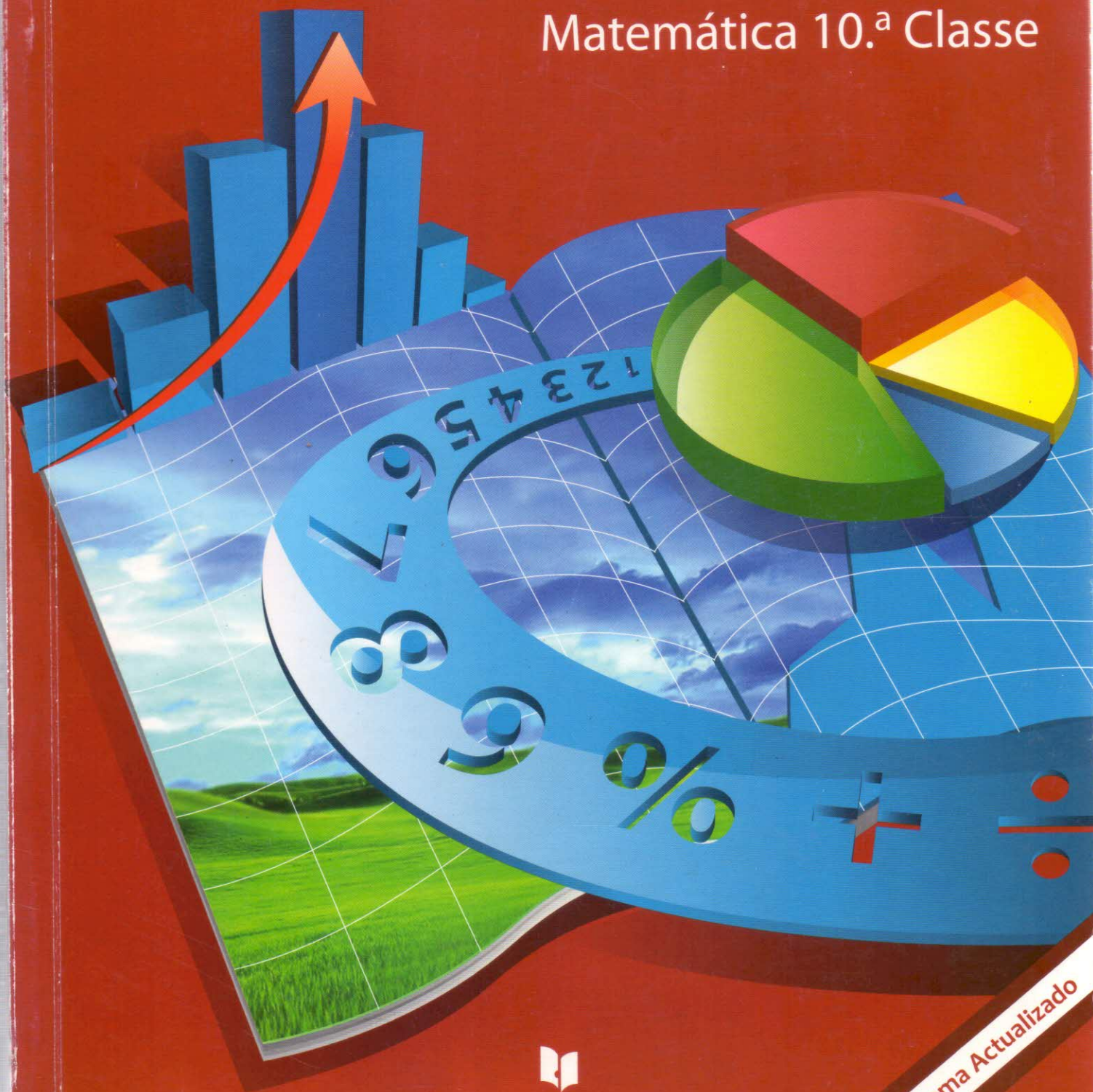


Vasco Cuambe

M10

Matemática 10.^a Classe



Texto Editores

Programa Actualizado

Baixar Livros & Exames em PDF

Somos o portal MozEstuda.com, um espaço dedicado à educação e ao conhecimento. Fornecemos links para o **download gratuito** de materiais de acesso livre, incluindo [exames anteriores](#), [livros e diversos PDFs](#) educacionais. Nosso objetivo é facilitar o aprendizado e a pesquisa, sempre respeitando os direitos autorais e promovendo o acesso legítimo ao conhecimento. Se você apreciou este conteúdo, considere apoiar os autores e editoras adquirindo versões oficiais sempre que possível. Todos os direitos autorais pertencem aos respectivos criadores e detentores de direitos. **Não vendemos nem lucramos com as obras disponibilizadas.** Aproveite e compartilhe com outros estudantes!

Para baixar livros em PDF, acesse biblioteca.mozestuda.com e pesquise o título desejado na barra de pesquisa. Ou, se preferir, siga/ Clique os links abaixo:

BAIXAR TODOS LIVROS ESCOLARES — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Classe** para Baixar todos livros em PDF

12ª CLASSE

11ª CLASSE

10ª CLASSE

9ª CLASSE

8ª CLASSE

7ª CLASSE

6ª CLASSE

5ª CLASSE

4ª CLASSE

3ª CLASSE

2ª CLASSE

1ª CLASSE

BAIXAR TODOS MÓDULOS ESCOLARES —

MÓDULOS DO I CICLO

MÓDULOS DO II CICLO

LIVROS POR DISCIPLINAS - TODAS

BAIXAR EXAMES DA **6ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

C. NATURAIS

C. SOCIAIS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

BAIXAR EXAMES DA **10ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

FÍSICA

GEOGRAFIA

HISTORIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

BAIXAR EXAMES DA **12ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

DGD

FILOSOFIA

FÍSICA

FRANCÊS

GEOGRAFIA

HISTÓRIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

TODOS EXAMES

TODOS EDITAIS

TODOS LIVROS

BAIXAR EXAMES DE **ADMISSÃO** — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Instituição** para Baixar todos exames em PDF

IFP / Formação de Professores

UEM

UJC/ ISRI

ISPG

ISPSONGO

AC. MILITAR

PRM

ISCAM

ICS — SAÚDE — ENSINO MÉDIO

ETP / Ensino técnico Profissional

UP / UniRios: Save, Rovuma, Licungo, ...

UNIZAMBEZE

ISPT

ISCISA

ACIPOL

CFJJ

IFAPA

EDITAIS

ENEM

VESTIBULARES

ENCCEJA

TODOS EXAMES

f i c h a t é c n i c a

título	M10 • Matemática 10.ª classe – Letras
autor	Vasco Cuambe
coordenação	Stella Morgadinho
editores	Texto Editores, Lda. – Moçambique
capa	Darlene Mavale
ilustrações	Texto Editores, Lda. – Moçambique
arranjo gráfico	Darlene Mavale
paginação	Arlindo Pais Uamusse
pré-impressão	Texto Editores, Lda. – Moçambique
impressão e acabamentos	Kadimah Education



Texto Editores

Avenida Julius Nyerere, 46 • Bairro Polana Cimento B • Maputo • Moçambique

Tels. (+258) 21 49 86 48 • 21 49 90 71 Fax: 21 49 86 48

E-mail: info@me.co.mz

© 2010, Texto Editores, Lda.

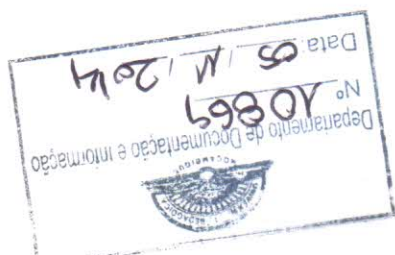
Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, offset, fotografia, etc.) sem o consentimento escrito da Editora, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor. D.L. 4 de 27 de Fevereiro de 2001.

MAPUTO, DEZEMBRO de 2011 • 1.ª EDIÇÃO • 1.ª TIRAGEM • REGISTADO NO INLD SOB O NÚMERO: 6451/RLINLD/10



Matemática 10.ª Classe

UNIVERSIDADE PEDAGÓGICA
DELEGAÇÃO DA BEIRA
DEPARTAMENTO
DOCUMENTAÇÃO
INFORMAÇÃO



Texto Editores

Manual de matr.

51(085) - CUA

Vasco Cuambe

1021 fgs

Prefácio

O presente manual baseou-se numa leitura atenta do programa oficial e de todas as orientações sugeridas pelo reajustamento dos novos programas.

A motivação a partir do que é concreto e intuitivo, é muito importante para que os alunos sintam que estão a construir Matemática. Os temas são tratados de uma forma gradual, mas dinâmica, partindo da experimentação para a formalização dos conhecimentos.

Aprender a pensar e a raciocinar correctamente são objectivos a atingir no 10.º ano. Para ajudar a alcançar este objectivo, apresentam-se várias situações, umas que relacionam a Matemática com o quotidiano e com as outras ciências, outras de treino que têm como objectivo colmatar dificuldades e esclarecer dúvidas.

Os exercícios devem ser resolvidos gradualmente, ao longo do ano lectivo, acompanhando o decorrer da matéria.

Apresentam-se várias questões de escolha múltipla, que devem ser lidas com muita atenção e sem precipitações. Nas outras questões, ditas de resposta aberta, devem ser apresentados os raciocínios e as justificações que julgar necessárias.

Contamos com o apoio e a colaboração do professor para decidir, consoante as características da turma, quais devem ser resolvidas em grupo, em díade ou individualmente, apoiando e incentivando os alunos a interpretar as situações dadas e a realizar as tarefas propostas.

A referência à História da Matemática tem como objectivo mostrar como a Matemática tem vindo a interferir no progresso da Humanidade e dar a conhecer alguns matemáticos cujas contribuições foram fundamentais para esse mesmo progresso.

Poderá também encontrar os exames nacionais de 2009 a 2011 e as respectivas resoluções. Nas páginas finais terá as soluções de todos os exercícios e a Tabela de Valores Naturais.

Não podemos deixar de salientar que só o próprio aluno, com o seu esforço e a sua capacidade de reformular estratégias até chegar à solução correcta, pode atingir os seus objectivos.

Esperamos que este livro seja uma boa ajuda, tanto como instrumento de trabalho, como de incentivo ao espírito de pesquisa e de descoberta do prazer de estudar Matemática.

O autor

Unidade 1: Teoria de conjuntos

8	Noções de conjuntos
8	Conjunto
12	Intervalos numéricos
12	Operações com conjuntos
15	Aplicação da teoria de conjuntos
18	Exercícios propostos



Unidade 2: Equação quadrática paramétrica simples

24	Revisão da equação quadrática
24	Fórmula resolvente da equação quadrática
26	Equações quadráticas paramétricas
29	Exercícios propostos



Unidade 3: Equação biquadrada

32	Equação biquadrada
32	Resolução da equação biquadrada
34	Composição da equação biquadrada
35	Propriedades das raízes de uma equação biquadrada
36	Determinação da equação biquadrada conhecidas as raízes
37	Exercícios propostos



Unidade 4: Função quadrática

40	Generalidade sobre funções
40	Noção de função
40	Função real de variável real
42	Estudo intuitivo das propriedades das funções
48	Função quadrática
48	Zeros e vértice
50	Transformações
54	Variação de sinal
55	Exercícios propostos



Unidade 5: Inequação quadrática

60	Inequação quadrática
60	Resolução de inequações quadráticas
66	Exercícios propostos



Índice

Unidade 6: Função exponencial

Introdução	70
Potências de expoente racional.....	71
Potências de expoente real. Propriedades.....	71
Função exponencial de base a	72
Propriedades.....	73
Estudo das propriedades analíticas e gráficas	74
Transformações do gráfico de uma função exponencial	76
Referência às funções exponenciais com a base entre 0 e 1	77
Equações com exponenciais.....	78
Funções do tipo $f(x) = c \cdot a^{kx}$	79
Exercícios propostos	85



Unidade 7: Função logarítmica

Logaritmo de um número.....	90
Logaritmo decimal	93
Propriedades operatórias dos logaritmos	94
Função logarítmica	98
Função logarítmica de base > 1	98
Caracterização da função inversa de uma função logarítmica ou exponencial.....	104
Exercícios propostos	107



Unidade 8: Trigonometria

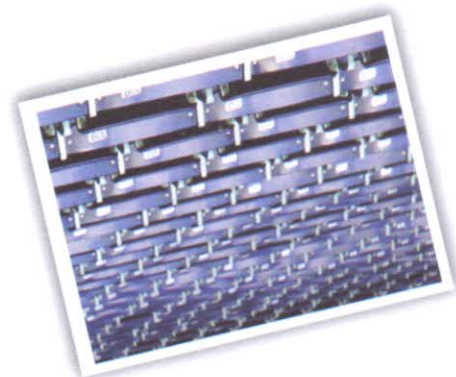
Revisão de conceitos sobre geometria	114
Teorema de Pitágoras	114
Figuras semelhantes	114
Crerios de semelhança de triângulos	115
Exercícios propostos	118
Importância da Trigonometria	119
Razões trigonométricas de um ângulo agudo	119
Tabelas de valores naturais.....	120
Resolução de triângulos rectângulos	123
Fórmulas fundamentais	126
Resolução de problemas que envolvem triângulos.....	127
Exercícios propostos	130
Unidades de medida de ângulos e arcos	132
Conversão do sistema sexagesimal/sistema circular	133
Razões trigonométricas de $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$	135
Generalização da noção de arco e de ângulo	137
Círculo trigonométrico.....	139
Seno e co-seno de um ângulo α	140
Tangente de um ângulo α	142



146	Razões trigonométricas dos ângulos 0° , 90° , 180° e 270°
147	Redução ao $1.^\circ$ quadrante
150	Equações trigonométricas
155	Exercícios propostos

Unidade 9: Estatística

160	Noções gerais de Estatística
164	Representações tabelares e gráficos
167	Medidas de centralização
167	Moda
168	Média aritmética
169	Mediana
170	Medidas de dispersão
170	Intervalo de variação
171	Desvio médio
172	Variancia
173	Desvio padrão
176	Exercícios propostos

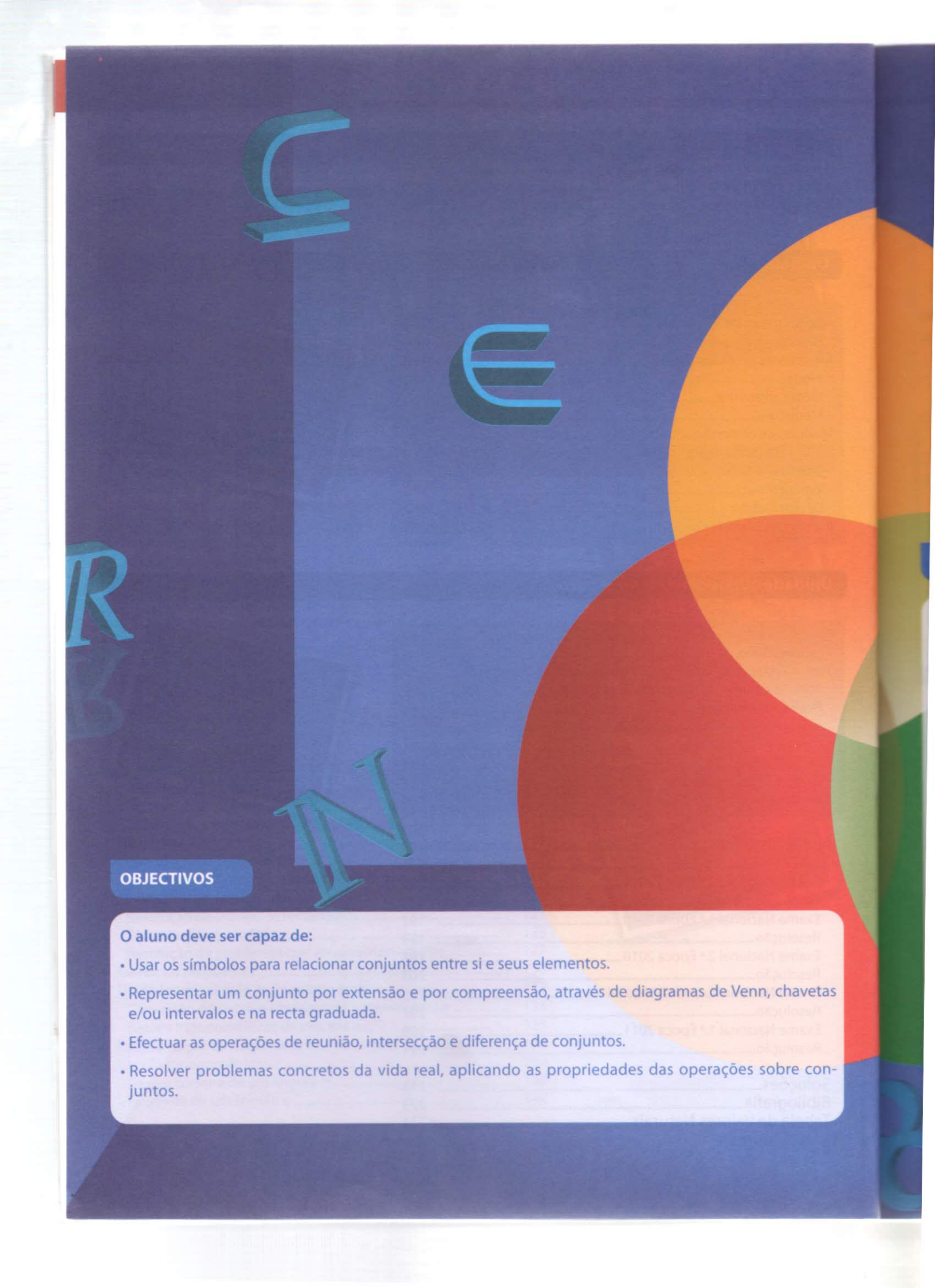


Unidade 10: Geometria no espaço

180	Conceitos primitivos
180	Postulados (Axiomas)
181	Posição relativa de duas retas coplanares no espaço
182	Posição de uma recta em relação a um plano
182	Posição de dois planos
184	Critérios de paralelismos e perpendicularidade de rectas
184	e planos
184	Paralelismo
185	Perpendicularidade
186	Exercícios propostos



188	Notas históricas
193	Exames
193	Exame Nacional 2.ª Época 2009
195	Resolução
197	Exame Nacional 1.ª Época 2010
199	Resolução
201	Exame Nacional 2.ª Época 2010
203	Resolução
205	Exame Nacional Extraordinário 2010
207	Resolução
209	Exame Nacional 1.ª Época 2011
211	Resolução
213	Soluções
223	Bibliografia
224	Tabela de Valores Naturais

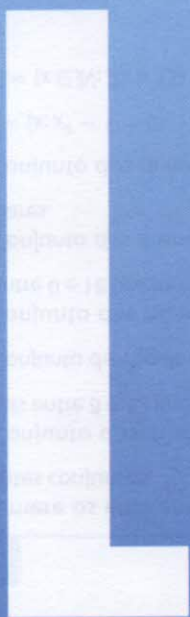
The background of the page is a dark blue gradient. It features several large, stylized mathematical symbols: a subset symbol ($\subseteq$) in the top left, an element symbol ($\in$) in the center, a natural number symbol ($\mathbb{N}$) in the bottom left, and a real number symbol ($\mathbb{R}$) on the far left. On the right side, there are three large, overlapping circles in orange, red, and green. The 'OBJECTIVOS' section is highlighted in a light blue rounded rectangle.

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Usar os símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos.
- Representar um conjunto por extensão e por compreensão, através de diagramas de Venn, chavetas e/ou intervalos e na recta graduada.
- Efectuar as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos.
- Resolver problemas concretos da vida real, aplicando as propriedades das operações sobre conjuntos.

UNIDADE



Págs. 6 a 21

CONTEÚDOS

- Teoria de Conjuntos
- Revisão sobre noções básicas
- Conjunto e elemento de um conjunto
- Representação de conjunto
- Relação de pertença
- Definição de conjuntos por extensão e por compreensão
- Conjunto vazio e conjunto singular
- Relações entre conjuntos
- Subconjuntos. Relação de inclusão (contém e está contido)
- Igualdade de conjuntos
- Conjunto universal
- Operações com conjuntos
- Reunião de conjuntos
- Intersecção de conjuntos
- Diferença de conjuntos
- Complementar de conjunto
- Propriedades das operações de conjuntos
- Resolução de problemas concretos da vida real

Noções de conjuntos

A **teoria dos conjuntos** é a teoria matemática que trata das propriedades dos conjuntos. Iremos rever uma introdução elementar à teoria dos conjuntos, base para o desenvolvimento de temas futuros, como relações, funções, análise combinatória, probabilidades, etc.

Conjunto

Conjunto é um conceito primitivo, não necessita de definição. Mas para melhor compreensão podemos dizer que é qualquer colecção ou agrupamento de números, pessoas, objectos, cidades, etc.

1

Enumere os elementos dos seguintes conjuntos:

- Conjunto dos números naturais entre 8 e 12 (inclusive).
- Conjunto de vogais do alfabeto.
- Conjunto dos números pares entre 0 e 18 (exclusive).
- Conjunto dos números primos pares.
- Conjunto dos divisores de 18.
- $F = \{x: x^2 - 1 = 0\}$
- $G = \{x \in \mathbb{N}: 2x > 15\}$



Exemplos

1. São conjuntos:

- Os números inteiros entre 1 e 100 inclusive.
- As províncias de Moçambique.
- Os alunos da Turma.
- As figuras geométricas planas.
- Os múltiplos de 5.

2. Podemos dizer com certeza que:

- Um determinado aluno é um elemento do conjunto «dos alunos da 10.ª classe da Escola Secundária Josina Machel.»
- 2 é um elemento do conjunto «dos números pares».
- d não é elemento do conjunto dos números reais.

Notação de conjuntos

Designamos os conjuntos por letras maiúsculas: $A, B, C, P, Q, \dots, X$ e os elementos dos conjuntos por letras minúsculas: a, b, c, d, p, q, x .

Representação de conjuntos

Um conjunto pode ser representado de várias formas distintas:

- Extensão
- Compreensão
- Diagramas

Extensão

Neste caso, escrevemos os seus elementos entre chavetas, separados por vírgulas e sem repetição.

Compreensão

Representa-se o conjunto através de uma propriedade característica dos seus elementos, como, $A = \{x: x \text{ tem a propriedade } \alpha\}$ que se pode ler «o conjunto A é de todos os x tais que x têm a propriedade α ».

Exemplos



1. O conjunto dos números pares, positivos menores que 12, em extensão:
 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
2. O conjunto dos números pares positivos menores que 50, em extensão:
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 48\}$
3. Para o conjunto, $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ em compreensão temos:
 $P = \{x : x \text{ é positivo par entre } 1 \text{ e } 13\}$
4. Para o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, em compreensão temos:
 $A = \{x : x \text{ é par positivo menor que } 12\}$

Dado um conjunto P «dos números fracionários entre 0 e 1», cada elemento de P deve ser um número fracionário compreendido entre 0 e 1. Para representar um elemento qualquer do conjunto P , usamos um símbolo variável, que pode ser x . Esta variável pode ser substituída por qualquer elemento do conjunto.

Assim o conjunto pode ser anotado da seguinte maneira:

$$P = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$$

- O conjunto A são todos os números naturais menores que 1000 e é representado por:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x < 1000\}$$

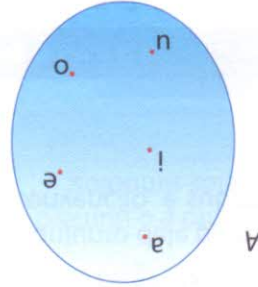
- O conjunto B são todos os múltiplos de 5 e é representado por:

$$B = \{x : x = 5n, n \in \mathbb{N}\}$$

Diagramas de Venn

Na representação por diagrama, traçamos uma linha fechada em torno dos seus elementos associados a pontos.

- O diagrama abaixo representa o conjunto A das vogais.



Relação de pertença

Dado A , um conjunto de todos os Números Inteiros positivos, a afirmação « x é um elemento de A » ou « x pertence ao conjunto A » significa que x é um número qualquer inteiro, positivo, e escrevemos simbolicamente:

$$x \in A$$

Onde o símbolo $\in$ significa pertence a A .

2

Escreva em notação simbólica:

- a) a é um elemento de A .
- b) A é subconjunto de B .
- c) A contém B .
- d) A não está contido em B .
- e) a não é um elemento de B .
- f) A não contém B .

Por outro lado, « $\frac{3}{2}$ não pertence a A » ou « $\frac{3}{2}$ não é um elemento de A », o que representamos por:

$$\frac{3}{2} \notin A$$

Sendo $\notin$ a negação de $\in$.



Exercício resolvido

Considere o conjunto dos divisores de 12 e diga se os elementos 3 e 5 pertencem ao conjunto

Resolução

Conjunto dos divisores de 12: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
Assim, $3 \in A$ e $5 \notin A$.

3

Dados os conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2, 3\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3\}$. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) cada uma das afirmações:

- a) $A \subset B$
- b) $\{1\} \supset A$
- c) $A \subset C$
- d) $B \subset C$
- e) $\{0, 2\} \in B$

Relação de Inclusão

Diz-se que um conjunto A **está incluído** num conjunto B quando todo o elemento que pertence ao conjunto A também pertence ao conjunto B , isto é,

$$A \subset B = \{x : x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

Onde o símbolo $\subset$ significa **está contido**, é **subconjunto**.

Do mesmo modo podemos dizer que o conjunto B **contém** o conjunto A , pois todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B , isto é,

$$B \supset A = \{x : x \in B \Rightarrow x \in A\}$$

Onde o símbolo $\supset$ significa **contém**.

Se todos os elementos de um conjunto A qualquer pertencem a um outro conjunto B , diz-se, então, que A é um **subconjunto** de B

- Todo o conjunto A é subconjunto dele próprio, ou seja $A \subset A$.
- O **conjunto vazio**, por convenção, é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\emptyset \subset A$



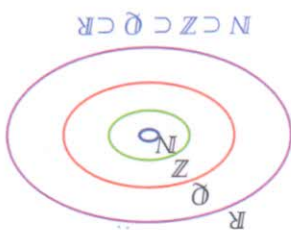
Exercício resolvido

Considere os conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; $B = \{3, 5, 7\}$; $C = \{2, 5, 7\}$, diga que relação de inclusão existe entre os conjuntos A , B e C

Resolução:

Qualquer elemento de B é elemento de A então $B \subset A$, mas $B \not\supset A$.
Como $2 \in C$, $2 \notin A$ e $2 \notin B$ então temos que $C \not\subset A$ e $C \not\subset B$.

O símbolo $\not\subset$ significa que **não está contido**. Exprime a negação da inclusão.



Recorde-se que $\mathbb{R}$

- Indique as alternativas correctas:
- Se A e B são dois conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$
- A. Sempre existe $x \in A$ tal que $x \notin B$
- B. Sempre existe $x \in B$ tal que $x \notin A$
- C. Se $x \in B$ então $x \in A$
- D. Se $x \notin B$ então $x \notin A$

4

Conjunto Vazio

Consideraremos o seguinte conjunto, $P = \{x \in \mathbb{N} : x < 8 \text{ e } x > 12\}$. Verificamos que o conjunto P não tem nenhum elemento. Nestas condições, o conjunto diz-se **vazio** e anota-se por,

$$P = \{\} \text{ ou } P = \emptyset$$

Conjunto Singular

Um conjunto é **singular** quando tem um único elemento.

Exemplos

- O conjunto V dos números negativos em $\mathbb{N}$ é $V = \{\}$
- O conjunto solução da equação $x - 1 = 0 \text{ e } 5 = \{1\}$
- $B = \{\text{Sol}\}$

Conjunto Universal

Chama-se **conjunto universal**, a todo o conjunto que contém todos os elementos duma colecção. Denota-se usualmente pela letra U .

Conjuntos numéricos fundamentais

Entendemos por **conjunto numérico**, qualquer conjunto cujos elementos são números. Existem infinitos conjuntos numéricos, entre os quais, os chamados conjuntos numéricos fundamentais, a saber:

- Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
- Conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Conjunto dos números racionais: $\mathbb{Q} = \{x : x = p/q \text{ com } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$. (o símbolo «:» lê-se «tal que»).
- Conjunto dos números reais: $\mathbb{R} = \{x : x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$.

Cardinal de um conjunto

O **cardinal** de um conjunto é o número dos elementos de um conjunto. Representa-se o cardinal pelos símbolos:

$$n(A) \text{ ou } \#A$$

Exemplos

1. Dados os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \left\{-\frac{2}{3}, -1, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

Temos:

$$A \subset \mathbb{N}$$

$$B \subset \mathbb{Z}$$

$$C \subset \mathbb{Q}$$

$$D \subset \mathbb{R}$$

$$A \subset \mathbb{Z}$$

$$B \subset \mathbb{Q}$$

$$C \subset \mathbb{R}$$

$$D \subset \mathbb{N}$$

$$A \subset \mathbb{R}$$

$$B \subset \mathbb{N}$$

$$C \subset \mathbb{Z}$$

$$D \subset \mathbb{Q}$$

2. Se $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ então $n(A) = \#A = 10$.

5

Quantos elementos tem a potência de um conjunto com 4 elementos?

Conjunto de conjuntos

O conjunto P formado por todos os subconjuntos de A chama-se **conjunto potência** de A ou conjunto de conjuntos de A . O conjunto potência de A representa-se por $P(A)$

A potência de um conjunto é igual a 2^n , isto é,

$$P(A) = 2^n$$

Onde n é o número dos elementos do conjunto dado.



Exemplo

Se $A = \{1, 2, 3\}$ então a sua potência é $P(A) = 2^3 = 8$

O conjunto potência é $P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

6

Represente, usando a notação de intervalos, cada um dos seguintes conjuntos definidos em

a) $A = \{x : 5x - 7 \geq 0\}$

b) $B = \{x : x > -1 \text{ e } x < 3\}$

c) $C = \{x : 1 < x \leq 5\}$

d) $D = \{x : x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

Intervalos numéricos

Dados dois números reais a e b , chama-se **intervalo** ao conjunto de todos os números reais compreendidos entre a e b , podendo inclusive incluir a e b . Os números a e b são os **limites do intervalo**, sendo a diferença $b - a$, chamada **amplitude do intervalo**.

Se o intervalo incluir a e b , o intervalo é **fechado** e caso contrário, o intervalo é dito **aberto**.

A tabela abaixo, define os diversos tipos de intervalos.

