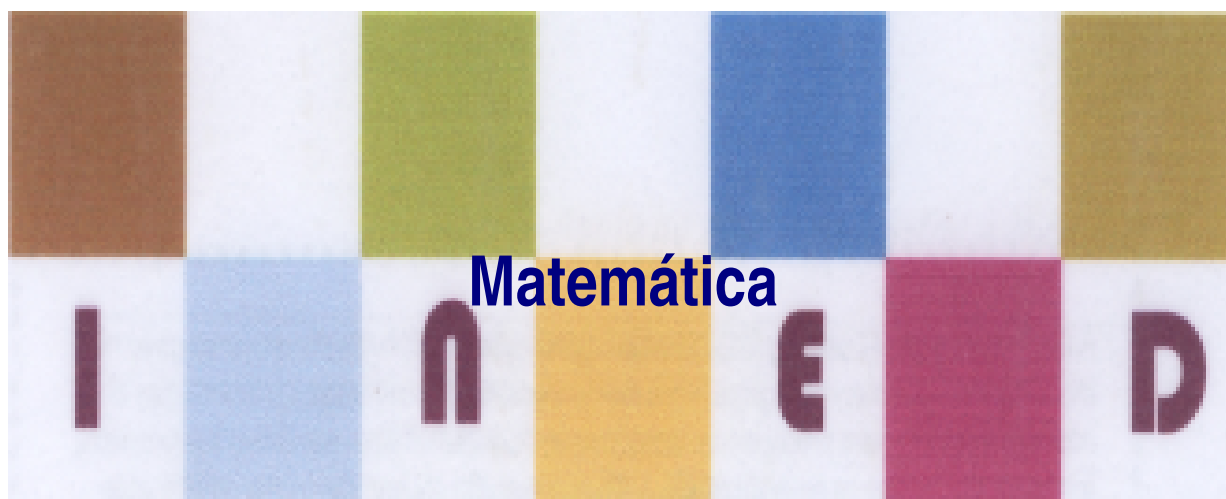


MÓDULO 1



Conjuntos Numéricos e Cálculo Algébrico



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Baixar Livros & Exames em PDF

Somos o portal MozEstuda.com, um espaço dedicado à educação e ao conhecimento. Fornecemos links para o **download gratuito** de materiais de acesso livre, incluindo [exames anteriores](#), [livros e diversos PDFs](#) educacionais. Nosso objetivo é facilitar o aprendizado e a pesquisa, sempre respeitando os direitos autorais e promovendo o acesso legítimo ao conhecimento. Se você apreciou este conteúdo, considere apoiar os autores e editoras adquirindo versões oficiais sempre que possível. Todos os direitos autorais pertencem aos respectivos criadores e detentores de direitos. **Não vendemos nem lucramos com as obras disponibilizadas.** Aproveite e compartilhe com outros estudantes!

Para baixar livros em PDF, acesse biblioteca.mozestuda.com e pesquise o título desejado na barra de pesquisa. Ou, se preferir, siga/ Clique os links abaixo:

BAIXAR TODOS LIVROS ESCOLARES — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Classe** para Baixar todos livros em PDF

12ª CLASSE

11ª CLASSE

10ª CLASSE

9ª CLASSE

8ª CLASSE

7ª CLASSE

6ª CLASSE

5ª CLASSE

4ª CLASSE

3ª CLASSE

2ª CLASSE

1ª CLASSE

BAIXAR TODOS MÓDULOS ESCOLARES —

MÓDULOS DO I CICLO

MÓDULOS DO II CICLO

LIVROS POR DISCIPLINAS - TODAS

BAIXAR EXAMES DA **6ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

C. NATURAIS

C. SOCIAIS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

BAIXAR EXAMES DA **10ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

FÍSICA

GEOGRAFIA

HISTORIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

BAIXAR EXAMES DA **12ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

DGD

FILOSOFIA

FÍSICA

FRANCÊS

GEOGRAFIA

HISTÓRIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

TODOS EXAMES

TODOS EDITAIS

TODOS LIVROS

BAIXAR EXAMES DE **ADMISSÃO** — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Instituição** para Baixar todos exames em PDF

IFP / Formação de Professores

UEM

UJC/ ISRI

ISPG

ISPSONGO

AC. MILITAR

PRM

ISCAM

ICS — SAÚDE — ENSINO MÉDIO

ETP / Ensino técnico Profissional

UP / UniRios: Save, Rovuma, Licungo, ...

UNIZAMBEZE

ISPT

ISCISA

ACIPOL

CFJJ

IFAPA

EDITAIS

ENEM

VESTIBULARES

ENCCEJA

TODOS EXAMES

Conteúdos

Acerca deste Módulo 1 de Matemática	1
Como está estruturado este Módulo.....	1
Habilidades de aprendizagem	3
Necessita de ajuda?	3
Lição 1	5
Introdução a teoria de conjuntos	5
Introdução.....	5
Resumo da lição.....	9
Actividades	11
Avaliação	13
Lição 2	14
Operações com conjuntos	14
Introdução.....	14
Operações com conjuntos.....	14
Propriedades das operações com conjuntos	16
Resumo da lição.....	22
Actividades	26
Avaliação	29
Lição 3	30
Expressões Algébricas	30
Introdução.....	30
Expressões Algébricas.....	31
Resumo da lição.....	35
Actividades	36
Avaliação	39
Lição 4	40
Polinómio de uma variável	40
Introdução.....	40
Polnómio de uma variável	40
Resumo da lição.....	48
Actividades	49
Avaliação	52
Lição 5	53
Operações com polinómios. Multiplicação	53
Introdução.....	53

Operações com polinómios. Multiplicação	53
Resumo da lição	57
Actividades	58
Avaliação	60
Lição 6	61
Produtos notáveis	61
Introdução	61
Casos notáveis	61
Resumo da lição	64
Actividades	65
Avaliação	67
Lição 7	67
Divisão inteira de polinómios	67
Introdução	67
Divisão inteira de polinómios	68
Resumo da lição	71
Actividades	72
Avaliação	75
Lição 8	75
Divisão de um polinómio por um binómio ($x - \alpha$)	75
Introdução	75
Divisão de um polinómio por um binómio ($x - \alpha$)	76
Resumo da lição	79
Actividades	80
Avaliação	82
Lição 9	83
Decomposição em fracções racionais	83
Introdução	83
Decomposição em fracções racionais	83

Resumo da lição.....	85
Actividades	86
Avaliação	87
Soluções Módulo 1	88
Soluções do Módulo 1	88
Lição 1	88
Lição 2	89
Lição 3	90
Lição 4	92
Lição 5	94
Lição 6	95
Lição 7	96
Lição 8	98
Lição 9	100
Módulo 1 de Matemática	101
Teste Preparação de Final de Módulo.....	101
Introdução.....	101
Soluções do teste de preparação do Módulo 1	104



Acerca deste Módulo 1 de Matemática

MÓDULO 1

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 10ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 11ª e 12ª classe, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 11ª e 12ª classe. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 12ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para concluí-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as respostas no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.



No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em lições. Cada lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da lição.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjunta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquirir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem



Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planejar o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem-disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que “*o livro é o melhor amigo do homem*”. Por isso, sempre que achar que a matéria está a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar todas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?



Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a superá-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.



Lição 1

Introdução a teoria de conjuntos

Introdução

Error! Reference source not found.

A teoria de conjuntos é o ramo da matemática que estuda conjuntos, ou seja coleções de elementos. A teoria de conjuntos é aplicada na maioria das vezes a elementos que são relevantes para a matemática. A linguagem da teoria dos conjuntos pode ser usada nas definições de quase todos os elementos matemáticos.

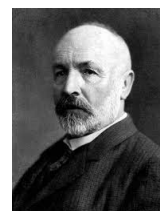
Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Usar* símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos.
- *Representar* um conjunto por extensão e por compeensão, através de diagramas de Venn e chavetas.

Caro estudante, A teoria de conjuntos é resultado, em grande parte do trabalho do matemático de George Cantor (1845-1918).



A noção de conjuntos não é susceptível de uma definição precisa a partir das noções mais simples.

Como já vimos nas classes anteriores, conjunto é um conceito primitivo, tal como por exemplo, “o ponto” “a recta” etc. Portanto, não temos uma definição mas vamos tomar vários exemplos e ilustrações que irão permitir que você entenda perfeitamente o conceito.

Exemplos:.

- a) O conjunto de todos os moçambicanos.
- b) O conjunto de todos os números naturais.
- c) O conjunto de todos os números reais tal que $x^2 - 4 = 0$.

Em geral, um conjunto é denotado por uma letra maiúscula

A, B, C, Z.

Os componentes de um conjunto são chamados **elementos** desse conjunto. Em geral, um elemento de um conjunto, é denotado por uma letra minúscula

a, b, c, ..., z.

Por exemplo:

- a) Otilia Maoche é um **elemento** do conjunto dos moçambicanos.
- b) 1 é um **elemento** do conjunto dos números naturais.
- c) -2 é um **elemento** do conjunto dos números reais que satisfaz à equação $x^2 - 4 = 0$.

Caro estudante! O conjunto estabelece uma relação com os seus elementos, bem como com outros conjuntos.

Relação entre um conjunto e um elemento

Símbolo de pertinência: Se um elemento pertence a um conjunto utilizamos o símbolo $\in$ que se lê: "pertence".

