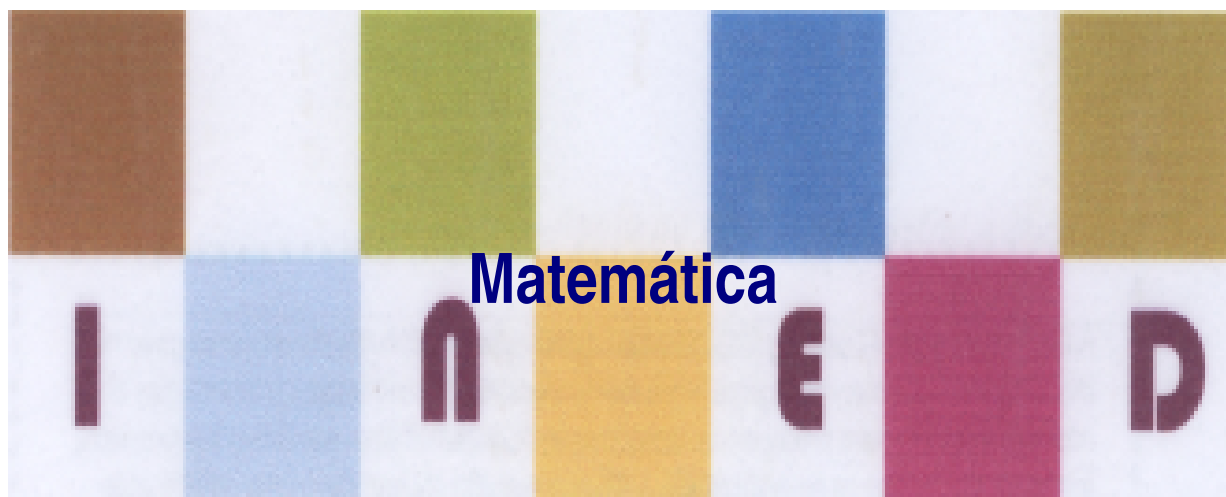


MÓDULO 3



Conjuntos Numéricos e Cálculo Algébrico

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO E
DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Baixar Livros & Exames em PDF

Somos o portal MozEstuda.com, um espaço dedicado à educação e ao conhecimento. Fornecemos links para o **download gratuito** de materiais de acesso livre, incluindo [exames anteriores](#), [livros e diversos PDFs](#) educacionais. Nosso objetivo é facilitar o aprendizado e a pesquisa, sempre respeitando os direitos autorais e promovendo o acesso legítimo ao conhecimento. Se você apreciou este conteúdo, considere apoiar os autores e editoras adquirindo versões oficiais sempre que possível. Todos os direitos autorais pertencem aos respectivos criadores e detentores de direitos. **Não vendemos nem lucramos com as obras disponibilizadas.** Aproveite e compartilhe com outros estudantes!

Para baixar livros em PDF, acesse biblioteca.mozestuda.com e pesquise o título desejado na barra de pesquisa. Ou, se preferir, siga/ Clique os links abaixo:

BAIXAR TODOS LIVROS ESCOLARES — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Classe** para Baixar todos livros em PDF

12ª CLASSE

11ª CLASSE

10ª CLASSE

9ª CLASSE

8ª CLASSE

7ª CLASSE

6ª CLASSE

5ª CLASSE

4ª CLASSE

3ª CLASSE

2ª CLASSE

1ª CLASSE

BAIXAR TODOS MÓDULOS ESCOLARES —

MÓDULOS DO I CICLO

MÓDULOS DO II CICLO

LIVROS POR DISCIPLINAS - TODAS

BAIXAR EXAMES DA **6ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

C. NATURAIS

C. SOCIAIS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

BAIXAR EXAMES DA **10ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

FÍSICA

GEOGRAFIA

HISTORIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

BAIXAR EXAMES DA **12ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

DGD

FILOSOFIA

FÍSICA

FRANCÊS

GEOGRAFIA

HISTÓRIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

TODOS EXAMES

TODOS EDITAIS

TODOS LIVROS

BAIXAR EXAMES DE **ADMISSÃO** — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Instituição** para Baixar todos exames em PDF

IFP / Formação de Professores

UEM

UJC/ ISRI

ISPG

ISPSONGO

AC. MILITAR

PRM

ISCAM

ICS — SAÚDE — ENSINO MÉDIO

ETP / Ensino técnico Profissional

UP / UniRios: Save, Rovuma, Licungo, ...

UNIZAMBEZE

ISPT

ISCISA

ACIPOL

CFJJ

IFAPA

EDITAIS

ENEM

VESTIBULARES

ENCCEJA

TODOS EXAMES

Conteúdos

O Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano através do Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação deseja agradecer os abaixo mencionados pela sua contribuição na elaboração deste módulo através do fornecimento da Template:..... 1

Acerca deste Módulo 1

Como está estruturado este Módulo.....	1
Habilidades de aprendizagem	3
Necessita de ajuda?	3

Lição 1 5

Função exponencial e função logarítmica	5
Introdução.....	5
Definição geral de função.....	5
Resumo da lição.....	8
Actividades	10
Avaliação	14

Lição 2 14

Equação exponencial	14
Introdução.....	14
Equação exponencial	15
Resumo da lição.....	16
Actividades	17
Avaliação	19

Lição 3 20

O cálculo do valor do logarítmo aplicando as propriedades.....	20
Introdução.....	20
O logarítmo.....	20
Resumo da lição.....	22
Actividades	23
Avaliação	26

Lição 4 28

Equação logarítmica	28
Introdução.....	28
Equação logarítmica	28

Actividades	29
Resumo da lição	31
Avaliação	32
Lição 5	33
Inequação exponencial	33
Introdução	33
Inequação exponencial	33
Resumo da lição	35
Actividades	36
Avaliação	37
Lição 6	38
Inequação logarítmica	38
Introdução	38
Inequação logarítmica	38
Resumo da lição	42
Avaliação	43
Soluções Modulo 1	44
Soluções do Modulo 1	44
Lição1	44
Lição2	45
Lição3	46
Lição 4	49
Lição5	53
Lição6	54
Módulo 3 de Matemática	60
Teste Preparação de Final de Módulo	60
Soluções do teste de preparação do Módulo 3	62



Acerca deste Módulo

MÓDULO 3

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª e 12ª classe, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classe. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as respostas no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjunta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquirir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem



Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planejar o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem-disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que “*o livro é o melhor amigo do homem*”. Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?



Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Função exponencial e função logarítmica

Introdução

O conceito de função em matemática, teve origem no conceito de correspondência utilizado no nosso dia-a-dia. Em matemática, formalizou-se o conceito de correspondência de forma a ser aplicado em cálculos. Por exemplo, com base na correspondência unívoca podemos introduzir o conceito de função. Dados os conjuntos A e B e elementos x pertencentes a A e y pertencentes a B. Diz-se que a correspondência entre os elementos x e y dos conjuntos A e B respectivamente, é unívoca quando x em A corresponde a um e só um elemento y em B através de uma aplicação f que se chama função

- ✓ O número y que corresponde ao número x chama-se imagem de x e designa-se por $y = f(x)$.
- ✓ O conjunto de elementos x chama-se domínio de f e designa-se por D_f
- ✓ O conjunto y das imagens chama-se contradomínio de f e designa-se por D'_f .

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Fazer o Estudo completa da função exponencial.
- Fazer o Estudo completa da função logarítmica.

Definição geral de função

Caro estudante, antes de estudar as funções exponenciais e logarítmicas vamos recordar a definição geral de uma função.

Definição

Sejam M e N dois conjuntos arbitrários. Diz-se que está definida uma função f do conjunto M, no conjunto N, se para cada elemento x em M corresponde um e só um elemento y em N e designa-se por

$$Y = f(x) \text{ ou } f: M \rightarrow N$$

Existem vários tipos de funções das quais vamos distinguir;

- Funções polinomiais (lineares, quadráticas e de grau superior que 2)
- Funções trigonométricas
- Funções exponenciais
- Funções logarítmicas

De certeza que já está recordado sobre os conceitos básicos para o estudo de uma função, avancemos

O que será a função exponencial?

Antes de dar a definição vamos definir a potência de um número.