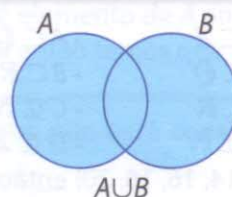
Tipos	Representação	Profundidade
Intervalo fechado	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$	inclui os limites a e b
Intervalo aberto	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$	exclui os limites a e b
Intervalo fechado à esquerda	$[a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$	inclui a e exclui b
Intervalo fechado à direita	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$	exclui a e inclui b
Intervalo semi-fechado à esquerda	$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$	valores maiores ou iguais a a
Intervalo semi-fechado à direita	$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$	valores menores ou iguais a b
Intervalo semi-aberto à direita	$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$	valores maiores do que a
Intervalo semi-aberto à esquerda	$]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$	valores menores do que b

Operações com conjuntos

Reunião ($\cup$)

Dados os conjuntos A e B , define-se como reunião ou união dos conjuntos A e B ao conjunto representado por $A \cup B$, formado por todos os elementos pertencentes a A ou B , ou seja:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



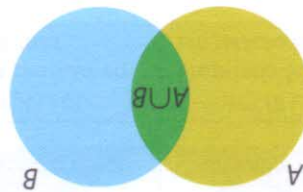
Propriedades imediatas

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B = B \cup A$ (a reunião de conjuntos é uma operação comutativa)
- $A \cup U = U$ (U é o conjunto Universal)

Interseção ($\cap$)

Dados os conjuntos A e B , define-se como **interseção** dos conjuntos A e B ao conjunto representado por $A \cap B$, formado por todos os elementos pertencentes a A e B , simultaneamente, ou seja:

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Propriedades imediatas

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$ (a interseção é uma operação comutativa)
- $A \cap U = A$ (U é o conjunto Universal)

Conjuntos disjuntos: dois ou mais conjuntos são disjuntos quando a sua interseção é um conjunto vazio.

$$C \cap D = \emptyset$$

C e D são conjuntos disjuntos.

Exemplos

1. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ e $B = \{1, 2, 5, 8, 9, 10, 13, 15\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 17\}$
 $A \cap B = \{1, 5, 9, 13, 15\}$

2. Dados os conjuntos na forma de intervalos $A = [1, 5]$ e $B = [3, 7]$.
 $A \cap B = [3, 5]$

Graficamente teremos:



3. Sejam os conjuntos $V = \{a, e, i, o, u\}$ e $R = \{1, 2, 3\}$ então $A \cap B = \emptyset$, os conjuntos A e B são disjuntos.

Quadro-resumo das propriedades

Dados os conjuntos A , B e C são válidas as seguintes propriedades:

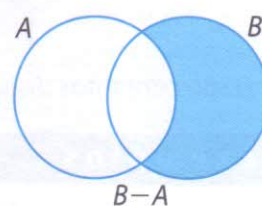
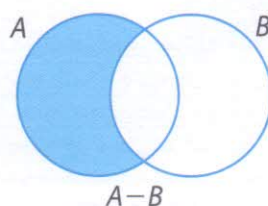
Reunião de conjuntos	Intersecção de conjuntos
$A \cup B = B \cup A$ Propriedade Comutativa	$A \cap B = B \cap A$ Propriedade Comutativa
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Propriedade Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Propriedade Associativa
$A \cup \emptyset = A$ O conjunto vazio é elemento neutro.	$U \cap A = A$ O conjunto universal é elemento neutro.
$U \cup A = U$ O conjunto Universal é o elemento absorvente.	$A \cap \emptyset = \emptyset$ O conjunto vazio é o elemento absorvente.
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Propriedade distributiva da reunião em relação à intersecção de conjuntos	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Propriedade distributiva da intersecção em relação à reunião de conjuntos

Diferença

Dados os conjuntos A e B , define-se como **diferença** entre A e B (nesta ordem) ao conjunto representado por $A - B$, formado por todos os elementos pertencentes a A , mas que não pertencem a B , ou seja

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$B - A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$



Propriedades imediatas:

- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $A - A = \emptyset$
- $A - B \neq B - A$ (a diferença de conjuntos não é uma operação comutativa).



Exemplo

Considere os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{7, 8, 9, 10\}$ e $C = \{15, 17\}$. Então,

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B - C = \emptyset$$

Complementar de um conjunto

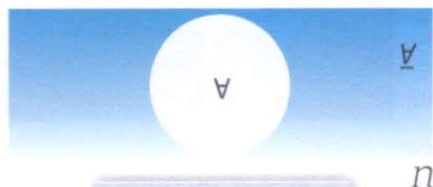
O **complementar** do conjunto B contido no conjunto A é a diferença entre os conjuntos A e B , ou seja é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B

Simbologia:

$$B \setminus A \text{ ou } C_A B \text{ ou } A - B$$

Caso particular: dado um subconjunto A de um conjunto Universal U . Chama-se complementar de um conjunto A em U e representa-se por $\bar{A}$ ou $C(A)$.

$$\bar{A} = \{x: x \notin A\}$$



Propriedades imediatas

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = U$
- $\bar{\emptyset} = U$
- $\bar{U} = \emptyset$

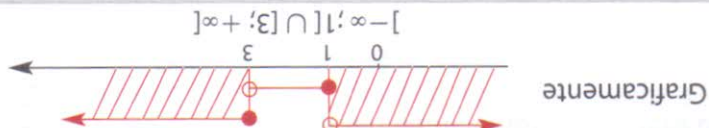
Exemplos

1. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ como Universal e dois subconjuntos $B = \{a, b, c, d\}$ e $D = \{c, d, e\}$. Então,
 - $\bar{B} = A - B = \{e, f\}$
 - $\bar{D} = A - D = \{a, b, f\}$
 - $\bar{B} \cap \bar{D} = \{f\}$

2. Dados os conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.
 - $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ então, $\bar{A} \cap B = \{2, 4, 6\}$
 - $A \cap \bar{B} = \{1, 5\}$ então, $A \cap \bar{B} = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

3. Seja o conjunto $C = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq x < 3\}$.

$$C = [1, 3[\text{ então } \bar{C} = \mathbb{R} \setminus C = \mathbb{R} - C =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$$



Aplicação da teoria de conjuntos

Número dos elementos da reunião de dois conjuntos

Como é do nosso conhecimento o número de elementos de um conjunto, é também conhecido como **cardinal do conjunto**.
 Dados dois conjuntos disjuntos A e B . O número de elementos de A ou B é dado por

$$n(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

UNIDADE 1



Exercícios resolvidos

1. Numa conferência do MINED, 18 dos 50 professores ensinam Português, 7 ensinam Inglês e 3 ensinam as duas línguas.
- Quantos professores só ensinam Português?
 - Quantos apenas Inglês?
 - Quantos professores não ensinam nem Português, nem Inglês.

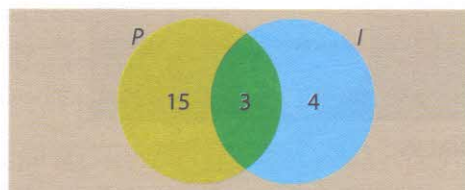
Resolução

N.º de professores: 50

Professores que ensinam Português: 18

Professores que ensinam Inglês: 7

- 15
- 4
- 29



2. Numa escola de 360 alunos, onde as únicas matérias dadas são Matemática e Português, 240 alunos estudam Matemática e 180 alunos estudam Português. O número de alunos que estudam Matemática e Português é:
- A. 120 B. 60 C. 90 D. 180 E. Nenhum

Resolução

Total dos alunos: 360

Alunos que estudam Matemática: 240

Alunos que estudam Português: 180

Alunos que estudam ambas disciplinas: x

$$n(A \cup B) = \# A + \# B - \# (A \cap B)$$

Assim

$$360 = 240 + 180 - x \Leftrightarrow 360 = 420 - x \Leftrightarrow x = 420 - 360 = 60$$

Opção: B.

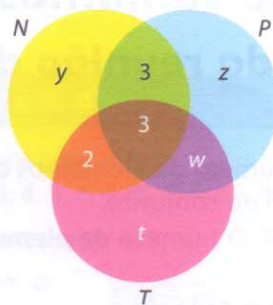
3. 35 estudantes estrangeiros vieram a Moçambique. 16 visitaram Niassa; 16, Pemba e 11, Tete. Desse estudantes, 5 visitaram Niassa e Tete e, desses 5, 3 visitaram também Pemba. O número de estudantes que visitaram Niassa ou Tete foi:

- A. 29 B. 24 C. 11 D. 8 E. 5

Resolução

Observe o diagrama de Venn seguinte:

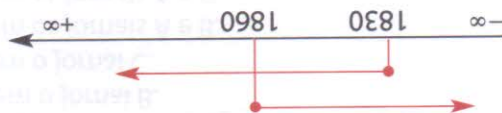
N = Niassa
P = Pemba
T = Tete



1. $n(N \cup T) = y + x + z + w + 2 + 3$

A alternativa D, não pode ser verdadeira, pois implicaria concluir-se pelos séculos XIX ou XX e, pelo enunciado, só existe uma alternativa verdadeira. Por exclusão, a alternativa verdadeira só pode ser a C.

Opção: C.



As alternativas A e B: não há elementos para se concluir por uma delas, inicialmente. A alternativa E, não pode ser verdadeira, pois implicaria – pelo enunciado – que o escritor nem teria nascido! Para visualizar veja o esquema.

Resolução

Analisando teremos:

- A. Século XIX
- B. Século XX
- C. Antes de 1860
- D. Depois de 1830
- E. Nenhuma das anteriores

A resposta correta é:

4. Num teste, uma questão de Literatura, com cinco alternativas em que só uma é verdadeira, refere-se à data de nascimento de um famoso escritor.

Opção: A.

Mas $n(N \cup T)$ representa o conjunto dos estudantes que visitaram Níassa ou Tete.

$$n(N \cup T) = 0 + 11 + 13 + 0 + 2 + 3 = 29$$

$n(N \cup T) = x + y + z + w + 2 + 3$, vem imediatamente, substituindo os valores:

Observando que:

$$0 + y = 11 \Leftrightarrow y = 11.$$

Substituindo o valor de x na equação (1), vem:

positivos ou nulos.

$x + w + 13 = 13 \Leftrightarrow x + w = 0$, de onde se conclui que $x = 0$ e $w = 0$, já que x e w são inteiros

Substituindo o valor de z na equação (2), vem:

$$11 + z + 6 = 30 \Leftrightarrow z = 13 \dots\dots\dots (5)$$

Substituindo as equações (1) e (3) na (4), vem:

$$x + y + z + w + t + 2 + 3 = 35 \Leftrightarrow x + y + z + w + t = 30 \dots\dots\dots (4)$$

$$t + w + 5 = 11 \Leftrightarrow t + w = 6 \dots\dots\dots (3)$$

$$x + w + z + 3 = 16 \Leftrightarrow x + w + z = 13 \dots\dots\dots (2)$$

$$x + y + 5 = 16 \Leftrightarrow x + y = 11 \dots\dots\dots (1)$$

Analisando o diagrama, podemos escrever:



Exercícios propostos

1. Indique quais os conjuntos definidos por:

a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$

b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^0$

c) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_0^+$

d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

e) $\mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{Q}$

f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

g) $\mathbb{Q}^0 \cup \mathbb{Q}_0^+$

2. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto universo e considere os conjuntos:

$A =]-10, 0]$

$B = [2, 5[$

$C =]-2, 5]$

$D = [3, 10[$

Determine

a) $A \cap C$

b) $B \cap C$

c) $A \cap D$

d) $(B \cup C) \cap D$

e) $(A \cup B) \cap C$

3. Dado $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{0, 2, 4, 6\}$

$C = \{9, 10\}$

Determine

a) $A \cap B$

b) $\overline{A \cap B}$

c) $\overline{A} \cap \overline{B}$

d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) $A \cup \emptyset$

4. Dados os conjuntos:

$U = \mathbb{R}, A = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 6\}$

Determine gráfica e analiticamente os seguintes conjuntos

a) $A \cup B$

b) $A \cap \overline{B}$

c) $A \setminus \overline{B}$

As questões são de escolha múltipla escolha a resposta correcta.

5. Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s):

A. Apenas II. e III.

B. Apenas I. e III.

C. Apenas IV.

D. Todas as afirmações

E. Apenas II. e IV.

6. Numa pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

- 40 % dos entrevistados lêem o jornal A.
- 55 % dos entrevistados lêem o jornal B.
- 35% dos entrevistados lêem o jornal C.
- 12% dos entrevistados lêem os jornais A e B.
- 15% dos entrevistados lêem os jornais A e C.
- 19% dos entrevistados lêem os jornais B e C.
- 7% dos entrevistados lêem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não lêem nenhum dos três jornais.

Considerando esses dados, é correcto afirmar que o número total de entrevistados foi:

A. 1250

B. 1200

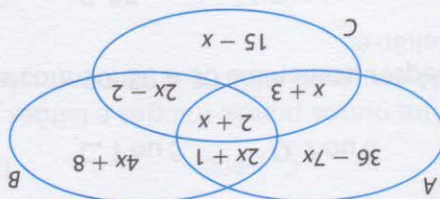
C. 1350

D. 1500

E. 1400



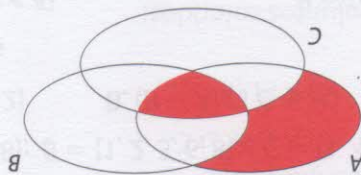
7. Na figura estão representados três conjuntos e as expressões representam o número de elementos de cada conjunto.



Sabendo que: $\#(A \cup B \cup C) = 69$ então $\#(A \cap B \cap C)$ é:

- A. 13 B. 29 C. 5 D. 11 E. 42

8. A parte riscada do diagrama abaixo corresponde a:



- A. $A \cup B \cup C$
 B. $A - (B \cup C)$
 C. $(A - B) \cup (B \cup B)$
 D. $(A - (A \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$
 E. $(B \cup C) \cup A$

9. Para que o conjunto $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, k\}$ sejam iguais, o valor de k é:

- A. 2 B. 0 C. 4 D. 3 E. 1

10. Se um conjunto A possui 1 024 subconjuntos, então o cardinal de A é igual a:

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 9 E. 10

11. Após um jantar, foram servidas as sobremesas X e Y . Sabe-se que das 10 pessoas presentes, 5 comeram a sobremesa X , 7 comeram a sobremesa Y e 3 comeram as duas. Quantas não comeram nenhuma?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 0

12. Se $A = \emptyset$ e $B = \{10\}$, então:

- A. $A \in B$ B. $A \cup B = \emptyset$ C. $A = B$ D. $A \cap B = B$ E. $B \subset A$

13. Sejam A , B e C conjuntos finitos. O número de elementos de $A \cap B$ é 30, o número de elementos de $A \cap C$ é 20 e o número de elementos de $A \cap B \cap C$ é 15. Então o número de elementos de $A \cap (B \cap C)$ é igual a:

- A. 35 B. 15 C. 50 D. 45 E. 20



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Diferenciar uma equação paramétrica da não paramétrica.
- Resolver uma equação quadrática paramétrica simples.

UNIDADE 2

Equação quadrática
paramétrica simples

Págs. 22 a 29

CONTEÚDOS

- Equação quadrática paramétrica simples
- Conceito de equação paramétrica
- Equações quadráticas paramétricas simples
- Resolução de equações biquadradas

Revisão da equação quadrática

Chama-se **equação quadrática** a uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$; com a, b, c números reais e $a \neq 0$.

Numa equação quadrática podem-se verificar os seguintes casos:

1. Se $a = 0$, temos uma equação linear $bx + c = 0$.
2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, temos uma equação quadrática incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$, que se resolve da seguinte maneira,
 $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ que tem solução em $\mathbb{R}$ sempre que $\frac{c}{a} < 0$.
3. Se $a \neq 0$ e $c = 0$, temos uma equação quadrática incompleta do tipo $x^2 + bx = 0$, cuja resolução consiste em evidenciar a incógnita x .

Assim, $x^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0$



Exemplos

1. $4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$; $S = \{-2, 2\}$

2. $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$; $S = (0, 4)$

4. Equação quadrática completa $x^2 + bx + c = 0$ com a, b, c números reais e $a \neq 0$

1

1. Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $2x^2 - 12 = 2x$

c) $-3x^2 + 5x + 2 = 0$

d) $-5x^2 + 9x - 2 = 0$

Fórmula resolvente da equação quadrática

Para a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, vem

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• Binómio discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

• Raízes da equação quadrática

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$



Exemplo

Resolva a seguinte equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ aplicando a fórmula resolvente.

$a = 1, b = 5, c = 6$, então $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 + 1}{2} \vee x = \frac{-5 - 1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3 \end{aligned}$$

$$S = \{-3; -2\}$$

Soma e produto das raízes de uma equação quadrática

• Soma das raízes

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} + \sqrt{\Delta} + \frac{2a}{2a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

• Produto das raízes

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{c}$$

Discussão das raízes de uma equação quadrática

Discriminante da equação quadrática

Maior do que zero ($\Delta > 0$)

A equação terá duas raízes reais e diferentes ($x_1 \neq x_2$), podendo considerar-se os seguintes casos:

• Raízes do mesmo sinal

– Se ambas as raízes são positivas temos $P > 0$ e $S > 0$.
– Se ambas as raízes são negativas temos $P > 0$ e $S < 0$.

• Raízes de sinais contrários

– Se a raiz de maior valor absoluto é positiva temos $P < 0$ e $S > 0$.
– Se a raiz de maior valor absoluto é negativa temos $P < 0$ e $S < 0$.
– Se as raízes são simétricas temos $P > 0$ e $S = 0$.

• Uma só raiz nula

– Se $x_1 = 0$ e $x_2 \neq 0$ então $P = 0$.
– Se $x_1 = 0$ e $x_2 > 0$ então $P = 0$ e $S > 0$.
– Se $x_1 = 0$ e $x_2 < 0$ então $P = 0$ e $S < 0$.

Discriminante da equação quadrática

Igual a zero ($\Delta = 0$)

A equação admite duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$).

• $P > 0$ e $S > 0$, raiz dupla positiva
• $P > 0$ e $S < 0$, raiz dupla negativa
• $P = 0$, raiz dupla nula

Discriminante da equação quadrática

Negativo ($\Delta < 0$)

A equação não admite raízes reais. As raízes são chamadas imaginárias.

P – Produto de raízes
S – Soma de raízes

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \frac{4a^2}{b^2 - \Delta^2} &= \frac{4a^2}{b^2 - (b^2 - 4ac)} = \frac{4a^2}{4ac} = \frac{a}{c} \\ \frac{4a^2}{b^2 - b^2 + 4ac} &= \frac{4a^2}{4ac} = \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Equações quadráticas paramétricas

Uma equação quadrática que para além da variável admite outros parâmetros é chamada **equação quadrática paramétrica**,

$$ax^2 + bx + cm = 0, \text{ com } a, b, c, \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

2

Considere a equação do segundo grau em x ,

$$x^2 - 2(m+2)x + (m^2 + 2m - 3) = 0.$$

Determine o valor de m de modo que a equação admita:

- Duas raízes reais e diferentes.
- Duas raízes reais e iguais.
- Duas raízes reais.
- Uma só raiz nula.
- Uma raiz nula e outra positiva.
- Uma raiz nula e outra negativa.
- Duas raízes nulas.

3

Considere a equação

$$8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0.$$

Determine o valor do parâmetro real m de modo que a equação admita:

- Duas raízes de sinais contrários sendo a negativa a de maior valor absoluto.
- Uma raiz dupla positiva.

Resolução de equações quadráticas paramétricas

- Dada a equação $x^2 + 5x + m = 0$. Determine o valor de m de modo que:

- A equação admita duas raízes reais e diferentes.

Condição: $\Delta > 0$

$$a = 1 \quad b = 5 \quad c = m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4m > 0$$

$$25 - 4m > 0 \Leftrightarrow -4m > -25 \Leftrightarrow 4m < 25 \Leftrightarrow m < \frac{25}{4}$$

$$S = m \in]-\infty; \frac{25}{4}[$$

- O produto das raízes seja positivo.

Condição: $P > 0$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

$$S = m \in]0; +\infty[$$

- Uma das soluções seja 3.

Condição: $x = 3$

$$3^2 + 5 \cdot 3 + m = 0 \Leftrightarrow 9 + 15 + m = 0 \Leftrightarrow m = -24$$

- Dada a equação $(m+2)x^2 - 2mx + (m-1) = 0$. Determine o valor de m de modo que a equação admita:

- Raízes reais.

Condição: $\Delta \geq 0$

$$a = m+2 \quad b = -2m \quad c = m-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m-1) = -4m + 8$$

$$-4m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow -4m \geq -8 \Leftrightarrow m \leq 2$$

$$S = m \in]-\infty; 2]$$

b) Uma só raiz nula.

Condição: $\Delta > 0 \wedge P = 0$

$$\begin{cases} m \leq 2 \\ \frac{a}{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ \frac{m-1}{m+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m=1 \end{cases}$$

$$\text{Sol.} = m = 1$$

c) Raízes reais e inversas.

Condição: $\Delta > 0 \wedge P = 1$

$$\begin{cases} m \leq 2 \\ \frac{m-1}{m+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m-1 = m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

S = Condição impossível pois $0 \neq 3$ 3. Calcule o valor de m de modo que a equação $x^2 + (m-1)x + 12 = 0$ tenha uma raiz tripla da outra.Condição $x_1 = 3x_2$

Sendo dada uma relação entre as raízes constitui-se um sistema com a soma e o produto das raízes. Assim,

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 & (1) \\ x_1 + x_2 = -(m-1) & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = 12 & (3) \end{cases}$$

Da primeira e segunda equação vem:

$$3x_2 + x_2 = -(m-1) \Leftrightarrow 4x_2 = -(m-1) \Leftrightarrow x_2 = \frac{-(m-1)}{4}$$

Substituindo a primeira equação na terceira,

$$3x_2 \cdot x_2 = 12 \Leftrightarrow 3x_2^2 = 12 \Leftrightarrow x_2^2 = 4$$

$$\text{Como } x_2 = \frac{-(m-1)}{4} \text{ então } \left(\frac{-(m-1)}{4}\right)^2 = 4$$

$$(-m+1)^2 = 64 \Leftrightarrow -m+1 = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow -m+1 = \pm 8 \Leftrightarrow -m = -1 \pm 8 \Leftrightarrow m = -7 \vee m = 9$$

Exercícios resolvidos

1. Dada a equação,

$$3x^2 - 2x + p = 0, p \in \mathbb{R}$$

a) Determine o valor de p de modo que a equação tenha um e só um zero.b) Resolva a equação para o valor de p encontrado.

Resolução:

a) Para que a equação tenha um só zero, teremos que ter $\Delta = 0$

$$a = 3$$

$$b = -2$$

$$c = p$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12p$$

logo,

$$4 - 12p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$$

b) Se $p = \frac{1}{3}$ teremos,

$$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2(9)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

2. Determina o parâmetro real p de modo que $x^2 - 3px + 4p + 7 = 0$ seja nulo para $x = 5$.

Resolução:

$$x^2 - 3px + 4p + 7 = 0, \quad \text{para } x = 5 \text{ vem:}$$

$$5^2 - 3p(5) + 4p + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25 - 15p + 4p + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11p = -32$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{32}{11}$$

1. Dada a equação, $x^2 - 3(k - 1)x + k^2 8k + 15 = 0$ cujas raízes são x_1 e x_2 . Calcule os valores de k de modo que:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 - 24}{x_1 + x_2} = 2$$

2. A equação $ax^2 - 4x - 16 = 0$, tem uma raiz cujo valor é 4. Nessas condições o valor do coeficiente a é:

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

3. O valor de k para que a equação $-10x^2 - 5x + k = 0$ tenha raízes iguais é:

- A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{8}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

4. Na equação $x^2 + mx + 12 = 0$, uma das raízes é 6. O valor de m é:

- A. -3 B. -2 C. -4 D. 3

5. Numas das raízes da equação $2x^2 + mx + n = 0$ é 1. O valor de $m + n$ é:

- A. -3 B. -2 C. 0 D. 2

6. Os valores de k para que a equação $3x^2 + 4x + k - 6 = 0$ tenha raízes reais diferentes são:

- A. $k < -\frac{3}{22}$ B. $k \leq -\frac{3}{22}$ C. $k < \frac{3}{22}$ D. $k \leq \frac{3}{22}$

7. Para que a equação $\sqrt{3}x^2 + kx + \sqrt{3} = 0$, tenha uma raiz única o valor de k deve ser:

- A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $-3\sqrt{3}$

8. Na equação $3x^2 - x - (k - 1) = 0$, o produto das raízes é $\frac{5}{6}$. Nessas condições o valor de k é:

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{2}{11}$

9. Na equação $3x^2 - 10x + 2k - 1 = 0$, a soma das raízes é igual ao produto. Nessas condições o valor de x é:

- A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{11}$ D. $\frac{2}{13}$

10. O valor do coeficiente k na equação $10x^2 - kx - 1 = 0$ para que a soma das suas raízes seja igual a $\frac{5}{4}$ é:

- A. $\frac{11}{2}$ B. $\frac{13}{2}$ C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{25}{2}$

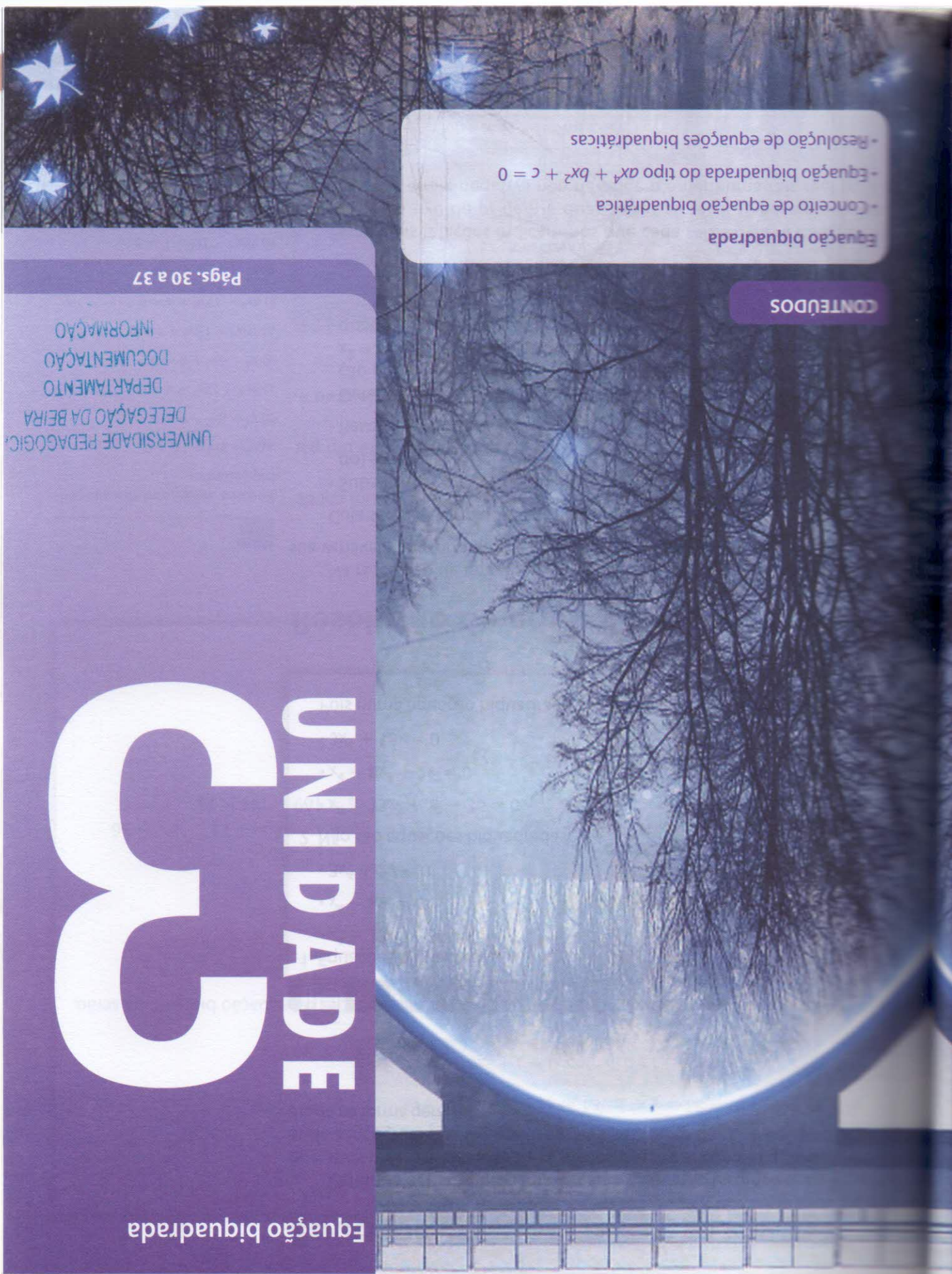
11. Na equação $(k + 2)x^2 - 5x + 3 = 0$, uma das raízes é igual ao inverso da outra. O valor de k é:

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar equações biquadradas.
- Resolver uma equação biquadrada simples.
- Resolver problemas práticos conducentes a uma equação biquadrada.



CONTEÚDOS

Equação biquadrada

- Conceito de equação biquadrática
- Equação biquadrada do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$
- Resolução de equações biquadráticas

Equação biquadrada

UNIDADE 3

UNIVERSIDADE PEDAGÓGICA
DELEGAÇÃO DA BEIRA
DEPARTAMENTO
DOCUMENTAÇÃO
INFORMAÇÃO

Págs. 30 a 37

Equação biquadrada

Define-se **equação biquadrada** como a equação incompleta do 4.º grau que após efectuadas todas as reduções possíveis, contém apenas termos onde a incógnita tem expoente de grau par. Deste modo, a equação biquadrada na forma geral é,

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$



Exemplos

1. Equações biquadradas:

- $x^4 - 13x^2 - 36 = 0$

- $x^4 - 8x^2 = 0$

- $3x^4 + 27 = 0$

2. Não são equações biquadradas:

- $x^4 - 13x^3 + x^2 - 36 = 0$

- $x^4 - 8x^3 + 2x^2 = 0$

- $3x^4 + 13x = 0$

Pois numa equação biquadrada a variável x só possui expoentes pares.

Resolução de equações biquadradas

Na resolução de uma equação biquadrada em $\mathbb{R}$ devemos substituir a sua variável, transformando-a numa equação do 2.º grau.