Para afirmar que 1 é um número natural ou que 1 pertence ao conjunto dos números naturais, escrevemos:

$$1 \in \mathbb{N}$$

Para afirmar que 0 não é um número natural ou que 0 não pertence ao conjunto dos números naturais, escrevemos um símbolo matemático muito usado para a negação é a barra / traçada sobre o símbolo normal.



$0 \notin \mathbb{N}$

Amigo estudante, parece que estávamos nos esquecendo da representação do conjunto. Nada disso não nos esqueçamos não, vamos tratar disso agora.

Algumas formas de representar um conjunto

Muitas vezes, um conjunto é representado com os seus elementos através de duas formas básicas e de uma terceira forma geométrica, a saber:

Extensão: Os elementos do conjunto estão dentro de duas chavetas { e }.

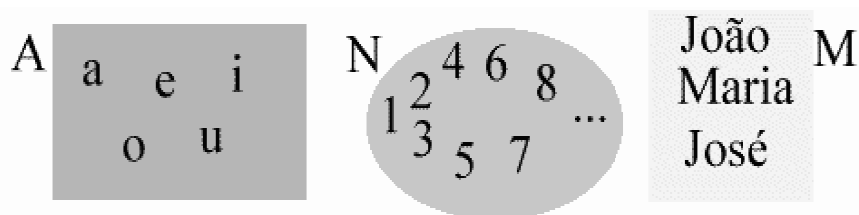
- a) $A = \{a, e, i, o, u\}$
- b) $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- c) $M = \{\text{Otilia Maoche}\}$

Descrição: O conjunto é descrito por uma ou mais propriedades.

- a) $A = \{x: x \text{ é uma vogal}\}$
- b) $N = \{x: x \text{ é um número natural}\}$
- c) $M = \{x: x \text{ é uma pessoa da família de Maria}\}$

Diagrama de Venn-Euler: (lê-se: "Ven-óiler") Os conjuntos são mostrados graficamente.

Assim diz se que os conjuntos estão na forma de **Diagrama de Venn-Euler**



Relação entre conjuntos

Ora bem, porque um conjunto pode estar dentro de um outro conjunto, então esse vai se chamar **subconjunto**.

Definição: Subconjunto

Dados os conjuntos **A** e **B**, diz-se que **A** está contido em **B**, denotado por $A \subseteq B$, se todos os elementos de **A** também estão em **B**.

Algumas vezes diremos que um conjunto **A** está propriamente contido em **B**, quando o conjunto **B**, além de conter os elementos de **A**, contém também outros elementos. O conjunto **A** é denominado *subconjunto* de **B** ou seja o conjunto **B** contém **A**.

Exemplo

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ faz parte do conjunto dos números pares logo $A = \{2, 4, 6, 8\}$ é subconjunto do conjunto dos números pares

Vamos definir agora alguns conjuntos especiais.

Conjunto vazio: É um conjunto que não possui elementos. É representado por $\{ \}$ ou por $\emptyset$.

O conjunto vazio está contido em todos os conjuntos.

Conjunto universo: É um conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando e também contém todos os conjuntos desse contexto. O conjunto universo é representado por uma letra **U**.



Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Relação entre conjuntos e elemento

Símbolo de pertinência: Se um elemento pertence a um conjunto utilizamos o símbolo $\in$ que se lê: "pertence".

Para afirmar que 1 é um número natural ou que 1 pertence ao conjunto dos números naturais, escrevemos:

$$1 \in \mathbb{N}$$

Para afirmar que 0 não é um número natural ou que 0 não pertence ao conjunto dos números naturais, escrevemos:

$$0 \notin \mathbb{N}$$

✓ Algumas formas de representar um conjunto

Extensão: Os elementos do conjunto estão dentro de duas chavetas $\{e\}$.

Descrição: O conjunto é descrito por uma ou mais propriedades.

Diagrama de Venn-Euler

✓ Relação entre conjuntos

Subconjunto

Dados os conjuntos A e B, diz-se que A está contido em B, denotado por $A \subset B$, se todos os elementos de A também estão em B. O conjunto A é denominado *subconjunto* de B ou seja o conjunto B contém A.

Conjunto vazio: É um conjunto que não possui elementos. É representado por $\{ \}$ ou por $\emptyset$.

Conjunto universo: É um conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando e também contém todos os

conjuntos desse contexto. O conjunto universo é representado por uma letra U .

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.



Actividades



Actividades

1. Dados os conjuntos $A = \{x \in N : x \text{ é ímpar, menor que } 10\}$;
 $B = \{x \in N : 0 < x \leq 4\}$; e $C = \{x \in N : x \leq 6\}$, determina:
- a) A b) B c) C

Resolução

- a) $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
b) $B = \{1; 2; 3; 4\}$
c) $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2. Define por extensão os seguintes conjuntos:
- a) $\{x: x \text{ é um número inteiro Maior que } 7 \text{ e menor que } 12\}$
b) $\{x: x \text{ é um número inteiro positivo menor ou igual a } 5\}$

Resolução:

- a) $\{8; 9; 10; 11\}$
b) $\{1; 2; 3; 4; 5\}$
3. Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 5\}$, utilizando os símbolos $\in$ e $\notin$, relacione:
- a) 2 e A b) 3 e B c) 4 e A d) 5 e B

Resolução

- a) $2 \in A$ b) $3 \notin B$ c) $4 \in A$ d) $5 \in B$
4. Represente os conjuntos na forma explícita
- a) $A = \{2m : m \in N, m \leq 7\}$
b) $B = \{2^x : x \in N, x < 10\}$
c) $C = \left\{ \frac{12}{n} : x \in N, n \leq 12 \right\}$

Resolução

$$a) \quad A = \{2m : m \in \mathbb{N}, m \leq 7\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

Concerteza, você escolheu números naturais de 1 a 7 segundo a condição e multiplicou cada um deles por 2 e obteve o conjunto representado.

$$b) \quad B = \{2^x : x \in \mathbb{N}, x < 10\} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$$

Isso mesmo, desta vez você tem a forma de uma potência por isso escolheu números naturais de 1 a 9 segundo a condição, o 10 não faz parte. E calculou a potência para cada caso obtendo assim o conjunto representado.

$$c) \quad C = \left\{ \frac{12}{n} : n \in \mathbb{N}, n \leq 12 \right\} = \left\{ 1, 6, 4, 3, \frac{12}{5}, 2, \frac{12}{7}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{12}{11} \right\}$$

Certo, Foi escolhendo para calcular o valor de $\frac{12}{n}$, números

naturais incluindo 12 pois, a condição é n deve ser menor ou igual 12, e obteve o conjunto dos números representados.



Avaliação



Avaliação

1. Defina os seguintes conjuntos por extensão:
 - a) $\{x: x \text{ é um número natural menor que } 7\}$
 - b) $\{x: x \text{ é um mês com feriados em Moçambique}\}$
 - c) $\{x: x \text{ é o dia da independência de Moçambique}\}$
1. Seja dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
 - a) $1 \in A$
 - b) $1, 2, 3$ Pertencem a A
 - c) $\{1, 2, 3\} \in A$
 - d) $1, 5$ Não pertencem a A
 - e) $\{4, 5\} \notin A$
2. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
 - a) $1 \subset A$
 - b) $1, 2, 3$ Pertencem a A e a B
 - c) $A \in B$
 - e) $A \subset B$
 - f) $B \supset A$
3. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
 - a) $1 \subset A$
 - b) $1, 2, 3$ Pertencem a A e a B
 - c) $A \in B$
 - e) $A \subset B$
 - f) $B \supset A$
4. Represente os conjuntos na forma explícita:
 - a) $A = \{x \in N : x \text{ é número primo, } x \leq 40\}$
 - b) $B = \{m \in N : 3m^2 + m = 2\}$
 - c) $C = \{3x - 1 : x \in N, -2 < x \leq 3\}$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 2

Operações com conjuntos

Error! Reference source not found.

Introdução

Na lição anterior definimos conjunto e as diferentes formas de representar um conjunto. Da mesma maneira viu que alguns conjuntos relacionam-se de diferentes formas, isto são podem ter os mesmos elementos ou uma parte dos elementos de outro conjunto. Desta forma significa que podemos juntar, encontrar elementos comuns e até achar a diferença entre conjuntos.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Usar os símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos.
- Efectuar operações de reunião com conjuntos

Operações com conjuntos

Ora bem, agora vamos fazer as operações com os conjuntos, é bastante simples, não precisa de fazer muito esforço para entender, além disso você já lidou com a teoria de conjuntos mesmo no ensino primário, desta vez você vai aprofundar mais os conhecimentos sobre essa matéria



Quais as operações que podem ter lugar entre conjuntos?

Claro que podemos adicionar e subtrair conjuntos.

Isso mesmo, você respondeu correctamente. Então vamos definir:

Reunião de conjuntos

A reunião dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.

Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo: Se $A = \{a, e, i, o\}$ e $B = \{3, 4\}$ então $A \cup B = \{a, e, i, o, 3, 4\}$.

Como se pode ver a reunião de dois conjuntos e a **soma** dos elementos dos dois conjuntos

Intersecção de conjuntos

A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente ao conjunto A e ao conjunto B.

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$$

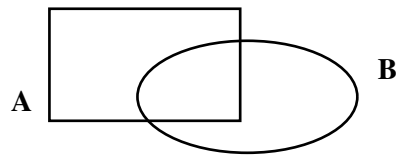
É preciso ter atenção, “e” significa simultaneamente, portanto valores comuns dos dois conjuntos

Exemplo 1: Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ então $A \cap B = \emptyset$.