Definição

Dados um número real a e um número natural $n > 2$, chama-se potência de base a e expoente n ao número real

$$a^n = a.a.a.....a \text{ (n vezes)}$$

Isso mesmo, agora lembre-se das propriedades de que gozam essas potências

$$1) a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

$$2) \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$$

$$3) (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$4) \left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$6) a^0 = 1$$

$$7) a^1 = a$$



$$8) \frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

$$9) a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^m}$$

O que será a função exponencial? Você pode muito bem recordar-se da definição

Definição

Chama-se função exponencial de base a à toda aplicação

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow a^x$ ($a \neq 1$, $a > 0$) e escreve-se

$f(x) = a^x$ ou $y = a^x$

a----- base da função exponencial

x----- variável independente

y----- variável dependente

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Função exponencial de base (**a**) toda a função cuja variável aparece como expoente. O que simbolicamente, fica

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow a^x \quad (a \neq 1, a > 0) \text{ e escreve-se}$$

$$f(x) = a^x \quad \text{ou} \quad y = a^x$$

Que são Propriedades da função Exponencial

- Domínio de existência é sempre $x \in \mathbb{R}$
- Contradomínio é sempre $x \in \mathbb{R}^+$
- Em qualquer base **a** o gráfico de $f(x)$ intersecta o eixo dos y no $(0; 1)$
- Quanto à monotonia, a função é sempre:
- Crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$
- Decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$

Que dado $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, chama-se função logarítmica a função em que a variável $x \in \mathbb{R}$ está associada a um logaritmo, isto é, $f(x) = \log_a x$, $x > 0$ ou $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \log_a x$ $a \in \mathbb{R}^+ ; a \neq 1$ e $x > 0$

- Domínio de existência é sempre $x > 0$ (o mesmo que $x \in \mathbb{R}^+$)
- Contradomínio é sempre $y \in \mathbb{R}$
- Para qualquer base, o gráfico da função passa pelo ponto $(1, 0)$
- A função é sempre crescente quando:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ se } a > 1 \text{ ex : } \log_2 x$$

- A função é sempre decrescente quando:



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ se } 0 < a < 1 \quad \text{ex: } f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

- As funções exponencial e logarítmicas são inversas.

Atividades



Atividades

Ótimo, você já se recordou, da definição. E como é que se representa graficamente a função exponencial?

Fácil, os procedimentos são os mesmos das funções polinomiais, tomemos um exemplo simples como: $y = f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Podemos representar as duas funções no mesmo sistema cartesiano ortogonal

1º Passo

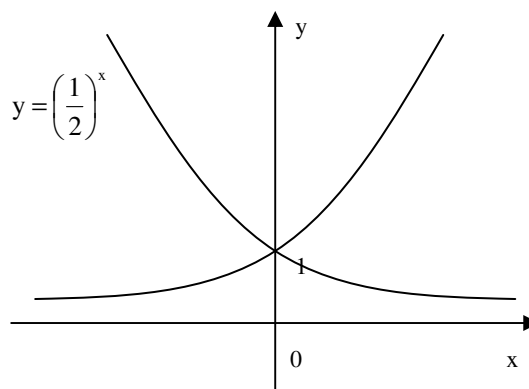
Atribuir alguns valores a x, em R seja: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

2º Passo

Calcular os valores de y a partir das funções 2^x e $(1/2)^x$ respectivamente

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Considerar um, S.C.O e marcar os pontos com as coordenadas x e y



Muito simples, basta aplicar a definição de potência para calcular os



valores de y , a partir dos valores atribuídos ao x .

Propriedades da função Exponential

- Domínio de existência é sempre $x \in \mathbb{R}$
- Contradomínio é sempre $x \in \mathbb{R}^+$
- Em qualquer base a o gráfico de $f(x)$ intersecta o eixo dos y no $(0; 1)$
- Quanto à monotonia, a função é sempre:
 - Crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$
 - Decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$

Observando os gráficos representados no S.C.O, podemos verificar as propriedades da função

A representação gráfica das funções dadas é um exemplo clássico das propriedades que acabamos de ver, mas você deve considerar mais funções exponenciais e verificar as propriedades.

Faça a representação $y = 3^x$ $y = (1/3)^x$

Existe uma função cujas características se relacionam com as da função exponencial

Você já estudou esta função qual será?

É função logarítmica

Excelente, ainda está recordado, mas como definiu e quais são as propriedades da função logarítmica?

Definição

Dado $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, chama-se função logarítmica a função em que a variável $x \in \mathbb{R}$ está associada a um logaritmo, isto é, $f(x) = \log_a x$; $x > 0$ ou $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}^+$; $a \neq 1$ e $x > 0$

Isso, você acertou a definição pois, não é conceito novo para si, mas precisa de aprofundar:

Consideremos alguns exemplos desta função

$$y = f(x) = \log_2 x \quad y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad y = f(x) = \log_4 x$$

Lembre-se também que:

Se $a = 10 \Rightarrow f(x) = \log_{10} x = \log x$ diz-se logarítmo decimal

Se $a = e$ onde $e = 2,7182818284$ (número de Neeper) diz-se

Logarítmo natural e escreve-se $f(x) = \log_e x = \ln x$

A função logarítmica também pode ser representada graficamente

Seguindo o mesmo processo da função exponencial

Consideremos os exemplos

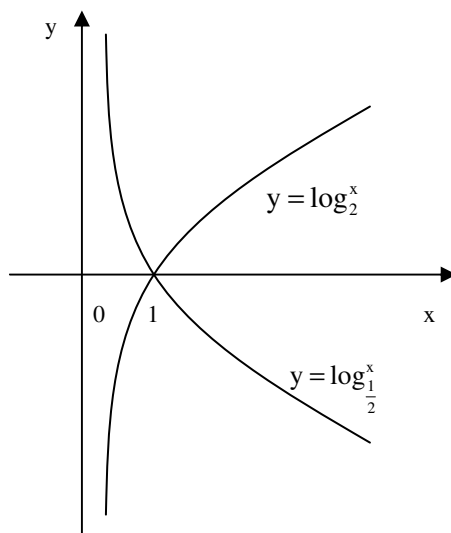
$$Y = f(x) = \log_2 x \quad y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

x	4	2	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	2
$y = \log_2^x$	2	1	0	-3	-2	-1
$y = \log_{\frac{1}{2}}^x$	-2	-1	0	3	2	1

NB: pela definição de logarítmo $x > 0$, significa que só podemos atribuir aos x valores positivos

Lembre-se que:

$$\text{Log } x = y \Leftrightarrow a^y = x \text{ com } x > 0, \text{ e } 0 < a < 1 \text{ ou } a > 1$$





Podemos observar as seguintes propriedades:

- Domínio de existência é sempre $x > 0$ (o mesmo que $x \in \mathbb{R}^+$)
- Contradomínio é sempre $y \in \mathbb{R}$
- Para qualquer base, o gráfico da função passa pelo ponto $(1, 0)$
- A função é sempre crescente quando:
 - Crescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se $a > 1$
ex: $f(x) = \log_2 x$
 - Decrescente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ se $0 < a < 1$
ex: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Fazendo o estudo comparativo duas funções podemos concluir que:

1. Domínio de $f(x) = a^x$ é contradomínio de $f(x) = \log x$ e vice-versa
2. Os gráficos da função exponencial não intersectam o eixo dos x , mas sim eixo dos y no ponto $p(0,1)$ enquanto os da função logarítmica intersectam o eixo dos x no ponto $p(1,0)$ mas não intersectam o dos y .
3. Os pontos $p(0,1)$ e $p(1,0)$ são pontos simétricos em relação à recta $y = x$
4. As duas funções são crescente para $a > 1$ e decrescentes para $0 < a < 1$

Conclusão: As funções exponencial e logarítmicas são inversas.

Ótimo, você pode resolver os exercícios que se seguem para medir o seu nível de compreensão da matéria

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. Faça o estudo das funções que se seguem

a) $y = 3^x$ b) $y = (1/3)^x$

2. a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{10} x$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos a seguir, preste atenção. Sucessos!

Conseguiu ter cem por cento de acertos? Se sim está de parabéns, se não, reestude a lição. Pode consultar colegas, professor da disciplina, tutor no centro de apoio e aprendizagem.

Lição 2

Equação exponencial

Introdução

Depois de ter apreendido a matéria referente a funções exponenciais e logarítmicas, vai se deter em seguida no estudo das equações



exponenciais. Para resolver a equação exponencial você precisa primeiro recordar o que é uma equação, o que se procura numa equação, dominar as propriedades de potências, portanto:

O objectivo como já deve estar a pensar é procurar o valor da incógnita que satisfaz a equação (igualdade).

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Resolver a equação exponencial

Equação exponencial

O que será então a equação exponencial?

Simple, toda a igualdade em que a incógnita aparece como expoente é equação exponencial.

Exemplos;

$$a) 2^x = 16 \quad b) 5^{x-1} = 25 \quad c) 2^{x-1} + 2^x = 48$$

$$d) 4^{2x+1/2} + 4^{2x-1} = 3^{2x+2} - 3^{2x+1} + 3^{2x} + 3^{2x-2}$$

$$e) 4^x - 2^x = 2$$

Agora, vamos resolver as equações dos exemplos considerados. O segredo é procurar sempre reduzir os dois membros a potências com bases iguais, para depois aplicar a seguinte equivalência:

$$a^m = a^p \Leftrightarrow m = p$$

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Equação exponencial

- É toda a igualdade em que a incógnita aparece como expoente
- Resolver uma equação exponencial, como acontece em qualquer tipo de equação significa procurar o valor da incógnita que satisfaz a igualdade.
- A resolução de equações exponenciais baseia-se na aplicação da regra:

$$a^m = a^p \Leftrightarrow m = p$$



Actividades



Actividades

$$a) 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

$$b) 5^{x-1} = 25 \Rightarrow 5^{x-1} = 5^2 \Rightarrow x-1 = 2 \quad x = 3$$

$$c) 2^{x-1} + 2^x = 48 \text{ aplicando a propriedade } (a^m : a^p = a^{m-p})$$

$$\frac{2^x}{2^1} + 2^x = 48$$

$$2^x \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 48 \quad (\text{colocar em evidência o factor comum } 2^x)$$

$$2^x \left(\frac{3}{2} \right) = 48 \Rightarrow 2^x = 48 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 2^x = 16 \cdot 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

$$d) 4^{2x+\frac{1}{2}} + 4^{2x-1} = 3^{2x+1} - 3^{2x+1} + 3^{2x} + 3^{2x-2}$$

(aplicar a propriedade $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$)

$$4^{2x} \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 4^{2x} \cdot 4^{-1} = 3^{2x} \cdot 3^2 - 3^{2x} \cdot 3 + 3^{2x} + 3^{2x} \cdot 3^{-2}$$

$$4^{2x} \left(4^{\frac{1}{2}} + 4^{-1} \right) = 3^{2x} \left(9 - 3 + 1 + \frac{1}{9} \right)$$

$$4^{\frac{1}{2}} + 4^{-1} = 3^{2x} \left(9 - 3 + 1 + \frac{1}{9} \right)$$

$$4^{2x} \cdot \frac{9}{4} = 3^{2x} \cdot \frac{64}{9}$$

$$\frac{4^{2x}}{3^{2x}} = \frac{64 \cdot 4}{9 \cdot 9}$$

(aplicando a propriedade $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b} \right)^m$ no primeiro membro)

$$\left(\frac{4}{3} \right)^{2x} = \left(\frac{4}{3} \right)^4$$

(aplicando a propriedade $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$ no segundo membro)