Cuja sequência prática a utilizar é a seguinte:

- Substituir x^4 por y^2 (ou qualquer outra incógnita elevada ao quadrado) e x^2 por y .
- Resolver a equação $ay^2 + by + c = 0$
- Determinar a raiz quadrada de cada uma das raízes (y_1 e y_2) da equação $ay^2 + by + c = 0$ e substituindo estes valores na equação inicial $x^2 = y_1$ e $x^2 = y_2$, extraíndo a raiz quadrada de cada membro teremos quatro valores para x :

$$x_1 = +\sqrt{y_1} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{y_1} \text{ ou } x_3 = +\sqrt{y_2} \text{ ou } x_4 = -\sqrt{y_2}$$

Essas duas relações indicam-nos que cada **raiz positiva** da equação $ay^2 + by + c = 0$ dá origem a duas raízes simétricas para a equação biquadrada e a raiz negativa não dá origem a nenhuma raiz real para a mesma.

7. Resolva a equação $x^4 - 81 = 0$.

Resolução

Fazendo a substituição $x^4 = y^2$, teremos a equação do 2.º grau:

$$y^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{81} \Leftrightarrow y_1 = 9 \vee y_2 = -9$$

Voltando à equação inicial teremos:

$$x^2 = 9 \vee x^2 = -9$$

Como sabemos, para $x^2 = -9$, não há raízes reais, então as soluções da equação biquadrada serão,

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = +\sqrt{9} \vee x_2 = -\sqrt{9} \Leftrightarrow x_1 = +3 \vee x_2 = -3$$

$$S = \{-3, 3\}$$

2. Resolva a equação $x^4 - 13x^2 - 36 = 0$

Resolução

$$x^4 - 13x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 13x^2 - 36 = 0$$

fazendo a substituição $x^4 = y^2$ e $x^2 = y$ vem:

$$y^2 - 13y - 36 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm 5}{2} \Leftrightarrow y_1 = 9 \vee y_2 = 4$$

$$\text{Para } y_1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Para } y_2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$S = \{-3, -2, 2, 3\}$$

Discussão das raízes de uma equação biquadrada

• A cada **raiz positiva** da equação resolvente corresponderá um par de raízes simétricas da equação biquadrada original.

• A cada **raiz negativa** da equação resolvente corresponderá um par de raízes inexistentes na equação biquadrada original.

Considerando sempre positivo o coeficiente da variável de grau 4, analisemos o quadro **resumo** seguinte:

Análise das raízes de uma equação biquadrada ($a > 0$)		
$c < 0$	$b \geq 0$	Nenhuma raiz real
	$b < 0$	Quatro raízes reais
$c > 0$	$\Delta \geq 0$	Quatro raízes reais
	$\Delta < 0$	Nenhuma raiz real
	$b > 0$	Duas raízes reais
$c = 0$	$b < 0$	Quatro raízes reais, com duas nulas
	$b = 0$	Quatro raízes reais e nulas

Resolva as seguintes equações biquadradas:

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

d) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

e) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

f) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

g) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$

h) $28x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

i) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

j) $x^4 + x^2 + 5 = 0$

Fórmula resolvente da equação biquadrada

Sem utilizarmos a equação quadrática podemos estabelecer uma fórmula geral para a resolução da equação biquadrada.

Seja a equação geral $ax^4 + bx^2 + c = 0$, a fórmula geral de resolução será:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$



Exercício resolvido

Resolva a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Resolução

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 4 \quad \Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm 3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4} \vee x = \pm \sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 2 \vee x = \pm 1$$

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

Composição da equação biquadrada

Toda equação biquadrada de raízes reais x_1, x_2, x_3 e x_4 pode ser composta pela fórmula:

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = 0$$



Exercício resolvido

Compor a equação biquadrada cujas raízes são:

a) 0 e ± 7

b) $\pm a$ e $\pm b$

Resolução

a) $(x - 0)(x - 0)(x + 7)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 49) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 49x^2 = 0$

b) $(x + a)(x - a)(x + b)(x - b) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$

Propriedades das raízes de uma equação biquadrada

Consideremos a equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4 e a equação do 2.º grau $ay^2 + by + c = 0$, cujas raízes são y_1 e y_2 .

De cada raiz da equação do 2.º grau, obtemos duas raízes simétricas para a equação biquadrada. Assim:

$$x_1 = +\sqrt{y_1} \text{ e } x_2 = -\sqrt{y_1}$$

$$x_3 = +\sqrt{y_2} \text{ e } x_4 = -\sqrt{y_2}$$

Do exposto, podemos estabelecer as seguintes propriedades:

P1: A soma das quatro raízes reais de uma equação biquadrada é nula.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +\sqrt{y_1} - \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_2} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

P2: A soma dos quadrados de duas raízes não simétricas é igual $-\frac{a}{b}$.

Da equação transformada vem $y_1 + y_2 = -\frac{a}{b}$

As raízes da equação biquadrada são $x = \pm\sqrt{y}$

$$\text{Então } x_1 = \sqrt{y_1} \vee x_2 = -\sqrt{y_1} \text{ e } x_3 = \sqrt{y_2} \vee x_4 = -\sqrt{y_2}$$

$$y_1 = x_1^2 \vee y_1 = x_2^2 \text{ e } y_2 = x_3^2 \vee y_2 = x_4^2$$

Substituindo y_1 e y_2 na igualdade $y_1 + y_2 = -\frac{a}{b}$ vem:

$$x_1^2 + x_2^2 = -\frac{a}{b}$$

P3: O produto dos quadrados de duas raízes não simétricas é igual $\frac{a}{c}$.

$$x_1^2 \cdot x_3^2 = \frac{a}{c}$$

Exercício resolvido

Escreva a equação biquadrada que admite as raízes, 1 e -2.

Resolução

Façamos $x_1 = 1$ e $x_3 = -2$

$$x_1^2 + x_3^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow 5 = 5 \quad ; \quad P = x_1^2 \cdot x_3^2 = 1 \cdot 4 = 4$$

Como a equação é $x^4 - 5x^2 + P = 0$, então a equação pedida é:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Compor uma equação biquadrada que admita as raízes.

a) 1, -1, 5 e -5

b) -4, 0 e 4

Determinação da equação biquadrada conhecida as raízes

Da equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, sendo $a \neq 0$ vem $x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a} = 0$. Mais,

$$x_1^2 + x_3^2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -(x_1^2 + x_3^2)$$

e

$$x_1^2 \cdot x_3^2 = \frac{c}{a},$$

Portanto,

$$x^4 - (x_1^2 + x_3^2)x^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 = 0.$$

Fazendo

$$S = -(x_1^2 + x_3^2) \quad \text{e} \quad P = x_1^2 \cdot x_3^2,$$

temos:

$$x^4 - Sx^2 + P = 0$$



Exercício resolvido

Escreva a equação biquadrada que admite as raízes 1 e 4 e, em seguida, decompõe-a em factores lineares.

Resolução

$$x_1^2 + x_3^2 = 1 + 16 = 17 \Rightarrow S = 17 \quad ; \quad P = x_1^2 \cdot x_3^2 = 1 \cdot 16 = 16$$

Como a equação é $x^4 - Sx^2 + P = 0$, então a equação pedida é:

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Fazendo a mudança de variável:

$$x^4 = y^2 \text{ e } x^2 = y \text{ vem}$$

$$y^2 - 17y + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 17^2 - 64 = 225$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{17 \pm 15}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 16 \vee \Leftrightarrow y_2 = 1$$

$$x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Como as raízes são simétricas duas a duas teremos:

$$x^4 - 17x^2 + 16 = (x-1)(x+1)(x-4)(x+4) = 0$$



1. Resolva as equações biquadradas:

a) $x^4 - 16 = 0$

b) $x^4 - x^2 = 0$

c) $3x^4 - 75 = 0$

d) $4x^4 - 36x^2 = 0$

e) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

f) $16x^4 = 40x^2 - 9$

g) $x^4 - 6x^2 + 10 = 0$

h) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

i) $(x^2 + 10)(x^2 - 10) + 36 = 0$

j) $(x^2 - 3)^2 + (x^2 + 1)^2 = 26$

k) $(x^2 - 2)^2 + (x^2 - 4)^2 = 4$

l) $x^4 - \frac{x^2 - 3}{2x^2 + 4} = \frac{2}{3}$

m) $x^4 - \frac{x^2 - 5}{x^2 + 5} = \frac{2}{3}$

n) $a^2x^4 - (a^4 - 1)x^2 + a^2 = 0$

o) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$

p) $c^4x^4 - c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2b^2 = 0$

2. Compor, em x e com o coeficiente de x^4 unitário, as equações biquadradas de raízes:

a) $0; 0,5$ e -5

b) $\pm(2 + \sqrt{3})$ e $\pm(\sqrt{3} - 1)$

3. Simplifique a fração:

$$\frac{x^4 - 34x^2 + 225}{x^2 - 2x - 15}$$

4. Escreva a equação biquadrada que admite as raízes -1 e 1 .



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar a função quadrática.
- Identificar a expressão analítica de uma função quadrática.
- Representar graficamente as funções quadráticas.
- Determinar domínio, contradomínio, zeros da função, vértices da parábola, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e equação do eixo da simetria.
- Indicar o sentido da concavidade do gráfico da função quadrática.
- Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos de coordenadas.
- Determinar as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria de uma parábola.
- Determinar a expressão analítica da função quadrática a partir do gráfico.
- Resolver problemas práticos que envolvem funções quadráticas.

UNIDADE



Págs. 38 a 57

CONTEÚDOS

- Função quadrática
- Revisão do conceito de função quadrática
- Estudo completo da função $y = ax^2$: domínio, contra-
domínio, zeros da função, vértices da parábola, variação
do sinal da função, variação da função (monotonia) e
equação do eixo de simetria
- Função do tipo $y = ax^2 + bx + c$
- Caso $y = a(x - p)^2$
- Representação gráfica da função $y = a(x - p)^2$ a partir
de $y = ax^2$
- Estudo completo da função $y = a(x - p)^2 + q$
- Representação gráfica da função $y = a(x - p)^2 + q$
- Estudo completo da função $y = a(x - p)^2 + q$
- Caso $y = ax^2 + bx + c$
- Representação gráfica da função $y = ax^2 + bx + c$, a
partir da determinação dos zeros e do vértice

* Facultativo

Generalidades sobre funções*

Noção de função

Na linguagem do dia a dia, o termo função surge ligado a expressões como «depende de» ou «varia com», conforme os exemplos seguintes o demonstram:

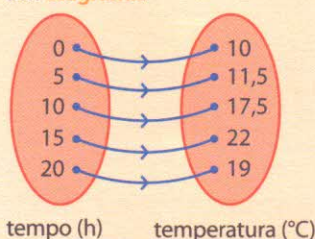
- «O preço da gasolina **varia em** função do preço do barril de petróleo.»
- «A distância ideal de travagem num veículo motorizado **varia em** função da sua velocidade.»
- «O volume de uma bola **depende do** comprimento do raio.»

Em Matemática, a algumas destas relações entre grandezas (variáveis) chamamos **funções**, do latim *functione*.

Modos de definir uma função:

Por exemplo, a correspondência entre as temperaturas numa localidade, registada de 5 em 5 horas ao longo de um dia, é uma função que pode ser definida por:

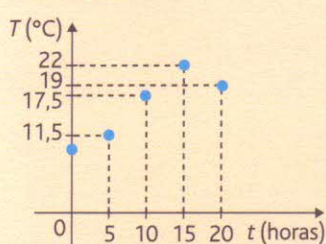
- Um **diagrama**:



- Uma **tabela**:

t (horas)	T (°C)
0	10
5	11,5
10	17,5
15	22
20	19

- Um **gráfico**:



- Uma **expressão analítica**:

$$T = -0,008t^3 + 0,21t^2 - 0,55t + 10$$

Dados dois conjuntos A e B , chamamos **função** definida em A com valores em B a toda a correspondência que associa a cada elemento de A um e um só elemento de B , isto é, a toda a **correspondência unívoca** de A para B .

Simbolicamente, e designando a correspondência por f , escrevemos:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Ao conjunto A chamamos **domínio** de f e aos seus elementos chamamos **originais**, ou **objectos**. A cada objecto x corresponde uma só **imagem** y , $y = f(x)$ no conjunto de chegada B . Os originais correspondem aos valores da variável independente, e as imagens aos valores da variável dependente.

Chamamos **contradomínio** de f ao conjunto dos elementos de B que são imagem de algum elemento de A .

São habituais as notações D_f para o domínio de f e D'_f , ou CD_f , para o contradomínio de f .

Função real de variável real

É importante salientar as funções em que o domínio e o conjunto de chegada são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Neste caso dizemos que estamos perante **uma função real de variável real**, abreviadamente **função r. v. r.**

Simbolicamente:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Quando se expressa uma função, real de variável real, através de uma expressão analítica – uma fórmula, que traduz uma regra, que permite construir as imagens a partir dos objectos – e não é dada indicação específica

quanto ao seu domínio, entende-se que este é o subconjunto de $\mathbb{R}$ mais amplo em que a expressão dada tem sentido.

Consideremos, por exemplo, a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \frac{4}{x+2} \quad \left(\text{ou } y = \frac{4}{x+2} \right)$$

Como a expressão que traduz a função f só tem sentido se o denominador não se anular, e não é dada qualquer indicação adicional quanto ao domínio, presume-se que este é:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

A função pode então ser caracterizada por:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = \frac{4}{x+2}$$

Para **caracterizar** uma função é necessário indicar o seu domínio e a sua expressão analítica.

Exercício resolvido

Determine o domínio das seguintes funções reais de variável real:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ b) $g(x) = \frac{1-x^2}{3}$ c) $h(x) = \sqrt{4x-2}$

Resolução

a) A expressão analítica da função só tem significado em $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ pois o denominador tem de ser diferente de zero, ou seja:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -5\} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

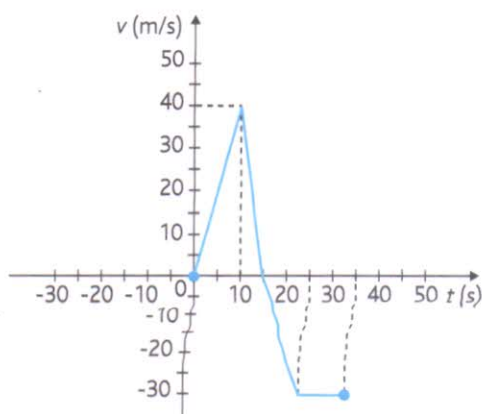
b) Analogamente ao exemplo anterior, temos:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

c) Recordando que uma raiz de índice par só tem significado para radicandos maiores ou iguais a zero, temos:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : 4x - 2 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Estudo intuitivo das propriedades das funções



Observando com atenção o gráfico de uma função, podemos concluir algumas das suas características de forma intuitiva.

O gráfico ao lado representa a variação da velocidade v de um carro, que se desloca rectilaneamente durante 35 segundos, em função do tempo: temos por este meio definida uma função v .

Zeros e sinal

A função v toma o valor 0 quando t é igual a 0 ou a 15, ou seja:

$$v(0) = 0 \text{ e } v(15) = 0.$$

Isto significa que para $t = 0$ e para $t = 15$, a velocidade do carro é nula.

Zero de uma função é todo o objecto que tem como imagem o valor zero.

$$a \in D_f \text{ é zero de } f \text{ se e só se } f(a) = 0$$

Assim, dizemos que os zeros da função v acima definida são: 0 e 15.

Graficamente, os zeros de uma função são as abcissas dos pontos, onde o gráfico da função intersecta o eixo Ox .

- A função v acima definida toma sempre valores negativos quando x pertence ao intervalo $]15, 35]$. Diz-se negativa nesse intervalo.
- A função f toma sempre valores positivos quando x pertence ao intervalo $]0, 15[$. Diz-se positiva nesse intervalo.

Generalizando:

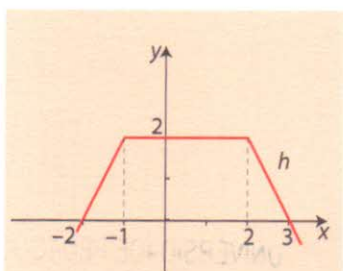
Uma função f é **positiva** num intervalo do seu domínio se $f(x) > 0$, qualquer que seja o elemento x desse intervalo.

Uma função f é **negativa** num intervalo do seu domínio se $f(x) < 0$, qualquer que seja o elemento x desse intervalo.

Registemos as conclusões num quadro:

$t(s)$	0		10		15		25		35
$v(m/s)$	0	+	40	+	0	-	-30	-	-30

A este quadro chamamos **tabela de variação de sinal**.



- h é crescente em $]-\infty, 2]$.
- h é decrescente em $[-1, +\infty[$.
- h é crescente e decrescente em $[-1, 2]$, pois h é constante nesse intervalo.

Monotonia

Consideremos de novo o exemplo da página anterior no intervalo $[0, 10]$, quando a variável independente (o tempo) aumenta, a variável dependente (a velocidade) também aumenta. A função v diz-se **crecente** neste intervalo. No entanto, por exemplo, no intervalo $[10, 25]$, quando aumenta a variável independente diminui a variável dependente. A função v diz-se **decrescente** no intervalo considerado. Finalmente, em $[25, 35]$ a variável dependente não varia. A função v é **constante**.

Estamos agora em condições de definir função monotona:

Uma função diz-se **monótona** num intervalo do domínio se for crescente ou decrescente nesse intervalo.

Os intervalos do domínio onde a função é crescente ou decrescente chamam-se **intervalos de monotonia**.

Registemos num quadro, designado por **tabela de variação**, as condições:

v (m/s)	0	↘	40	↘	0	↗	-30
t	0	10	15	25	35		

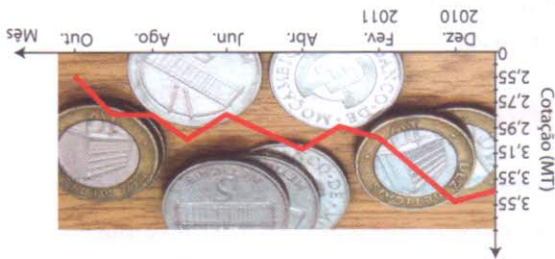
ou, alternativamente:

0	↖	40	↖	-30	←	-30
0		10		25		35

Extremos de uma função.

Observe-se o gráfico ao lado da função que representa a evolução da cotação das ações de uma empresa na bolsa. No intervalo de tempo considerado, esta função tem vários máximos, por exemplo:

- O primeiro em Dezembro de 2010, com a cotação das ações a 3,55 MT.
 - O segundo em Abril de 2010, com a cotação de 3,15 MT.
 - O terceiro em Julho de 2011, com a cotação de 3,05 MT.
 - O quarto em Agosto/Setembro de 2011, com a cotação de 2,85 MT.
- O primeiro é o valor mais elevado da função em todo o seu domínio. Diz-se **máximo absoluto**. Os outros são máximos, mas apenas na sua vizinhança. Dizem-se **máximos relativos** ou locais.



Uma função f diz-se **crecente** num intervalo do domínio se, para todos os elementos reais x_1 e x_2 deste intervalo, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Uma função f diz-se **decrescente** num intervalo do domínio se, para todos os elementos reais x_1 e x_2 deste intervalo, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Uma função diz-se **constante** num intervalo do domínio se nesse intervalo todos os objectos tiverem a mesma imagem.

Se nas definições de função crescente e de função decrescente retirarmos a igualdade obtemos as definições de função estritamente crescente e de função estritamente decrescente, respectivamente.

UNIDADE 4

De um modo semelhante temos que o valor da cotação mais baixo é 2,55 MT, referente ao mês de Outubro de 2011. Diz-se **mínimo absoluto**. Mas existem outros valores mínimos: 2,95 MT; 2,85 MT e 3,45 MT, que são valores mínimos mas na sua vizinhança. Dizem-se **mínimos relativos** ou locais.

Aos máximos ou mínimos absolutos ou relativos de uma função chamamos **extremos**.

Generalizando:

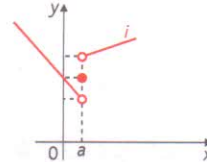
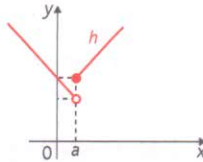
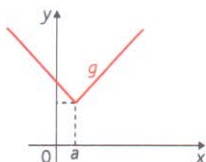
Seja f uma função real de variável real de domínio D_f , $a \in D_f$ e $b \in D_f$.

- $f(a)$ é o **máximo absoluto** de f se $f(a)$ é o maior elemento de D_f , isto é, se para todo o x de D_f : $f(a) \geq f(x)$.
- $f(b)$ é o **mínimo absoluto** de f se $f(b)$ é o menor elemento de D_f , isto é, se para todo o x de D_f : $f(b) \leq f(x)$.
- $f(a)$ é **máximo relativo** de f se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ contido no domínio de f e contendo o ponto a , tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(a) \geq f(x)$. a diz-se um **maximizante** da função.
- $f(b)$ é **mínimo relativo** de f se existir um intervalo aberto $]x_1, x_2[$ contido no domínio de f e contendo o ponto b , tal que para todo o $x \in]x_1, x_2[$, $f(b) \leq f(x)$. b diz-se um **minimizante** da função.



Exercício resolvido

Alguma das seguintes funções e têm um mínimo relativo em $x = a$?



Resolução

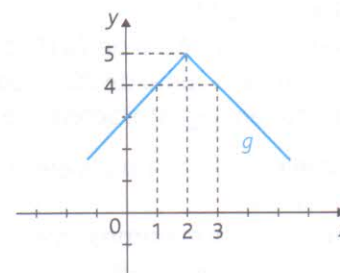
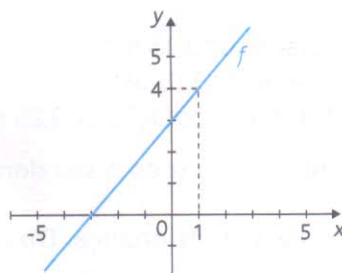
A função g tem um mínimo absoluto em $x = a$.

Nas funções h e i existem imagens para $x < a$ menores que a respectiva imagem de a .

Logo, apenas a função g tem um mínimo relativo (que também é absoluto) em $x = a$.

Injectividade

Observe os seguintes gráficos de duas funções reais de variável real f e g de domínio $[-6, 12]$.



Verificamos que, por exemplo, 4 é pela função f imagem apenas de 1, portanto pela função g é imagem de 1 e de 3, ou seja:

$$f(1) = 4, g(1) = 4 \text{ e } g(3) = 4$$

Dizemos que:

Uma função f é **injetiva** num intervalo I do seu domínio quando, para cada dois objectos diferentes desse intervalo, as respectivas imagens são também diferentes.

Por exemplo, no intervalo $[1, 3]$ a função f é injetiva.

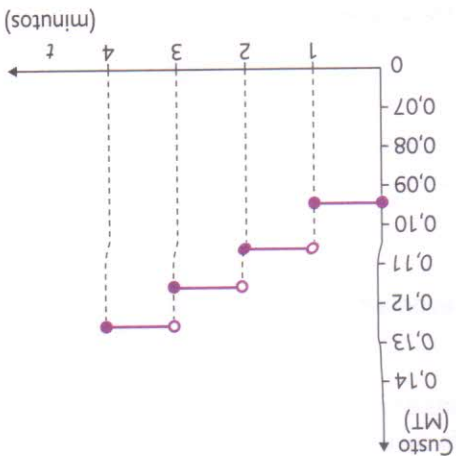
Em relação à função g , verificamos que existem num intervalo I do seu domínio pelo menos dois objectos diferentes, 1 e 3, que têm a mesma imagem, 4, ou seja, $1 \neq 3$ e $g(1) = g(3)$.

Diz-se, portanto, que a função g é **não injetiva** no intervalo $[1, 3]$.

Continuidade

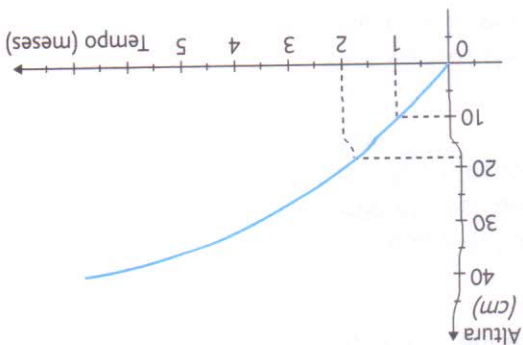
Observe a representação gráfica do custo de uma chamada em função do tempo para uma determinada rede telefónica.

Pelo gráfico verificamos que, ao ultrapassar um minuto, o preço da chamada salta para um escalão superior não passando pelos valores intermédios, e assim sucessivamente. Isto é, o preço não varia continuamente com a duração da chamada. Dizemos que esta função que traduz o custo da chamada em função do tempo, **não é contínua**.
O gráfico representa uma função descontínua nos pontos de abscissas 1, 2, 3, 4, ...



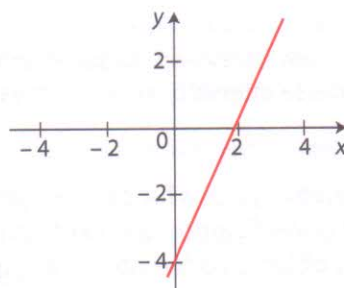
Mas, se pensarmos no crescimento de um ser vivo, uma planta, por exemplo, ela não pode passar de 10 cm de altura para 20 cm sem passar por todos os valores intermédios. Expressamos este facto dizendo que a função que traduz o crescimento de uma planta em função de tempo é **contínua**.

A continuidade é uma propriedade local, ou seja, depende apenas do comportamento da função numa vizinhança de um ponto. Uma função pode ser contínua num ponto e não ser contínua noutra. Por exemplo, no caso da função que define o custo das chamadas telefónicas a função é descontínua no ponto de abscissa 2, mas é contínua no ponto de abscissa 2,5. Não tem sentido discutir a continuidade em pontos cuja abscissa não esteja no domínio da função.



Comportamento de uma função nos ramos infinitos

Ao analisar o gráfico da seguinte função afim,



verificamos que:

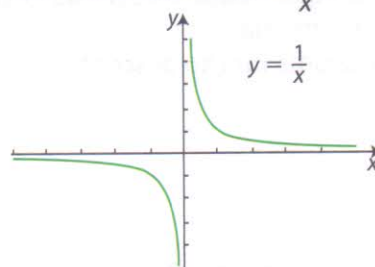
- Para valores positivos de x cada vez maiores, a variável y toma valores ainda maiores. Isto é, a função tende para $+\infty$ e escrevemos:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

- Para valores negativos de x cada vez menores (isto é, com valores absolutos cada vez maiores), a variável y toma valores cada vez menores (isto é, com valores negativos cada vez maiores em valor absoluto), isto é, a função tende para $-\infty$ quando x tende para $-\infty$ e escrevemos:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

Se observarmos o gráfico da função $h(x) = \frac{1}{x}$,



verificamos que:

- À medida que x toma valores positivos cada vez maiores, as imagens aproximam-se cada vez mais de zero. Isto é, a função h tende para zero quando x tende para $+\infty$, e escrevemos:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow h(x) \rightarrow 0$$

- À medida que x toma valores negativos cada vez menores (isto é, com valores absolutos cada vez maiores) as imagens aproximam-se de zero. Isto é, a função h tende para zero quando x tende para $-\infty$ e escrevemos:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow h(x) \rightarrow 0$$

- Para valores de x cada vez mais próximos de zero, mas superiores a este, os valores de $y = h(x)$ são cada vez maiores.
- Para valores de x cada vez mais próximos de zero, mas inferiores a este, os valores de $y = h(x)$ são cada vez menores.

Transformações de gráficos de funções

Quadro resumo

$g(x) = f(x) + a$	O gráfico $g(x)$ que resulta de $f(x)$ adicionando a à variável dependente, obtém-se do gráfico de f deslocando-o na vertical.	Se $a > 0$ o gráfico de f desloca-se para cima a unidades. Se $a < 0$ o gráfico de f desloca-se para baixo a unidades.
$g(x) = f(x + a)$	O gráfico $g(x)$ que resulta de $f(x)$ adicionando a à variável independente, obtém-se do gráfico de f deslocando-o na horizontal.	Se $a > 0$ o gráfico de f desloca-se na horizontal para a esquerda a unidades. Se $a < 0$ o gráfico de f desloca-se na horizontal para a direita a unidades.
$g(x) = f(x + a) + b$	O gráfico $g(x)$ que resulta de $f(x)$ adicionando a à variável dependente e b à variável independente, obtém-se do gráfico de f deslocando-o simultaneamente na horizontal e vertical.	Se $a > 0$ e $b > 0$ o gráfico de f desloca-se na horizontal, a unidades, para a esquerda e, b unidades, na vertical, para cima. Se $a < 0$ e $b > 0$ o gráfico de f desloca-se na horizontal, a unidades, para a direita e, b unidades, na vertical, para cima. Se $a > 0$ e $b < 0$ o gráfico de f desloca-se na horizontal, a unidades, para a esquerda e, b unidades, na vertical, para baixo.
$g(x) = af(x)$	O gráfico $g(x)$ que resulta de $f(x)$ multiplicando por a a variável dependente, obtém-se do gráfico de f encolhendo-o ou esticando-o na vertical.	Se $0 < a < 1$ o gráfico de f «encolhe» na vertical pelo fator a . Se $a > 1$ o gráfico de f «estica» na vertical pelo fator a .
$g(x) = f(ax)$	O gráfico $g(x)$ que resulta de $f(x)$ multiplicando por a a variável independente, obtém-se do gráfico de f encolhendo-o ou esticando-o na horizontal.	Se $0 < a < 1$ o gráfico de f «estica» na horizontal pelo fator a . Se $a > 1$ o gráfico de f «encolhe» na horizontal pelo fator a .
$g(x) = af(bx)$	O gráfico $g(x)$ resulta de $f(x)$ multiplicando por a a variável dependente e por b a variável independente, obtém-se do gráfico de f encolhendo-o ou esticando-o na vertical e encolhendo-o ou esticando-o na horizontal.	Se $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$ o gráfico de f «encolhe», pelo fator a , na vertical e «estica», pelo fator b , na horizontal. Se $0 < a < 1$ e $b > 1$ o gráfico de f «encolhe», pelo fator a , na vertical e «encolhe», pelo fator b , na horizontal. Se $a > 1$ e $0 < b < 1$ o gráfico de f «estica», pelo fator a , na vertical e «estica», pelo fator b , na horizontal. Se $a > 1$ e $b > 1$ o gráfico de f «estica», pelo fator a , na vertical e «encolhe», pelo fator b , na horizontal.