Como os dois conjuntos não tem elementos comuns então a intersecção deles é o conjunto vazio.

Exemplo 2 Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ então $A \cap B = \{a, e\}$

Como se vê neste caso “a” e “e” são elementos comuns dos 2 conjuntos



NB: Quando a intersecção de dois conjuntos A e B é o conjunto vazio, dizemos que estes conjuntos são **disjuntos**.

Como se definem exactamente?

Dois ou mais conjuntos dizem-se disjuntos se não têm elementos comuns.

Ótimo, as operações não são feitas de qualquer maneira, existem algumas propriedades que nos guiam e facilitam a nossa vida enquanto operamos com conjuntos nas operações, preste atenção:

Propriedades das operações com conjuntos

1. Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, a reunião de A e B, denotada por $A \cup B$ e a intersecção de A e B, denotada por $A \cap B$, ainda são conjuntos no universo.
2. Reflexiva: Qualquer que seja o conjunto A, tem-se que:

$$A \cup A = A \quad \text{e} \quad A \cap A = A$$

1. Inclusão: Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se que:

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$



2. **Inclusão relacionada:** Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se que:

$$A \subset B \text{ equivale a } A \cup B = B$$

$$A \subset B \text{ equivale a } A \cap B = A$$

3. **Associativa:** Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, tem-se que:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

4. **Comutativa:** Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se que:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

5. **Elemento neutro para a reunião:** O conjunto vazio $\emptyset$ é o elemento neutro para a reunião de conjuntos, tal que para todo conjunto A, se tem:

$$A \cup \emptyset = A$$

6. **Elemento "nulo" para a intersecção:** A intersecção do conjunto vazio $\emptyset$ com qualquer outro conjunto A, fornece o próprio conjunto vazio.

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

7. **Elemento neutro para a intersecção:** O conjunto universo U é o elemento neutro para a intersecção de conjuntos, tal que para todo conjunto A , se tem:

$$A \cap U = A$$

8. **Distributiva:** Quaisquer que sejam os conjuntos A , B e C , tem-se que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

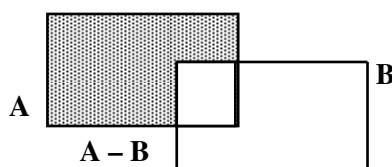
Acabamos de ver as propriedades sobre a reunião e intersecção de conjuntos, vamos a seguir definir outras operações entre conjuntos que também têm propriedades específicas, avancemos:

Diferença de conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e *não* pertencem ao conjunto B .

$$A - B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Do ponto de vista gráfico, a diferença pode ser vista como:



Exemplo: Se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ então $A - B = \{i, o, u\}$

Neste caso os elementos que não fazem parte do conjunto B são **i, o e u**

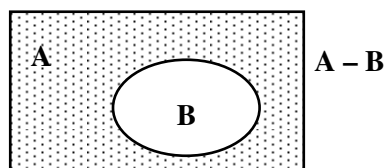
Note que: a diferença de conjuntos é definida para conjuntos que têm elementos comuns ou seja conjuntos que se intersectam.

Complemento de um conjunto

O complemento do conjunto B contido no conjunto A, denotado por $C_A B$, é a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e **não** pertencem ao conjunto B.

$$C_A B = A - B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Graficamente, o complemento do conjunto B no conjunto A, é dado por:



Note que: um dos conjuntos deve ser subconjunto do outro

Quando não há dúvida sobre o universo U em que estamos trabalhando, simplesmente utilizamos a letra **c** posta como expoente no conjunto, para indicar o complemento deste conjunto. Podemos usar também a palavra **complementar** no lugar de complemento, assim como a denotação, uma barra por cima do conjunto $\bar{A}$. (complementar do conjunto A)

Exemplos: $\emptyset^c = U$ e $U^c = \emptyset$ Ou $\bar{\emptyset} = U$ e $\bar{U} = \emptyset$

Muito bem, mais uma vez devemos cumprir com certas leis para trabalhar com a complementaridade de conjunto. Em homenagem a pessoa de nome “**MORGAN**” que bastante investigou sobre conjuntos tendo

chegado a fórmulas universais, que até hoje são chamadas Leis de Morgan.

Você tem muita sorte, as fórmulas já foram descobertas a séculos. A sua tarefa é apenas aplicá-las correctamente:

Leis de Morgan

1. Complementar da reunião de dois conjuntos A e B é a intersecção dos complementares desses conjuntos.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

2. Complementar da reunião de uma colecção finita de conjuntos é a intersecção dos complementares desses conjuntos.

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$$

3. Complementar da intersecção de dois conjuntos A e B é a reunião dos complementares desses conjuntos.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

4. Complementar da intersecção de uma colecção finita de conjuntos é a reunião dos complementares desses conjuntos.

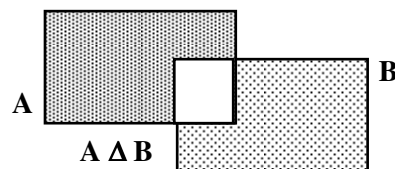
$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c$$

Diferença simétrica

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem à reunião dos conjuntos A e B e não pertencem à intersecção dos conjuntos A e B.

$$A \Delta B = \{x: x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B\}$$

O diagrama de Venn-Euler para a diferença simétrica é:



Exemplo: se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$

Primeiro $A \cup B = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$ mas os elementos **a** e **e** são comuns ou seja definem a intersecção logo estes devem ser retirados segundo a definição portanto:

$$A \Delta B = \{b, c, d, i, o, u\}$$

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Reunião de conjuntos

A reunião dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.

Interseção de conjuntos

A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente ao conjunto A e ao conjunto B.

Diferença de conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e *não* pertencem ao conjunto B.

Diferença simétrica

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem à reunião dos conjuntos A e B e *não* pertencem à intersecção dos conjuntos A e B.

Complemento de um conjunto

O complemento do conjunto B contido no conjunto A, denotado por $C_A B$, é a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e *não* pertencem ao conjunto B.

Propriedades das operações com conjuntos

1. Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, a reunião de A e B,

denotada por $A \cup B$ e a intersecção de A e B, denotada por $A \cap B$, ainda são conjuntos no universo.

2. **Reflexiva**

$$A \cup A = A \quad \text{e} \quad A \cap A = A$$

3. **Inclusão:**

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$

4. **Inclusão relacionada**

$$A \subset B \text{ equivale a } A \cup B = B$$

$$A \subset B \text{ equivale a } A \cap B = A$$

5. **Associativa**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

6. **Comutativa**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

7. **Elemento neutro para a reunião:**

$$A \cup \emptyset = A$$

8. **Elemento "nulo" para a intersecção**

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

9. **Elemento neutro para a intersecção**

$$A \cap U = A$$

10. **Distributiva**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Leis de Morgan

1. Complementar da reunião de dois conjuntos A e B é a intersecção dos complementares desses conjuntos.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

2. Complementar da reunião de uma colecção finita de conjuntos é a intersecção dos complementares desses conjuntos.

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$$

3. complementar da intersecção de dois conjuntos A e B é a reunião dos complementares desses conjuntos.

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

4. Complementar da intersecção de uma colecção finita de conjuntos é a reunião dos complementares desses conjuntos.

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c$$



Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades



Actividades

1. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{c, d, e\}$ e

$$C = \{b, d, e, f\}$$

- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A - (B \cap C)$ d) $(A \cup C) - B$

Resolução

- a) Vamos indicar o conjunto de elementos comuns A e B , isto é, que pertencem, ao mesmo tempo, aos conjuntos A e B .

$$A \cap B = \{c, d\}$$

- b) Vamos indicar o conjunto formado por elementos de A ou elementos de B .

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

Primeiro vamos encontrar os elementos comuns entre B e C e depois, ver quais desses não pertencem a A

$$A - (B \cap C) = \{a, b, c, d\} - \{d, e\} = \{a, b, c\}$$

- a) Primeiro vamos encontrar os elementos que pertencem a A ou a C depois ver a diferença entre eles.

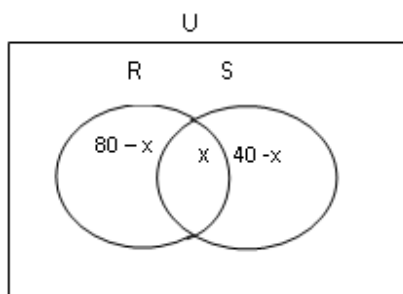
$$(A \cup C) - B = \{a, b, c, d, e\} - \{c, d, e\} = \{a, b, f\}$$

2. Numa aldeia, 8% da população pratica agricultura de subsistência, 40% pratica agricultura de rendimento e 10% não pratica nenhuma destas modalidades agrícolas.

Qual é a percentagem da população que pratica ambas as modalidades de agricultura?