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{igualar os expoentes})$$

$$e) 4^x - 2^x = 2 \text{ (introduzir uma nova variável seja } t = 2^x)$$

Teremos:

$t^2 - t - 2 = 0$ (equação quadrática, resolver com base na factorização e depois a lei de anulamento ou aplicar a fórmula resolvente)

$$(t - 2)(t + 1) = 0$$

$$t - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad t + 1 = 0$$

$$t = 2 \quad \text{ou} \quad t = -1$$

Solução: não se esqueça, estamos a procura do valor de x que saitsfaz a igualdade,

Então :

$$\text{para } t = 2 \Rightarrow 2 = 2^x \Rightarrow x = 1$$

$$\text{para } t = -1 \Rightarrow -1 = 2^x \Rightarrow \text{Não tem solução}$$



Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1). $4^x = 64$ 2.) $3^x = \frac{1}{81}$ 3) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^4$

5) $7^{(x+1)(x-2)} = 1$ 6) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ 7) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

8) $8^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

9) $5^{x^2-2x} = 0,2$

10) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

Isso mesmo, voce acertou todos exercícius. Prossigamos

Lição 3

O cálculo do valor do logarítmo aplicando as propriedades

Introdução

Caro estudante, você estudou o conceito de logarítmo na lição 1, como forma de aprofundar os conhecimentos que adquiriu nas classes anteriores sobre a função logarítmica. Vamos ainda nesta lição, explorar as particularidades deste conceito pois, este é aplicado na resolução de problemas do nosso dia-a-dia.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Determinar* o domínio de existência da equação logarítmica
- *Aplicar* as propriedades para calcular o valor de uma expressão logarítmica

O logarítmo

Vamos fazer uma pequena revisão do conceito do logarítmo em primeiro lugar:

Recordemos a definição do logarítmo

Definição

Dados a e b positivos, com $a \neq 1$, existe um e só um número x real tal que $a^x = b$. A esse número x dá-se o nome de logarítmo de b na base a e escreve $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$

Exemplos

1) Qual é o logarítmo de 27 na base 3?

Resposta: $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3$ porque $3^3 = 27$



E como é que se calcula o valor do logarítmo de um número, numa certa base? Vejamos a seguir:

2) Determine a) $\log_{1/2} 64$ b) $\text{Log}_{\sqrt{5}} 25$

Resposta

$$\log_{1/2} 64 = x$$

$$(1/2)^x = 64 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^6 \Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow x = -6 \text{ Porque } (1/2)^{-6} = 64$$

$$\text{Log}_{\sqrt{5}} 25 = x \Rightarrow$$

$$(\sqrt{5})^x = 25 \Rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ porque}$$

$$(\sqrt{5})^4 = 25$$

Não precisamos de repetir os passos, pois basta aplicar a definição do logarítmo estamos perante uma equação exponencial cuja resolução já é do seu domínio:

3) Qual é o número cujo logarítmo na base 3 é 4?

$$\text{R: } \log_3 x = 4 \Leftrightarrow 3^4 = x \Leftrightarrow x = 81$$

4) Determine a base do logarítmo de 7 cujo valor é $\frac{1}{4}$?

$$\text{R: } \log_a 7 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 7 \Leftrightarrow (a^{\frac{1}{4}})^4 = 7^4 \Leftrightarrow a = 7^4$$

Propriedades dos logarítmos

- $\text{Log}(a \cdot b) = \log a + \log b$ ($a > 0$, $b > 0$)
- $\text{Log}(a/b) = \log a - \log b$ ($a > 0$, $b > 0$)
- $\text{Log } a^b = b \cdot \log a$
- Cologarítmo $\text{colog } a = - \log$
- Mudança de base
 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; a-base antiga e c-base nova
- $\log_a a = 1$

- $\log_a 1 = 0$
- NOTA da definição do logaritmo segue que o número negativo não tem logaritmo.

De certeza que se recordou das propriedades, passemos agora a fazer a sua aplicação através da resolução dos seguintes exercícios:

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Definição

Dados **a** e **b** positivos, com $a \neq 1$, existe um e só um número **x** real tal que $a^x = b$. A esse número **x** dá-se o nome de logaritmo de **b** na base **a** e escreve $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$

Propriedades dos logaritmos

- $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ ($a > 0 \text{ ? } b > 0$)
- $\log(a/b) = \log a - \log b$ ($a > 0 \text{ ? } b > 0$)
- $\log a^b = b \cdot \log a$
- Cologaritmo $\text{colog } a = -\log a$
- Mudança de base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
 a -base antiga e c -base nova
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$



Atividades



Atividades

1) Desenvolva cada logaritmo, aplicando as propriedades

$$\text{a) } \log_a a^2 \cdot b \cdot c^3 \quad \text{b) } \log_a \frac{\sqrt{a^3} \sqrt{b}}{b \cdot \sqrt[3]{a}} \quad \text{c) } \log_a \frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c \cdot d^2}$$

$$\text{d) } \log_3 \frac{3 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a^{-1}}}{\sqrt[3]{3} \sqrt[5]{3}}$$

2)

$$\text{a) } \log_2 2^{\frac{1}{5}} \quad \text{b) } \log_5 \sqrt[3]{5^2} \quad \text{c) } \frac{\log_2 16 \cdot \log_3 \sqrt{27}}{\log_2 8}$$

$$\text{d) } \log_a \left| \log_a a^{a^x} \right|$$

1º Passo

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto:

$$\log_a a^2 + \log_a b + \log_a c^3$$

2º Passo

Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência:

$$2 \log_a a + \log_a b + 3 \log_a c$$

3º Passo

Aplicando a propriedade $\log_a a = 1$, teremos:

$$\text{a) } 2 + \log_a b + \log_a c$$

$$\text{b) } \log_a \frac{\sqrt{a^3} \sqrt{b}}{b \cdot \sqrt[3]{a}}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um quociente

$$\log_a \left(\sqrt{a^3 \sqrt{b}} \right) - \log(b \cdot \sqrt[3]{b})$$

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto na segunda parcela

$$\log_a \left(\sqrt{a^3 \sqrt{b}} \right) - \log_a b - \log_a \sqrt[3]{b}$$

Aplicando a propriedade do logaritmo da potência de expoente fracionário

Pois $\boxed{\sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}}$

$$\begin{aligned} & \log_a \left(a^3 \cdot \sqrt{b} \right)^{\frac{1}{2}} - \log_a b - \log_a b^{\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{3}{2} \log_a a + \frac{1}{4} \log_a b - \log_a b - \frac{1}{3} \log_a b \end{aligned}$$

Reduzir termos semelhantes e aplicar a propriedade $\boxed{\log_a a = 1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{3} \right) \log_a b = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{13}{12} \log_a b \end{aligned}$$

c) $\log_a \frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c \cdot d^2}$

Temos logaritmo de um quociente como na alinea b, vamos repetir com atenção os passos desta alinea.

$$\begin{aligned} & \log_a \left(a^2 \sqrt{b} \right) - \log_a c \cdot d^2 = \\ &= 2 \log_a a + \frac{1}{2} \log_a b - \log_a c - 2 \log_a d \\ &= 2 + \frac{1}{2} \log_a b - \log_a c - 2 \log_a d \end{aligned}$$

d) $\log_3 \frac{3 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a^{-1}}}{\sqrt[3]{3} \sqrt[5]{3}}$

Repetir os passos da alinea anterior



$$\begin{aligned}
&= \log_3 3 + \frac{1}{4} \log_3 (a \cdot \sqrt[5]{a^{-1}}) - \frac{1}{3} \log_3 3 - \frac{1}{3} \log_3 \sqrt[3]{3} \\
&= 1 + \frac{1}{4} \log_3 a - \frac{1}{5} \log_3 a - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \log_3 3 \\
&= 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \log_3 a - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
&= \frac{7}{15} + \frac{1}{20} \log_3 a
\end{aligned}$$