Função quadrática

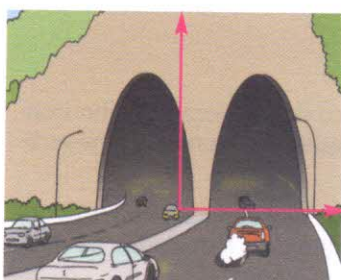
Chama-se **função quadrática** a toda a função do tipo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Os gráficos destas funções são **parábolas**.

Zeros e vértice



Lei do anulamento do produto:
Um produto de factores é nulo se e só se um dos factores for nulo.

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Observe a figura ao lado.

A entrada de um túnel tem a forma aproximada de uma parábola. Considerando o referencial o.n. como se indica na figura, podemos considerar que a parábola é caracterizada pela expressão:

$$m(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 6a)$$

Qual a largura da estrada?

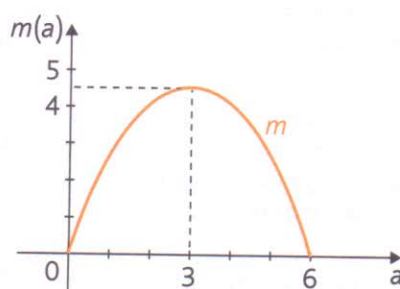
A largura da estrada corresponde à distância entre os seus zeros.

$$-\frac{1}{2}(a^2 - 6a) = 0 \Leftrightarrow a(a - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 6$$

Concluimos que a largura da estrada é de 6 metros.

Qual será a altura máxima do túnel?



Como sabemos, o eixo de simetria contém o vértice da parábola, logo, a equação do eixo é $a = 3$.

Então, a abcissa do vértice é 3. Vamos calcular a sua ordenada:

$$m(3) = -\frac{1}{2}(3^2 - 6 \times 3) = 4,5$$

A altura máxima é 4,5 metros, sendo o maximizante a média das abcissas dos seus zeros.

Como a concavidade da parábola está voltada para baixo, o máximo é a ordenada do seu vértice, cujas coordenadas são $(3; 4,5)$.

1

Seja $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$ uma função, real de variável real.

- Indique os zeros da função.
- Determine as coordenadas do vértice.
- Escreva a equação do eixo de simetria.

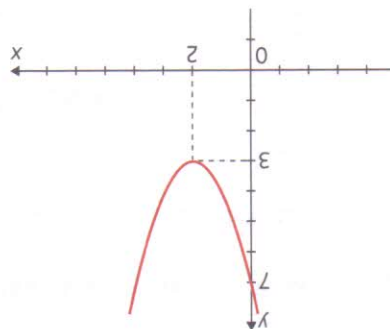
Podemos então calcular as coordenadas do vértice da parábola, calculando primeiro os seus zeros, depois a média das abscissas dos zeros e, por fim, a ordenada desse ponto.

Mas se a função não tem zeros, será que podemos usar um processo semelhante?

Consideremos a função, real de variável real, definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 7.$$

Num referencial (O, x, y) esboçemos o gráfico desta função:



Como a concavidade está voltada para cima, esta parábola tem um mínimo. Vamos calcular as coordenadas desse mínimo.

Igualemos a expressão da função a um valor qualquer que pertença ao contradomínio, por exemplo, 7, que sendo um valor igual ao termo independente, permite obter uma equação mais simples de resolver:

$$x^2 - 4x + 7 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Existem dois objectos cuja imagem é 7: 0 e 4

Logo, o eixo de simetria passa pelos pontos cuja abscissa é a média das abscissas destes valores, ou seja, $x = 2$.

Calculando a respectiva ordenada temos:

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 7 = 3$$

As coordenadas do vértice V são $(2, 3)$.

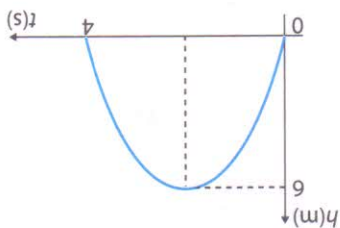
O eixo de simetria é a recta $x = 2$.

Generalizando:

$$ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

- a) Quanto tempo demorou a bola a chegar ao chão, depois de ter sido lançada?
- b) Qual a altura máxima atingida pela bola? Em que instante foi atingida essa altura?
- c) Escreva a expressão analítica que define a função apresentada.
- d) Em que instantes a bola atinge a altura de 4,5 metros?



O gráfico representa a altura em função do tempo alcançada por uma bola lançada de baixo para cima e na vertical, com uma determinada velocidade inicial.

3

- a) Prove que $2 \in D'_g$.
- b) Utilizando o processo descrito no texto ao lado, determine as coordenadas do vértice.
- c) Escreva a equação do eixo de simetria.

Seja a função real de variável real,

$$g(x) = 4x^2 + 5x + 3.$$

2

Binómio discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

A abcissa do vértice é: $\frac{-b}{a} + 0 = -\frac{b}{2a}$

A ordenada do vértice é:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

As coordenadas do vértice V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

O eixo de simetria é a recta $x = -\frac{b}{2a}$.

Transformações

Funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$

Consideremos ainda a função $y = 2x^2$, mas com domínio $\mathbb{R}$,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = 2x^2$$

Observando o gráfico pode-se concluir que:

- É uma parábola.
- O ponto inferior da curva é o vértice da parábola de coordenadas $(0, 0)$ (ponto do gráfico correspondente à mudança do sentido de variação da função).
- O mínimo da função é zero.
- O contradomínio da função é $\mathbb{R}_0^+$.
- A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$ e decrescente no intervalo $] -\infty, 0]$.
- O eixo das ordenadas, $x = 0$, é o eixo de simetria do gráfico de f .
- Objectos simétricos têm imagens iguais.

Verifiquemos este último ponto:

$$f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$$

logo, para todo o número real x ,

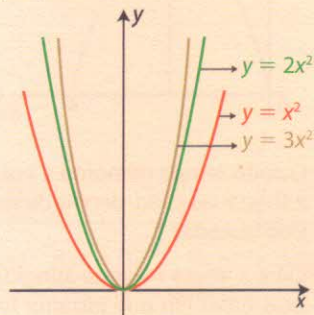
$$f(-x) = f(x)$$

ou seja, f é uma função par. E ainda temos que:

- A função nunca é negativa.
- A concavidade da parábola está voltada para cima.

x	x^2	$2x^2$	$3x^2$
0	0	0	0
1	1	2	3
2	4	8	12
3	9	18	27
4	16	32	48
5	25	50	75
6	36	72	108

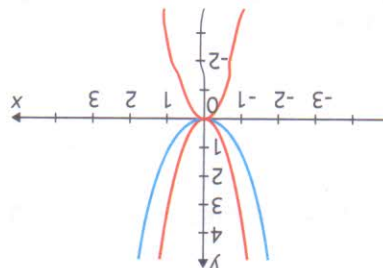
$a \geq 1$



Uma função, real de variável real, é par se e só se:

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f \text{ e } f(-x) = f(x)$$

Representemos num referencial (O, x, y) várias funções do tipo $y = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Ao observarmos os gráficos obtidos podemos concluir que os gráficos das funções $y = ax^2$, $a \neq 0$:

- São parábolas cuja «abertura» é tanto maior quanto menor for o valor absoluto de a .
- Se $a > 0$, a concavidade está voltada para cima.
- Se $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

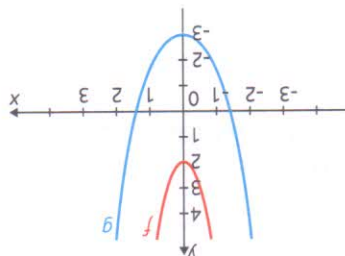
Domínio	$\mathbb{R}$	$a > 0$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	
Zeros	$x = 0$	
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
Monotonia	Crescente em $\mathbb{R}^+$ Decrescente em $\mathbb{R}^-$	
Extremos	Mínimo absoluto em $(0, 0)$	
Concavidade	Voltada para cima	

Funções do tipo $y = ax^2 + k$ ou $y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$

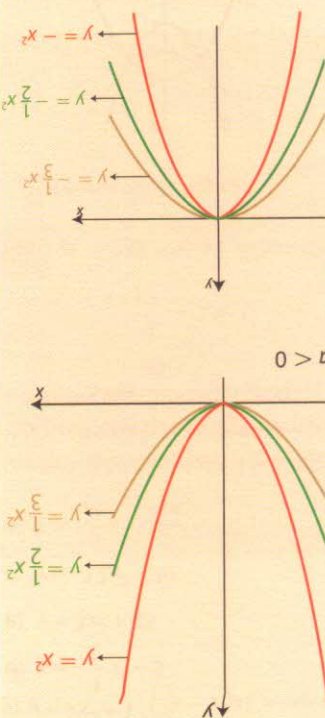
Consideremos as funções, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 3x^2 + 2 \text{ e } g(x) = x^2 - 3$$

Vamos esboçar num referencial (O, x, y) os respectivos gráficos.



Os gráficos obtidos são simétricos dos gráficos anteriores em relação ao eixo das abcissas.



x	3	2	1	0	-1	-2	-3	x
$\frac{1}{3}x^2$	3	2	1	0	1	4	9	x^2
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	$\frac{1}{2}x^2$
$\frac{1}{0.33}x^2$	1.33	0.33	0	0	0.33	1.33	3	$\frac{1}{0.33}x^2$

Indique o intervalo em que a função, real de variável real, definida por $f(x) = 6x^2$ é crescente e o intervalo em que é decrescente.

4

5

Determine os valores reais de m de modo que a função $g(x) = mx^2$ seja crescente no intervalo $[-5, 0[$.

6

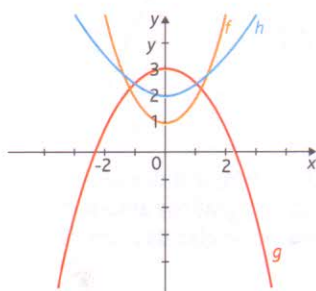
Observando os gráficos das seguintes funções:

- a) $y = -x^2 + 2$
- b) $y = 2x^2 - 5$
- c) $y = 2x^2 + 1$
- d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
- e) $y = 3x^2 + 45$
- f) $y = -12x^2 - 30$
- g) $y = -\frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{34}$

Indique as coordenadas do vértice das parábolas que as representam e o respectivo contradomínio.

7

Observando a figura.



Estabeleça a correspondência entre os gráficos dados e cada uma das seguintes funções:

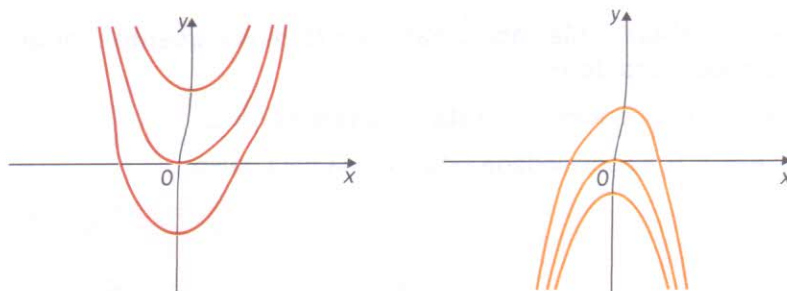
- a) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$
- b) $y = x^2 + 1$
- c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

Podemos verificar que o gráfico de f em comparação com o gráfico de $y = 3x^2$ se deslocou segundo o eixo Oy , sendo o contradomínio de f o intervalo $[2, +\infty[$, e não tem zeros.

O gráfico de g deslocou-se também segundo o eixo Oy , em comparação com o gráfico de $y = x^2$, tendo como contradomínio o intervalo $[-3, +\infty[$, e com dois zeros $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$.

Generalizando:

Os gráficos das funções $y = ax^2 + k$ são parábolas que se obtêm de um gráfico da parábola $y = ax^2$, por uma translação vertical segundo o vector $(0, k)$.

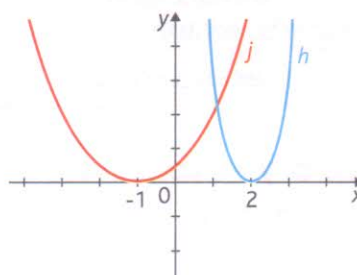


O **contradomínio** destas funções é:

- $[k, +\infty[$ se $a > 0$
- $]-\infty, k]$ se $a < 0$

Representemos agora as funções, reais de variável real, definidas por:

$$h(x) = 3(x - 2)^2 \text{ e } j(x) = 0,5(x + 1)^2$$



O gráfico de h obtém-se deslocando cada objecto do gráfico da função $y = 3x^2$ duas unidades para a direita, e o gráfico de j obtém-se deslocando cada objecto do gráfico da função $y = 0,5x^2$ uma unidade para a esquerda.

Os zeros de h e j são respectivamente $x = 2$ e $x = -1$.

Generalizando:

Os gráficos da função $y = a(x - h)^2$ são parábolas que se obtêm a partir de um gráfico de $y = ax^2$ por translação horizontal, segundo o vector $(h, 0)$.

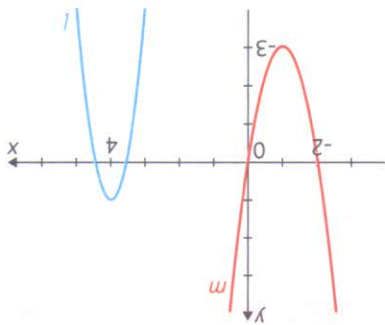
O **contradomínio** destas funções é:

- $[0, +\infty[$ se $a > 0$
- $]-\infty, 0]$ se $a < 0$

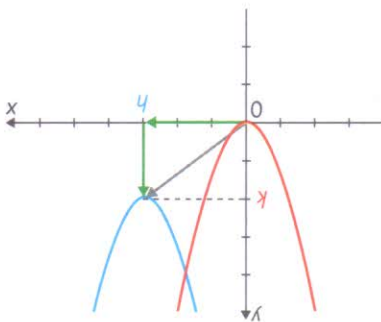
Funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k$ ou $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Num referencial (O, x, y) representemos as funções:

$$f(x) = -3(x - 4)^2 + 1 \text{ e } m(x) = 3(x + 1)^2 - 3$$



O gráfico da função $y = a(x - h)^2 + k$ é uma parábola de vértice $V(h, k)$ que se obtém a partir do gráfico de $y = ax^2$ por uma translação associada ao vetor (h, k) .



Esta apresenta as seguintes características:

Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Vértice	(h, k)	(h, k)
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Monotonia	Crescente: $[h, +\infty[$ Decrescente: $]-\infty, h]$	Crescente: $]-\infty, h]$ Decrescente: $[h, +\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto em (h, k)	Máximo absoluto em (h, k)
Eixo de simetria	$x = h$	$x = h$

9

Indique para cada uma das seguintes funções as coordenadas do vértice, o contradomínio e a equação do eixo de simetria.

- a) $y = -2(x + 1)^2 - 1$
 b) $y = \frac{1}{4}(x - 3)^2 + 3$
 c) $y = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$

$$y = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

Assim, temos $h = -\frac{3}{2}$ e $k = -\frac{1}{8}$.

Exemplo: Se $y = 2x^2 + 3x + 1$,

$$k = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\text{fazendo } h = -\frac{b}{2a} \text{ e}$$

$$y = a(x - h)^2 + k$$

podem escrever-se na forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

As funções do tipo

e) $f(x) = 10\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

d) $f(x) = -\frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

c) $f(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b) $h(x) = -3(x + 2)^2$

a) $g(x) = \frac{3}{4}(x - 1)^2$

simetria.

Represente a partir do gráfico da função $f(x) = x^2$, as seguintes funções, indicando as coordenadas do vértice e a equação do eixo de

8

Variação de sinal

Para estudar o sinal da função quadrática, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ basta conhecer os seus zeros (se existirem) e o sinal do coeficiente a .

Vejam os:



Exercício resolvido

Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

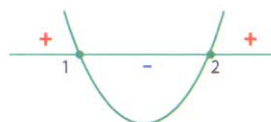
- Qual o sentido da concavidade da parábola representativa da função?
- Como varia o sinal de f ?

Resolução

a) Está voltada para cima porque $a > 0$ ($a = 1$).

b) Calculemos os zeros da função:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$



A função é positiva em $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]1, 2[$.

10

Considere as seguintes funções reais de variável real, definidas por:

$$g(x) = -x^2 + 6x$$

$$h(x) = 2x^2 + 5x - 7$$

Recorrendo à calculadora gráfica indique em que intervalo:

- g é positiva.
- h é negativa.

11

Considere a família de funções, reais de variável real,

$$a(x) = -x^2 + 3x + m, \quad m \in \mathbb{R}$$

- Determine para que valores de m :

$$a(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Para $m = -2$, estude a variação de sinal da função obtida.
- Qual o efeito do parâmetro m no gráfico da família das funções consideradas?

Estudar a **variação de sinal da função** é, portanto, determinar os intervalos em que a função é positiva ou é negativa.

Generalizando, podemos concluir que:

	$a > 0$	$a < 0$	
$\Delta > 0$			Se a função tem 2 zeros x_1 e x_2 : A função toma o sinal de a fora do intervalo dos seus zeros e consequentemente toma o sinal contrário ao de a no intervalo dos seus zeros.
$\Delta = 0$			Se a função tem 1 zero duplo: A função toma o sinal de a para todos os valores reais excepto o valor que anula a função.
$\Delta < 0$			Se a função não tem zeros: A função toma o sinal de a .

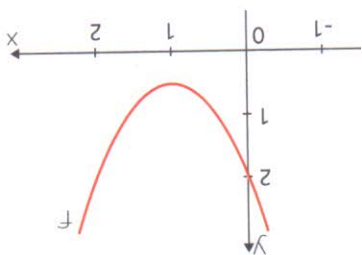


1. Considere o gráfico ao lado que representa a função f :

Então, esta função pode ser definida por:

A. $f(x) = (x - 1)^2 + \frac{1}{2}$
 C. $f(x) = -(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$

B. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 3x + 2$
 D. $f(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$



2. Seja $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ uma função real de variável real. Podemos afirmar que:

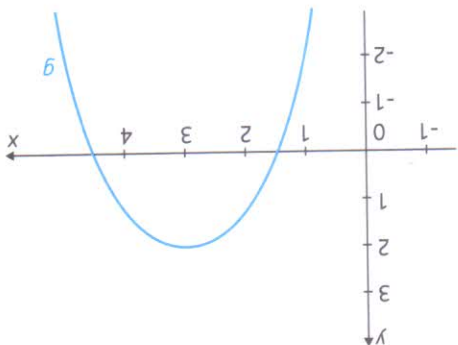
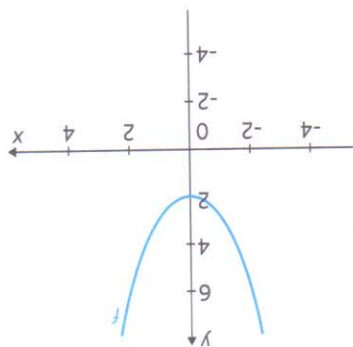
- A. f é crescente no intervalo $[-2, +\infty[$.
 B. f é decrescente no intervalo $[-1, +\infty[$.
 C. f é decrescente no intervalo $[-\infty, -\frac{4}{5}]$.
 D. f é crescente no intervalo $[-\frac{8}{11}, +\infty[$.

3. De uma função real de variável real, f , quadrática, sabe-se que: $x = -1$ e $x = 5$ são os zeros da função e $f(6) = -7$.

Então, pode afirmar-se que:

- A. O contradomínio da função é $[-\infty, -\frac{2}{5}]$.
 B. A função é par.
 C. A função f é estritamente decrescente em $] -\infty, -1[$.
 D. As coordenadas do vértice são $(2, 9)$.

4. Considere os gráficos das funções f e g , respectivamente:



Sabendo que $f(x) = x^2 + 2$ então o gráfico de g é uma representação da função definida por:

- A. $g(x) = (x - 3)^2 + 2$
 B. $g(x) = -(x - 3)^2 + 2$
 C. $g(x) = x^2 + 3$
 D. $g(x) = -x^2 + 3$



Exercícios propostos

5. Considere as seguintes afirmações:

- I. Se o coeficiente do termo de grau 2 de uma função quadrática for positivo, a função não tem zeros.
- II. Se o binómio discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) for positivo, a função quadrática tem 2 zeros.
- III. Uma função quadrática tem sempre um extremo absoluto.
- IV. Se o coeficiente do termo de grau 2 de uma função quadrática for negativo, o termo independente dessa função também é negativo.

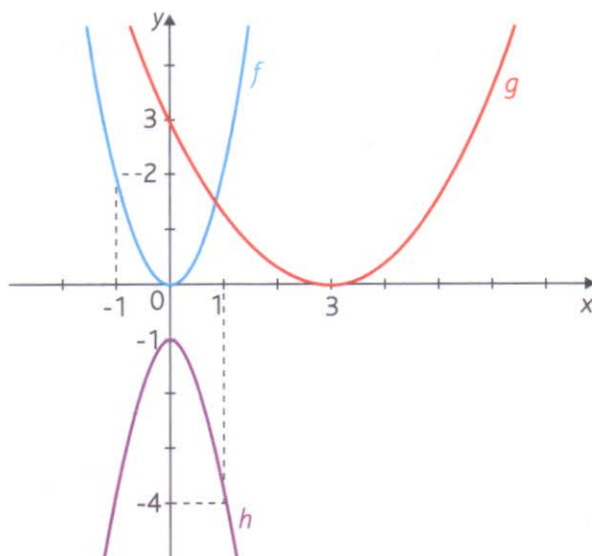
As afirmações verdadeiras são:

- A. I. e IV. B. I. e III. C. II. e III. D. II. e IV.

6. Considere a função, real de variável real, definida por $a(x) = (x - 3)^2$. Descreva como, partindo da função dada, se obtém o gráfico de:

- a) $b(x) = a(x + 1) - 2$
- b) $c(x) = a(x - 4) + 5$

7. Os gráficos ao lado foram obtidos a partir do gráfico de $y = x^2$. Escreva a expressão analítica das funções representadas.



8. Seja a função, real de variável real, definida por $f(x) = x^2 - 8x + 1$.

- a) Determine os zeros da função.
- b) Para que valores de x a função é positiva?
- c) Escreva $y = f(x)$ na forma $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$.
- d) Indique um intervalo em que a função seja injectiva e crescente.
- e) Indique o contradomínio da função e a equação do respectivo eixo de simetria.



11. Qual a área máxima de um espelho rectangular para cuja moldura o marceneiro só pode utilizar três metros de friso?

12. Pretende construir-se uma casa num terreno com a forma representada na figura ao lado.

Atendendo aos dados indicados e sabendo que a base da casa é rectangular, determine as dimensões da casa de modo que a área seja máxima.



13. A Câmara instalou um repuxo no jardim público que dá acesso à escola. A água parece descrever uma trajetória com a forma de uma parábola. A Mariana resolve investigar e recolhe os seguintes dados:

- A altura máxima atingida pela água é de 4 metros.
- A distância alcançada na horizontal pela água é, aproximadamente, de 2 metros.

a) Ajude a Mariana a determinar a expressão que define a função traduzida pela trajetória da água.

b) Defina uma função que traduza as situações seguintes:

- b.1) A água alcança a mesma distância na horizontal mas atinge o dobro da altura.
- b.2) A água atinge a mesma altura (4 metros) mas alcança na horizontal o triplo da distância, ou seja, 6 metros.



12. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

- a) Determine os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que a representa.
- b) Indique o contradomínio.
- c) Esboce o gráfico.

13. Considere a equação $x^2 - 10x + 16 = 0$.

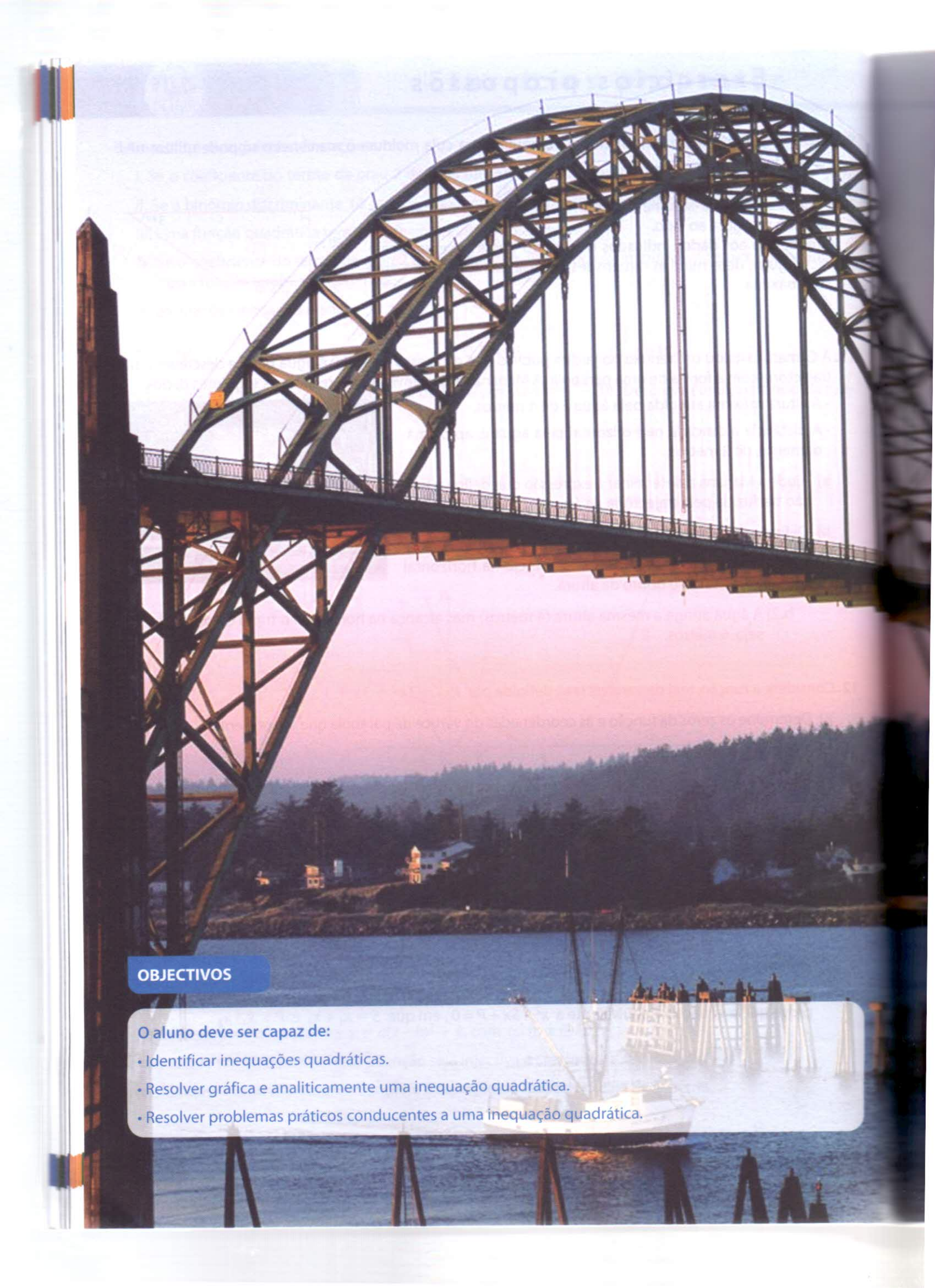
- a) Resolva-a em $\mathbb{R}$.

b) Prove que $x_1 + x_2 = 10$ e $x_1 \cdot x_2 = 16$, em que x_1 e x_2 são as soluções da equação.

c) Generalizando para a equação $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) e usando as soluções

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (se } b^2 - 4ac \geq 0)$$

prove que a equação é equivalente a $x^2 - 5x + P = 0$, em que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar inequações quadráticas.
- Resolver gráfica e analiticamente uma inequação quadrática.
- Resolver problemas práticos conducentes a uma inequação quadrática.

UNIDADE 5

Inequação quadrática

Págs. 58 a 67

CONTEÚDOS

Inequação quadrática

- Revisão da resolução de inequações lineares: analítica e geométrica
- Conceito de inequação quadrática
- Resolução gráfica de uma inequação quadrática
- Resolução analítica de uma inequação quadrática
- Resolução de problemas conducentes a uma inequação quadrática

Inequação quadrática

Uma inequação diz-se quadrática ou do segundo grau se é da forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, com $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$

1

Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

- a) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$
- b) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$
- c) $x^2 + 2x + 9 < 0$
- d) $x^2 + 6x + 9 > 0$
- e) $7 + 2x - x^2 < 0$

Resolução de inequações quadráticas

Para **resolver** uma inequação quadrática, considera-se a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e faz-se o estudo do sinal desta função.

Recordamos que a função só muda de sinal quando o x passa pelas raízes.

Inequações do 2.º grau

Tendo em conta o que sabemos da variação de sinal da função quadrática, vamos resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação do 2.º grau:

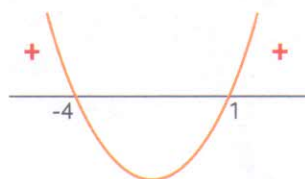
$$x^2 + 3x + 1 > 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$$

Cálculo auxiliar:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

Determinámos assim os zeros da função $y = x^2 + 3x - 4$.

Como a concavidade da parábola está voltada para cima, pois $a > 0$, temos:



Então, por observação do gráfico acima:

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$$

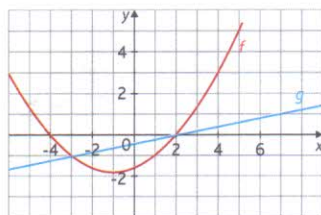
Consideremos duas funções, reais de variável, definidas por:

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \text{ e } g(x) = 5$$

Representemos no mesmo referencial as duas funções e determinemos os pontos de intersecção dos dois gráficos. Obtemos os pontos cujas abcissas são -4 e 1 .

2

Considere a função quadrática f e a função afim g definidas pelos seguintes gráficos:

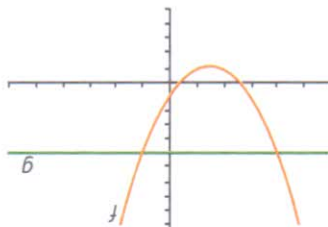


Determine, recorrendo a intervalos, o conjunto solução de cada uma das seguintes condições:

- a) $f(x) \cdot g(x) < 0$
- b) $f(x) - g(x) < 0$

Procuraremos no gráfico os pontos da função f que estão acima da

função g :



Observando o gráfico conclui-se que o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ é $x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$.