**Resolução**

O diagrama de venn que representa a situação descrita será:



Dados: $n(U) = 100$

$n(R) = 80\%$

10

$n(s) = 40\%$

$n(R \cap S) = x$

Resposta: 30% da população pratica agricultura de rendimento e de subsistência

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

Achar:

Resolução

a) $A \triangle C = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$

b) $A \cap (B \triangle C) = \{1, 2, 3, 7, 8\} \cap \{1, 3, 4, 6, 7, 10, 12\} = \{1, 3, 7\}$

3. Ache a Intersecção e a reunião dos conjuntos:

a) $\left[-1, \frac{3}{2}\right] \cap \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

b) $]0, 3] \cap]-2, 3]$

Resolução

$$a) \left[-1, \frac{3}{2}\right] \cap \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right] \Rightarrow \begin{cases} \text{interseccao} \rightarrow \left[\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right] \\ \text{reuniao} \rightarrow \left[-1; \sqrt{3}\right] \end{cases}$$

$$b)]0, 3] \cap]-2, 3] \Rightarrow \begin{cases} \text{interseccao} \rightarrow]0, 3] \\ \text{reuniao} \rightarrow]-2, 3] \end{cases}$$

1. Ache $(A \cap B) \cup C$ para:

$$A = \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]; \quad B = \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]; \quad C = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$$\text{Resolução: } \left[\frac{1}{5}; 1\right]$$

Nota Bem: Se tiver alguma dúvida convém representar os conjuntos num eixo real



Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. Seja dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Qual das seguintes afirmações é falsa:
 - a) $1 \in A$
 - b) $1, 2, 3$ Pertencem a A
 - c) $\{1, 2, 3\} \in A$
 - d) $1, 5$ Não pertencem a A
 - e) $\{4, 5\} \notin A$
2. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Determine:
 - a) $A \cup B$
 - b) $A \cap B$
 - c) $A \setminus (B \setminus C)$
 - d) $A \cap B \cup C$
 - e) $(A \cap B) \cup C$
 - f) $A \cap (B \cup C)$
3. Dados: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$ Determine:
 - a) $A - B$
 - b) $A - C$
 - c) $(A \cap B) - C$
 - d) $A - \emptyset$

4. Considere os intervalos $[-1,4]$ e $[1,5]$ e determine:

a) $[-1,4] \cap [1,5]$

b) $[-1,4] \cup [1,5]$

5. Seja R o conjunto universo. Determine o complementar do conjunto $\{1,2,3\}$.

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 3

Expressões Algébricas

Error! Reference source not found.

Introdução

Depois das expressões numéricas, você trabalhou com expressões matemáticas onde figuram para além de números, letras do alfabeto, como é o caso de monómios e polinómios. A nossa aula irá concentrar-se mais no estudo de tipos de expressões algébricas e fazer análise para cada caso, quando é que estas tem sentido.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Classificar expressões algébricas.
- Determinar o domínio de existência das expressões algébricas.

Expressões Algébricas

Error! Reference source not found.

Como vocês sabem, as expressões algébricas são todas aquelas que: para além dos números, as letras figuram no lugar dos números.

Assim uma expressão numa variável diz-se algébrica quando sobre a variável, não incidem outras operações além de adição, subtracção, multiplicação, divisão ou extracção de raiz.

São exemplos de expressões algébricas:

$$\bullet 2a - b \qquad \bullet x^2 + 4y \qquad \bullet z^3 - 2x + 9$$

Portanto, a partir dos exemplos facilmente que está notável que existe alguma diferença entre elas. Deste modo podemos classificar as expressões algébricas em 3 tipos diferentes: expressões algébricas inteiras, fraccionárias e irracionais.

Expressões algébricas inteiras

Todas as expressões que estão na forma de um polinómio são inteiras:

Exemplos: 1) $2a - b$ 2) $x^2 + 4y$ 3) $z^3 - 2x + 9$

4) $xyz - 3a^2 + 6b + a^2 - 3xyz$

Expressões algébricas fraccionárias

Estas expressões algébricas com a variável no denominador chamam-se expressões algébricas fraccionárias.

Exemplos: $\frac{x}{x-1}$, $\frac{ab-2a-8}{a^2+2ab}$

Expressões algébricas irracionais

As expressões algébricas irracionais são todas aquelas que têm a variável sob o sinal de radical.

Exemplos: $\sqrt{x^3+4xy}$; $\frac{1}{\sqrt{ab^3}}$

Portanto, como acabamos de classificar, naturalmente temos que chegar a uma conclusão em relação aos valores que cada expressão pode tomar para qualquer que sejam os números reais.

Deste modo como já sabem nas classes anteriores vamos ajudar a determinar o domínio de existência.

Domínio de Existência das expressões algébricas

Domínio de existência de expressões algébricas inteiras

Vejam o seguinte exemplo: Seja $x y - 3x^2 + 6x + y^2 - 3xy$

e calculamos o valor da expressão para $x=2$ e $y=-1$

$$\begin{aligned} x y - 3x^2 + 6x + y^2 - 3xy &= 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 + 12 + (-1) - 3 \cdot 2 \cdot (-1) = \\ &= -2 - 12 + 12 + 6 = 4 \end{aligned}$$

Como pode ver, para qualquer valor de $x \in \mathbf{R}$, a expressão algébrica inteira é $\mathbf{R}$.

Domínio de existência de expressões algébricas fracionárias



Se procedermos da mesma forma para a expressão $\frac{1}{x-1}$ podemos chegar a seguinte conclusão: $x \neq 1$

Consideremos outro exemplo: $\frac{x+1}{x^2+5x+6}$ Vamos calcular o valor da expressão para $x=2$. Por tanto teremos:

$$\frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{2+1}{2^2+5 \cdot 2+6} = \frac{3}{4+10+6} = \frac{3}{20} = \frac{3}{20}$$

Observe que nestes dois dos exemplos para certo valor de x , a expressão não existe. E se verificar nos dois casos, esses valores são os que anulam o denominador ou seja, são raízes do denominador.

Deste modo, podemos concluir que o domínio de existência de uma expressão racional (fraccionária) é todos os números reais menos os que anulam o denominador.

Exemplo: $\frac{1}{x-1}$ Domínio de existência é $x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

Ou seja esta expressão existe em todo o $\mathbb{R}$, menos no ponto $x=1$.

Exemplo: $\frac{1}{x^2+5x+6}$

Para esta expressão: $x^2+5x+6 \neq 0$, o Domínio de existência é:

$$(x+2)(x+3) \neq 0 \rightarrow x_1 \neq -2 \vee x_1 \neq -3 \text{ logo: } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$$

Expressões algébricas irracionais (Domínio)

Vamos em seguida verificar o que acontece com expressões irracionais.

Calcule se possível, o valor das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \sqrt{4} = 2 &\Rightarrow 2^2 = 4 ; \sqrt[4]{16} = 2 \Rightarrow 2^4 = 16 ; \sqrt[5]{32} = 2 \Rightarrow 2^5 = 32 \\ \sqrt[3]{27} = 3 &\Rightarrow 3^3 = 27 ; \sqrt{-4} \quad (\text{nao existe em } \mathbb{R}) \\ \sqrt[3]{-8} = -2 &\Rightarrow (-2)^3 = -8 ; \sqrt{0} = 0 \Rightarrow 0^2 = 0 ; \sqrt[4]{0} = 0 \Rightarrow 0^4 = 0 \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que:

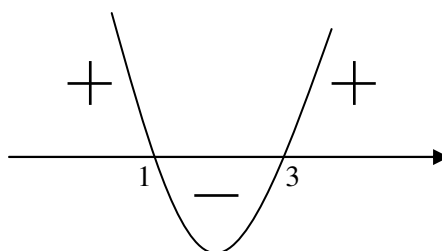
$$\sqrt[n]{p(x)} :$$

- a) $P(x) \geq 0$, se n for par
 b) $P(x) \in \mathbb{R}$, se n for ímpar

$$\sqrt{x-2} \quad D: x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow x \in [2; +\infty[$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} \quad D: x^2 - 4x + 3 \geq 0 \rightarrow (x-1)(x-3) \geq 0$$

Usando o método gráfico temos:



$$x \in]-\infty; 1] \cup [3; \infty[$$



Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

Expressões algébricas inteiras

Todas as expressões que estão na forma de um polinômio são inteiras e o domínio de existência destas expressões é $\mathbb{R}$:

Expressões algébricas fracionárias

Estas expressões algébricas com a variável no denominador chamam-se expressões algébricas fracionárias. O domínio de existência expressões algébricas fracionárias são todos os números reais **menos** os que anulam o denominador.

Expressões algébricas irracionais

As expressões algébricas irracionais são todas aquelas que têm a variável sob o sinal de radical. O domínio de existência de uma expressão algébrica irracional são todos os números reais menos aqueles que tornam o radicando negativo.

Portanto, acabamos de classificar, agora naturalmente chegar a uma conclusão em relação aos valores que cada expressão pode tomar para quaisquer que sejam os números reais.