2)

$$\text{a) } \log_2 2^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log_2 2 = \frac{1}{5} \quad (\text{lembre-se que } \log_a a = 1)$$

$$\text{b) } \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3} \log_5 5 = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \frac{\log_2 16 \cdot \log_3 \sqrt{27}}{\log_2 8} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 27}{3} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

(atenção, o logaritmo do produto é diferente do produto de logaritmos, por isso, temos que achar valor do logaritmo de cada factor no numerador e depois efectuar a divisão dos valores obtidos)

$$\text{d) } \log_a [\log_a a^{a^x}]$$

$\log_a (a^x \log_a a) = x \log_a a = x$ Simples, só aplicar a propriedade do logaritmo da potência constantemente até ao resultado

3. Calcule o domínio de existência da função:

$$y = \log_{(x-2)} (x-1)$$

Resolução O logaritmando deve ser positivo (maior que zero) $x - 1 > 0$

A base também deve ser positiva (maior que zero) $x - 2 > 0$

A base de ser diferente de um (1) $x - 2 \neq 1$

Logo : $x - 1 > 0 \cap x - 2 > 0 \cap x - 2 \neq 1 \quad 0$

$$D = \{x \in R \mid x > 2 \text{ e } x \neq 3\}$$

Agora, você está em condições de resolver os exercícios que se seguem sem ajuda de ninguém. preste atenção, vai ser muito fácil, basta aplicar as propriedades dos logaritmos como acabamos de fazer.

Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. Calcule o valor de:

a) $\log_2 8$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3}$

c) $2^{-3\log_2 2}$

d) $3^{2\log_3 3} \cdot \log \sqrt[3]{3}$

e) $\log_{27} 9$

f) $\log_2 2^{\sqrt{3}}$

g) $\log_{\left(\frac{1}{27}\right)} \left(\frac{1}{9}\right)$

h) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{625}$

i) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} + 2 \log_{36} 6$



2. Determine o domínio de existência das seguintes funções logarítmicas

a) $y = \log_6(x^2 - 10x + 16)$

b) $y = \log(x^2 - 3)^2$

4. Desenvolva o logaritmo aplicando as propriedades operatórias

$$\log_2 \frac{8 \sqrt{2} \sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{4}}$$

Lição 4

Equação logarítmica

Introdução

Vamos continuar a explorar os logarítmos, desta vez resolvendo equações que envolvem logarítmos. Recorde-se que resolver uma equação em geral significa determinar o valor da incógnita que satisfaz a igualdade, neste caso trabalhar com equações logarítmicas implica a aplicação das propriedades que acabamos de estudar na lição anterior.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Resolver a equação logarítmica

Equação logarítmica

Vamos recordar a definição de equação logarítmica.

Definição

Equação logarítmica é toda equação que contém expressão logarítmica

A resolução de equações logarítmicas baseia-se na aplicação da definição do logaritmo e/ou das suas propriedades.

Neste caso, temos que determinar antes de mais nada o domínio de existência para evitar erros que possam surgir ao estendermos o domínio em todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Vamos agora fazer as actividades que se seguem em conjunto. Não se esqueça o nosso objetivo é calcular o valor da incógnita nas equações seguintes:



Actividades



Actividades

1. a) $\log_{0,3} x = 2 \Rightarrow (0,3)^2 = x \Rightarrow x = 0,09$ (pela definição do logaritmo D: $x > 0$)

2. $\log_3^2 x = 4 - \log_3 x$ Domínio: $x > 0$ introduzindo nova variável seja $\log_3 x = y$

Teremos $y^2 + 3y - 4 = 0$ é só resolver a equação quadrática.

Solução para $y = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow 3^1 = x$

Para $y = -4 \log_3 x = -4 \Rightarrow x = 3^{-4} \Rightarrow x = \frac{1}{81}$

3. $\log_2 (x + 2) + \log_2 (3x - 4) = 4$

Neste caso, temos que determinar antes de mais nada o domínio de existência para evitar erros que possam surgir ao estendermos o domínio em todo o conjunto $\mathbb{R}$.

O domínio de existência é $\{x \in \mathbb{R}, x + 2 > 0 \wedge 3x - 4 > 0\} =$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}, x > \frac{4}{3} \right\}$$

$$\log_2 (x + 2) + \log_2 (3x - 4) = 4$$

$$\log_2 (x + 2)(3x - 4) = \log_2 16 \quad (\text{aplicando logaritmo do produto})$$

$$(x + 2)(3x - 4) = 16 \quad (\text{aplicando a lei de anulamento do produto})$$

Teremos as seguintes soluções $x = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{3}$ destas duas soluções so uma e que satisfaz a igualdades porque considerando o

Domínio de existência $x > 4/3$ logo a solução é:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{73}}{3}$$

$$3. \log x + \log_x 10 = 2,5$$

$$0 \text{ Dominio } D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 1 \}$$

$$\log_x 10 = \frac{1}{\log x} \quad \text{Pondo } y = \log x \text{ temos } y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad y_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{10} \quad x_2 = 100$$

Esta claro que $x_1 ; x_2 \in D$

$$\text{Solução: } x = \sqrt{10} \quad \wedge \quad x = 100$$

$$4. \quad \lg(x^2 - x - 6) + x = \lg(x + 2) + 4$$

$$\text{Domínio } \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\lg(x^2 - x - 6) + \lg 10^x = \lg(x + 2) + \lg 10^4$$

$$(x + 2)(x - 3) = (x + 2) 10^4 \quad (\text{visto que } x + 2 > 0)$$

$$(x - 3) 10^4 = 10^4$$

Evidentemente $x = 4$ é raiz da equação. Porém provemos que não há mais raízes. Teremos

$$x - 3 = 10^{4-x}$$

$$\text{a) Se } x > 4 \text{ então } x - 3 > 1 \text{ mas } 10^{4-x} < 1$$

$$\text{b) Se } x < 4 \text{ então } x - 3 < 1 \text{ mas } 10^{4-x} > 1$$

Deste modo, a única raiz da equação é $x = 4$

Facilimo, resumindo:



Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Equação logarítmica e toda equação que contém expressão logarítmica.
- A resolução de equações logarítmicas baseia-se na aplicação da definição do logaritmo e/ou das suas propriedades.
- Antes de resolver qualquer equação logarítmica deve-se calcular o domínio de existência do logaritmos envolvidos.
- A solução da equação logarítmica é determinada pela intersecção da solução obtida na resolução da equação propriamente dita e o domínio de existência.

Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso

1. Associe (V) verdadeiro ou (F) falso.

a) $\log_3 5^6 = 6 \log_3 5$

b) $\log_2 \sqrt[10]{3} = \frac{1}{10} \log_2 3$

c) $\log_2 3^8 = 3 \log_2 8$

d) $\log_5 8 - \log_5 3 = \log_5 5$

2. Resolva as equações seguintes logarítmicas

a) $\log_{\frac{1}{5}} 1 = x$

b) $\log_4 (2x - 9) = \log_4 3$.

c) $\log_4 (x^2 - 2x) = \log_4 (3x - 6)$

d) $3 \log_3 x + 2 = \frac{1}{\log_3 x}$

e) $\log (x + 3) + \log 4 = \log x^2$

f) $\log_8 x - \log_4 (x + 1) + \frac{1}{6} \log_2 (x + 1) = 0$

Agora confira as suas respostas, caso não tenha acertado a todos os exercícios volte a reestudar a lição



Lição 5

Inequação exponencial

Introdução

Vamos continuar a explorar os logarítmos, desta vez resolvendo inequações que envolvem logarítmos. Recorde-se que já resolveu inequações quadráticas, o conceito de desigualdade bem como do conjunto solução, não muda para o caso de inequações logarímicamente. Por isso vamos resolver as inequações logarímicamente basta respeitar as propriedades dos logarítmos.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Resolver a inequação exponencial.

Inequação exponencial

Caro estudante, vamos aprofundar a resolução de inequações exponenciais que de certeza já tratou no primeiro ciclo.

A resolução de equações que contém funções exponenciais exigem um bom domínio das propriedades dessas funções tais como:

1. Dominio da função exponencial e $\mathbb{R}$
2. A função exponencial é positiva para todos os valores da base
3. Os valores da função exponencial $y = a^x$ são superiores a 1

Se $a > 1$ e $x > 0$ e inferiores se $x < 0$ e $0 < a \leq 1$

4. As inequações exponenciais

$$a^x > a^k \Rightarrow \begin{cases} x > k & \text{se } a > 1 \\ x < k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{Também é}$$

propriedade da função exponencial?

3. Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

O que será então a inequação exponencial?