Exercícios resolvidos

1. Resolva a inequação: $x^2 + 3x + 2 < 0$.

Resolução

$$\text{Seja } f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$a = 1$, então $a > 0$ e a parábola tem a concavidade

voltada para cima.

A função tem como zeros os valores $x = 1$ ou $x = 2$

Solução: $x \in]1, 2[$

2. Resolva: $-3x^2 + 5x + 2 \leq 0$

Resolução

$$\text{Seja } f(x) = -3x^2 + 5x + 2 = (-3x - 1)(x - 2)$$

$a = -3$, então $a < 0$ e a parábola tem a concavidade

voltada para baixo.

Os zeros da função são: $-\frac{1}{3}$ e 2 .

Solução: $x \in \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty[$

3. Resolva a inequação:

$$\frac{3}{2x^2 - 1} + 5 > \frac{2}{x} + 4$$

Resolução

1.º Transforma-se a inequação na forma $ax^2 + bx + c > 0$.

Assim:

$$\frac{3}{2x^2 - 1} + 5 > \frac{2}{x} + 4 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 1) + 30 > 3x + 24 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 > 0$$

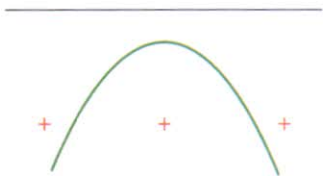
A equação $4x^2 - 3x + 4 = 0$ tem como $\Delta = 9 - 64 \Leftrightarrow$

$\Delta < 0$ então não tem raízes reais.

$a = 4$, então $a > 0$ e a função tem a concavidade voltada

para cima.

Solução: $x \in \mathbb{R}$.



UNIVERSIDADE PEDAGÓGICA
DELEGACÃO DA BEIRA
DEPARTAMENTO
DOCUMENTAÇÃO
INFORMAÇÃO

4. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 + 3x \leq 2x^2 - 1$.

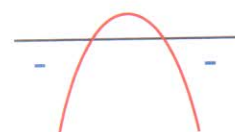
Resolução

$$x^2 + 3x \leq 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 1 \leq 0$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, +\infty \right[$$



5. Da janela de uma casa, atira-se uma bola para a rua.

A bola demora 0,4 s a chegar ao chão.

A distância do objecto (em metros), em relação à posição inicial em cada instante (em segundos) é dada pela expressão:

$$h(t) = 10t + 4,9t^2$$

- Ao fim de quanto tempo a bola se encontra a uma distância da janela igual a dois metros?
- De que altura é largada a bola?
- A partir de que momento a bola se encontra a uma distância superior a três metros da janela?



Resolução

$$\text{a) } h(t) = 2 \Leftrightarrow 10t + 4,9t^2 = 2 \Leftrightarrow 4,9t^2 + 10t - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \approx -2,22 \vee t \approx 0,18$$

Ao fim de aproximadamente 0,18 segundos a bola encontra-se a dois metros da janela.

$$\text{b) } h(0,4) = 10 \times 0,4 + 4,9 \times 0,4^2 = 4,784$$

A bola é largada, aproximadamente, a 4,8 metros do chão.

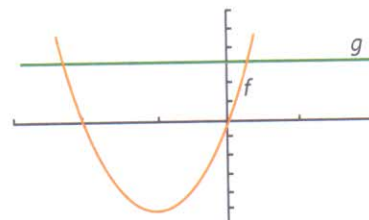
$$\text{c) } h(t) > 3 \Leftrightarrow 10t + 4,9t^2 > 3 \Leftrightarrow 4,9t^2 + 10t - 3 > 0 \Leftrightarrow$$

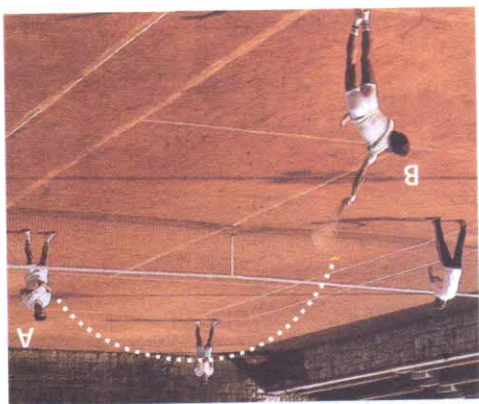
$$\Leftrightarrow t \in [0,2655; 0,4], \text{ pois } t \in [0; 0,4]$$

A bola encontra-se a uma distância superior a 3 metros a partir de aproximadamente 0,27 segundos.

Cálculo auxiliar:

$$4,9t^2 + 10t - 3 = 0 \Leftrightarrow t \approx -2,3063 \vee t \approx 0,2655$$

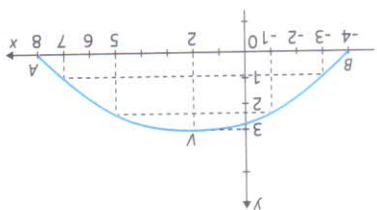




6. Numa partida de ténis, a certa altura a bola bate no campo do jogador A a 8 m da rede. A rede tem 1 m de altura. A bola atinge a altura máxima de 3 m a uma distância da rede de 2 m, ainda no lado do jogador A.
- a) Qual a expressão que define a trajetória da bola?
- b) Será que a bola ultrapassa a rede, ou bate nela?
- c) A que distância da rede a bola atinge uma altura superior a 2 m?

Resolução

Começamos por desenhar um esquema relativo à situação dada:



$y = a(x - 2)^2 + 3$ e substituindo x e y pelas coordenadas do ponto A, temos:

$$0 = a(8 - 2)^2 + 3 \Leftrightarrow -3 = 36a \Leftrightarrow a = -\frac{3}{36} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{12}$$

$y = -\frac{1}{12}(x - 2)^2 + 3$, por exemplo, porque o referencial pode ter a origem noutro ponto que não seja o meio do campo.

b) Observando o gráfico e verificando que $f(0) = -\frac{1}{12}(0 - 2)^2 + 3 = -\frac{1}{12}(4) + 3 = \frac{3}{8} \approx 2,67$,

podemos concluir que a bola quando está por cima da rede encontra-se a uma altura aproximada de 2,67 m do chão. Como a rede tem 1 m de altura, a bola passa por cima.

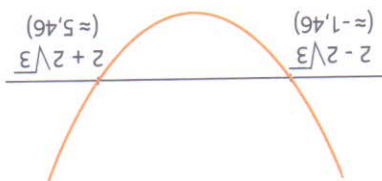
$$c) -\frac{1}{12}(x - 2)^2 + 3 > 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{12}(x^2 - 4x + 4) + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 12 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in]2 - 2\sqrt{3}; 2 + 2\sqrt{3}[$$

A bola atinge uma altura superior a 2 m, quando se encontra entre 1,46 m da rede, no campo do jogador B, e até 5,46 m da rede, no campo do jogador A.

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{12} \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{3}$$



7. Um rectângulo tem de medida de perímetro 20 metros.

- Exprima a área A do rectângulo em função do comprimento x de um dos seus lados.
- Entre que valores pode variar x ?
- Represente graficamente a função A .
- Para que valores de x a área A é máxima?

Resolução

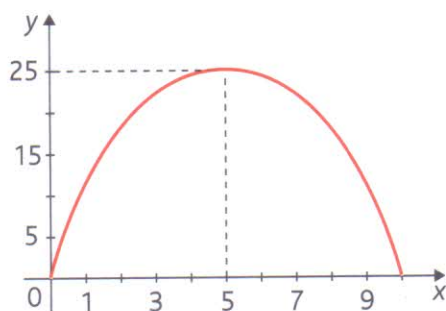
a) Designemos por y a medida do outro lado do rectângulo. Assim:

$$P = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

$$A = xy \Leftrightarrow A = x(10 - x) \Leftrightarrow A = 10x - x^2$$

b) Os valores de x têm de estar compreendidos entre 0 e 10, pois se uma das dimensões for 0 ou 10 não existe qualquer rectângulo.

c)



d) Observando o gráfico verificamos que o máximo da função coincide com o vértice de coordenadas (5, 25), donde se conclui que a área é máxima quando $x = 5$.

Resolução analítica

A resolução analítica de uma inequação do 2.º grau consiste na análise do sinal do produto de factores:

3

Determine o domínio de cada uma das seguintes funções reais de variável real:

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

c) $h(x) = 5 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

d) $i(x) = \frac{1}{2} \sqrt{7x - x^2 + 30}$

Se a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite raízes x_1 e x_2 então,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

O produto $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ se e somente se:

$$\bullet [(x - x_1) < 0 \wedge (x - x_2) < 0] \vee [(x - x_1) > 0 \wedge (x - x_2) > 0]$$

O produto $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ se e somente se:

$$\bullet [(x - x_1) < 0 \wedge (x - x_2) > 0] \vee [(x - x_1) > 0 \wedge (x - x_2) < 0]$$

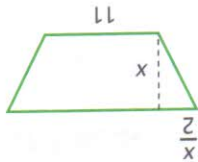
Resolva graficamente a inequação:

$$-x^2 + 3x + 1 \leq 0.$$

4

Considere o seguinte trapézio

isósceles:



a) Mostre que a área do trapézio é

$$\text{dada por: } a(x) = 11x + \frac{x^2}{2}.$$

b) Entre que valores pode variar a

altura do trapézio, de modo que

a área seja inferior a 120 m²?

6

O Tiago lançou da janela do seu

andar, um saco para o seu amigo

que se encontrava à entrada do

prédio. A distância ao solo, em

metros, do saco em queda é dada

por:

$$d(t) = -\frac{3}{2}t^2 - 2t + 11, \text{ t em segundos}$$

a) A Joana encontra-se à janela do

mesmo prédio, que se situa a

quatro metros do solo. Em que

instante a Joana observa o saco

a cair?

b) A que altura se encontra a

janela do Tiago?

c) Ao fim de quanto tempo o

saco chega ao chão?

Exercício resolvido

Resolva analiticamente a inequação $x^2 - 5x + 4 < 0$

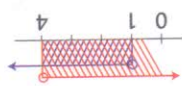
Resolução

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$



A intersecção das duas condições resulta no $x \in \emptyset$.

$$2.^\circ \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 4 \end{cases}$$



3.º Reunindo a solução do 1.º com a solução do 2.º, isto é:

$$\emptyset \cup]1, 4[=]1, 4[$$

então a solução da inequação

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \text{ é } x \in]1, 4[$$

A análise do produto pode ser feita também com ajuda de um quadro:

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) < 0$$

x	−∞	1	4	+	−	0	+
$x - 1$	−	0	+	−	−	−	+
$x - 4$	−	−	0	+	+	+	+
$(x - 1)(x - 4)$	+	0	−	−	−	0	+

Solução: $x \in]1, 4[$



Exercícios propostos

1. Resolva as seguintes inequações pelo método gráfico:

a) $x^2 - 4x < 0$

b) $x^2 - 8x + 12 \leq 0$

c) $5x^2 - 3x + 2$

d) $x^2 + x + 2 \leq 0$

e) $x^2 + 7x < 12$

f) $(x - 1)(x + 2) < x(4 - x)$

g) $(2x - 1) < x^2 - 4 < 12$

2. Resolva analiticamente as seguintes inequações:

a) $-x^2 + x \geq 0$

b) $x^2 + 1 \leq -x^2 + 4x + 2$

3. Sabendo que o lucro mensal duma fábrica de canetas é expresso por $l = -x^2 + 140x + 1\,875$ onde x representa o número de canetas vendidas em centenas. Determina o número de canetas que devem ser vendidas para que o lucro esteja entre 1000 MT e 2 400 MT.

4. Determine m de modo que a função quadrática

$$f(x) = x^2 - 2(m + 2)x + 2(m^2 + 2m - 2)$$

tenha raízes de sinais contrários.

5. Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$

Determine $A \cap B$

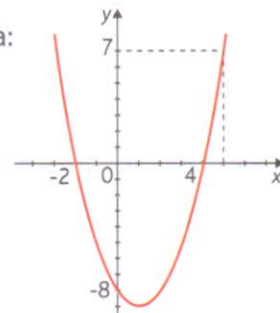
6. Observe o gráfico ao lado e diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:

A. $x^2 - 2x - 8 < 5$ para $-2 < x < 5$

B. $x^2 - 2x - 8 > x + 2$ para $-2 < x < 5$

C. $x^2 - 2x - 8 > x + 2$ para $x < -2 \vee x > 5$

D. $x^2 - 2x - 8 = x + 2$ para $-2 \leq x \leq 5$



7. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Resolva analiticamente, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $f(x) < 1$

b) $f(x) \geq \frac{3}{8}$

8. Um calorífero projectado para trabalhar com uma diferença de potencial de 220 V consome uma potência de 1000 W.

Sabe-se pela Lei de Joule que:

$$P = RI^2 \text{ ou } P = \frac{U^2}{R}$$

onde P é a potência (em Watts), R a resistência (em ohms), I a intensidade (em ampéres) e U a diferença de potencial (em Volts).

a) Calcule a resistência do fio do calorífero, quando está em funcionamento.

b) Supondo que a resistência do fio é constante e igual a $30 \, \Omega$, determine a diferença de potencial para que a potência seja superior a 1500 W, sabendo que os valores só podem variar entre]170, 240[Volts.

9. Num grande prêmio de Fórmula 1, um espectador encontra-se num local em que consegue visualizar um determinado trecho do percurso. A determinada altura, vê um carro. A distância, em metros, deste ao espectador, a partir do instante em que o espectador vê o carro, é dada por:

$$d(t) = 15t^2 - 90t + 155 \text{ com } t \text{ em segundos}$$

a) A que distância se encontra o carro do espectador quando este o vê pela primeira vez?

b) Ao fim de quanto tempo se atinge a menor distância entre o carro e o espectador? Qual o valor dessa distância?



c) Sabendo que ao fim de 8 segundos o carro desaparece do campo de visão do espectador, existiu algum instante em que este seja visível a mais de 300 metros?

10. Dada a função quadrática $f(x) = 2x^2 - x - 3$ determine:

- a) Os zeros da função.
- b) As coordenadas de vértice.
- c) A ordenada na origem.
- d) Representação gráfica da função.
- e) Os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

11. Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de t segundos, atinge altura h , dada por $h(t) = 40t - 5t^2$

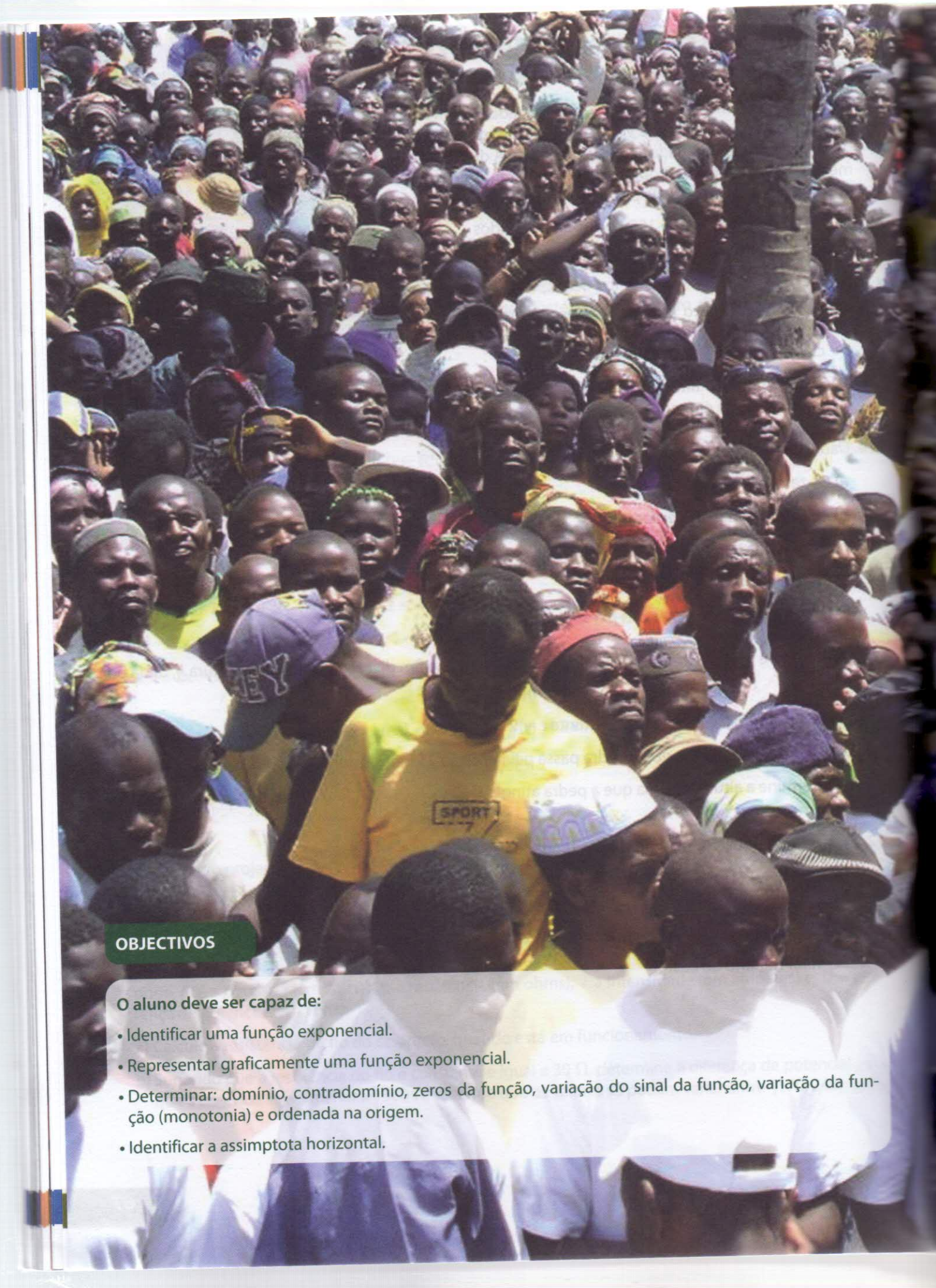
- a) Calcule a posição da pedra no instante $t = 2$ segundos.
- b) Calcule o instante em que a pedra passa pela posição 75 metros durante a subida.
- c) Determine a altura máxima que a pedra atinge.

12. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por

$$C(x) = x^2 - 80x + 3\,000.$$

Nessas condições calcule:

- a) A quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo.
- b) O valor mínimo do custo.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar uma função exponencial.
- Representar graficamente uma função exponencial.
- Determinar: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem.
- Identificar a assíntota horizontal.

9 UNIDADE

Função exponencial

Págs. 68 a 87



CONTEÚDOS

Função exponencial

- Noção do conceito de função exponencial
- Representação do gráfico da função exponencial $y = ax$

a) Caso $a > 1$ b) Caso $0 < a < 1$

- Estudo da função exponencial do tipo $y = ax$: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia), assíntota horizontal e ordenada na origem.

- Representação gráfica das funções:

$$y = a^{x \pm b} \text{ e } y = a^x \pm b \text{ a partir da função } y = a^x$$

- Estudo das funções

$$y = a^{x'}, y = a^x \pm b \text{ e } y = a^{cx+b} + d;$$

domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia), assíntota horizontal e ordenada na origem.

Introdução

Uma função diz-se **algébrica** quando pode ser definida como soma, produto, quociente, potência ou raiz de um polinómio. Uma função não algébrica diz-se **transcendente**.

1

Seja $t \mapsto f(t)$ a função que exprime o número de habitantes de uma certa cidade em função do número t de anos contados a partir de 1 de Janeiro de 2000. Explica o significado das expressões seguintes, no contexto da situação:

- a) $f(0)$
- b) $f(50)$
- c) $f(-10)$
- d) $f(100) = 2 f(0)$

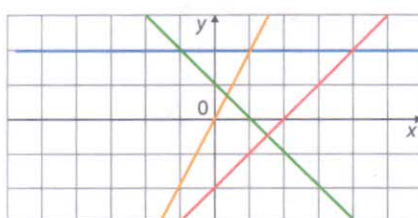
2

Seja $x \mapsto g(x)$ a função que representa o número de pessoas que já viram um certo anúncio, x dias depois de ele surgir, pela primeira vez, na televisão. Identifica o significado de:

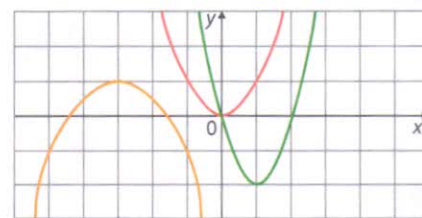
- a) $g(3) = 12 \times 10^4$
- b) $g(x) \geq 10^5 \Leftrightarrow x \geq 2$
- c) $g(x+1) = 1,2 g(x)$

O estudo de funções que desenvolvemos até agora repartiu-se por duas vertentes:

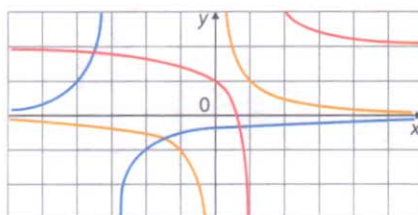
- Generalidades sobre funções: definição, domínio, contradomínio, objectos, imagens, representação gráfica, zeros, injectividade, paridade, transformações dos gráficos por simetrias e/ou translações, inversão de funções injectivas, identificação de assíntotas dos gráficos, interpretação de gráficos, ...
- Estudo, em particular, de funções polinomiais, com destaque para o estudo das funções afins e quadráticas, funções racionais não polinomiais e funções irracionais, que no seu conjunto representam as chamadas funções algébricas.



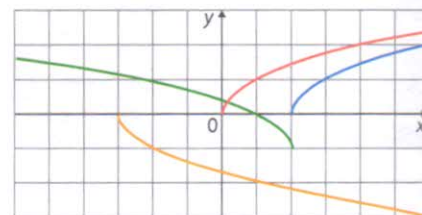
Funções afins



Funções quadráticas



Funções homográficas



Funções irracionais

Vamos agora estudar duas famílias de funções não algébricas: a família das **funções exponenciais** na unidade 6 e a das **funções logarítmicas** na unidade 7. Como é óbvio, todas as aprendizagens relativas a «Generalidades sobre funções» são indispensáveis para o estudo que vamos desenvolver. Também é necessário conhecer e aplicar características do comportamento das funções algébricas básicas: afins, quadráticas e homográficas, pois elas associam-se frequentemente às funções exponencial e logarítmica na modelação de situações concretas.

As funções exponencial e logarítmica desempenham um papel fundamental na modelação de problemas nas Matemáticas Aplicadas e também na Economia, no Comércio e em áreas do campo social.

São usadas nas finanças para calcular o valor de um investimento, em Demografia para prever a dimensão de uma população, nas Ciências da Saúde para estudar a propagação de epidemias, na Arqueologia para datar achados pré-históricos e em vários domínios da Física e da Química.

Potências de expoente racional

• Potências de expoente natural:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}$$

• Potências de expoente nulo e de expoente inteiro negativo:

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Potências de expoente fracionário:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} 1. \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} &= 3^2 = 9 \\ 2. \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \\ 3. \sqrt{\frac{1}{5}} &= \sqrt{5^{-1}} = 5^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Potências de expoente real.

De um modo geral podemos afirmar que:

a^r , com $r \in \mathbb{R}$, representa um número real desde que $a > 0$

Por outro lado, como $a > 0$, também se tem $a^r > 0$, ou seja, $a^r \in \mathbb{R}^+$, $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall r \in \mathbb{R}$.

As propriedades operatórias das potências de expoente racional mantêm-se para as potências de expoente real:

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet a^x \times a^y &= a^{x+y} \\ \bullet \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ \bullet (a^x)^y &= a^{xy} \\ \bullet (a \times b)^x &= a^x \times b^x \\ \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \end{aligned}$$

6

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, qual das expressões seguintes não é equivalente a 3^{a+b} ?

- A. $3^a \times 3^b$
- B. $3^a \div 3^{-b}$
- C. $(3^a)^b$
- D. $\frac{3^{-a-b}}{1}$

5

Escreve na forma de potência de base natural:

- a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$
- b) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}$
- c) $\frac{1}{\sqrt[5]{a}}, a \in \mathbb{N}$

4

Escreve na forma de radical:

- a) $3^{\frac{1}{2}}$
- b) $2^{\frac{4}{3}}$
- c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

3

Escreve na forma de potência de expoente natural:

- a) 3^{-1}
- b) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$
- c) $\left(\frac{2}{1}\right)^{-3}$

7

Sabendo que $5^x = 2$, qual o valor de:

- a) 5^{2x} ?
- b) 5^{-x} ?
- c) $5^{\frac{x}{2}}$?
- d) 25^{-x} ?
- e) 5^{x+1} ?

8

Sabendo que $3^{x+1} = 6$, calcula o valor de:

- a) 3^x
- b) 3^{2x}
- c) $3^{\frac{x}{2}}$
- d) 3^{-x+1}

9

Escreve as expressões seguintes na forma de produto.

- a) $5^{x+1} - 5^x$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2^{1-x}$
- c) $8^{x+1} + 2^{3x-2}$
- d) $4^x + 2^{x+1}$

(*) Nota:

Há autores que admitem $a = 1$ como base da função exponencial. É um caso com pouco interesse já que resulta numa função constante.



Exemplos

$$1. 15^n \div 5^n \times \frac{1}{3^n} = (15 \div 5)^n \times 3^{-n} = 3^n \times 3^{-n} = 3^0 = 1$$

$$2. (8^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 8^{(\sqrt{2})^2} = 8^2 = 64$$

$$3. 2^{\sqrt{3}+1} \div 2^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = 2$$

4. Sendo $2^x = 3$ podemos determinar o valor de

$$2^{x+1}, 2^{3x}, 4^x, 2^{\frac{x}{2}} \text{ e } 2^{x-3}$$

$$2^{x+1} = 2^x \times 2 = 3 \times 2 = 6$$

$$2^{(3x)} = (2^x)^3 = 3^3 = 27$$

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = 3^2 = 9$$

$$2^{\frac{x}{2}} = (2^x)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$5. 2^{x+3} - 2^{x+1} = 2^x \times 2^3 - 2^x \times 2^1 = 2^x(8 - 2) = 2^x \times 6$$

$$6. 3^{1-x} + 3^x = \frac{3}{3^x} + 3^x = \frac{3 + 3^x \times 3^x}{3^x} = \frac{3 + 3^{2x}}{3^x}$$

$$7. 9^x + 3^x = (3^2)^x + 3^x = (3^x)^2 + 3^x = 3^x(3^x + 1)$$

$$8. 25^{x+1} - 5^{2x-1} = 5^{2x+2} - 5^{2x-1} = 5^{2x} \left(25 - \frac{1}{5} \right) = \frac{124}{5} \times 5^{2x} = 124 \times 5^{2x-1}$$

Função exponencial de base a

Explicado que está o conceito de a^x para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, estamos em condições de apresentar a definição seguinte:

Chama-se **função exponencial de base a** (constante) e expoente variável x à função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

sendo a um número real positivo e diferente de 1^(*).

Na seguinte síntese vamos enunciar algumas propriedades das funções exponenciais com a base maior que 1.

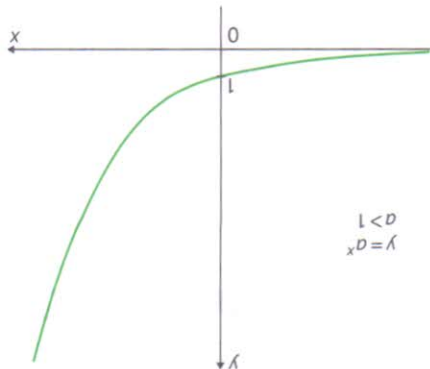
Chama-se **função exponencial de base $a > 1$** à correspondência:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a^x$$

$$\text{com } a \in]1, +\infty[$$

A representação gráfica é idêntica à seguinte:



Propriedades

A função exponencial de base $a > 1$ tem, entre outras, as seguintes propriedades:

- O domínio é $\mathbb{R}$ e a função é contínua no seu domínio.
- O contradomínio é $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ ⁽¹⁾.
- A função não tem zeros ⁽²⁾.
- A função é estritamente crescente em todo o seu domínio, logo, é injectiva.
- Quando $x \rightarrow +\infty$, $a^x \rightarrow +\infty$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.
- Quando $x \rightarrow -\infty$, $a^x \rightarrow 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.
- O gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1 e admite a recta de equação $y = 0$ (eixo das abcissas) como assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$.
- O gráfico tem sempre a concavidade virada para cima e passa nos pontos $(0, 1)$ e $(1, a)$ ⁽³⁾.
- O crescimento é tanto mais rápido quanto maior for o valor de a .

O facto de a função exponencial de base maior que 1 crescer muito rapidamente justifica a utilização, na linguagem corrente, da expressão «cresce exponencialmente», em situações em que o crescimento é muito rápido.

A exponencial de base maior que 1 cresce mais depressa do que qualquer potência do seu expoente.

- (1) O contradomínio de uma função é o conjunto dos elementos do domínio; é o conjunto das ordenadas dos pontos do gráfico da função.
- (2) A observação do gráfico de uma função da família $f(x) = a^x$, obtido na calculadora ou computador, pode enganar pois parece que o gráfico toca no eixo Ox . O gráfico não intersecta o eixo Ox .
- (3) O gráfico de $f(x) = a^x$ passa no ponto $(0, 1)$ porque $f(0) = a^0 = 1$ e passa no ponto $(1, a)$ porque $f(1) = a^1 = a$.

x	y = 2 ^x
-3	2 ⁻³ = 0,125
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

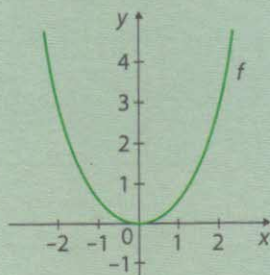
Completa a seguinte tabela e utiliza-a para fazer, em papel milimétrico, uma representação gráfica da função $f(x) = 2^x$.