Atividades



Atividades

1. Calcule o valor das seguintes expressões algébricas para $x = -2$

a) $\frac{x}{8} - \frac{2}{x}$

Resolução: $\frac{x}{8} - \frac{2}{x} = \frac{-2}{8} - \frac{2}{-2} = -\frac{2}{8} + 1 = \frac{-2+8}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) $3(x-2) + x^2 - 2x$

Resolução: $3(x-2) + x^2 - 2x = 3(-2-2) + (-2)^2 = -12 + 4 = -8$

c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

Resolução $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

d) $\frac{x+2}{3} - \frac{2}{x+3}$

Resolução: $\frac{x+2}{3} - \frac{2}{x+3} = \frac{-2+2}{3} - \frac{2}{-2+3} = 0 - 2 = -2$

e) $2x^2 - 3\sqrt{2}x + 2$

Resolução: $2x^2 - 3\sqrt{2}x + 2 = 2 \cdot (-2)^2 - 3\sqrt{2}(-2) + 2 = 10 + 6\sqrt{2}$

f) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x}$

Resolução: $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x} = \frac{(-2)^2 - 4}{(-2)^2 + 4(-2)} = \frac{0}{-4} = 0$

g) $\frac{16 - x^2 - 2x}{x^2 - x}$



$$\text{Resposta: } \frac{16-x^2-2x}{x^2-x} = \frac{16-(-2)^2-2(-2)}{(-2)^2-(-2)} = \frac{16-4+4}{4+2} = \frac{8}{3}$$

$$h) \frac{x^4-2x^2+1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$\text{Resposta: } \frac{x^4-2x^2+1}{\sqrt{2x+5}} = \frac{(-2)^4-2(-2)^2+1}{\sqrt{2(-2)+5}} = \frac{16-8+1}{\sqrt{1}} = 9$$

2. Determine o domínio de existência para as expressões algébricas das alíneas d), e), f), h) e i) do exercício 1

Domínio de existência

$$d) \frac{x+2}{3} - \frac{2}{x+3}$$

$$D: x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3,$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Observe que o denominador não pode ser zero para que a fração exista

$$e) 2x^2 - 3\sqrt{2}x + 2$$

$D = \mathbb{R}$, Para qualquer número real a expressão será também um número real

$$f) \frac{x^2-4}{x^2+4x}$$

Domínio de existência

Observe que o denominador não pode ser zero para que a fração exista

$$D: x^2 + 4x \neq 0; x \neq 0 \text{ ou } x \neq -4, \Rightarrow$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$$

$$h) \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{\sqrt{2x+5}}$$

Domínio de existência

Observe que o denominador não pode ser zero para que a fração exista e ao mesmo tempo o radicando não pode ser negativo

$$\begin{cases} \sqrt{2x+5} \neq 0 \\ 2x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5} \neq 0 \\ 2x > -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5} \neq 0 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow D = \left] -\frac{5}{2}; +\infty \right[$$

$$i) \frac{3x-1}{2\sqrt{4x^2+2x}}$$

Observe que o denominador não pode ser zero para que a fração exista e ao mesmo tempo o radicando não pode ser negativo

$$D: \begin{cases} \sqrt{4x^2+2x} \neq 0 \\ 4x^2+2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2+2x} \neq 0 \\ 4x^2+2x > 0 \end{cases}$$

E agora! Temos que resolver uma inequação quadrática, mas não é problema porque você já domina os métodos (disjunção de condições, quadro de sinais ou método gráfico) escolha o método mais simples para si.

Resolvendo a inequação $4x^2+2x>0$ pela disjunção de condições:

Não se esqueça que para um produto de dois factores é positivo como neste caso quando os factores têm o mesmo sinal de desigualdade para isso temos as duas possibilidades:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{solucao}_1 \quad x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[$$

$$\begin{cases} 2x < 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{solucao}_2 \quad x \in \left] 0; +\infty \right[$$

A solução da inequação será a reunião das soluções 1 e 2



E esta é o domínio da expressão algébrica dada, portanto:

$$D: x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] 0; +\infty \right[$$

Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. Calcule o valor das seguintes expressões algébricas tendo em conta os valores das variáveis em cada caso

a) $2x^3 + 3x - 5$ $\left(x = -\frac{1}{3}\right)$

b) $x \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2x}\right)$ $(x = 2)$

c) $\frac{6 - x^2 - xy - y^2}{-x^3 - x^2 - 4y - xy}$ $(x = 1 \quad y = -1)$

d) $\sqrt{x^3 + 1}$ $(x = -1)$

2. Determine os valores de x para as quais cada uma das expressões algébricas tem significado

a) $-x^2 - \sqrt{3}x - \frac{2}{3}$

b) $\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+3}$

c) $\frac{3x}{x^2 - 4x + 4}$

d) $\sqrt{5x-20}$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 4

Polinómio de uma variável

Introdução

Error! Reference source not found.

Nas classes anteriores, certamente que estudou polinómios com mais de uma variável. Neste caso, vai estudar especificamente polinómios de uma variável real, o seu grau e identidades dos polinómios.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Definir o polinómio de uma variável.
- Adicionar polinómios.

Polnómio de uma variável

HUMMMM... Já não se lembra o que são termos...

- a) No monómio $7xy^3z^2$ o seu grau em relação a y é 3
- b) Os monómios semelhantes são:

$$5 \text{ e } -5; \quad xy^2 \text{ e } -xy^2; \quad 2x^3 \text{ e } -\frac{4}{3}x^3$$



Polinómio de uma variável

Definição: chama-se polinómio de uma variável à expressão algébrica da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ onde}$$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são constantes e definidas como coeficientes e n é definido como o grau do polinómio.

As expressões $a_n x^n$; $a_{n-1} x^{n-1}$; $a_2 x^2$; $a_1 x$ e a_0 dá-se o nome de termos do polinómio e aos números $a_0, a_1, \dots, a_n$, chamam-se coeficientes.

Ao termo a_0 , dá-se o nome de termo independente e aos termos de forma $a_i x^{n-i}$ dá-se o nome de termos x^{n-i} ou termo da ordem $(n-i)$.

n é um elemento do conjunto de números naturais ($\mathbb{N}_0$)

Exemplo 1: $P(x) = -3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + \frac{1}{2}x + \sqrt{3}$

Este polinómio tem cinco termos e o seu termo independente é $\sqrt{3}$. Os coeficientes do polinómio são: -3; -5; 4; $\frac{1}{2}$; e $\sqrt{3}$.

Exemplo 2:

Ora vamos analisar a expressão $\frac{3}{4}x^3 - 0x^2 + 0x + 1$ é um polinómio que pode escrever-se abreviadamente $\frac{3}{4}x^3 + 1$.

Os coeficientes são $\frac{3}{4}; 0; 0; 1$

Exemplos: Se todos os coeficientes são nulos, com excepção do termo independente, o polinómio reduz-se a uma constante.

Assim, o número 5, pode escrever-se com a forma do polinómio $0x^2 + 0x + 5$ ou $0x + 5$.

Se um polinómio tem todos os coeficientes iguais a zero, diz um polinómio nulo ou identicamente nulo.

Assim: $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ é um polinómio nulo.

UFF... Vamos fazer uma pequena pausa para digerir os conhecimentos adquiridos. Ok.

Depois desse descanso, recorde-se que falamos no início desta lição de grau de um polinómio. Certo?

Ok. Se um polinómio não se reduz a uma constante, o grau do polinómio é o maior dos graus dos seus termos não nulos.

Exemplos:

$$3x^3 + 2x - 2 \quad \text{grau } 3$$

$$-4x^2 + x \quad \text{grau } 2$$

$$-\frac{7}{3}x^5 \quad \text{grau } 5$$

Se o polinómio se reduz a uma constante diferente de zero, o grau do polinómio é zero.

Se o polinómio se reduz a uma constante zero e portanto é identicamente nulo, o grau do polinómio é indeterminado.

Consideremos o polinómio

$$3x^2 + 5 + 2x^3 - x$$

Os termos que o formam são:



$$3x^2 \quad \text{grau } 2$$

$$5 \quad \text{grau } 0$$

$$2x^3 \quad \text{grau } 3$$

$$-x \quad \text{grau } 1$$

Vamos escrever o mesmo polinómio na seguinte forma;

$$5 - x + 3x^2 + 2x^3$$

Como pode-se ver a ordem dos graus dos termos é sempre crescente, por isso diz-se ordenado segundo as potências crescentes de x ;

Ou

$2x^3 + 3x^2 - x + 5$ E diz-se neste caso que está ordenado segundo as potências crescentes de x .

O polinómio considerado é de grau 3. Como todos os termos de grau inferior ao terceiro não são nulos, o polinómio diz-se completo. Este polinómio tem quatro termos não nulos.

De um modo geral, um polinómio completo de grau k , tem $k+1$ termos não nulos.

Exemplo 1:

O polinómio $-x^5 - 6x^2 + 7$ está ordenado Segundo as potencias decrescentes de x e é um polinómio incompleto. Sem os termos x^4 ; x^3 e x .

Para ser completo, uma vez que é do 5^0 grau, devia ter seis termos não nulos e tem apenas 3.

Exemplo 2:

O polinómio $7x - 5x^2$ também é incompleto pois é nulo o termo independente; está ordenado segundo as potências crescentes de x .

Recorde-se que o grau do polinómio é o maior grau dos termos envolvidos nesse polinómio, portanto

Chamam-se **polinómios de grau n , numa variável x** , uma

Expressão do tipo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + 0$

Onde $a_0, a_1, \dots, a_n$, são números reais e $a_0 \neq 0$.

n - é um elemento do conjunto de números naturais ($\mathbb{N}_0$.)

Os polinómios como vimos na classificação são expressões algébricas inteiras, e como tal, o seu domínio é $\mathbb{R}$.

Polinómios Idênticos; Polinómios equivalentes

Dois polinómios são idênticos se e só se são iguais, os coeficientes dos seus termos do mesmo grau.

Dois polinómios são equivalentes se e só se, para toda a concretização da variável, dão origem a designação equivalente.