Facil, você já conhece a definição de equação exponencial como uma igualdade que contém funções exponenciais, e sabe que uma inequação qualquer é uma desigualdade, então poderá dar a definição sem problemas

Definição

Inequação exponencial é toda a desigualdade que contém função exponencial

Consideremos os seguintes exemplos:

1. $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$ (como $a > 1$ portanto $a = 3/2$) teremos

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x > 0 \quad \text{Solução } x \in]0; +\infty[$$

2. $2^x \leq 16 \Rightarrow 2^x \leq 2^4 \Rightarrow x \leq 4$ pois $a = 2 > 1$
Solução $x \in]-\infty; 4]$

$$3. \frac{1}{9} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \wedge \quad - \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$$

$$\Rightarrow 2 \geq x \quad \wedge \quad x > -2$$

Solução $x \in]-2; 2]$

4. $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$; $D = \mathbb{R}$ Pondo $2^x = y$ teremos

$$y^2 - 3y - 4 > 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-4) > 0 \Leftrightarrow y < -1 \vee y > 4$$

a) $2^x < -1$ (não tem soluções reais) $2^x > 0$

qualquer $x \in \mathbb{R}$



b) $2^x > 4 \Leftrightarrow x > 2$ pois 2^x é crescente

Resposta: $x > 2$

Ótimo, mais exercícios de fixação:

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Inequação exponencial é toda a desigualdade que contém função exponencial
- Que são propriedades das inequações exponenciais

1. Domínio da função exponencial e $\mathbb{R}$

2. A função exponencial é positiva para todos os valores da base

3. Os valores da função exponencial $y = a^x$ são superiores a 1

Se $a > 1$ e $x > 0$ e inferiores a $a > 1$ se $a > 1$ e $x < 0$.

4. As inequações exponenciais

$$a^x > a^k \Rightarrow \begin{cases} x > k & \text{se } a > 1 \\ x < k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{Também}$$

é propriedade da função exponencial?

5. Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

Atividades



Atividades

1. Resolva as seguintes inequações

a) $7^{x-1} < 7^3$

Como a base da potência 7 maior 1 ($7 > 1$)

$$7^{x-1} < 7^3 \Rightarrow x-1 < 3 \Rightarrow x < 4$$

$$x \in]-\infty; 4[$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x}{5}-3} \Rightarrow 2x-1 \leq \frac{2x}{5}-3 \Rightarrow 10x-2x \leq -2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8x \leq -10 \Rightarrow x \leq \frac{-10}{8} \Rightarrow x \leq -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 &\leq 0 \quad \text{seja } 5^x = y; \text{ logo } (5^x)^2 = y^2 \\ &\Rightarrow y^2 - 6y + 5 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{6-4}{2} = 1 \\ y_2 = \frac{6+4}{2} = 5 \end{cases}$$

$$y \in [1; 5]$$

$$5^0 \leq 5^x \leq 5^1 \Rightarrow \begin{cases} 5^0 \leq 5^x \\ 5^x \leq 5^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x \geq 5^0 \\ 5^x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{solução: } x \in [0; 1]$$



Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

$$1). \left(\frac{1}{4}\right)^x < 4^{x-1}$$

$$2). 3^{4x-2} - 5 \cdot 3^{2x-1} + 4 < 0$$

$$3) 3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{27}$$

$$4) (0,1)^{6x^2-5x} \geq 10$$

Agora confira as suas respostas, no final do módulo, caso não tenha acertado a todos exercícios volte a reestudar a lição.

Lição 6

Inequação logarítmica

Introdução

Vamos continuar a explorar os logarítmos, nesta lição vamos resolver as inequações logarítmicas. O conceito de desigualdade bem como do conjunto solução de uma inequação que estudou durante a resolução de inequações quadráticas no módulo dois não muda, portanto estes conceitos se mantêm para as inequações logarítmicas e fique sabendo também que irá precisar muito de aplicar as equações quadráticas nesta lição, sem deixar de lado as propriedades dos logarítmos.

Ao concluir esta unidade você será capaz de:



Objectivos

- Resolver a inequação logarítmica

Inequação logarítmica

A resolução de equações que contém funções logarítmicas exige um bom Conhecimento de todas as propriedades dessas funções.

Tais como:

Dominio da função logarítmica e R^+

Na resolução de problemas ligados aos logaritmos as vezes

é necessario a passagem da base do logaritmo para outra

Através da fórmula: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ em particular se $a = b$

Teremos $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Os números negativos não têm logaritmos

As inequações logarítmicas gozam de:



$$\log_a x < k \Rightarrow \begin{cases} x < a^k & \text{se } a > 1 \\ x > a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$
$$\log_a x > k \Rightarrow \begin{cases} x > a^k & \text{se } a > 1 \\ 0 < x < a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

- A função logarítmica é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$
- Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

O que será então, a inequação logarítmica?

Fácil, você já conhece a definição de equação logarítmica como uma igualdade que contém funções logarítmicas, e sabe que uma inequação qualquer é uma desigualdade, então poderá dar a definição sem problemas

Definição

Inequação logarítmica é toda a desigualdade que contém função logarítmica.

Consideremos alguns exemplos:

Atividades

Qual dos números é maior?

a) $\log_7 6$ e $\log_{0,7} 6$ b) $\log_7 6$ e $\log_8 9$

Resolução

a) $\log_7 6 > 0$, se $\log_{0,7} 6 < 0 \Rightarrow \log_7 6 > \log_{0,7} 6$

b) $\log_7 6 < \log_7 7 = 1$, se $\log_8 9 > \log_8 8 \Rightarrow \log_7 6 < \log_8 9$

2. Resolva as inequações

a) $\log_{0,1} (2x+1) \geq -1$

Não se esqueça que à semelhança do que fizemos nas equações logarítmicas, temos que em primeiro lugar determinar o domínio de existência de cada função que faz parte da desigualdade (inequação) dada, e depois considerar como solução, apenas os valores de x que pertencem à intersecção desses domínios.

$$\log_{0,1} (2x+1) \geq -1 \Rightarrow$$

$$2x+1 \leq (0,1)^{-1} \quad \wedge \quad (2x+1) > 0$$

$$2x+1 \leq 10 \quad \wedge \quad 2x > -1$$

$$x \leq \frac{9}{2} \quad \wedge \quad x > -\frac{1}{2}$$

$$\text{Solução } x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{9}{2} \right]$$



$$\text{b) } \log_3 \frac{x}{4} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} < 3^2 \quad \Rightarrow \quad x < 4 \cdot 9 \Rightarrow x < 36$$

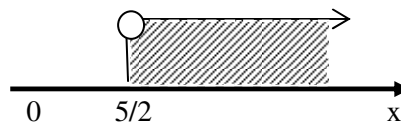
$$\text{domínio } \frac{x}{4} > 0$$

$$\text{Solução } x \in]0; 36 [$$



$$\text{c) } \lg(2x-5) + \lg(3x+7) > 4\lg 2$$

$$\text{Domínio } 2x-5 > 0 \text{ e } 3x+7 > 0 \Rightarrow x > 5/2 \quad x > -7/3$$



$$\text{D: } x \in \left] 5/2; +\infty \right[$$

$$\lg(2x-5(3x+7)) > \lg 2^4$$

$$(2x-5)(3x+7) > 16$$

$$6x^2 + 14x - 15x - 35 > 16$$

$$6x^2 - x - 51 > 0$$



Agora, escolha o método mais fácil para resolver a inequação quadrática

Por exemplo a tabela de sinais

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-51) = 1225$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 35}{12}$$

$$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = -\frac{17}{6}$$

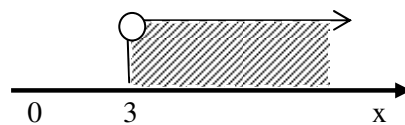
Tabela de sinais

x	$-\infty$	$-\frac{17}{6}$		3	$+\infty$
$x + \frac{17}{6}$	-	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$\left(x + \frac{17}{6}\right)(x + 3)$	+	0	-	0	+

$$\text{Solução } s = \left] -\infty; -\frac{17}{6} \right[\cup] 3; +\infty [$$

A solução da inequação logarítmica será a intersecção do domínio da função logarítmica

$$s_f = s \cap D_f =] 3; +\infty [$$



Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Inequação logarítmica é toda a desigualdade que contém função logarítmica
- Domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}^+$
- Na resolução de problemas ligados aos logaritmos as vezes

é necessário a passagem da base do logaritmo para outra

através da fórmula: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ em particular se $a = b$

teremos $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

- Os números negativos não têm logaritmos
- As inequações logarítmicas gozam de:

$$1) \log_a x < k \Rightarrow \begin{cases} x < a^k & \text{se } a > 1 \\ x > a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$2) \log_a x > k \Rightarrow \begin{cases} x > a^k & \text{se } a > 1 \\ 0 < x < a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

A função logarítmica é crescente se $a > 1$ e decrescente se

$$0 < a < 1$$

- Ao se multiplicar ou dividir uma inequação qualquer por um número negativo o sentido de desigualdade muda.

Muito bem, tente resolver sozinho os exercícios que se seguem depois consultemos as soluções no final do módulo.