Estudo das propriedades analíticas e gráficas

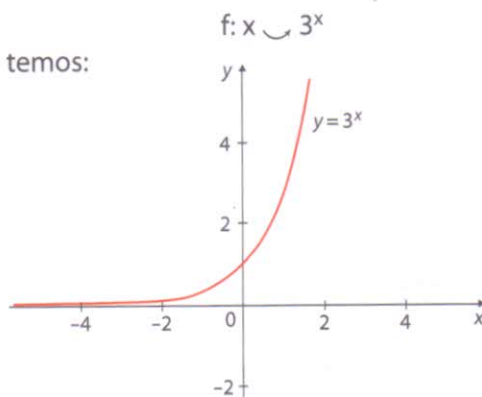
Funções do tipo $f: x \mapsto b \cdot a^x$ ($a > 1, b \neq 0$)

Começemos por estudar, por exemplo, a função definida por:

A função f é um exemplo de uma função par pois é simétrica em relação a Oy :



Graficamente, temos:



Temos que:

- $D_f = \mathbb{R}$

- Sinal e zeros

$3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: a função f é positiva em $\mathbb{R}$, logo, não tem zeros.

- Observando o gráfico, conjecturamos que a função não é par nem ímpar. Verifiquemos:

$$f(x) = 3^x; f(-x) = 3^{-x}; -f(x) = -3^x$$

$$f(x) \neq f(-x), \text{ a função não é par.}$$

$$f(-x) \neq -f(x), \text{ a função não é ímpar.}$$

- Variação

Pela observação do gráfico, temos:

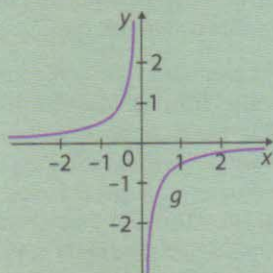
x	$-\infty$	$+\infty$
Variação de f	↗	

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

A função é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

- Com a ajuda da calculadora, podemos conjecturar que, se escolhermos valores de x suficientemente grandes, obtemos como imagens valores tão grandes quanto se queira.

A função g é um exemplo de uma função ímpar pois é simétrica em relação à origem do referencial:



X	Y1
1	3
10	3045
50	3045
100	3045
150	3045
200	3045
209	3045

X	Y
-205	0.000000
-200	0.000000
-150	0.000000
-100	0.000000
-50	0.000000
-10	0.000000
0	1.000000
10	1.000000
50	1.000000
100	1.000000
150	1.000000
200	1.000000
205	1.000000

Se escolhermos para x valores negativos, com valor absoluto muito grande, podemos agora conjecturar que obtemos valores de 3^x tão próximos de zero quanto se queira. A curva aproxima-se cada vez mais do eixo Ox . O gráfico da função tem uma assíntota horizontal de equação $y=0$ quando $x \rightarrow -\infty$.

$D = \mathbb{R}^+$

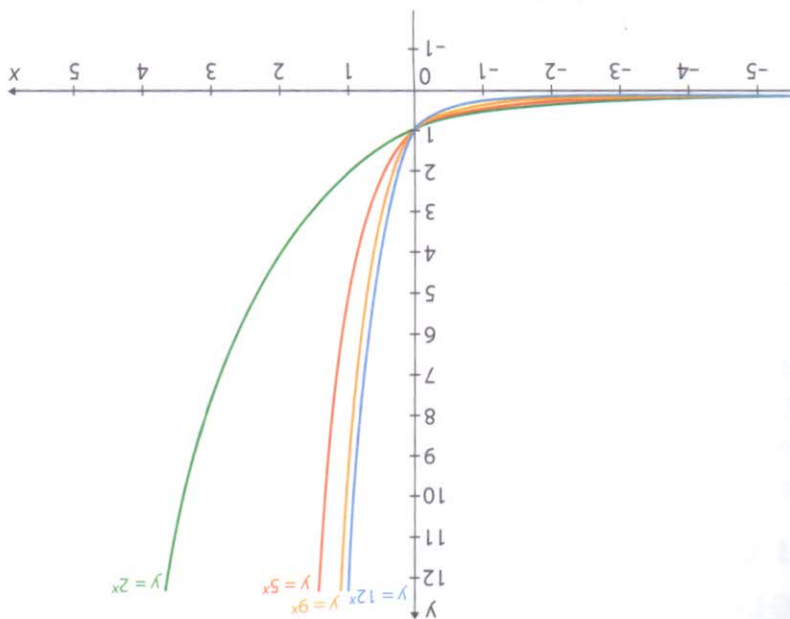
f é injectiva:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3^{x_1} \neq 3^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

f é contínua em $\mathbb{R}$.

Todas as funções exponenciais de base $a > 1$ apresentam características análogas à da função definida por $f(x) = 3^x$.

Observemos algumas representações gráficas:



Quanto maior é a base da exponencial, mais rápido é o seu crescimento. Para qualquer função exponencial de base a superior a 1:

- $D = \mathbb{R}$
- $D' = \mathbb{R}^+$
- Não tem zeros.
- É positiva em $\mathbb{R}$.
- É contínua em $\mathbb{R}$.
- É estritamente crescente.
- É injectiva.
- O gráfico tem uma assíntota horizontal de equação $y = 0$.
- $f(1) = a$.

Transformações do gráfico de uma função exponencial

11

Relacione o gráfico da função definida por $f(x) = 2^x$ com os gráficos das seguintes funções reais de variável real:

$$g(x) = 2^{x-1}$$

$$h(x) = 2^{x+3}$$

$$i(x) = 4 + 2^x$$

$$j(x) = -1 + 2^x$$

Apresente as suas conclusões num pequeno relatório.

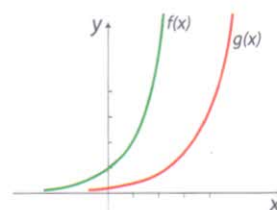
Relacione o gráfico da função definida por $f(x) = 3^x$ com os gráficos das seguintes funções reais de variável real:

$$g(x) = 3^{x-2} ; h(x) = 3^{x+1} ; i(x) = 2 + 3^x ; j(x) = -3^x ; l(x) = 3^{\frac{1}{2}x}$$

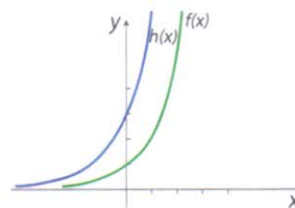
Vejamos:

Representemos as funções f e g :

Como à variável independente se adicionou -2 , o gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico de f deslocando este, na direcção horizontal, duas unidades para a direita, correspondendo a uma translação segundo o vector $(2, 0)$.

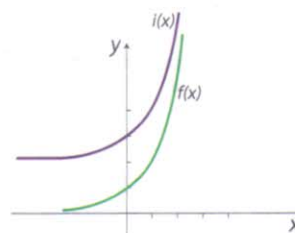


Em relação ao gráfico da função h , o raciocínio é análogo, deslocando-se na direcção horizontal mas uma unidade para a esquerda.

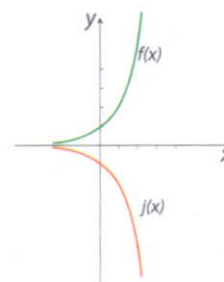


Ao relacionarmos o gráfico de i com o gráfico de f , constatamos que aquele se obtém a partir do de f adicionando duas unidades à variável dependente, ou seja, desloca-se o gráfico duas unidades para cima.

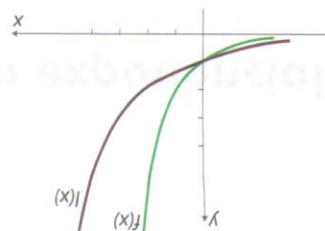
Graficamente, corresponde a deslocar o gráfico de f na direcção vertical duas unidades para cima, definindo-se assim uma translação associada ao vector $(0, 2)$.



O gráfico da função j obtém-se a partir do gráfico de f aplicando a este uma simetria relativamente ao eixo Ox .



Por último, relacionemos o gráfico de f com o gráfico de l :



Em quantos pontos se intersectam os gráficos de:

- a) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$?
b) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^8$?

Multiplicou-se a variável independente por um factor entre zero e um, pelo que o gráfico de função l corresponde a uma expansão segundo o factor $\frac{1}{1} = 2$, na direcção do eixo Ox .

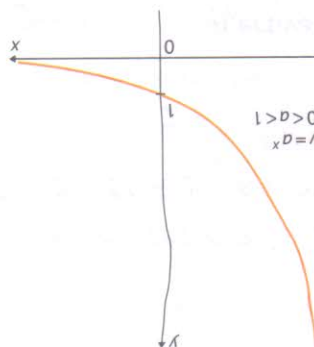
Referência às funções exponenciais com a base entre 0 e 1

As funções exponenciais $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, também surgem

com muita frequência na modelação de fenómenos em vários domínios.

Os gráficos destas funções são todos do mesmo tipo e, portanto, idênticos

ao gráfico da função $r(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



As **funções exponenciais de base a com $0 < a < 1$** têm, entre outras, as seguintes propriedades.

- São funções contínuas, injectivas e estritamente decrescentes em $\mathbb{R}$: é o chamado decrescimento exponencial por ser muito rápido.
- Têm contradomínio $\mathbb{R}^+$ e, portanto, não têm zeros.
- Têm gráficos que não intersectam o eixo das abscissas; o eixo das abscissas é precisamente a única assíntota dos gráficos.
- Os gráficos passam no ponto $(0, 1)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

Esboce os gráficos seguintes:

a) $y = \left(\frac{3}{1}\right)^x$

b) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

Apresente as suas conclusões num pequeno relatório.

Investigue as características da família de funções exponenciais definidas por:

$y = a^x$ com $0 < a < 1$

num pequeno relatório.

13

14

15

Determine os zeros, caso existam, de:

a) $f(x) = 3^x - 3$

b) $g(x) = \frac{2^{x+3} + 4}{3}$

c) $h(x) = 3^x - 9^x$

d) $r(x) = 1 - \pi^x$

Embora seja útil reconhecer algumas características das exponenciais com base entre 0 e 1, o seu estudo exaustivo não faz parte do programa em vigor já que, se $f(x) = a^x$ é uma exponencial com a base entre 0 e 1, então $\frac{1}{a}$ é maior do que 1 e tem-se $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

Equações com exponenciais

Numa exploração agrícola verificou-se que uma determinada espécie de árvore de fruta estava infectada por uma bactéria que se propaga segundo a lei:

$$N(t) = 8 \times 2^t$$

em que N é o número de árvores de fruta infectadas em t dias.

Considerando que as condições não foram alteradas, ao fim de quantos dias estarão contaminadas as 128 árvores dessa espécie existentes no pomar?

Para responder a esta questão, teremos de resolver a equação:

$$8 \times 2^t = 128 \Leftrightarrow 2^t = 16 \Leftrightarrow 2^t = 2^4$$

Dado que a função definida por $f(t) = 2^t$ é injectiva, podemos concluir que $t = 4$.

Ao fim de quatro dias, todas as árvores da espécie nesta exploração estarão infectadas.

Em relação à situação definida pela função $N(t) = 8 \times 2^t$, ao fim de quantos dias se encontram mais de 64 árvores infectadas pela doença?

Neste caso, temos de resolver a seguinte inequação:

$$8 \times 2^t > 64 \Leftrightarrow 2^t > 8 \Leftrightarrow 2^t > 2^3$$

Como a função definida por $y = 2^t$ é crescente, temos $t > 3$, donde, a partir do terceiro dia, encontram-se mais de 64 árvores infectadas.

O facto de a função exponencial ser **injectiva** pode ser traduzido simbolicamente por:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Esta propriedade permite resolver, analiticamente, equações em que a incógnita figura em expoente e desde que seja possível transformar a equação numa igualdade entre potências com a mesma base.

Exemplos

$$1. 2^t - 1 = 31 \Leftrightarrow 2^t = 32 \Leftrightarrow 2^t = 2^5 \Leftrightarrow t = 5$$

$$2. 125^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow (5^3)^x = 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$3. 8^{x+2} = 256 \Leftrightarrow 8^x \times 8^2 = 256 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{8}\right)^x \times 64 = 256 \Leftrightarrow 2^x = \frac{64}{256} \Leftrightarrow$$

$$4. \sqrt[3]{3^x} = \frac{9^{x+1}}{1} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^x = 9^{x+1} = 3^{2x+2} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{3}} = 3^{2x+2} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 2x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = -2x - 2 \Leftrightarrow 5x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

$$5. 3^x + x^3 \times 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^x(1 + x^3) = 0 \Leftrightarrow 3^x = 0 \vee 1 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 1 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$6. 2^{x+1} + 3 \times 2^x = 80 \Leftrightarrow 2^x \times 2 + 3 \times 2^x = 80 \Leftrightarrow 2^x(2 + 3) = 80 \Leftrightarrow 2^x = \frac{80}{5} \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$$

$$7. 3^{x+2} + 3^{x-1} = 252 \Leftrightarrow 3^x \times 3^2 + 3^x \times 3^{-1} = 252 \Leftrightarrow 3^x \left(9 + \frac{1}{3}\right) = 252 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 252 \div \frac{28}{3} \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$$

8. Na equação $4^x + 2^x - 6 = 0$ vamos substituir 2^x por y .
Como $4^x = (2^x)^2$, vem $4^x = y^2$ e obtemos a equação do 2.º grau:

$$y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -3$$

Temos então $2^x = 2 \vee 2^x = -3 \Leftrightarrow x = 1$ pois a equação $2^x = -3$ é impossível.

Aplicação

1. Crescimento exponencial – bactérias

Uma população de bactérias aumenta 50% em cada dia. Se no início da contagem havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de t dias?

Resolução

Ao fim de 1 dia	$1 + 0,5 = 1,5$
Ao fim de 2 dias	$1,5 + 0,5 \times 1,5 = 1,5^2 = 1,5^2$
Ao fim de 3 dias	$1,5^2 + 0,5 \times 1,5^2 = 1,5^2(1 + 0,5) = 1,5^3$
.....	
Ao fim de t dias	$1,5^t$

(milhões de bactérias)

Vemos que o número de milhões de bactérias, ao fim de t dias, é dado por uma potência de expoente variável (exponencial): $1,5^t$.

Funções do tipo $f(x) = c \cdot a^{kx}$

a) Considere a equação:

$$3^{2x} + 3^x - 12 = 0$$

Substitua 3^x por y e verifique que obtém uma equação do 2.º grau. Use-a para resolver a equação dada.

b) Verifique que as equações seguintes também são equivalentes a equações do 2.º grau e resolva-as:

$$b.1) 9^{x+1} + 3^{x+2} - 4 = 0$$

$$b.2) 2^{2-x} + 3 = 2^x$$

(1) A função exponencial não tem zeros: a equação $3^x = 0$ é impossível.

$$j) \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 16^{x+2}$$

$$i) \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 16^{x+2}$$

$$h) (16)^{x+1} = \frac{2}{1}$$

$$g) 3^{x^2-10x+7} = \frac{9}{1}$$

$$f) 2^{x^2-7x+12} = 1$$

$$e) 3^{x^2-5} = 81$$

$$d) (3^x)^{x-4} = \frac{27}{1}$$

$$c) 2^{x-2} = 8$$

$$b) 3^{2x} = 243$$

$$a) 2^x = 128$$

Resolva as seguintes equações

18

Uma cooperativa recolhe a produção excedentária de batata de uma certa região agrícola. Estudos efectuados permitem concluir que a procura, P , em toneladas, e o preço, p , em met-cais, da venda por tonelada para uma fábrica de puré de batata, estão de acordo com o seguinte modelo:

$$P = 10^3 \cdot p^{-0,2}$$

Num certo ano, a cooperativa vendeu cada quilograma de batata a 12 centavos. Qual foi, em toneladas, a procura nesse ano? Apresente o resultado arredondado às unidades.

19

Uma colónia de protozoários cresce a um ritmo de 0,5% por hora. Se certa contagem deu 2 000 protozoários, quantos haverá dois dias depois? Indica uma função que sirva de modelo a este crescimento.

Já sabemos que esta potência tem significado para qualquer valor real de t . Podemos supor que a massa de bactérias (biomassa) cresce de forma contínua com o tempo segundo esta lei. No início da contagem é $t = 0$ e antes desse instante pode considerar-se $t < 0$.

A função exponencial:

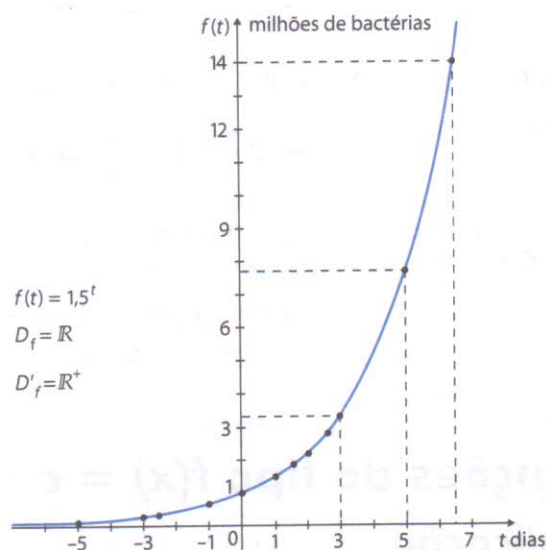
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto 1,5^t$$

exprime, em milhões, o número de bactérias existentes ao fim de t dias.

Trata-se de uma exponencial de base maior do que 1, sendo, portanto, uma função crescente; o número de bactérias não pára de aumentar com o decorrer do tempo. No contexto da situação, significa que o número de bactérias ultrapassa qualquer valor, por maior que ele seja.

Vamos obter algumas imagens, recorrendo à calculadora ou não e esboçar o gráfico da função f .

t	$1,5^t$
-5	0,13
-3	0,30
-2,5	0,36
-1	0,67
0	1
0,5	1,22
1	1,50
1,5	1,84
2	2,25
2,5	2,76
3	3,38
5	7,59
6,5	13,95



A observação do gráfico confirma os aspectos que já salientámos e evidencia que a função cresce lentamente para valores negativos de t e cresce «vertiginosamente» para valores de t positivos (repara como o crescimento é acentuado para $t > 5$).

Ao fim de 9,5 dias teríamos cerca de 47 milhões de bactérias! A página deste livro mal chegava para marcar essa imagem, mesmo tendo tomado o milhão para unidade: o crescimento da exponencial é rapidíssimo.

2. Crescimento exponencial – coelhos

Fugiram oito coelhos de um barco atracado em Kori, uma pequena ilha onde não havia coelhos nem predadores; tendo bom clima e muito alimento, reproduziram-se exponencialmente e, passado algum tempo, davam tal prejuízo à agricultura que o governador mandou fazer a contagem de quantos coelhos havia, para estudar as medidas a adoptar. Contaram 4 500 coelhos. Três meses depois, nova contagem mostrou que já havia 9 900 coelhos.

a) Fazendo fe nestas contagens, propõe uma fórmula que traduza o crescimento desta população de coelhos.

b) Quanto tempo passou desde a fuga dos coelhos para a ilha até à realização da primeira contagem?

Resolução

a) Se o crescimento é exponencial deve ter uma fórmula do tipo $y = c \times a^t$. Como, para $t = 0$, se tem $y = 8$, o valor de c é 8:

$$8 = c \times a^0 = c \times 1 = c$$

Vamos supor que t é expresso em meses.

$$1.ª \text{ contagem: } y_1 = 8 \times a^t = 4\,500$$

$$2.ª \text{ contagem: } y_2 = 8 \times a^{t+3} = 9\,900$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{9\,900}{4\,500} = \frac{8 \times a^{t+3}}{8 \times a^t} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11} \Rightarrow a^{t+3-t} = \frac{5}{11} \Rightarrow a^3 = \frac{5}{11} \Rightarrow a \approx 1,3$$

$\Leftrightarrow a^3 = 2,2^{(1)} \Rightarrow a = \sqrt[3]{2,2} \Rightarrow a \approx 1,3$

$y = 8 \times 1,3^t$, com t em meses, é um modelo apropriado para exprimir o número de coelhos em função do tempo que passou depois de chegarem a Kori.

b) De acordo com o modelo estabelecido, queremos determinar o valor de t para o qual $8 \times 1,3^t = 4\,500$.

$$8 \times 1,3^t = 4\,500 \Leftrightarrow 1,3^t = \frac{4\,500}{8} \Leftrightarrow 1,3^t = 562,5^{(2)}$$

Podemos enquadrar 562,5 entre potências de base 1,3:

$$1,3^{24} < 562,5 < 1,3^{25}$$

E ainda

$$1,3^{24,1} < 562,5 < 1,3^{24,2}$$

Como as funções exponenciais de base maior que 1 são crescentes, a solução da equação $1,3^t = 562,5$ é um valor entre 24,1 e 24,2 meses, ou seja, a primeira contagem dos coelhos foi feita, aproximadamente, dois anos depois da fuga dos coelhos para a ilha.

Uma planta infestante alastra na superfície de um lago. A área coberta aumenta 2% por dia. Certo dia mediu-se e era já de 500 m². Qual será a área 10 dias depois? E t dias depois?

20

(1) Repare que a incógnita da equação é a base da potência:

$$a^3 = 2,2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2,2}$$

(2) Repare que a incógnita é o expoente da potência:

$$1,3^t = 562,5 \Rightarrow t = ?$$

UNIVERSIDADE PEDAGÓGICA
DELEGACÃO DA REGIÃO
DOCUMENTAÇÃO
INFORMAÇÃO

3. Os juros compostos

Depositamos 1 200 MT numa conta em regime de juros compostos; com uma taxa de juro anual de 3%.

- Quanto teremos do final de um ano?
- Deduz a expressão que permita calcular o capital ao fim de n anos.
- Represente graficamente a evolução da população.

A fórmula

$$C(t) = C_0 \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

exprime o capital acumulado ao fim de t anos por um capital C_0 , à taxa anual r , se os juros forem capitalizados n vezes por ano.

A fórmula para o cálculo do capital acumulado ao fim de n anos por um depósito, em regime de juros compostos, a uma taxa de juro anual de $r\%$:

$$C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n,$$

sendo C_0 o capital inicial e $n \in \mathbb{N}$ o número de anos.

Resolução

a) Assim, o capital acumulado seria:

- No início: 1 200 MT
- No fim de um ano: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 1\,200$ MT

b) • No fim de dois anos: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = 1\,278,08$ MT

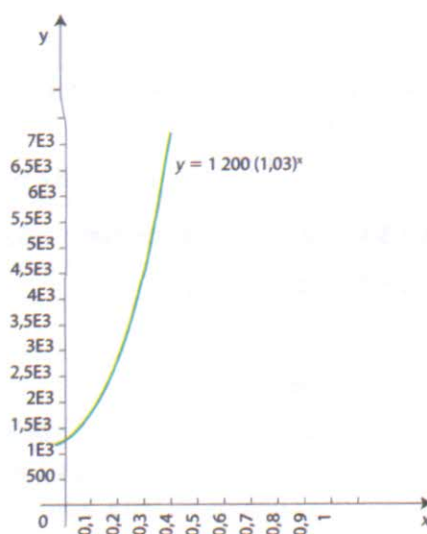
• No fim de três anos: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3 = 1\,311,27$ MT

• Ao fim de n anos: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$

c) Assim, $P_n = 1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$ representa o capital acumulado ao

fim de n anos, sendo $P_0 = 1\,200$ MT (capital inicial) e $r = 1 + \frac{3}{100}$ (aumento que o capital sofre em cada ano).

Este é um exemplo típico de **modelo de crescimento exponencial**. Podemos também representar graficamente este modelo:



Para um modelo de crescimento exponencial discreto:

$$P_n = P_0 \times r^n$$

3.1 Continuando com a questão dos juros, e se, em vez de capitalizar um só por ano, os juros capitalizarem várias vezes por ano?

Resolução

$P_0 = 1\,200$ MT e $r = 0,03$ (3%), e calcular o capital ao fim de um ano, após a capitalização feita:

Depositar-se 1 000 MT à taxa anual de 3% em regime de juro composto, capitalizado de 6 em 6 meses. Calcule o capital acumulado em 5 anos. Qual o montante do juro?

21

$$\begin{aligned} 1 \text{ vez por ano: } P_1 &= 1\,200 \left(1 + \frac{1}{0,03}\right)^1 = 1\,200 \times 1,03 = 1\,236 \text{ MT} \\ 2 \text{ vezes por ano: } P_2 &= 1\,200 \left(1 + \frac{2}{0,03}\right)^2 = 1\,200 \times 1,030225 = 1\,236,27 \text{ MT} \\ 3 \text{ vezes por ano: } P_3 &= 1\,200 \left(1 + \frac{3}{0,03}\right)^3 = 1\,200 \times 1,030301 = 1\,236,36 \text{ MT} \end{aligned}$$

$$12 \text{ vezes por ano } P_{12} = 1\,200 \left(1 + \frac{12}{0,03}\right)^{12} = 1\,200 \times 1,030416 = 1\,236,50 \text{ MT}$$

$$52 \text{ vezes por ano } P_{52} = 1\,200 \left(1 + \frac{52}{0,03}\right)^{52} \approx 1\,200 \times 1,030446 = 1\,236,53 \text{ MT}$$

$$365 \text{ vezes por ano } P_{365} = 1\,200 \left(1 + \frac{365}{0,03}\right)^{365} \approx 1\,200 \times 1,030453 = 1\,236,54 \text{ MT}$$

$$8760 \text{ vezes por ano } P_{8760} = 1\,200 \left(1 + \frac{8760}{0,03}\right)^{8760} \approx 1\,200 \times 1,030454 = 1\,236,55 \text{ MT}$$

$$525\,600 \text{ vezes/ano } P_{525\,600} = 1\,200 \left(1 + \frac{525\,600}{0,03}\right)^{525\,600} \approx 1\,200 \times 1,030455 = 1\,236,55 \text{ MT}$$

Um capital de 50 000,00 MT foi investido a juro composto de 6% ao mês. Qual será o montante desse capital após 5 meses?

23

Podemos concluir que, à medida que o número de capitalizações por ano aumenta, o acréscimo do capital deixa de ser significativo. Também verificamos que, com o aumento das capitalizações, o capital tende a estabilizar em:

$$1\,200 \times 1,030... \approx 1\,236 \text{ MT}$$

ou seja, $\left(1 + \frac{n}{0,03}\right)^n$ parece aproximar-se do valor 1,030 à medida que n

aumenta muito.

Um capital foi investido a juro composto de 5% ao mês. Após 6 meses, o montante será 2 500,00 MT. Qual foi o capital investido?

24

25

Inflação é o aumento generalizado dos preços de bens e serviços, num intervalo de tempo. Num certo país, a inflação manteve-se constante em 12% ao mês durante 5 meses. Se nesse período um bem de consumo custava 1 200,00 MT, quanto deverá custar após os 5 meses para acompanhar a inflação?

26

Se a taxa média de crescimento populacional de um país é de 2,4% ao ano. Se a população em 1993 era de 150 milhões de habitantes, qual foi este valor, aproximadamente, no ano 2000, se a taxa continuar a mesma?

4. Suponha que uma certa instituição bancária pratica um juro de 2,3% ao ano. Escreva uma expressão que permita calcular o capital acumulado por 1 000 MT ao fim de um período x , expresso em anos, e calcula o valor do capital ao fim de 39 meses.

Resolução

A expressão

$$C(x) = 1\,000 \times \left(1 + \frac{2,3}{100}\right)^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = 1\,000 \times 1,023^x \text{ com } x \in \mathbb{R}_0^+,$$

permite calcular o montante do capital ao fim de x anos.

A função $x \mapsto 1\,000 \times 1,023^x$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$, é uma função do tipo:

$$f(x) = c \times a^x \text{ com } a > 1, x \in \mathbb{R} \text{ e } c \text{ constante real.}$$

É o produto de uma constante por uma função exponencial e é uma função muito comum na modelação de vários fenómenos.

Para calcular o capital ao fim de 39 meses, temos que reduzir os meses a anos:

$$12 \text{ meses} \text{ ————— } 1 \text{ ano}$$

$$39 \text{ meses} \text{ ————— } x \qquad x = 3,25 \text{ anos}$$

Então, o capital acumulado ao fim de 39 meses é:

$$C(3,25) = 1000 \times 1,023^{3,25} \approx 1\,076,70 \text{ MT.}$$



Um exemplo de uma função injectiva h tal que $h(a + b) = h(a) \times h(b)$ pode ser definida por:

$A. h(x) = x^2$ **B. $h(x) = x^3$** **C. $h(x) = 3^x$** **D. $h(x) = 2x$**

Uma função de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que:

• $h(5) = 0$

• h é uma função par.

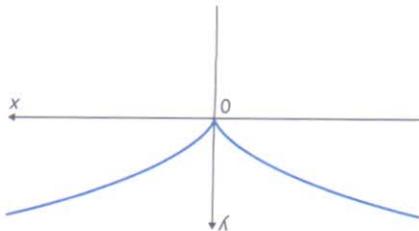
Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = h(x + 3)$. Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto de zeros de g ?

- A.** $\{-8, 2\}$ **B.** $\{3, 5\}$ **C.** $\{0, 3\}$ **D.** $\{-2, 8\}$

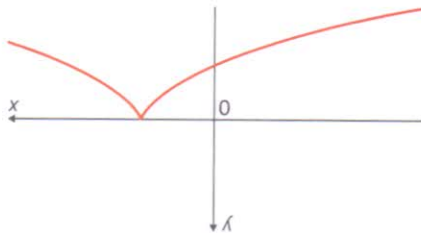
3. Se $2^x = 3$ então o valor de 4^{-x} é:

- A.** $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

4. Se o gráfico da função f é:



Então o gráfico



pode ser o gráfico de:

- A.** $y = f(x + 2)$ **B.** $y = -f(x - 2)$ **C.** $y = f(x) - 2$ **D.** $y = -f(x + 2)$

5. Seja $x \mapsto f(x) = a^{kx}$ com $a \in \mathbb{R}^+$ e $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma família de funções de domínio $\mathbb{R}$. Estuda a monotonia de f em função de a e k , ou seja, explica a influência de a e k na monotonia de f .

6. Uma certa função g é contínua em $\mathbb{R}$ e tem contradomínio $\mathbb{R}^+$. Sejam f, h, m, r e p definidas por:

$$f(x) = g(x + 1), \quad h(x) = 1 - g(x), \quad m(x) = \frac{1}{g(x)}, \quad r(x) = \sqrt{g(x) - 1} \quad \text{e} \quad p(x) = \frac{f(x) - 2}{1}$$

a) Indique, de entre estas funções, as que:

a.1) têm zeros.

a.2) não têm domínio $\mathbb{R}$.

b) Determine o contradomínio das funções f e h .



Exercícios propostos

7. A equação da procura de um novo jogo lançado no mercado é $q = 10^5 \times (0,95)^p$ com $p \in [0, 12]$, dado em meses; $p = 0$ corresponde ao início de Janeiro de 2004.

a) Esboce o gráfico de q .

b) Determine durante quanto tempo a procura foi superior a 6×194 .

c) Indique ao fim de quanto tempo (meses/dias) a procura reduziu 25% em relação ao início de Janeiro.