Assim, como viu nas classes anteriores, o grau do polinómio é definido pelo maior grau dos termos do polinómio. É por essa razão que o polinómio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + 0$$

É um polinómio de grau n , se $a_0 \neq 0$.

Operações com polinómios “Adição e subtracção”

A soma algébrica de dois ou mais monómios chama-se de polinómios nesta lição falaremos de polinómios onde iremos fazer a classificação de polinómios e a operar com polinómios e numa fase inicial iremos falar da adição e subtracção de polinómios



Adição

Ora bem, para realizar a adição de dois ou mais polinómios é necessário identificar os termos semelhantes dos polinómios.

E o que são termos semelhantes?

Monómios semelhantes são os que tem a mesma parte literal. São semelhantes por exemplo $3x^2$ e $-\frac{2}{3}x^2$. A parte literal é x^2

Não são semelhantes por exemplo $3x$ e $4x^2$ pois as suas partes literais são x e x^2 .

Agora consideremos dois polinómios $A(x)$ e $B(x)$

$$A(x) = x + x^3 + 3x^2$$

$$B(x) = x^4 + 2x^2 - 1 + x$$

Para calcular a soma $A(x) + B(x)$, ordenam-se os polinómios da mesma forma e dispõe-se os seus termos de modo que fiquem em coluna, os termos semelhantes.

Assim,

$$\begin{array}{r} A(x) = x^3 + 3x^2 + x \\ B(x) = x^4 + 0x^3 + 2x^2 + x - 1 \\ \hline A(x) + B(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

Como vê, a soma de dois polinómios é um polinómio.

Bom, para facilitar por vezes simplifica-se o algoritmo da adição. Escrevendo apenas os coeficientes dos dois polinómios.

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$A(x)$	0	1	3	1	0
$B(x)$	1	0	2	1	-1
$A(x)+B(x)$	1	1	5	2	-1

Resposta: $A(x)+B(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x - 1$

O que significa que 0 x é o elemento neutro da adição de polinómios.

NB: o grau da soma de dois polinómios é igual ou menor que o grau de cada um dos polinómios parcela.

Subtracção

Chama-se diferença de dois polinómios A e B, e representa-se por A-B, ao polinómio que se obtêm somando a A, o simétrico de B.

$$A-B = A+(-B)$$

Exemplo:

Sendo $A(x) = 3x^2 - x + 1$ e $B(x) = x^3 - 3x + 4$

tem-se: $-B(x) = -x^3 + 3x - 4$

e $A(x)-B(x) = 3x^2 - x + 1 + (-x^3 + 3x - 4) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 3$

Ou usando o algoritmo anterior, temos:

	x^3	x^2	x^1	x^0
$A(x)$	0	3	-1	1
$B(x)$	1	0	-3	4
$A(x)-B(x)$	-1	3	2	-3

Portanto: $A(x)-B(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 3$



Propriedades da adição dos polinómios

Simétrico de um dado polinómio é o polinómio cujos coeficientes são simétricos dos coeficientes dos termos do mesmo grau do polinómio dado.

Assim, o simétrico de $A(x) = x^3 + 5x^2 + 5/2x + 7$ é o polinómio

$$B(x) = -x^3 - 5x^2 - 5/2x - 7 \text{ e } A(x) + B(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

De um modo geral, tem-se que em IR

- Todo o polinómio tem simétrico
- A soma de dois polinómios simétricos é o polinómio identicamente nulo.

Além destas, enunciaremos mais algumas propriedades da adição de polinómios. Assim sendo, A, B e C, são três quaisquer polinómios, em IR e tem-se que:

- $A+B = B+A$
- $(A+B) + C = A + (B+C)$

Representando por $0x$, o polinómio identicamente nulo $A+0x = 0x+A=A$, o que significa que $0x$ é o elemento neutro da adição de polinómios.

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Ao termo a_0 , dá-se o nome de termo independente e aos termos de forma $a_1 \cdot x^{n-1}$ dá-se o nome de termos x^{n-i} ou termo da ordem $(n-i)$.
- Se um polinómio não se reduz a uma constante, o grau do polinómio é o maior dos graus dos seus termos não nulos.
- Se o polinómio se reduz a uma constante diferente de zero, o grau do polinómio é zero.
- Se o polinómio se reduz a uma constante zero e portanto é identicamente nulo, o grau do polinómio é indeterminado.
- Se um polinómio tem todos os coeficientes iguais a zero, diz um polinómio nulo ou identicamente nulo
- A adição subtração de polinómios consiste em reduzir os polinómios semelhantes e em seguida aplicar as regras de sinais;
- Sempre que temos operações com parêntesis devemos em primeiro lugar eliminar os parentesis fazendo o jogo de sinais

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.



Actividades



Actividades

1. Prove que:

$$x^5 - 7x^2 - 3 \text{ e } ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \text{ serão idênticos se}$$

$$a=1; b=0; c=0; d=-7; e=0; f=-3.$$

2. Considere:

$$7x^2; 8x+1; 9xy; 3x^2y; 3x^2+5x+1; 5x^4-2x-6; 2yx^2$$

a) Indique justificando das expressões dadas as que são monómios e as que são polinómios.

b) Indique o grau de cada polinómio

Resolução:

Expressão	Monómio	Polinómio	Grau do polinómio
$8x+1$			1
$9xy$			
$3x^2y$			
$3x^2+5x+1$			2
$5x^4-2x-6$			4
$3yx^2$			

$7x^2$			
--------	--	--	--

3. Escreva na forma de polinómio reduzido.

a) $5a^2 + 3a - 7a^2 + 2a - 1$

b) $5ab - 2ab^2 - 3a^2b - ab$

Resolução

$$\begin{aligned} \text{a) } 5a^2 + 3a - 7a^2 + 2a - 1 &= 5a^2 - 7a^2 + 3a + 2a - 1 \\ &= (5-7) a^2 + (3+2)a - 1 \\ &= -2a^2 + 5a - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5ab - 2ab^2 - 3a^2b - ab &= 5ab - ab - 2ab^2 - 3a^2b \\ &= (5-1) ab - 2ab^2 - 3a^2b \\ &= 4ab - 2ab^2 - 3a^2b \end{aligned}$$

4. Dados os polinómios:

$$A = 3x^3 + 5x + 1$$

$$B = x^2 + 3x$$

$$C = \frac{1}{2}x + 1$$

Calcula:

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $-A - C$

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{a) } A + B &= (3x^3 + 5x + 1) + (x^2 + 3x) \\ &= 3x^3 + 5x + 1 + x^2 + 3x \\ &= 3x^3 + x^2 + 5x + 3x + 1 \\ &= 3x^3 + x^2 + 8x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } A - B = (3x^3 + 5x + 1) - (x^2 + 3x)$$



Fazendo jogo de sinais teremos:

$$= 3x^3 + 5x + 1 - x^2 - 3x$$

$$= 3x^3 - x^2 + 5x - 3x + 1$$

$$= 3x^3 - x^2 + 2x + 1$$

$$- A - C = (3x^3 + 5x + 1) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$= 3x^3 + 5x + 1 - \frac{1}{2}x - 1$$

$$= 3x^3 + 5x - \frac{1}{2}x + \cancel{1} - \cancel{1}$$

$$= 3x^3 + \frac{10}{2}x - \frac{1}{2}x$$

$$= 3x^3 + \frac{9}{2}x$$

5. Sendo $M(x)=5x^4-3x+1$ e $N(x)=3x^4-2x^2+x^3-2x+3$, calcule usando o quadro dos coeficientes dos coeficientes :

a) $M(x) - N(x)$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$M(x)$	5	0	0	-3	1
$N(x)$	3	-2	1	-2	3
$A(x)-B(x)$	2	-1	2	-1	-2

Resposta :

$$M(x) - N(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 2$$

b) $N(x) - M(x)$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$N(x)$	3	-2	1	-2	3
$M(x)$	5	0	0	-3	1
$N(x)-M(x)$	-2	1	-2	1	2

Resposta:

$$N(x)-M(x)=-2x^4+x^3-2x^2+x+2$$

Avaliação



Avaliação

1. Dados os polinómios: $R(x) = 3x^2 - x + 3$; $S(x) = x^3 - 2x + 5$;

$$T(x) = 2x^2 - 2x + 5 - x$$

Calcule:

a) $R-(S+T)$

b) $R-S+T$

2. Escreva com a forma de polinómio, a soma dos pares de polinómios seguintes usando o quadro dos coeficientes:

a) $A(x) = 3x^2 - 2x^3 + x + 3$ $B(x) = 3x - x^4 - 4x^2$

b) $C(x) = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x^3$ $D(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$

c) $R(x) = x^4 - 1$ $K(x) = x^3 + 3x$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos

Lição 5

Operações com polinómios.

Multiplicação

Error! Reference source not found.

Introdução

Vamos continuar com o estudo dos polinómios, desta vez com a operação de multiplicação ou produto, muito simples mas é necessário muita concentração. Não pode esquecer as operações em $\mathbb{Z}$ senão vai ter muita dificuldade em obter o polinómio correcto para os exercícios que serão colocados

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Multiplicar polinómios

Operações com polinómios. Multiplicação

Consideramos dois polinómios.

Error! Reference source not found.

$$A(x) = 2x^5 \text{ e } B(x) = x^2 - 3x + 1$$

Está com dúvidas, porque $A(x)$ é um polinómio? Certamente que não, pois é também um polinómio em que os outros termos tem os coeficientes iguais a zero.