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1) Associe (V) ou (F)

a) $\log_{\frac{1}{6}} 5 > \log_{\frac{1}{6}} 25$

b) $\log_3 50 > \log_3 45$

c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 81$

2) Resolva as seguintes inequações

a) $\log_5 (3x-1) < \log_5 x$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (x+2) + 2 > \log_{\frac{1}{2}} (2x-1)$

d) $\log_5 (x-2) + \frac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$

3. Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_2 (2x-5) < \log_2 6$

b) $\log_{\frac{1}{5}} (-x^2 + 5x) < \log_{\frac{1}{5}} 4$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (x-3) < 1$

d) $\log_2 (x^2 - 6x) < \log_2 7$

e) $\log (3x-5) \leq \log (x-1)$

f) $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \geq 2$

g) $\log_{\frac{1}{2}} (x-1) + 2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (3x-2)$

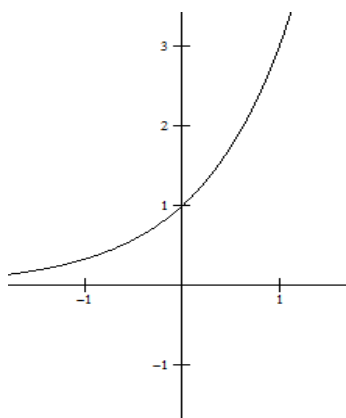
Soluções Módulo 1

Soluções do Módulo 1

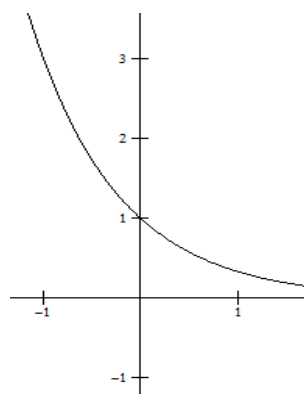
Confira as suas respostas no final do módulo.

Lição 1

a) $y = 3^x$

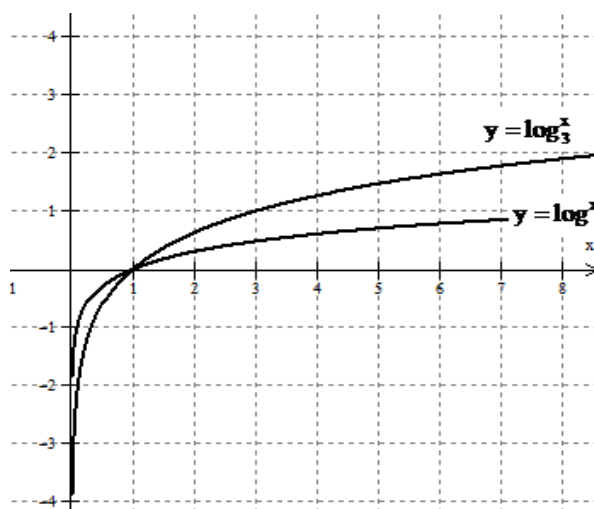


b) $y = (1/3)^x$



c) $y = \log_3 x$

d) $y = \log_{10} x$





Lição 2

$$1) 4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$$

$$2) 3^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Rightarrow 3^x = 3^{-4} \Rightarrow x = -4$$

$$3) \sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36 \Rightarrow \sqrt{6^x} = 6^2 \Rightarrow 6^{\frac{x}{2}} = 6^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$4) \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^4 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$$

$$5) 7^{(x+1)(x-2)} = 1$$

$$7^{(x+1)(x-2)} = 7^0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$6) 3^{6-x} = 3^{3x-2} \Rightarrow 6-x = 3x-2 \Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 2$$

$$7) \left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-5x+9}$$

$$3x+1 = -5x+9$$

$$8x = 8$$

$$x = 1$$

$$\begin{aligned}
8) \quad & 8^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} \\
& (2^3)^{\sqrt{x+1}} = 2^6 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} \\
& 3\sqrt{x+1} = 6 + \sqrt{x+1} \\
& 3\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 6 \\
& 2\sqrt{x+1} = 6 \\
& \sqrt{x+1} = 3 \\
& x+1 = 9 \\
& x = 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) \quad & 5^{x^2-2x} = 0,2 \Rightarrow 5^{x^2-2x} = \frac{2}{10} \Rightarrow 5^{x^2-2x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \\
& \Rightarrow 5^{x^2-2x} = 5^{-1} \Rightarrow x^2-2x = -1 \Rightarrow \\
& \Rightarrow x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow x = 1
\end{aligned}$$

$$10) \quad 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \quad \text{Substituindo } 2^{2x} \text{ por } (2^x)^2 \text{ e } 2^x \text{ por } y \text{ teremos:}$$

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$y_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad y_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$\text{logo: } \begin{cases} \text{para } y=1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x=0 \\ \text{para } y=2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

Lição 3

1. a) $\log_2 8$

$$\log_2 8 \Leftrightarrow 2^x = 8 \text{ por definição}$$

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \log_2 8 = 3$$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3}$



$$\begin{aligned} \text{c) } \log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^3}\right)^x = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3^{-3})^x = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{-3x} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{27}} \sqrt{3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{d) } 2^{-3 \log_2 2} = 2^{-3 \cdot 1} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{e) } 3^{2 \log_3 3} \cdot \log \sqrt[3]{3} = 3^{2 \cdot 1} \cdot \log 3^{\frac{1}{3}} = 3^2 \cdot \frac{1}{3} \log_3 3 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

$$\text{f) } \log_{27} 9 \Rightarrow 27^x = 9 \Rightarrow 3^{3x} = 3^2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \log_2 2^{\sqrt{3}} &\Rightarrow \log_2 2^{\sqrt{3}} = x \Rightarrow 2^x = 2^{\sqrt{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{h) } \log \left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{9}\right)}$$

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{9}\right)} &= x \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \frac{1}{9} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3^{-3})^x = 3^{-2} \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{i) } \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{625}$$

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{625} &= x \Rightarrow (\sqrt{5})^x = \frac{1}{625} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^{-4} \Rightarrow \frac{x}{2} = -4 \Rightarrow x = -8 \end{aligned}$$

$$j) \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} + 2 \log_{36} 6$$

Calculos auxiliares

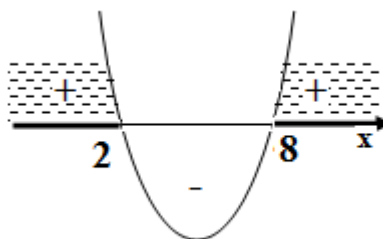
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-3x} = 2^{-1} \Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \log_{36} 6 = x \Leftrightarrow 36^x = 6 \Rightarrow 6^{2x} = 6 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} + 2 \log_{36} 6 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

2. Determine o domínio de existência das seguintes funções logarítmicas

$$a) y = \log_6 (x^2 - 10x + 16)$$

logaritmando $x^2 - 10x + 16 > 0$



Resolvendo a inequação quadrática segundo as regras

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid (x < 2 \vee x > 8) \}$$

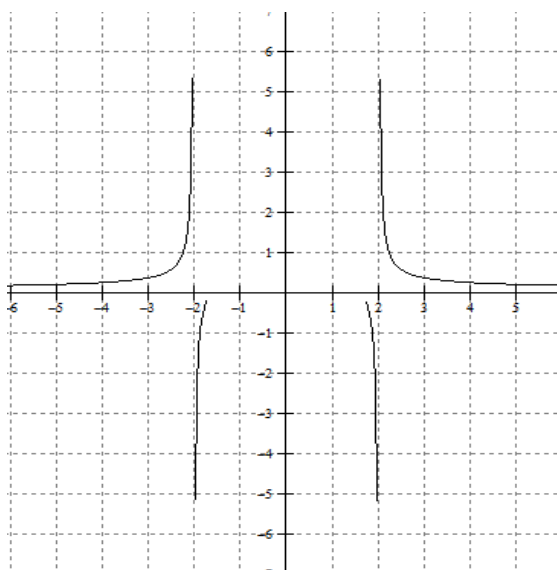
$$b) y = \log_{(x^2 - 3)} 2$$

Resolução

$$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Figura



$$D = \{x^2 - 3 > 0 \cap x^2 - 3 \neq 1\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \setminus (x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}) \wedge x \neq \pm 2\}$$

Lição 4

1. Associe (V) verdadeiro ou (F) falso

a) $\log_3 5^6 = 6 \log_3 5$ (V)

b) $\log_2 \sqrt[10]{3} = \frac{1}{10} \log_2 3$ (V)

c) $\log_2 3^8 = 3 \log_2 8$ (F)

d) $\log_5 8 - \log_5 3 = \log_5 5$ (F)

2. Resolva as equações seguintes logarítmicas

a) $\log_{\frac{1}{5}} 1 = x$

b) $\log_4 (2x - 9) = \log_4 3$

$$2x - 9 > 0 \Rightarrow 2x > 9 \Rightarrow x > \frac{9}{2}$$

Condição de existência do logaritmo

$$\begin{aligned}\log_4(2x-9) &= \log_4 3 \Leftrightarrow 2x-9 = 3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 9+3 \Leftrightarrow 2x = 12 \\ \Leftrightarrow x &= 6\end{aligned}$$

A resposta encontrada satisfaz a condição de existência, por isso **6** é solução da equação.

c) $\log_4(x^2 - 2x) = \log_4(3x - 6)$

1º) Condições de existência dos logaritmos

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$$

2º)

$$\begin{aligned}\log_4(x^2 - 2x) &= \log_4(3x - 6) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 2 \quad \vee \quad x = 3\end{aligned}$$

3º) Verificando se as respostas encontradas satisfazem as condições de existência.