8. Escreva na forma de potência de expoente natural:

a) 2^{-3}

b) $\sqrt{5}^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$

e) $(-1)^{-5}$

9. Escreva os radicais na forma de potências e as potências na forma de radicais:

a) $5^{\frac{2}{3}}$

b) $2^{-\frac{1}{4}}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{3}$

e) $\sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$

f) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (na forma de potência e de radical)

10. Escreva como potências de base natural:

a) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

11. Se $3^{-x} = 2$, indique o valor de:

a) 3^{2x}

b) 3^{x+1}

c) 9^{x-1}

12. Se $4^x = 7$, indique o valor de:

a) 4^{-2x}

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$

c) 8^x

13. Determine o domínio de existência em $\mathbb{R}$ das funções definidas:

a) $f(x) = \frac{x}{2^x + 1}$

b) $g(x) = \frac{3}{2^{x+3} - 1}$

14. Escreva a expressão de uma função da família das funções definidas por $f(x) = a \cdot 2^{kx}$:

a) que seja decrescente e com contradomínio $\mathbb{R}^+$.

b) que seja crescente e com contradomínio $\mathbb{R}^-$.

c) cujo gráfico passe nos pontos $A(0, 1)$ e $B(1, 8)$.

d) cujo gráfico passe nos pontos $P(-1, 2)$ e $Q\left(\frac{1}{2}, 16\right)$.

15. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $5^{2x+5} = 5^{1/2}$

b) $16^{x-3} = 2^{x+3}$

c) $9^{2x} = 3^{x-1}$

d) $(2^{x-1})^2 = 4$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2(x+1)}$

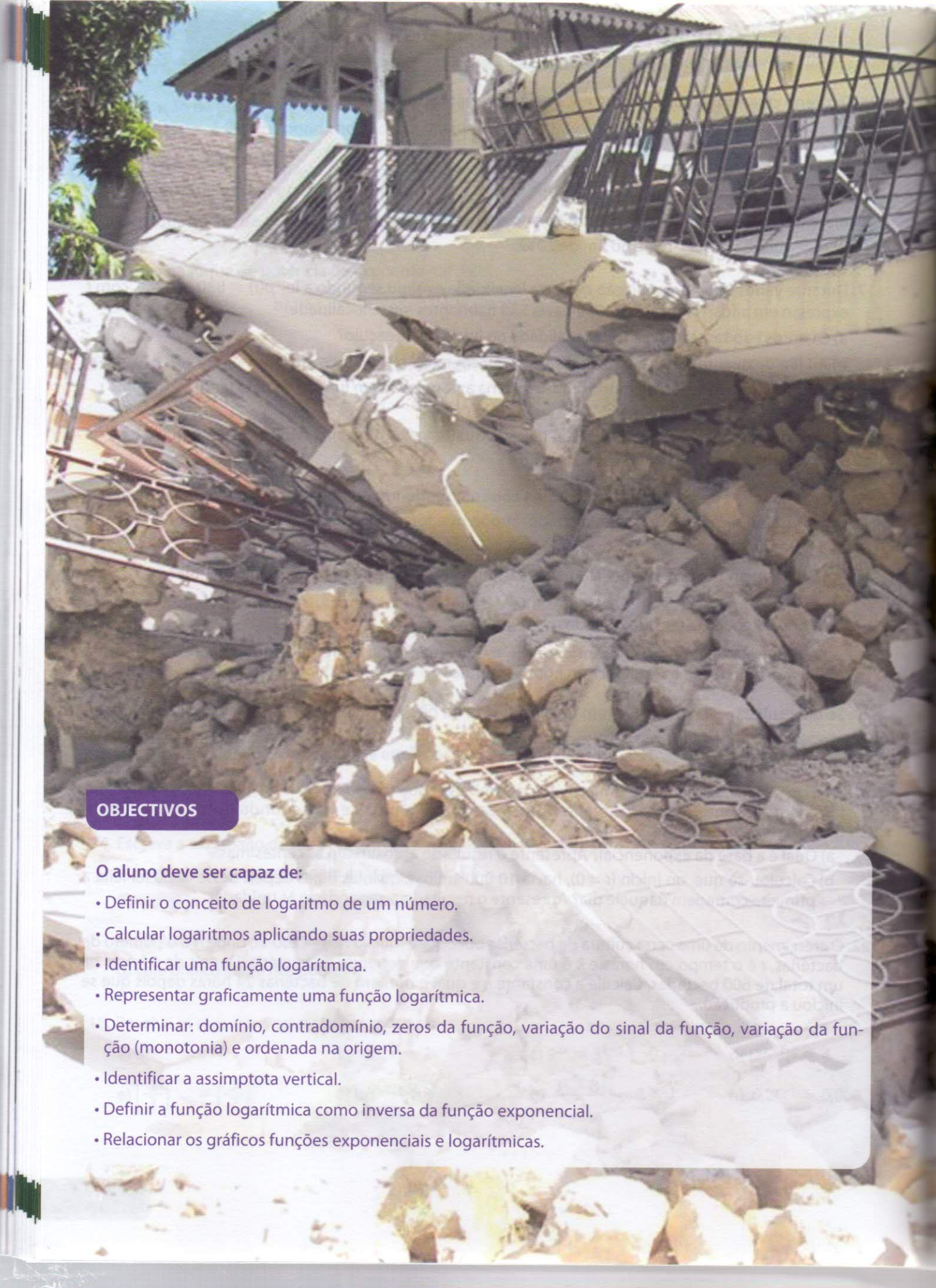
f) $(a^{x-1})^2 = 1$

g) $\frac{3^{x^2} \cdot 81}{2} = 3^{2x+1}$

h) $0,2^{x-1} = 0,008$



16. Em certa cidade a população cresce 2% ao ano. Sabendo que representa a população, t anos após o início de 1980, calcule:
 - a) A população desta cidade no início do ano em que nasceu.
 - b) A população desta cidade no fim de 2012.
17. Durante vários anos, a população de certa localidade evoluiu segundo a lei $p(t) = 830 \cdot (1,06)^t$, com t expresso em anos. No início de 1950 havia 830 habitantes nessa localidade.
 - a) Quantos habitantes havia nessa localidade no início deste século?
 - b) Ao fim de quantos anos a população duplicou em relação ao ano de 1950?
 - c) Modifique a expressão de modo a que exprima a população em função da data (ano) x .
18. Mostre que a taxa trimestral de 1% capitalizada quatro vezes num ano, não é o mesmo que a taxa de 4% capitalizada ao fim de um ano.
19. A quantidade M de certo medicamento na corrente sanguínea reduz-se em $\frac{3}{1}$ a cada hora que passa depois do medicamento ser administrado. Supõe que foram injectados 500 mg desse medicamento às 8 horas de um certo dia:
 - a) Qual a quantidade M de medicamento existente no sangue às 10 horas do mesmo dia?
 - b) Escreva uma expressão que represente a quantidade M de medicamento no sangue, em mg, t horas depois de ter sido tomado.
 - c) A que horas desse dia a quantidade de medicamento na corrente sanguínea, ficou inferior a 50 mg? Apresente o resultado em horas e minutos.
20. Se uma substância radioactiva tem uma semi-vida de oito anos, quanto tempo leva 1 grama a reduzir-se a $\frac{1}{128}$ gramas? E a $\frac{1}{16}$ gramas?
21. A lei do desenvolvimento de uma colónia de amibas segue o modelo $N = N_0 a^t$. Fizeram-se duas contagens no mesmo dia; na primeira obteve-se 50 mil amibas e na segunda, oito horas depois, 80 mil, aproximadamente.
 - a) Qual é a base da exponencial? Apresente o resultado aproximado às centésimas.
 - b) Calculou-se que, no início ($t = 0$), havia 10 000 amibas; quantas horas depois desse início foi feita a primeira contagem daquele dia? Apresente o resultado arredondado às unidades.
22. O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece a função $N(t) = 200 \cdot kt$, onde N é o número de bactérias, t é o tempo em horas e k é uma constante que depende da bactéria. Depois de 6 horas há um total de 600 bactérias. Calcule a constante k e qual o número de bactérias 24 horas depois que se iniciou a produção.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Definir o conceito de logaritmo de um número.
- Calcular logaritmos aplicando suas propriedades.
- Identificar uma função logarítmica.
- Representar graficamente uma função logarítmica.
- Determinar: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem.
- Identificar a assíntota vertical.
- Definir a função logarítmica como inversa da função exponencial.
- Relacionar os gráficos funções exponenciais e logarítmicas.

7 UNIDADE

Págs. 88 a 111

CONTEÚDOS

Logaritmo de um número

- Conceito de logaritmo
- Cálculo logarítmico
- Propriedades de logaritmos
- Logaritmos decimais

Função logarítmica

- Conceito da função logarítmica $y = \log_a x$
- Representação gráfica da função logarítmica $y = \log_a x$
- a) Caso $a > 1$
- b) Caso $0 < a < 1$
- Estudo da função logarítmica $y = \log_a x$: domínio, contradomínio, zeros da função, variação da função (monotonia), assíntota vertical e ordenada na origem
- Representação gráfica da função logarítmica $y = \log_a (x + b)$ e $y = \log_a (x + b) + d$
- Estudo da função logarítmica $y = \log_a (x + b)$, $y = \log (x + b) + d$ e $y = \log_a (cx + d) + e$
- Função logarítmica como inversa da função exponencial

Logaritmo de um número

Ao resolvermos uma equação de grau superior ou igual a dois, por exemplo, $x^3 = 27$, o valor de x é obtido aplicando a operação inversa da potenciação, ou seja, a radiciação:

$$x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$$

Mas, ao resolvermos uma equação exponencial, por exemplo, $3^x = 81$, procuramos mentalmente o valor x a que se deve elevar 3 para obter 81, ou seja, $x = 4$, pois $3^4 = 81$.

À solução desta equação chama-se logaritmo de 81 na base 3:

$$x = \log_3 81 \Leftrightarrow x = 4$$

Logaritmo de um número positivo numa dada base, maior que zero e diferente de 1⁽¹⁾, é o expoente a que é preciso elevar a base para obter esse número.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, b \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

⁽¹⁾ Mais à frente explicaremos esta restrição.



Exemplos

1. $\log_2 b = \pi \Leftrightarrow b = 2^\pi$

2. $3^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_3 8$

3. $2^{\log_2 5} = 5$

4. $\pi^{\log_\pi 3} = 3$

5. $\log_2 2^4 = 4$

6. $\log_5 5^2 = 2$

7. $\log_3 3^x = x$

8. $2^{3 + \log_2 5} = 2^3 \times 2^{\log_2 5} = 8 \times 5 = 40$

9. $\log_6 (2^{\sqrt{3}} \times 3^{\sqrt{3}}) = \log_6 (6^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$

10. Só existe $\log_2 (x + 3)$ se $x > -3$, porque só os números positivos têm logaritmo e $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

1

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

a) $5^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{\dots} \dots$

b) $(\sqrt{2})^t = 20 \Leftrightarrow t = \dots$

c) $x = \log_3 4 \Leftrightarrow 4 = \dots$

d) $y = \log_a 2 \Leftrightarrow 2 = \dots$

e) $\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = \dots$

• Como $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, apenas o número 1 teria logaritmo na base 1. Por isso, não admitimos o 1 como base de logaritmos.

• Já sabe que $\log_a k = b \Leftrightarrow a^b = k$ e esta equação só é possível se $k > 0$ pois, sendo a um número positivo, a expressão a^b representa sempre um número positivo. **Só os números positivos têm logaritmo.** Sendo k positivo, tanto pode ser racional como irracional, já que o contradomínio da função exponencial é $\mathbb{R}^+$.

Consequências da definição de logaritmo

• Da definição de logaritmo resulta que, em qualquer base:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a a^x = x$$

• A base a de logaritmos é sempre um número positivo e diferente de 1:

$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

• Em qualquer base:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_a a = 1$$

• Em qualquer base, só os números positivos têm logaritmo.

Exercícios resolvidos

1. Calcule os logaritmos seguintes sabendo que são números racionais:

- a) $\log_3 9$ b) $\log_2 128$ c) $\log_3 1$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 16$
 e) $\log_4 8$ f) $\log_4 \sqrt{2}$ g) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$

Resolução

Repare que $\log_a b$ é um número racional se a e b se podem escrever como potências com a mesma base e expoente inteiro:

a) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

b) $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$

c) $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = -4$

e) Vamos chamar x a $\log_4 8$.

$$\log_4 8 = x \Leftrightarrow 8 = 4^x \Leftrightarrow 2^3 = 2^{2x} \Leftrightarrow 3 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

f) Seja $x = \log_4 \sqrt{2}$.

$$\log_4 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow \sqrt{2} = 4^x \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Então, $\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$.

3

Escreva o número 7 com a forma de:

a) potência de base 2.

b) logaritmo de base 10.

c) potência de base 7.

d) potência de base 10.

e) potência de base 49.

f) logaritmo de base $\sqrt{2}$.

4

Calcule:

a) $\log_3 27$

b) $\log_2 32$

c) $\log_{\sqrt{3}} 1$

d) $\log_9 243$

e) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{1}$

f) $\log_5 0,04$

g) $\log_4 \sqrt[3]{2}$

h) $\log_8 \sqrt{128}$

5

Sem recorrer à calculadora, calcule:

a) $\log_3 \left(\frac{1}{27} \right)$

b) $\log_2 256$

c) $\log_5 \sqrt{5}$

d) $\log_3 9^{\sqrt{3}}$

g) Seja $x = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$.

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \sqrt{3}^x \Leftrightarrow 3^{-2} = (3^{\frac{1}{2}})^x \Leftrightarrow 3^{-2} = 3^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = -4$$

Então, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = -4$.

2. Calcule:

a) $\log_{10} 1000$

b) $\log_4 \left(\frac{1}{1024} \right)$

c) $\log_{10} 0,01$

d) $\log_9 3$

Resolução

a) $\log_{10} 1000 = y \Leftrightarrow 10^y = 1000 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 3$$

Assim: $\log_{10} 1000 = 3$

b) $\log_4 \left(\frac{1}{1024} \right) = y \Leftrightarrow 4^y = \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 4^y = \frac{1}{4^5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4^y = 4^{-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -5$$

Assim: $\log_4 \left(\frac{1}{1024} \right) = -5$

c) $\log_{10} 0,01 = y \Leftrightarrow 10^y = 0,01 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10^y = 10^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -2$$

Assim: $\log_{10} 0,01 = -2$

d) $\log_9 3 = y \Leftrightarrow 9^y = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (3^2)^y = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2y} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Assim: $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

Logaritmo decimal

Resolução

3. Resolva as equações:

a) $2^{x+1} = 6$ b) $\log_3(x^2 + 1) = 2$ c) $4 - 2 \times 3^{1-x} = 1$

a) $2^{x+1} = 6 \Leftrightarrow x + 1 = \log_2 6 \Leftrightarrow x = -1 + \log_2 6$
 b) $\log_3(x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$
 c) $4 - 2 \times 3^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 3^{1-x} = \frac{1-4}{-2} \Leftrightarrow 3^{1-x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1-x = \log_3 \frac{3}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 1 - \log_3 \frac{3}{2}$

Resolva as equações:
 a) $2^x = 5$
 b) $3^{2x+1} = 7$
 c) $x \cdot 3^{x+1} = 2x$
 d) $\log_2(x - 3) = 0$
 e) $1 + \log_3 x = 0$

Na escrita corrente, são também estas as notações que vamos utilizar para representar o logaritmo de base 10.

Exemplos

1. $\log_{10} 100 = \log 100 = 2$

2. $\log_{10} 0,001 = \log 0,001 = -3$

3. $\log_{10} 8 = \log 8 \approx 0,9$ (valor aproximado com erro inferior a 0,1)

4. $\log \sqrt{5} - 2 \ln 4 \approx -2,42$ (valor aproximado com erro inferior a 0,01)

Determine valores aproximados, com erro inferior a 0,001 de:

a) $\log_{10} 3,5$

b) $\log 20$

c) $\log 0,6$

O recurso à calculadora permite obter o valor exacto ou boas aproximações do logaritmo de base 10.

Exercício resolvido

A energia libertada num sismo pode ser dada, em joules, aproximadamente por:

$$E = 1,7 \times 10^{kM+5}$$

sendo M a magnitude do sismo.
 Determine um valor aproximado de k com erro inferior a uma centésima, sabendo que um sismo de magnitude 5 liberta $2,7 \times 10^{12}$ joules de energia.

8

Indique o valor de:

- a) $\log_2 16 - \log_2 8$ e de $\log_2 (16 \div 8)$
- b) $\log_2 8 + \log_2 32$ e de $\log_2 (8 \times 32)$
- c) $\log_2 512 - \log_2 64$ e de $\log_2 \frac{512}{64}$

Atenção

- $\log_a (u + v)$ não é igual a $\log_a u + \log_a v$
- $\log_a u - \log_a v$ não é igual a $\frac{\log_a u}{\log_a v}$
- $\log_a u^v$ não é igual a $(\log_a u)^v$
- As propriedades estão enunciadas em $\mathbb{R}^+$ e só aí são válidas.

⁽²⁾ Recorda que a função exponencial de base $a > 1$ é uma função injectiva.

Resolução

$$E(5) = 2,7 \times 10^{12} \Leftrightarrow 1,7 \times 10^{5k+5} = 2,7 \times 10^{12} \Leftrightarrow 10^{5k+5} = \frac{2,7 \times 10^{12}}{1,7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{5k} \times 10^5 = \frac{2,7 \times 10^{12}}{1,7} \Leftrightarrow 10^{5k} = \frac{2,7 \times 10^{12}}{1,7 \times 10^5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{5k} = \frac{2,7 \times 10^7}{1,7} \Leftrightarrow 5k = \log_{10} \frac{2,7 \times 10^7}{1,7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\log \frac{2,7 \times 10^7}{1,7}}{5} \Leftrightarrow k \approx 1,44$$

O valor de k , com erro inferior a 0,01, é 1,44.

Propriedades operatórias dos logaritmos

Seja a a base dos logaritmos (positiva e diferente de 1)

1. O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos factores:

$$\log_a (u \times v) = \log_a u + \log_a v \quad (u, v \in \mathbb{R}^+)$$

Demonstração:

$$a^{\log_a (uv)} = uv \quad \text{e} \quad a^{\log_a u + \log_a v} = a^{\log_a u} \times a^{\log_a v} = uv,$$

por definição de logaritmo e pelas propriedades das potências.

Se, na mesma base, as potências são iguais, então os expoentes também são iguais⁽²⁾:

$$\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$$

c.q.d.

2. O logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos dos termos:

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v \quad (u, v \in \mathbb{R}^+)$$

(3) Vide nota 2 pág. 86.

9

Use as propriedades dos logaritmos para encontrar o valor exacto de cada uma das expressões sem usar a calculadora:

a) $\log_{10} \sqrt{10}$ c.q.d.

c) $\log_4 8 + \log_4 2$

Em particular, $\log_a \frac{x}{1} = -\log_a x$ visto que $\log_a 1 = 0 \forall a > 0 \wedge a \neq 1$

10

Escreva na forma de um único logaritmo:

a) $\log 9 + \log 3$

b) $3 \log_2 5 - 0,5 \log_2 25$

c) $\log_2 \frac{x}{1} - \log_2 \frac{x^2}{1}, x > 0$

d) $\log_2 3 \cdot \log_2 6$

e) $\frac{\log x}{2} - 2, x > 0$

11

Indique o domínio das funções definidas por:

a) $f(x) = \log_2(5x + 2)$

b) $g(x) = \log(x^2 - 10x)$

c) $h(x) = \frac{\log_3(x+4)}{5}$

d) $f(x) = \log_2 x + \log_2(x^2 - 6x + 8)$

12

Calcule sem efectuar as operações dentro de parêntesis:

a) $\log_2(8 \times 128)$

b) $\log_5(25 \times 3125)$

c) $\log_3(81 \times 729)$

Sejam os resultados iguais, na mesma base, os expoentes também são iguais⁽³⁾:

por definição de logaritmo e pelas propriedades das potências.

$$d^{\log_a \frac{u}{v}} = \frac{u}{v} \quad \text{e} \quad d^{\log_a u - \log_a v} = d^{\log_a u} \div d^{\log_a v} = u \div v = \frac{u}{v}$$

Demonstração:

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$$

c.q.d.

a) $\log_{10} \sqrt{10}$

c) $\log_4 8 + \log_4 2$

Em particular, $\log_a \frac{x}{1} = -\log_a x$ visto que $\log_a 1 = 0 \forall a > 0 \wedge a \neq 1$

10

Escreva na forma de um único logaritmo:

a) $\log 9 + \log 3$

b) $3 \log_2 5 - 0,5 \log_2 25$

c) $\log_2 \frac{x}{1} - \log_2 \frac{x^2}{1}, x > 0$

d) $\log_2 3 \cdot \log_2 6$

e) $\frac{\log x}{2} - 2, x > 0$

11

Indique o domínio das funções definidas por:

a) $f(x) = \log_2(5x + 2)$

b) $g(x) = \log(x^2 - 10x)$

c) $h(x) = \frac{\log_3(x+4)}{5}$

d) $f(x) = \log_2 x + \log_2(x^2 - 6x + 8)$

12

Calcule sem efectuar as operações dentro de parêntesis:

a) $\log_2(8 \times 128)$

b) $\log_5(25 \times 3125)$

c) $\log_3(81 \times 729)$

Exemplos

$$\begin{aligned} 1. \log_3(9 \times 27) &= \log_3 9 + \log_3 27 = \log_3 3^2 + \log_3 3^3 = 2 + 3 = 5 \\ 2. \log_2(32 \times 64 \times 16) &= \log_2 32 + \log_2 64 + \log_2 16 = \\ &= \log_2 2^5 + \log_2 2^6 + \log_2 2^4 = 5 + 6 + 4 = 15 \\ 3. \log_6 \left(\frac{46656}{36} \right) &= \log_6 36 - \log_6 46656 = \log_6 6^2 - \log_6 6^6 = \\ &= 2 - 6 = -4 \\ 4. \log_{16} \left(\frac{4}{4096} \times 256 \right) &= \log_{16} \left(\frac{4}{4096} \right) + \log_{16} 256 = \\ &= \log_{16} 4 - \log_{16} 4096 + \log_{16} 256 = \\ &= \log_{16} 16^{\frac{1}{2}} - \log_{16} 16^3 + \log_{16} 16^2 = \\ &= \frac{1}{2} - 3 + 2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

13

Calcule sem efectuar as operações dentro de parêntesis:

a) $\log_2 \left(\frac{128}{32} \right)$

b) $\log_3 \left(\frac{2187}{27} \times 81 \right)$

c) $\log_6 \left(\frac{1296 \times 216}{7776} \right)$

5. $\log (10 \cdot x^5) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{100}{x^{-3}} \right) =$

$$= \log 10 + \log x^5 - \frac{1}{2} (\log 10^2 - \log x^{-3}) =$$

$$= 1 + 5 \log x - \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} (-3 \log x) = 5 \log x - \frac{3}{2} \log x = \frac{7}{2} \log x$$

6. $\log_a 3 + 2 \log_a 5 = \log_a 3 + \log_a 5^2 = \log_a (3 \times 5^2) = \log_a 75$

7. $\log_2 (8x^2) - \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2 - \log_2 x = 3 + \log_2 \frac{x^2}{x} =$
 $= 3 + \log_2 x$

8. $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 = \log_5 6 \cdot \log_4 5 \cdot \log_6 7 = \log_4 5^{\log_5 6} \cdot \log_6 7 =$
 $= \log_4 6 \cdot \log_6 7 = \log_6 7 \cdot \log_4 6 = \log_4 6^{\log_6 7} = \log_4 7$

Mais propriedades (mudança de base)

5. O logaritmo de u numa base a é o quociente dos logaritmos de u e de a numa base b :

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a} \quad (u \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Demonstração:

$$\log_a u \cdot \log_b a = \log_b a^{\log_a u} \Leftrightarrow (\text{propriedade 3})$$

$$\Leftrightarrow \log_a u \cdot \log_b a = \log_b u \quad (\text{porque } a^{\log_a u} = u)$$

$$\Leftrightarrow \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a} \quad (\text{repara que } \log_b a \neq 0 \text{ porque } a \neq 1)$$

c.q.d.

14

Calcule:

a) $\log_{10} (1000^2)$

b) $\log_2 \sqrt{32}$

c) $\log_3 \left(\frac{27\sqrt{3}}{\sqrt[3]{81}} \right)$

d) $\log_2 (16^5) + \log_3 \left(\frac{243}{9} \right)$



Exemplo

O cálculo de $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7$ (exemplo 8, em cima) pode ser feito usando a mudança de base:

$$\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 = \log_4 5 \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 5} \cdot \frac{\log_4 7}{\log_4 6} = \log_4 7$$

Corolário 1

O logaritmo de u numa base v é o inverso do logaritmo de v na base u :

$$\log_v u = \frac{1}{\log_u v} \quad (u, v \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Demonstração:

$$\log_v u = \frac{\log_u u}{\log_u v} = \frac{1}{\log_u v} \quad (\text{propriedade 5, com } a = v \text{ e } b = u)$$

$$\log_a u = \frac{\log u}{\log a} \quad (u \in \mathbb{R}^+)$$

Demonstração:

Basta, na propriedade 5, considerar $b = 10$.

É esta propriedade que permite usar a calculadora na determinação de valores (exatos ou aproximados) de logaritmo de número com bases diferentes de 10.

Use a «Fórmula de mudança de base» para obter valores aproximados dos logaritmos seguintes, com 3 casas decimais.

- $\log_4 29$
- $\log_{19} 9$
- $\log_{26} 0,7$
- $\log_{\sqrt{3}} 18$
- $\log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{5}$
- $\log_3 \sqrt{0,5}$

Exemplos

$$1. \log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$$

O quociente $\frac{\log 8}{\log 2}$ é obtido com a calculadora e comprova que

$$\log_2 8 = 3$$

$$2. \log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} = \frac{1}{\log 5} \text{ e, usando a calculadora, obtém-se um valor aproximado: } \log_5 10 \approx 1,43 \text{ (2.c.d.)}$$

Exercícios resolvidos

- Simplifique as expressões seguintes com $x, y, t \in \mathbb{R}^+$.
 - $\log_2 (4 \times 2^x)$
 - $3^1 - 2 \log_3 t$
 - $2 \log (10 t) - 2 \log t$

Resolução

Nota: Qualquer das simplificações pode ser feita por outros processos.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 (4 \times 2^x) &= \log_2 4 + \log_2 2^x = 2 + x \\ \text{b) } 3^1 - 2 \log_3 t &= \frac{3^1}{3} = \frac{3 \log_3 t}{3} = \frac{t^2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{c) } 2 \log (10 t) - 2 \log t = 2 [\log (10 t) - \log t] = 2 \log \frac{10 t}{t} = 2 \log 10 = 2$$

Simplifique as expressões seguintes:

- $\log_{\sqrt{2}} (8 \times 2^x)$
- $\log_4 x^2 + \log_2 x, x > 0$
- $\log_b c^2 \times \log_c b^2, c, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\log_a 5 + \log_{\frac{1}{a}} 5, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Função logarítmica

A função que a cada número real positivo x faz corresponder o logaritmo de x na base a , chama-se **função logarítmica de base a** :

Se f^{-1} é a função inversa de f :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = \log_a x$$

Como $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$, facilmente se compreende que a função logarítmica de base a é a função inversa da função exponencial de base a e, como tal, também surge como modelo em variadíssimos campos do conhecimento.

17

Determine a de modo que o ponto P pertença ao gráfico de $f(x) = \log_a x$, sendo:

a) $P \mapsto (3, 2)$

b) $P \mapsto \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

18

Esboce o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e obtém, a partir dele, o gráfico de $f^{-1}(x) = \log_2(x)$.

Faça para esta função um registo das principais características, idêntico ao que está feito, para as funções logarítmicas de base $a > 1$.

19

Seja f a função definida por:

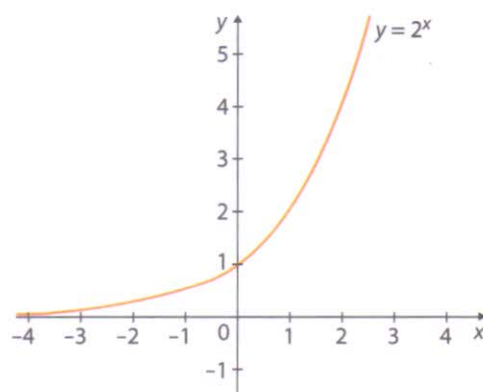
$$f(x) = a + \log_2 x \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

Determine a sabendo que o gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.

Função logarítmica de base > 1

Consideremos a função, real de variável real, definida por:

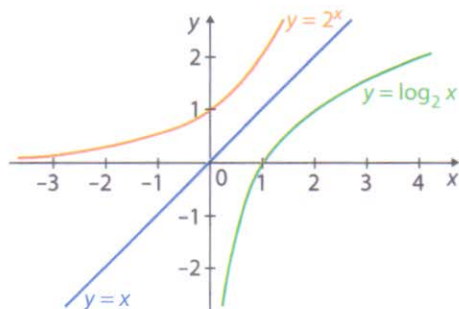
$$f(x) = 2^x$$



Como se trata de uma função injectiva, admite inversa. Pela definição de logaritmo de um número, a função inversa de f é a função logarítmica de x na base 2:

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

O gráfico de f^{-1} , gráfico de função inversa de f , obtém-se a partir do gráfico de f por meio de uma simetria relativamente à recta $y = x$, bissectriz dos quadrantes ímpares. Se o ponto (a, b) pertence ao gráfico de f , então o ponto (b, a) pertence ao gráfico de f^{-1} .