Então, para multiplicar os dois polinómios, usa-se a propriedade distributiva, isto é, cada termo do primeiro polinómio multiplica cada termo do segundo polinómio.

A propriedade distributiva em relação a adição, permite-nos escrever:

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= 2x^5 \cdot (x^2 - 3x + 1) = 2x^5 \cdot (x^2) + 2x^5 \cdot (-3x) + 2x^5 \cdot (1) = \\ &= 2x^7 - 6x^6 + 2x^5 \end{aligned}$$

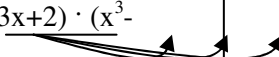
Observa agora que o grau do polinómio $[A(x) \cdot B(x)]$ = grau de

$A(x)$ + grau de $B(x)$ Ou seja $\text{gr}[A(x) \cdot B(x)] = \text{gr}[A(x)] + \text{gr}[B(x)]$

Sejam agora os polinómios

$$C(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ e } D(x) = x^3 - 3x + 1$$

$C(x) \cdot D(x)$ tem-se sucessivamente

$$C(x) \cdot D(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^3 -$$


$$= (x^2 - 3x + 2) \cdot x^3 + (x^2 - 3x + 2) \cdot (-3x) + (x^2 - 3x + 2) \cdot 1$$

$$= x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^3 + 9x^2 - 6x + x^2 - 3x + 2$$

$$= x^5 - 3x^4 - x^3 + 10x^2 - 9x + 2$$

O produto $C(x) \cdot D(x)$ é o polinómio que se obtém multiplicando $C(x)$ por cada termo de $D(x)$ e adicionando os polinómios obtidos.

O grau do produto (5) é igual a soma dos graus dos factores (2+3).

Para se efectuar a multiplicação de dois polinómios pode utilizar-se um algoritmo semelhante ao da multiplicação de números.



$$\begin{array}{r}
 x^3 + 0x^2 - 3x + 1 \text{ (grau 3)} \\
 x^2 - 3x + 2 \text{ (grau 2)} \\
 \hline
 2x^3 - 6x^2 \\
 -3x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 3x \\
 x^5 - 3x^3 + x^2 \\
 \hline
 x^5 - 3x^4 - x^3 + 10x^2 - 9x + 2 \text{ (grau 5)}
 \end{array}$$

- 1) Consideramos o polinómio de baixo da direita para esquerda cada termo deve multiplicar por todos os termos do polinómio de cima organizando os termos de forma vertical conforme as potências de x
- 2) Efectuar a adição vertical dos termos semelhantes

Mais um exemplo: Sendo $A(x) = x - 3x^2 + 1$, calcular $A^2(x)$

Resolução:

Como $A^2(x) = A(x) \cdot A(x)$, vem previamente o polinómio: $A(x) = -3x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r}
 -3x^2 + x + 1 \text{ (grau 2)} \\
 -3x^2 + x + 1 \text{ (grau 2)} \\
 \hline
 -3x^2 + x + 1 \\
 -3x^3 + x^2 + x \\
 9x^4 - 3x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 2x + 1 \text{ (grau 4)}
 \end{array}$$

Resposta: $A^2(x) = 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 2x + 1$

Propriedades da Multiplicação de polinómios

Sendo A , B e C , três polinómios definidos em $\mathbb{R}$, e $P(x)$ o polinómio que se reduz a constante ($\dots 0x^2+0x+1$), tem-se que:

$$A \cdot B = B \cdot A \text{ (propriedade comutativa)}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ (propriedade associativa)}$$

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A \text{ (1 é elemento neutro)}$$

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0 \text{ (0 é elemento absorvente)}$$

Nota: o grau do polinómio produto é igual a soma dos graus dos polinómios factores excepto se pelo menos um dos factores é identicamente nulo; neste caso, como o produto é identicamente nulo, o grau é indeterminado.

Agora, que já viu como se procede? Bastante simples. Você está em condições de multiplicar vários tipos de polinómios mas, antes de tudo, vamos resumir o que acabamos de ler.



Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- O produto $C(x) \cdot D(x)$ é o polinómio que se obtém multiplicando $C(x)$ por cada termo de $D(x)$ e adicionando os polinómios obtidos.
- o grau do polinómio $[A(x) \cdot B(x)] = \text{grau de } A(x) + \text{grau de } B(x)$
Ou seja $\text{gr}[A(x) \cdot B(x)] = \text{gr}[A(x)] + \text{gr}[B(x)]$
- **Propriedades da Multiplicação de polinómios**
- Sendo A , B e C , três polinómios definidos em $\mathbb{R}$, e $P(x)$ o polinómio que se reduz a constante $(\dots 0x^2 + 0x + 1)$, tem-se que:

$$A \cdot B = B \cdot A \text{ (propriedade comutativa)}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ (propriedade associativa)}$$

$$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A \text{ (1 é elemento neutro)}$$

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0 \text{ (0 é elemento absorvente)}$$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades



Actividades

1. Efectue as multiplicações apresentando o resultado na forma de polinómio reduzido

a) $(x-2)(x-3)$ b) $(x+5)(x-4)$ c) $2x^2 \cdot (3a^2 - 4ax + 9x^3)$

b) $(2x + 3) \cdot (x-7x)$

Resolução

a) $(x-2)(x-3) = x^2 + [(-2) + (-3)]x + (-2) \cdot (-3) = x^2 - 5x + 6$

Ou seja

$$\begin{array}{r} x \quad -2 \\ x \quad -3 \\ \hline -3x \quad 6 \\ x^2 \quad -2x \\ \hline x^2 \quad -5x \quad 6 \end{array}$$

a) $(x+5)(x-4) = x^2 + [5 + (-4)]x + 5 \cdot (-4) = x^2 + x - 20$

Ou seja

$$\begin{array}{r} x \quad 5 \\ x \quad -4 \\ \hline -4x \quad -20 \\ x^2 \quad 5x \\ \hline x^2 \quad x \quad -20 \end{array}$$

c) $2x^2 \cdot (3a^2 - 4ax + 9x^3) = 2x^2 \cdot 3a^2 - 2x^2 \cdot 4ax + 2x^2 \cdot 9x^3$
 $= 6x^2a^2 - 8ax^3 + 18x^5$

$$\begin{array}{r} 3a^2 \quad -4ax \quad 9x^3 \\ \quad \quad \quad 2x^2 \\ \hline 6a^2x^2 \quad -8ax^3 \quad 18x^5 \end{array}$$

d) $(2x + 3) \cdot (x-7y) = 2x \cdot (x-7y) + 3(x-7y)$



$$= 2x \cdot x - 2x \cdot 7y + 3x \cdot 3 - 3 \cdot 7y = 2x^2 - 14xy + 3x - 21y$$

Ou seja

$$\begin{array}{r} 2x \quad 3 \\ x \quad -7y \\ \hline -14xy \quad -21y \\ 2x^2 \quad 3x \\ \hline 2x^2 \quad 3x \quad -14xy \quad -21y \end{array}$$

2. Sendo a, b e r os parâmetros reais, calcule o seu valor de modo que

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2) \cdot (ax + b) + r$$

Efectuamos o produto como já vimos anteriormente

$$(x - 2) \cdot (ax + b) = ax^2 - 2ax + bx - 2b = ax^2 + (b - 2a)x - 2b$$

$$\text{teremos : } x^2 - 3x + 2 = ax^2 + (b - 2a)x - 2b$$

Os polinómios são equivalentes, se e só se, são idênticos, então:

$$a = 1; -2a = -3; -2b + r = 2; a = 1; b = -1; r = 0$$

Avaliação



Avaliação

Efectue a multiplicação dos polinômios escolhendo o algoritmo conveniente para si em cada uma das seguintes alíneas

- a) $(x^2+2-4x) \cdot (3x-2)$
- b) $(x-3) \cdot (x+2) \cdot (2x+2)^2$
- c) $[4x^2-3x \cdot (2/3x+1)] \cdot (4x-1)$
- d) $(2x+1) \cdot (x-1) - (x+4) \cdot (x-2)$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 6

Produtos notáveis

Introdução

Error! Reference source not found.

Há casos especiais que nos conduzem a aplicação directa das fórmulas porque já foi mostrado por cientistas que segundo o algoritmo da multiplicação chega – se sempre a conclusões lógicas e válidas. Vamos nesta lição fazer uma recapitulação dos casos que você já estudou nas classes anteriores e acrescentar mais alguns casos notáveis que irão facilitar a multiplicação de certos binómios.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Aplicar os casos notáveis na multiplicação de binómios.

Casos notáveis

Na lição passada estudamos o algoritmo para a multiplicação de polinómios por isso, você mesmo pode verificar as seguintes identidades aplicando o mesmo algoritmo. Importa agora aplicar estas identidades nos cálculos com polinómios para chegar a solução sem fazer muito esforço mental.

Quadrado de uma soma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Exemplo: } \left(2x + \frac{1}{3}\right)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 4x^2 + \frac{4x}{3} + \frac{1}{9}$$

Fácil, mas não se esquece das regras de multiplicação e divisão com frações para não correr o risco de aplicar a fórmula e ter o resultado errado porque passou por cima destas regras

Quadrado de uma diferença

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Exemplo: } (\sqrt{3}x - y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3}x) \cdot y + y^2 = 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2$$

Formidável, mas não se esquece das regras de multiplicação e divisão com radicais para não correr o risco de aplicar a fórmula e ter o resultado errado porque passou por cima destas regras

Diferença de quadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\text{Exemplo: } \left(m^2 + \frac{3}{2}n\right)\left(m^2 - \frac{3}{2}n\right) = \left(m^2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}n\right)^2 = m^4 - \frac{9}{4}n^2$$

Facílimo, aplicamos a regra de potência de uma potência portanto, multiplicando os expoentes no primeiro termo obtém m^4 e achamos o quadrado segundo termo.