para $x = 2$

$$2^2 - 2 \cdot 2 > 0 \Rightarrow 0 > 0 \quad (\text{F})$$

$$3 \cdot 2 - 6 > 0 \Rightarrow 0 > 0 \quad (\text{F})$$

para $x = 3$

$$3^2 - 2 \cdot 3 > 0 \Rightarrow 3 > 0 \quad (\text{v})$$

$$3 \cdot 3 - 6 > 0 \Rightarrow 3 > 0 \quad (\text{v})$$

S: $x = 3$

d) $3\log_3 x + 2 = \frac{1}{\log_3 x}$

Resolução

1º) Condições de existência $x > 0$



$$\begin{aligned}\text{Seja } y = \log_2 x \Rightarrow 3y + 2 &= \frac{1}{y} \Rightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0 \\ \Rightarrow y &= -1 \vee y = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2º) Substituindo o y na expressão $\log_3 x = y$ pelos valores obtidos na equação de variável y teremos:

$$\begin{cases} y = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \end{cases}$$

3º) Verificando se as respostas obtidas satisfazem as condições de existência:

$$\frac{1}{3} > 0 \text{ (V)}$$

$$\sqrt[3]{3} > 0 \text{ (V)}$$

$$S = \left\{ \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{e) } \log(x+3) + \log 4 = \log x^2$$

1º) Condições de existência dos logaritmos $x+3 > 0 \wedge x^2 > 0$

$$2^\circ) \log(x+3) + \log 4 = \log x^2$$

$$\Rightarrow \log 4(x+3) = \log x^2 \Rightarrow 4(x+3) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \vee x = 6$$

3º) Verificando se as respostas obtidas satisfazem as condições de existência:

$$-2+3 > 0 \Rightarrow 1 > 0 \text{ (V)} \quad (-2)^2 > 0 \text{ (V)}$$

$$6+3 > 0 \Rightarrow 9 > 0 \text{ (V)} \quad 6^2 > 0 \text{ (V)}$$

$$S = \{-2, 6\}$$

$$f) \log_8 x - \log_4 (x+1) + \frac{1}{6} \log_2 (x+1) = 0$$

Resolução:

1º) Condições de existência dos logaritmos $x > 0$ e $x + 1 > 0$

Atenção: Os logaritmos têm bases diferentes, para aplicar as propriedades é necessário mudar a base, neste caso todas as bases são potências de base 2, é conveniente usar a base 2.

2º)

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 8} - \frac{\log_2 (x+1)}{\log_2 4} + \frac{1}{6} \log_2 (x+1) = 0$$

$$\frac{\log_2 x}{3} - \frac{\log_2 (x+1)}{2} + \frac{1}{6} \log_2 (x+1) = 0$$

Achando m.m.c dos denominadores:

$$\frac{2 \log_2 x - 3 \log_2 (x+1) + \log_2 (x+1)}{6} = 0$$

$$2 \log_2 x - 3 \log_2 (x+1) + \log_2 (x+1) = 0$$

$$\log_2 x^2 - \log_2 (x+1)^3 + \log_2 (x+1) = 0$$

$$\log \frac{x^2 (x+1)}{(x+1)^3} = 0$$

(mas 0 pode ser $\log_2 1$)

$$\log \frac{x^2}{(x+1)^2} = \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$x^2 = (x+1)^2$$

$$x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

3º) Verificando se a resposta obtida satisfaz as condições de existência:



$$-\frac{1}{2} > 0 \quad (\text{F})$$

$$-\frac{1}{2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > 0 \quad (\text{V})$$

$S = \emptyset$ como pode ver, segundo a condição de existência do logaritmo x deve tomar apenas valores positivos, logo $-\frac{1}{2}$ não é solução.

Lição 5

$$1.) \left(\frac{1}{4}\right)^x < 4^{x-1} \Rightarrow 4^{-x} < 4^{x-1} \Rightarrow -x < x-1 \Rightarrow -2x < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$2.) 5^{x^2-5x} \leq 1$$

$$5^{x^2-5x} \leq 5^0$$

$$x^2 - 5x \leq 0$$

$$x(x-5) \leq 0$$

$$S_f = [0; 5]$$

$$3) (0,1)^{6x^2-5x} \geq 10 \Rightarrow 10^{-6x^2+5x} \geq 10 \Rightarrow -6x^2+5x \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x^2+5x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 6x^2-5x+1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{solução : } x \in [2; 3]$$

$$\begin{aligned}
4) \quad 3^{x+1} &< \frac{9^{4x^2}}{27} \Rightarrow 3^{x+1} < \frac{3^{8x^2}}{3^3} \Rightarrow 3^{x+1} < 3^{8x^2-3} \Rightarrow \\
&\Rightarrow x+1 < 8x^2-3 \Rightarrow -8x^2+x+4 < 0 \Leftrightarrow 8x^2-x-4 > 0 \\
\Delta = 1+128 &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{129}}{16} \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{129}}{16} \end{cases} \\
\text{solucao: } x \in &\left] -\infty; \frac{1-\sqrt{129}}{16} \right[\cup \left] \frac{1+\sqrt{129}}{16}; +\infty \right[
\end{aligned}$$

Lição 6

1). Associe (V) ou (F)

a) $\log_{\frac{1}{6}} 5 > \log_{\frac{1}{6}} 25$ (V)

pois a base é um número entre 0 e 1,
o maior logaritmo tem logaritmando menor

b) $\log_3 50 > \log_3 45$ (V)

pois a base é um número maior que 1,
o logaritmo maior tem logaritmando maior

c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 81$ (F)

pois a base é um número entre 0 e 1,
o maior logaritmo tem logaritmando menor

2) a) $\log_5 (3x-1) < \log_5 x$

Resolução

41°) Condições de existência

$$\left. \begin{aligned} 3x-1 > 0 \\ x > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita



$$\log_5 (3x-1) < \log_5 x$$

3°) Verificar se as soluções encontradas satisfazem a inequação, determinando a intersecção entre o resultado encontrado na inequação e a condição de existência.



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \right\}$$

$$b) \log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$$

Resolução

1°) Condições de existência

$$-x^2 + 5x > 0 \Rightarrow 0 < x < 5$$

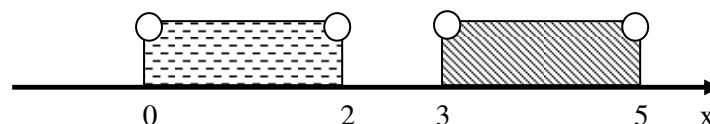
2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$$\log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x < 6$$

(não se esqueça que o sinal de desigualdade muda quando a base e número entre 0 e 1)

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x < 6 &\Rightarrow -x^2 + 5x - 6 < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x < 2 \text{ ou } x > 3 \end{aligned}$$

3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5 \}$$

$$c) \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + 2 > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

Resolução

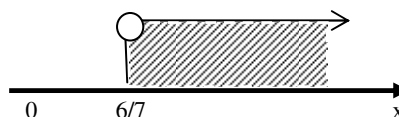
1°) Condições de existência

$$\left. \begin{array}{l} x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ 2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + 2 > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) &\Leftrightarrow \\ \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) & \\ \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left[(x+2) \cdot \frac{1}{4}\right] > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) & \\ \Rightarrow (x+2) \cdot \frac{1}{4} < 2x & \\ \Rightarrow x+2 < 8x-4 & \\ \Rightarrow x-8x < -2-4 & \\ \Rightarrow -7x < -6 & \\ \Rightarrow x > \frac{6}{7} & \end{aligned}$$

3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{6}{7} \right\}$$

$$d) \log_5(x-2) + \frac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$$

Resolução

1°) Condições de existência

$$\left. \begin{array}{l} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x-3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 3 \text{ e } x \neq 4$$

2°) Resolvendo a inequação propriamente dita

$$\log_5 (x-2) + \frac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$$

$$\text{Substituindo } \frac{1}{\log_{(x-3)} 5} \text{ por } \log_5 (x-3)$$

Observação

$$\frac{1}{\log_{(x-3)} 5} = \frac{\log_5 5}{\log_5 (x-3)}$$

$$\log_5 (x-2) + \frac{1}{\log_{(x-3)} 5} > \log_5 2$$

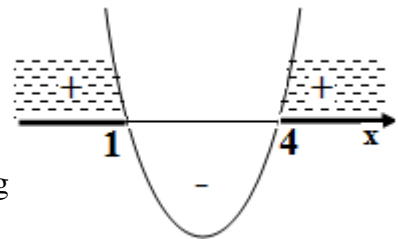
$$\Leftrightarrow \log_5 (x-2) + \log_5 (x-3) > \log_5 2$$

$$\Rightarrow \log_5 (x-2)(x-3) > \log_5 2$$

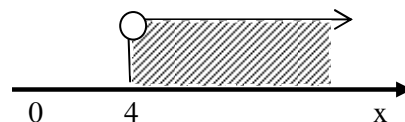
$$\Rightarrow (x-2)(x-3) > 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$$