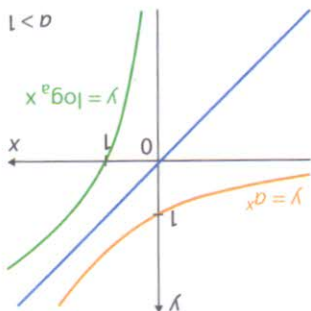
e apresente as suas conclusões num pequeno relatório.

$$y = \log_a x, \text{ com } 0 < a < 1$$

do tipo:

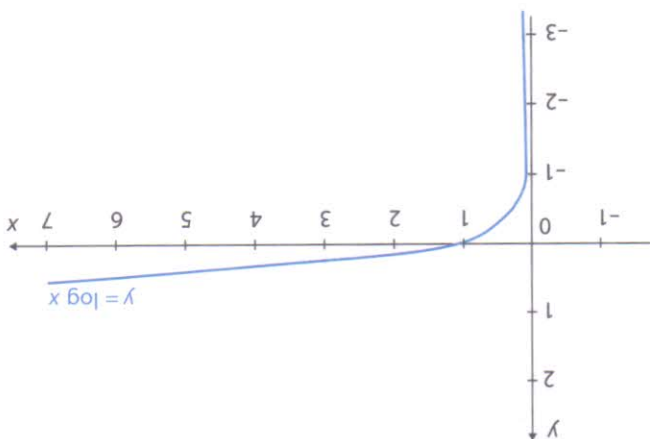
Investigue as características da família de funções logarítmicas

20



Sobre qualquer função logarítmica de base $a > 1$ do tipo $y = \log_a x$, podemos afirmar que:

- O domínio é $\mathbb{R}^+$.
- O contradomínio é $\mathbb{R}$.
- É contínua no seu domínio.
- É injectiva no seu domínio.
- É estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$:
- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.
- $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.
- A função tem um zero (em $x = 1$), ou seja, o ponto $(1, 0)$ pertence ao gráfico.
- É positiva para $x \in]1, +\infty[$.
- É negativa para $x \in]0, 1[$.



Existem imensos fenómenos que são modelados por expressões com logaritmos, sendo o logaritmo de base 10 um dos mais utilizados. Nos logaritmos de base 10 (logaritmos decimais), $\log_{10} a$ denota-se $\log a$.

- Acerca da função definida por $f^{-1}(x) = \log_2 x$, podemos afirmar que:
- O domínio é $\mathbb{R}^+$.
 - O contradomínio é $\mathbb{R}$.
 - É crescente e contínua no seu domínio.
 - A função tem um zero (em $x = 1$), logo, o ponto $(1, 0)$ pertence ao gráfico de f^{-1} .
 - Quando x se aproxima de zero por valores superiores a zero, $\log_2 x \rightarrow -\infty$.
 - Quando x tende para valores tão grandes quanto se queira, $\log_2 x \rightarrow +\infty$.

Até à utilização rotineira das calculadoras usavam-se tabelas de logaritmos naturais. Apresenta-se um extracto de uma dessas tabelas.

N	0	1	2	3	4
50	69 897	69 894	69 891	69 888	69 885
51	70 757	70 754	70 751	70 748	70 745
52	71 600	71 597	71 594	71 591	71 588
53	72 428	72 425	72 422	72 419	72 416
54	73 239	73 236	73 233	73 230	73 227
55	74 036	74 033	74 030	74 027	74 024
56	74 819	74 816	74 813	74 810	74 807
57	75 587	75 584	75 581	75 578	75 575
58	76 343	76 340	76 337	76 334	76 331
59	77 085	77 082	77 079	77 076	77 073
60	77 815	77 812	77 809	77 806	77 803
61	78 533	78 530	78 527	78 524	78 521
62	79 239	79 236	79 233	79 230	79 227
63	79 934	79 931	79 928	79 925	79 922
64	80 619	80 616	80 613	80 610	80 607

NOTA

21

Determine o domínio de existência das funções definidas por:

a) $f(x) = 4 + \log_2(1 - x)$

b) $r(x) = \log_3 \frac{x+1}{5+x}$

c) $m(x) = \frac{x}{2 - \log(3 - x)}$

22

Determine, caso existam, os zeros das funções definidas por:

a) $f(x) = 1 - \log_2(x + 3)$

b) $h(x) = x - x \log_3\left(\frac{x+1}{2}\right)$

c) $r(x) = \frac{x-1}{\log(x-2)}$

- Quando x se aproxima de zero por valores superiores a zero,

$$\log_a x \rightarrow -\infty$$

- Quando x tende para valores tão grandes quanto se queira,

$$\log_a x \rightarrow +\infty.$$

- O gráfico da função tem uma assíntota vertical de equação $x = 0$.



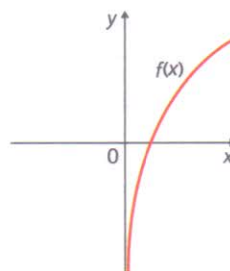
Exercícios resolvidos

1. Sem recorrer à calculadora, estabeleça uma correspondência entre as funções que a seguir se definem pelas suas expressões designatórias e os gráficos que se apresentam. Todos os gráficos se podem obter a partir do gráfico de $f(x) = \log_2 x$, de domínio $\mathbb{R}^+$, por meio de translações e/ou simetrias.

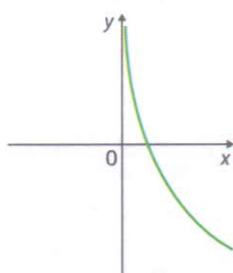
$$g(x) = \log_2(x + 2)$$

$$h(x) = \log_2(-x)$$

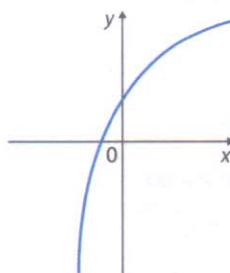
$$r(x) = -\log_2 x$$



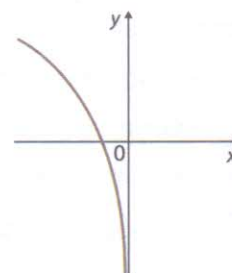
A



B



C



Resolução:

$$g(x) \rightarrow B$$

$$h(x) \rightarrow C$$

$$r(x) \rightarrow A$$

2. A escala de Richter (apelido do cientista americano C. F. Richter) associa à magnitude de um sismo os efeitos que se espera que o sismo produza.

A magnitude de um sismo na escala de Richter é um número entre 1 e 9 que se obtém a partir das leituras nos sismógrafos.

Todos os tremores de terra são comparados com o nível zero de um sismo em que o sismógrafo regista uma amplitude máxima de 0,001 mm, a uma distância de 100 km de epicentro.



A magnitude M de um tremor de terra em que um sismógrafo situado a 100 km do seu epicentro regista uma magnitude máxima de x milímetros, é dada por:

$$M(x) = \log(10^3 x)$$

a) Mostre que $M = 1$ para $x = 0,01$ mm.

b) Determine a magnitude de um sismo em que o sismógrafo situado a 100 km do epicentro fez um registo máximo de 0,1 mm.

c) Qual o registo máximo de um sismógrafo para um sismo de grau 4,5 na escala de Richter?

d) Qual a diferença de magnitude entre dois sismos sabendo que os sismógrafos acusaram para um deles uma amplitude máxima 5 vezes superior à do outro?

Resolução

$$a) M(0,01) = \log(10^3 \times 0,01) = \log 10 = 1$$

$$b) M(0,1) = \log(10^3 \times 10^{-1}) = \log 10^2 = 2. \text{ A magnitude é } 2.$$

$$c) 4,5 = \log(10^3 x) \Leftrightarrow 10^{4,5} = 10^3 x \Leftrightarrow x = \frac{10^{4,5}}{10^3} \Leftrightarrow x = 10^{1,5} \Leftrightarrow x \approx 31,6 \text{ mm}$$

d) Seja x_1 o registo máximo do sismógrafo para o sismo mais fraco; então $5x_1$ é o registo máximo para o sismo mais forte.

$$M(5x_1) - M(x_1) =$$

$$= \log(10^3 \times 5x_1) - \log(10^3 \times x_1) = \log \frac{10^3 \times 5x_1}{10^3 \times x_1} = \log 5 \approx 0,7$$

A diferença de magnitude não chega a 1 grau na escala de Richter; é aproximadamente 0,7.

Seja $M(x) = \log x + 3$ a expressão da magnitude de um sismo em função do registo da amplitude máxima em milímetros feita pelo sismógrafo.

a) Mostre que

$$M(x) = \log(10^3 x)$$

b) Qual a magnitude de um sismo que provoca no sismógrafo um registo máximo de 10 cm?

c) Exprime x em função de M .

d) Qual o registo máximo no sismógrafo num sismo de magnitude 6?

e) Dois sismos têm um grau de diferença de magnitude. Se a maior amplitude registada pelo sismógrafo para o sismo mais fraco é A , qual o registo máximo da amplitude do mais forte?

⁽⁴⁾ Em homenagem a Alexandre Graam Bell.

24

Seja:

$$N(I) = 10 \log (10^{12} I)$$

o nível de um som com intensidade I .

Se a intensidade de um som é 50 vezes superior à intensidade de outro, qual a diferença de nível entre ambos?

4. A Física define «intensidade de uma onda sonora» como a quantidade de energia que a onda transmite através de uma certa área. O som menos intenso que o ouvido humano pode detectar, numa frequência de 100 hertz, é cerca de 10^{-12} Wm^{-2} .

O nível $N(I)$, medido em decibéis⁽⁴⁾, de um som de intensidade I (em Watts por metro quadrado) é definido por:

$$N(I) = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ sendo } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Se, na equação anterior, considerarmos $I = I_0$, obtemos $N = 0$, ou seja, o nível zero corresponde ao limite de audibilidade do ouvido humano.

Seja então $N(I) = 10 \log (10^{12} \times I)$ o nível em decibéis, de um som de intensidade I , em Watts por m^2 .

- A partir de 100 decibéis é aconselhável proteger os ouvidos. Sabendo que a intensidade do som produzido por um martelo pneumático é 1 W/m^2 , averigue se é necessário proteger os ouvidos com auscultadores quando se trabalha com um martelo pneumático.
- O nível de ruído correspondente ao tráfego numa grande cidade é 90 decibéis. Se o ruído produzido pelo metropolitano tem uma intensidade 10 vezes superior ao produzido pelo tráfego, qual o nível do ruído do metropolitano, em decibéis?
- Exprime a intensidade I de um som em função do seu nível N .

Resolução

- $N(1) = 10 \log (10^{12} \times 1) = 10 \log (10^{12}) = 10 \times 12 = 120$
O nível correspondente é 120 decibéis e é, portanto, necessário usar protecção.
- Seja I_c a intensidade, em W/m^2 , do som produzido pelo tráfego citadino.
Então $10 I_c$ é a intensidade do som produzido pelo metropolitano e:
$$N(10 I_c) = 10 \log (10^{12} \cdot 10 I_c) = 10 [\log (10^{12} I_c) + \log 10]$$
$$= 10 \log (10^{12} I_c) + 10 = N(I_c) + 10 = 90 + 10 = 100$$

O nível do ruído produzido pelo metropolitano é 100 decibéis.
- O que se pretende é, afinal, a expressão da função inversa de N . Vamos resolver a equação $N = 10 \log (10^{12} I)$ em ordem a I .

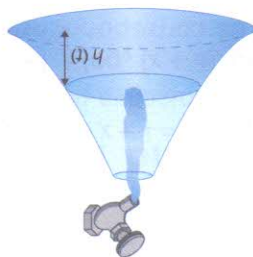
metro quadrado, sendo N o nível do som dado em decibéis.

$$I(N) = 10^{10} \frac{N-120}{N} \text{ exprime a intensidade do som em watts por metro quadrado, sendo } N \text{ o nível do som dado em decibéis.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10^{10}}{10^{\frac{N-120}{N}}} = I \Leftrightarrow I = 10^{\frac{10N}{N-120}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{N} = 10 \log(10^{12} I) \Leftrightarrow 10^{\frac{10}{N}} = 10^{12} I \Leftrightarrow$$

5. A figura representa um reservatório. Considere que o reservatório está inicialmente vazio e vai ser ligado a uma torneira, de débito constante, que o vai encher de água.



O reservatório fica cheio ao fim de 24 horas. Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas depois de se começar a encher, é dada por:

$$h(t) = a - \log_2(128 - 4t), \quad t \in [0, 24], \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Determine o valor de a e a altura do reservatório.

Resolução

Podemos determinar o valor de a atendendo a que o depósito está inicialmente vazio e, portanto, $h(0) = 0$:

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow a - \log_2(128 - 4 \times 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 128 = a \Leftrightarrow a = 7$$

A altura do reservatório é a altura da água ao fim de 24 horas e

$$h(24) = a - \log_2(128 - 4 \times 24) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(24) = a - \log_2 32 \Leftrightarrow h(24) = a - 5$$

Como $a = 7$ concluímos que a altura do reservatório é 2 metros.

26

Quais das funções seguintes não são injectivas nos seus domínios de existência?

a) $f: x \mapsto \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$
b) $g: x \mapsto \log_3(x^2 - 4)$

a) Sendo $M = 2 \times 10^{-8}$ g qual a idade do fóssil com aproximação ao milhar?
b) Exprime t em função de M e explica o que essa função representa.

$$M(t) = \frac{10^{-6}}{25500^t}$$

A massa de carbono 14 por grama de carbono, num fóssil com t anos é dada, em gramas, por:

25

Caracterização da função inversa de uma função logarítmica ou exponencial



Exercício resolvido

Considere as funções f e h definidas em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = 2^{x+1} - 3, \text{ e } h(x) = 1 - \frac{2}{\log_2(1-x) + 3}$$

Admitindo que os domínios das funções f , e h são os domínios de existência, em $\mathbb{R}$, das expressões que as definem, caracterize as funções inversas f^{-1} , e h^{-1} e utilize-as para determinar o contradomínio de cada uma das funções f , e h .

Resolução

• $D_f = \mathbb{R}$

$$2^{x+1} - 3 = y \Leftrightarrow 2^{x+1} = y + 3 \Leftrightarrow x + 1 = \log_2(y + 3) \Leftrightarrow x = -1 + \log_2(y + 3)$$

Tem-se então $f^{-1}(x) = -1 + \log_2(x + 3)$, usando x para representar a variável independente.

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 > 0\} =]-3, +\infty[$$

Caracterização de f^{-1} :

$$f^{-1}:]-3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = -1 + \log_2(x + 3)$$

O contradomínio de f é o domínio de f^{-1} ou seja, $D_f' =]-3, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \bullet D_h &= \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0 \wedge \log_2(1 - x) + 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge 1 - x \neq 2^{-3}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge x \neq 1 - \frac{1}{8}\right\} =]-\infty, 1[\setminus \left\{\frac{7}{8}\right\} \end{aligned}$$

Para $x \in D_h$, tem-se:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{\log_2(1-x) + 3} &= y \Leftrightarrow \frac{2}{\log_2(1-x) + 3} = 1 - y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2(1-x) + 3 = \frac{2}{1-y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2(1-x) = \frac{2}{1-y} - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2(1-x) = \frac{3y-1}{1-y} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1-x = 2^{\frac{3y-1}{1-y}} \Leftrightarrow x = 1 - 2^{\frac{3y-1}{1-y}} \end{aligned}$$

Recorda:

O domínio de existência, em $\mathbb{R}$, de uma função f é o conjunto dos números reais para os quais $f(x)$ representa um número real.

Exemplos:

• $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ se $f(x) = \frac{1}{x-2}$

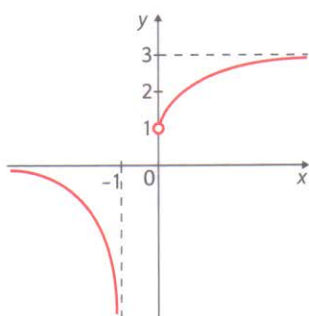
porque $\frac{1}{x-2}$ não representa um número real se $x = 2$.

• $D_f = [1, +\infty[$ se $f(x) = \sqrt{x-1}$
porque $\sqrt{x-1}$ não representa um número real se $x < 1$.

• $D_f =]-\infty, 3[$ se $f(x) = \log_a(3-x)$
porque $\log_a(3-x)$ só representa um número real se $3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

27

Seja f a função representada graficamente.



Esboce no mesmo referencial o gráfico da função inversa de f (função f^{-1}) e indique o seu domínio e contradomínio.

28

Caracterize a função inversa de cada uma das funções definidas nos seus domínios de existência por:

a) $g(x) = \frac{2 \log_3(x-1)-1}{4}$

b) $h(x) = \frac{4-2x+1}{3}$

c) $f(x) = -1 + 2^{3x}$

Substituindo y por x , tem-se:

$$h^{-1}(x) = 1 - 2^{1-x}$$

$$D_{h^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\} = D'_h$$

Caracterização de h^{-1} :

$$h^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow]-\infty, 1[\setminus \left\{ \frac{7}{8} \right\}$$

$$x \hookrightarrow y = 1 - 2^{1-x}$$

Vamos agora exemplificar a determinação do contradomínio de funções não injectivas que envolvem exponenciais ou logaritmos.

Contradomínio de uma função não injectiva

Quando uma função não é injectiva já sabe que a sua correspondência inversa não é uma função.

No entanto, o domínio da correspondência inversa continua a ser o contradomínio da função dada.

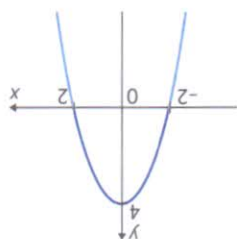
Exercícios resolvidos

Determine o contradomínio da função g de domínio $]-2, 2[$ definida por:

$$g(x) = \log_2(4 - x^2)$$

Resolução

Comecemos por obter directamente o contradomínio de $g(x)$. Para valores de x no intervalo $]-2, 2[$, a expressão $4 - x^2$ tem contradomínio $]0, 4]$. Esta afirmação é equivalente a dizer que a função $x \hookrightarrow 4 - x^2$ transforma o intervalo $]-2, 2[$ no intervalo $]0, 4]$, como se pode observar graficamente.



Como a função logarítmica de base maior que 1 é uma função contínua e crescente e como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = -\infty$, o contradomínio de g é:

$$D'_g =]-\infty, \log_2 4] =]-\infty, 2]$$

29

Caracterize a função inversa e esboce o gráfico de f^{-1}

a) $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$

b) $f(x) = 2^{1-x}$

c) $f(x) = -3 \cdot 2^{-x}$

Determine o contradomínio da não função usando a correspondência inversa e também a representação gráfica:

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{3 - 2x^2}$$

31

Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-3, 2]$. Qual o contradomínio de $f(x) = (h(x))^2$?

A. $[4, 9]$

B. $[0, 9]$

C. $[-9, 4]$

D. $[0, 4]$

32

Considere uma função h de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-2, 2]$. O contradomínio da função g definida por $g(x) = h(x-1)$ é:

- A. $[-3, 1]$ B. $[-2, 2]$
C. $[-1, 3]$ D. $[-3, 3]$

Vamos agora procurar obter a mesma resposta a partir da correspondência inversa de g :

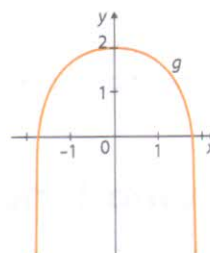
$$\log_2(4 - x^2) = y \Leftrightarrow 4 - x^2 = 2^y \Leftrightarrow x^2 = 4 - 2^y \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4 - 2^y}$$

A expressão $\sqrt{4 - 2^y}$ representa um número real se e só se

$$4 - 2^y \geq 0 \Leftrightarrow 2^y \leq 4 \Leftrightarrow 2^y \leq 2^2 \Leftrightarrow y \leq 2$$

o que confirma que o contradomínio de g é $]-\infty, 2]$.

Observemos agora uma representação gráfica da função g que confirma o resultado obtido,



sendo

$$g(0) = \log_2(4 - 0) = \log_2 4 = 2$$

o máximo de g .



1. Um novo modelo de telemóvel desvaloriza 5% em cada mês. Se o seu valor inicial é 450 MT, qual é o seu valor, arredondado ao MT, ao fim de um ano?

A. 127 MT B. 180 MT C. 225 MT D. 243 MT

2. Se $\log_2 a = 3$, então $\log_4 a$ é igual a:

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 6 D. 9

3. Um exemplo de função f tal que $f(a+b) = f(a) \times f(b)$, $\forall a, b \in D_f$ pode ser a função f definida por:

A. x^2 B. 2^x C. $\log_2 x$ D. $2x$

4. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes:

a) 2^x representa um número positivo se e só se x é um número positivo.

b) $\log(a \times b)$ só representa um número real se a e b forem números positivos.

c) O logaritmo de um número positivo pode ser negativo.

5. A intensidade I , em decibéis, de um som audível, pode ser dada por $I(P) = 170 + 10 \log P$, onde P é o valor da potência, em certa unidade, do som emitido.

a) Determine a intensidade de um som cuja potência é 10^{-8} na unidade considerada.

b) Sabe-se que um som de intensidade superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde. Calcule a partir de que potência devem ser usados meios de protecção auditiva.

- c) Dois sons de potências P e P_1 são emitidos por uma mesma fonte. Sabendo que a intensidade do primeiro é dupla da do segundo, mostre que $\frac{P_1}{P} = 10^{17}$.

d) Determine o valor de x tal que $I(xP) = I(P) + 30$.

6. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_4 x$. P é o ponto do gráfico de f com ordenada $\frac{1}{2}$. A abscissa do ponto P é:

A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{2}$

7. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, estritamente crescente no domínio. Qual das afirmações pode ser falsa para essa função?

A. A função é injectiva.
B. A função não pode ter mais do que um zero.
C. O contradomínio da função é $\mathbb{R}^+$.
D. A função não é par.



Exercícios propostos

8. Numa fábrica de confecções, o número N de peças que um operador de determinada máquina produz por hora depende do número t de dias de experiência, de acordo com a lei:

$$N(t) = 40 - 32 \times 2^{-0,05t}$$

- a) Qual o número de peças que é de esperar que um operário sem experiência produza por hora?
 - b) Um operário que produza mais de 256 peças num dia tem um prémio de produtividade. Sabendo que nessa empresa um dia de trabalho tem 8 horas, quantos dias de experiência deve um operário ter, no mínimo, para aspirar a esse prémio?
 - c) Exprime t em função de N e explique o que essa expressão representa.
9. O tempo h , em horas, que uma bebida tirada do frigorífico a uma temperatura de T° centígrados demora a atingir a temperatura ambiente A , pode ser dado pela função:

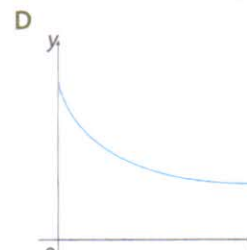
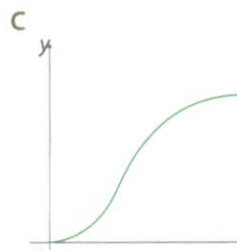
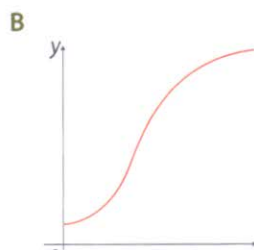
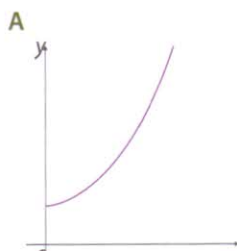
$$h = 2 \log_2 \frac{A-T}{2}, \text{ sendo } 0 < T < A - 2$$

- a) Determine A sabendo que uma bebida que foi tirada do frigorífico a uma temperatura de 2° centígrados, demorou 8 horas a atingir a temperatura ambiente.
 - b) Supondo que a temperatura ambiente é nove vezes superior à do interior do frigorífico, mostre que h pode ser dada por: $h = 4 + \log_2 T^2$.
10. A zona de pele inflamada pela picada de um insecto cresce em círculos de centro no ponto onde ocorreu a picada. Supõe que t segundos depois de ocorrer a picada, a área de pele inflamada pode ser dada, em cm^2 , por:

$$A(t) = a - \log_2 \left(\frac{16}{b+t} \right)$$

sendo a e b números reais positivos.

- a) Determine a e b supondo que seis segundos depois da picada do insecto a zona inflamada tem 2 cm^2 de área.
 - b) Os parâmetros a e b variam de acordo com o tipo de pele e a espécie do insecto. No caso de pele de criança e para uma certa espécie de insecto, tem-se $a = 3$ e $b = 2$. Quanto tempo depois da picada do insecto, a área inflamada atinge um sinal situado a cerca de $1,1 \text{ cm}$ do local da picada do insecto? Apresente o resultado arredondado ao segundo.
11. A Cusculândia é uma povoação com 5 000 habitantes. Certa noite foi avistado um OVNI por algumas pessoas. Seja $f(t)$ o número de pessoas que sabiam do ocorrido t horas depois do OVNI ter sido avistado. Indique qual dos gráficos seguintes pode representar a função f e as razões que o levam a rejeitar os outros três.





12. Identifique o número representado por:

- a) $\log_2 2^{\sqrt{5}}$ b) $\log_{27} \frac{1}{81}$ c) $5^{\log_5 \sqrt{7}}$
 d) $\log_1 \frac{1}{512}$ e) $\log_{\pi} (\pi^{\sqrt{2}} : \pi^3)$ f) $3^{\log_3 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt{8}}$

13. Se $\log_4 a = x$, calcule, em função de x :

- a) $\log_4 (4a)$ b) $\log_4 \frac{2}{a}$ c) $\log_4 a^3$
 d) $\log_4 (8\sqrt{a})$ e) $\log_2 \frac{1}{a}$ f) $\log_4 \frac{a^2}{64}$

14. O nível do ruído provocado por uma onda de intensidade $x \text{ W/m}^2$ é dado, em decibéis, por:

$$R(x) = 10 \log \frac{x}{k}, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

- a) Se um som é 100 vezes mais intenso que outro, qual a diferença entre os seus níveis de ruído?
 b) Se uma pessoa em conversa com outra provoca um ruído de 70 decibéis e, a sussurrar ao ouvido, provoca um ruído de 20 decibéis, qual a razão entre as intensidades da conversa e do sussurro?
 c) Em que percentagem se tem que reduzir a intensidade de um som para que o nível desça 5 decibéis? (Apresente o resultado arredondado às unidades.)

15. Um tremor de terra de magnitude M na escala de Richter liberta, no epicentro, uma energia E dada, em joule, aproximadamente pela equação

$$M = \frac{3}{2} \log \frac{E}{2,5 \times 10^4}$$

a) Mostre que

$$M \approx 0,67 \log E - 2,93.$$

b) Exprime E em função de M .

- c) Calcule a energia libertada por um sismo de magnitude 4 e por outro de magnitude 5,6 e mostre que o segundo liberta uma energia aproximadamente 251 vezes superior ao primeiro.
 d) Calcule $M_1 - M_2$ sendo M_1 e M_2 as magnitudes correspondentes às energias E_1 e E_2 , com $E_1 = 2E_2$. (Apresente o resultado aproximado às décimas.)

16. Sem recorrer à calculadora esboça, no mesmo referencial, representações gráficas dos seguintes pares de funções e indique o número de pontos em que os gráficos se intersectam.

- a) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x - 1$
 b) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x$
 c) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x - 2$
 d) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{x}{x-2}$





Exercícios propostos

17. Num Instituto de Pesquisa Ecológica estudou-se a relação entre o oxigénio consumido por pequenos animais e o respectivo peso. Encontrou-se a fórmula aproximada:

$$\log y = \log 6 + 0,9 \log x$$

sendo y o volume de oxigénio consumido em microlitros por hora e x o peso do animal em gramas.

- a) Escreva a expressão simplificada de y em ordem a x e a de x em ordem a y .
- b) Se y_1 é o volume de oxigénio consumido por um animal de peso $x_1 = 10x$, calcula $\frac{y_1}{y}$, com aproximação às décimas, e interpreta esse valor no contexto da relação descrita.
18. A procura de um certo produto é dada por:

$$P = 12^{1-0,1Q}$$

- a) Como evolui a procura quando Q toma valores muito grandes?
- b) Exprime Q em função de P e indica o seu domínio.
19. Dois reservatórios A e B começam a despejar no mesmo instante. Admite que a altura da água (em metros) em cada um dos reservatórios t horas depois de começarem a despejar é dada, respectivamente por:

$$h_A(t) = \log_2 \left(8 - \frac{t}{2} \right) \text{ e } h_B(t) = \log_4 (8 - t) + 2$$

- a) Determine para cada reservatório a altura inicial da água e o tempo que demora a despejar (em horas e minutos).
- b) Mostre, por via analítica, que houve um instante em que a altura de água nos dois reservatórios era igual e indique, em horas e minutos (arredondado às unidades), quanto tempo depois de começar o despejo ocorreu tal situação. Qual era a altura da água?
- c) Confirme graficamente os resultados obtidos na alínea b).
20. Seja h uma função ímpar e injectiva tal que $h(2) = -3$. O valor de $h^{-1}(3)$ é:

A. 2

B. -2

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

21. Seja f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$. O contradomínio de f é:

A. $[0, +\infty[$

B. $[1, +\infty[$

C. $\mathbb{R}$

D. $\mathbb{R}^+$

22. Se $\log_a x = p$ então $\log_a x^2$ é igual a:

A. p^2

B. $\sqrt{p}$

C. $2p$

D. $\frac{p}{2}$



23. Se $\log_a b = c$, então $\log_a \sqrt{b}$ é igual a:

- A. $\frac{2}{\sqrt{c}}$ B. $\frac{2}{c}$ C. $\sqrt{c}$ D. $\frac{c}{2}$

24. Se $\log_6 2 = b$, qual das expressões representa $\log_6 (4 \times 12)$?

- A. b^3 B. $b^2 + 6b$ C. $3b + 1$ D. $24b$

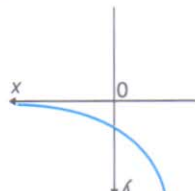
25. Sabendo que $\log_a c = 3,5$, o valor de $a^{3 \log_a 2} - \log_a \left(\frac{c}{a}\right)$ é:

- A. 3,5 B. 4,5 C. 8,5 D. 10,5

26. Sejam a, b e c três números reais tais que $c = \frac{ab}{2}$. O valor de $\log_2 (a^2 b^2 c^2)$ é:

- A. 2 B. 4 C. 16 D. 64

27. Considere a função g representada graficamente



Qual das seguintes pode ser a representação gráfica da função inversa de g ?

- A. B. C. D.

28. Seja $f(x) = \log_2(8x)$. Qual dos pontos seguintes **não** pertence ao gráfico de f ?

- A. $\left(\sqrt{2}, \frac{7}{2}\right)$ B. $(5, 3 + \log_2 5)$ C. $(3, 3 \log_2 3)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

29. Na figura estão representadas graficamente as funções f e g definidas em $\mathbb{R}^+$ por:

$$f(x) = \log_3 x^2 - 1,5 \text{ e } g(x) = \log_3 x.$$

A abscissa do ponto I é:

- A. 1,5 B. $1,5^3$ C. 5,2 D. $3\sqrt{3}$

