Sabe-se que x representa, em número inteiro de anos a idade do Walter. Escreve um problema que possa ser traduzido pela equação: $2(x - 3) = 20$.

BIBLIOGRAFIA E IMAGENS

NEVES, Maria Augusta Ferreira, FARIA, Maria Luísa Monteiro – Matemática 7 – Porto Editora, 1998

NEVES, Maria Augusta Ferreira, LEITE, António – Matemática 7º ano – Porto Editora, 2006

NEVES, Maria Augusta Ferreira, GUERREIRO, Luís; NEVES, Armando – Matemática 7º ano – Livro de exercícios – Porto Editora, 2002

Sites da Internet

www.matematica.no.sapo.pt; www.educ.fc.ul.pt; <http://math.about.com>; www.amatoso.org;

www.redematematica.wordpress.com ; www.dgidc.min-edu.pt .