3°) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \}$$

3. Resolva as seguintes inequações:

$$a) \log_2(2x - 5) < \log_2 6$$

$$1) 2x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$2) \log_2(2x - 5) < \log_2 6 \Rightarrow 2x - 5 < 6$$

$$\Rightarrow 2x < 11 \Rightarrow x < \frac{11}{2}$$

$$3) S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} < x < \frac{11}{2} \right\}$$

$$b) \log_{\frac{1}{5}}(-x^2 + 5x) < \log_{\frac{1}{5}} 4$$

$$1) -x^2 + 5x > 0 \Rightarrow 0 < x < 5$$

$$2) \log_{\frac{1}{5}}(-x^2 + 5x) < \log_{\frac{1}{5}} 4 \Rightarrow -x^2 + 5x > 4$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x - 4 < 0 \Rightarrow x < 1 \vee x > 4$$

$$3) S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \vee 4 < x < 5 \}$$

$$c) \log_2(x^2 - 6x) < \log_2 7$$

$$1) x^2 - 6x > 0 \Rightarrow x < 0 \wedge x > 6$$

$$2) \log_2(x^2 - 6x) < \log_2 7 \Rightarrow x^2 - 6x < 7$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 < 0 \Rightarrow 0 < x < 6$$

$$3) S = \emptyset$$



$$d) \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1$$

$$1) x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$2) \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (x-3) > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-6 > 1$$

$$\Rightarrow 2x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{2}$$

$$3) S = \left\{ x \in R \mid x > \frac{7}{2} \right\}$$

$$e) \log(3x-5) \leq \log(x-1)$$

$$1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x-5 > 0 \\ x-1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

$$2) \log(3x-5) \leq \log(x-1) \Rightarrow 3x-5 \leq x-1$$

$$\Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{2} \Rightarrow x \leq 2$$

$$3) S = \left\{ x \in R \mid \frac{5}{3} < x \leq 2 \right\}$$

$$f) \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \geq 2$$

$$1) x > 0$$

$$2) \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \geq 2 \text{ seja } \log_2 x = y$$

$$\Rightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \geq 2 \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} \geq 2$$

$$\Rightarrow y^2 + 1 - 2y \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

$$\text{logo: } \log_2 x \geq 1 \Leftrightarrow \log_2 x \geq \log_2 2 \Rightarrow x \geq 2$$

$$3) S = \{ x \in R \mid x > 2 \} \text{ se } x \text{ for igual a } 2$$

a desigualdade vai ser falsa

Módulo 3 de Matemática

Teste Preparação de Final de Módulo

Error! Reference source not found.

Este teste, querido estudante, serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

I Função exponencial

1. Resolva as seguintes equações exponenciais

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{125}{64}$

b) $4 = \sqrt{2^x}$

c) $5^x = 5\sqrt[3]{25}$

d) $6^{2x} - 7 \cdot 6^x + 6 = 0$

2. Resolva as seguintes inequações exponenciais

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 1$

b) $2^{-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2^3$

3. Considere as funções $y = 2^x$ e $y = x^2 - 3x + 4$

a) Represente-as no mesmo S.C.O

b) Quais são os pontos de intersecção dos gráficos das duas funções?

II. Função logarítmica

1. Resolva as seguintes equações a) $\log_3 (\log_5 x) = 0$

b) $\log_2 x = \log_2 x^2 - \log_2 7$



$$c) \log_2 x + \log_x 2 = 2$$

$$d) \log_3 (x-1) + \log_3 (x-3) = \log_3 48$$

$$e) \log_6 (x^2 - 5x) - \log_6 (x-5) = 1$$

$$f) \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 3$$

$$g) \log_9 \frac{1}{4} - \log_{\frac{1}{3}} (x-1) = \log_3 (x-5)$$

2. Resolva as seguintes inequações

$$a) \log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$$

$$b) \log_{\frac{1}{2}} (x-1) + 2 \geq \log_{\frac{1}{2}} (3x-2)$$

Soluções do teste de preparação do Módulo 3

1.

$$a) \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{125}{64} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \Rightarrow x = -3$$

$$b) 4 = \sqrt{2^x} \Rightarrow 2^2 = 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$c) 5^x = 5\sqrt[3]{25} \Rightarrow 5^x = 5 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 5^x = 5^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$d) 6^{2x} - 7 \cdot 6^x + 6 = 0$$

$$(6^x)^2 - 7 \cdot 6^x + 6 = 0$$

$$\text{seja: } \Delta = 25 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{se } \begin{cases} y = 1 \Rightarrow 6^x = 6^0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 6 \Rightarrow 6^x = 6 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

2.

$$a) \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$R: x \in [0; +\infty[$$

$$b) 2^{-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2^3$$

$$\begin{cases} 2^{-5} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2^{-5} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-x} \geq 2^{-5} \\ 2^{-x} \leq 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$x \in [-3; 5]$$

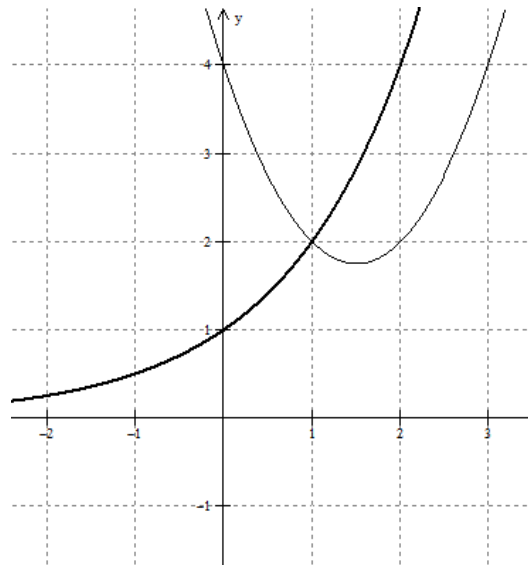
3. Considere as funções $y = 2^x$ e $y = x^2 - 3x + 4$

a) Represente-as no mesmo S.C.O



$$y=2^x \quad \text{e} \quad y=x^2-3x+4$$

x	-2	-1	0	1	1,5	2	3	4
$y=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{1}{4}$	4	8	$\frac{1}{2}$
$y=x^2-3x+4$	-	7	4	2	1,75	2	4	8



b) Indique os pontos de intersecção dos gráficos das duas funções?

Respostas: os gráficos intersectam-se num único ponto cujas coordenadas são $x = 1$; $y = 2$

II. Função logarítmica

1.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_3 (\log_5 x) &= 0 \Rightarrow 3^0 = \log_5 x \\ \Rightarrow 1 &= \log_5 x \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \log_2 x = \log_2 x^2 - \log_2 7$$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{x^2}{7}$$

$$x = \frac{x^2}{7} \Rightarrow x^2 - 7x = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 7$$

$$c) \log_2 x + \log_x 2 = 2$$

$$\log_2 x + \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = 2 \quad \text{seja } y = \log_2 x$$

$$y + \frac{1}{y} - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Resposta: } 1 = \log_2 x \Rightarrow x = 2$$

$$d) \log_3 (x-1) + \log_3 (x-3) = \log_3 48$$

$$1^0) \left. \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 3$$

$$2^0) e) \log_3 (x-1) + \log_3 (x-3) = \log_3 48$$

$$\Rightarrow \log_3 [(x-1)(x-3)] = \log_3 48$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3) = 48$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 48$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 45 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 196, \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$

$$\Rightarrow x = -5 \vee x = 9$$

$$3^0) S = \{9\}$$



$$e) \log_6 (x^2 - 5x) - \log_6 (x - 5) = 1$$

$$1^0) \begin{cases} x^2 - 5x > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0 \text{ ou } x > 5$$

$$2^0) \log_6 (x^2 - 5x) - \log_6 (x - 5) = 1 \quad 3)$$

$$S = \{6\}$$

$$\Rightarrow \log_6 \frac{x^2 - 5x}{x - 5} = 1$$

$$\Rightarrow \log_6 x = 1$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$f) \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 3$$

$$1^0) x > 0 \quad 2^0) \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 3$$

$$\Rightarrow \log_2 x^2 + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2 3$$

$$\Rightarrow \log_2 x^2 + \frac{\log_2 x}{-1} = \log_2 3$$

$$\Rightarrow \log_2 x^2 - \log_2 x = \log_2 3$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{x^2}{x} = \log_2 3$$

$$\Rightarrow \log_2 x = \log_2 3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$3^0) S = \{3\}$$

2. Inequações

$$a) \log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + 5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6$$

Resolução

1°) Condições de existência

$$-x^2 + 5x > 0 \Rightarrow 0 < x < 5$$

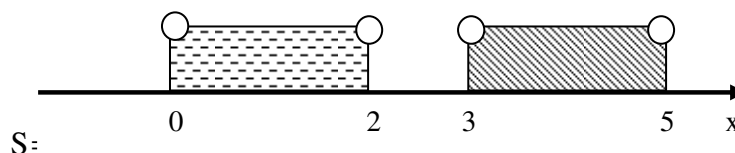
2º) Resolvendo a inequação propriamente dita

$$\log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 5x) > \log_{\frac{1}{2}} 6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x < 6$$

(não se esqueça que o sinal de desigualdade muda quando a base e numero entre 0 e 1)

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x < 6 &\Rightarrow -x^2 + 5x - 6 < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x < 2 \text{ ou } x > 3 \end{aligned}$$

3º) Verificando se as soluções encontradas satisfazem a inequação



$$\text{b) } \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$$

$$1) \begin{cases} x-1 > 0 \\ 3x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

$$2) \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \frac{1}{4} \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1) \frac{1}{4} \leq 3x-2 \Rightarrow x-1 \leq 12x-8$$

$$\Rightarrow -11x \leq -7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{11}$$

$$3) S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