O procedimento será o mesmo para expoente 3

Cubo de uma soma

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



Exemplo:

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{3}{2}y\right)^3 &= \left(x^2\right)^3 + 3\left(x^2\right)^2 \frac{3}{2}y + 3\left(x^2\right)\left(\frac{3}{2}y\right)^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^3 = \\ &= x^6 + \frac{9}{2}x^4y + 3x^2 \frac{9}{4}y^2 + \frac{27}{8}y^3 \\ &= x^6 + \frac{9}{2}x^4y + \frac{27}{4}x^2y^2 + \frac{27}{8}y^3\end{aligned}$$

Complicado? Não! A potenciação é muito importante para multiplicar os binómios. Se esqueceu-se de alguma coisa, faça uma revisão das regras de potenciação.

Cubo de uma diferença

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{aligned}\left(x - \sqrt{2}\right)^3 &= \left(x\right)^3 - 3x^2\sqrt{2} + 3x\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3 = \\ &= x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Note que: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ e $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Para o exemplo temos que respeitar as regras de radiciação

Diferença de cubos

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^3\right) = a^3 - b^3$$

$$\left(m^2 - \frac{3}{2}n\right)\left(\left(m^2\right)^2 + m^2 \cdot \frac{3}{2}n + \left(\frac{3}{2}n\right)^2\right) = \left(m^2\right)^3 - \left(\frac{3}{2}n\right)^3 = m^6 - \frac{27}{8}n^3$$

Estas identidades vão lhe ajudar bastante na simplificação de expressões algébricas bem como na resolução de equações polinomiais

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

1. Quadrado de uma soma

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Quadrado de uma diferença

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Diferença de quadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

4. Cubo de uma soma

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

5. Cubo de uma diferença

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

6. Diferença de cubos

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.



Actividades



Actividades

Vamos resolver exercícios que vão lhe permitir a identificação de casos notáveis enquanto estiver a efectuar multiplicação de polinómios.

1. Dados os polinómios:

$$A = x - 2y^2 ; B = x - \frac{2}{5}y ; C = \sqrt{3}y + 2 ; D = x + 2y^2$$

Calcule:

a) A^3 b) C^2 c) $B^2 + A^2$ d) $A \cdot D$ e) $\frac{D^2}{A}$

Resolução

a) A^3

$$\begin{aligned} A^3 &= (x - 2y^2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2y^2 + 3x(2y^2)^2 - (2y^2)^3 = \\ &= x^3 - 6x^2y^2 + 12xy^4 - 8y^6 \end{aligned}$$

b) C^2

$$C^2 = (\sqrt{3}y + 2)^2 = (\sqrt{3}y)^2 + 2\sqrt{3}y \cdot 2 + 4 = 3y^2 + 4\sqrt{3}y + 4$$

c) $B^2 + A^2$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (x - 2y^2)^2 + \left(x - \frac{2}{5}y\right)^2 = \\ &= (x^2 - 4xy^2 + 4y^4) + \left(x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{25}y^2\right) \\ &= x^2 - 4xy^2 + 4y^4 + x^2 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{25}y^2 \\ &= 2x^2 - 4xy^2 + 4y^4 - \frac{4}{5}xy + \frac{4}{25}y^2 \end{aligned}$$

Ótimo, você para além de desenvolver os casos notáveis reduziu os termos semelhantes de x^2 .

d) A.D

$$A.D = (x - 2y^2)(x + 2y^2) = x^2 - 4y^4$$

Você descobriu logo que os termos eram iguais apenas diferem no sinal que os separa por isso aplica a diferença dos quadrados

2. Aplicando os produtos notáveis, desenvolva:

$$a) (3x + y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$$

$$b) \left(\frac{1}{2} - x^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + (x^2)^2 = \frac{1}{4} - x^2 + x^4$$

$$c) \left(\frac{2x}{3} + 4y^3\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2x}{3} \cdot 4y^3 + (4y^3)^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{3}xy^3 + 16y^6$$

$$d) \left(3xy^2 + \frac{5b^3}{2}\right) \left(3xy^2 - \frac{5b^3}{2}\right) = (3xy^2)^2 - \left(\frac{5b^3}{2}\right)^2 = 9x^2y^4 - \frac{25b^6}{4}$$

$$e) \left(\frac{x}{5} - \sqrt{5}z^2\right) \left(\frac{x^2}{25} + \frac{x}{5} \cdot \sqrt{5}z^2 + 5z^4\right) = \left(\frac{x}{5}\right)^3 - (\sqrt{5}z^2)^3 = \frac{x^3}{125} - 5\sqrt{5}z^6$$



Avaliação



Avaliação

1. Dados os polinômios :

$$A = x - 2 ; B = 2x - 4 ; C = 2y^2 + x ; D = \frac{2}{3}x + 2y^2$$

Calcule: a) A^3 b) C^2 c) $B^2 + A^2$ d) $\frac{2B}{A^2}$ e) D^3

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 7

Divisão inteira de polinômios

Error! Reference source not found.

Introdução

Continuamos ainda com as operações dos polinômios, a última operação é a divisão de polinômios. Existem regras que facilitam os cálculos para esta operação. Iremos ver um delas nesta lição, Força.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Efectuar a divisão de polinómios

Divisão inteira de polinómios

Error! Reference source not found

Bom, vamos começar esta lição recordando a divisão inteira em $\mathbb{N}$.
Dividir o inteiro D pelo inteiro d (este diferente de zero) é achar dois números, q e r , tais que:

$$D = d \cdot q + r \text{ e } r < d.$$

Aos números D e d , chama-se termos da divisão, D é o dividendo e d é o divisor.

Aos números q e r , chamam-se respectivamente quociente e resto.

Com polinómios, o processo será de forma análoga.

Assim:

Dividir o polinómio $F(x)$, pelo polinómio $G(x)$ não identicamente nulo é achar dois polinómios $Q(x)$ e $R(x)$, tais que:

$$F(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{Grau de } R(x) < \text{grau de } G(x)$$

$$\text{Ou } R(x) = 0$$

Como acontece com a divisão inteira em $\mathbb{N}_0$, os polinómios $F(x)$ e $G(x)$, chamam-se respectivamente dividendo e divisor; $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ é o resto.

Se o resto se reduz a uma constante 0, diz-se que $F(x)$ é divisível por B ou que a divisão inteira de $F(x)$ por $G(x)$ é exacta.

Dividendo

Divisor

Resto

Quociente



Agora vamos ver como obtem-se o quociente e o resto

Método de divisão (análogo ao numérico)

Consideremos o exemplo:

Sejam $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ e $Q(x) = x^2 - x + 1$ dois polinômios de grau n e p .

Primeiro passo: deve-se escolher o primeiro termo do quociente, que deve ser multiplicado pelos termos do divisor.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ \hline x^2 - x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \\ \hline \end{array} \quad , \quad x(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x$$

Segundo passo: é passar o inverso do resultado para subtrair do polinômio.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ -x^3 + x^2 - x \\ \hline 4x^2 - 5x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ \hline x \end{array}$$

Agora deve-se repetir o primeiro passo, escolher o termo conveniente para multiplicar pelo primeiro termo do divisor para que fique igual ao primeiro termo do polinômio que foi resultado da primeira operação.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ -x^3 + x^2 - x \\ \hline 4x^2 - 5x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ \hline x + 4 \end{array} \quad , \quad 4(x^2 - x + 1) = 4x^2 - 4x + 4$$

Repetir o mesmo processo do segundo passo.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \quad \Bigg| \quad x^2 - x + 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2 - x} \\
 4x^2 - 5x + 1 \\
 \underline{-4x^2 + 4x - 4} \\
 -x - 3
 \end{array}$$

Assim temos que $q(x) = x + 4$ e que $r(x) = -x - 3$.

Mais um exemplo:

$$P(x) = -6x^3 - 13x^2 + x + 3 \quad \text{por} \quad G(x) = 2x^2 - 3x - 1$$

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 13x^2 + x + 3 \quad \Bigg| \quad 2x^2 - 3x - 1 \\
 \underline{-6x^3 + 9x^2 + 3x} \\
 -4x^2 + 4x + 3 \\
 \underline{4x^2 - 6x - 2} \\
 -2x + 1
 \end{array}$$

Portanto, divide-se a parcela $6x^3$ do numerador pela primeira parcela do denominador $2x^2$ obtendo-se $3x$. Ao se multiplicar a parcela $3x$ por todos as parcelas do denominador $2x^2 - 3x - 1$ e invertendo-se o sinal de cada parcela obtém-se $-6x^3 + 9x^2 + 3x + 3$ que somado ao numerador resulta em $-4x^2 + 4x + 3$. Repetindo-se a mesma operação novamente obtém-se o resultado $3x - 2$ com o resto $-2x + 1$



Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Dividir um polinômio $f(x)$ (dividendo) por um $g(x)$ (divisor diferente de 0) consiste em dividir f por g e determinar novos polinômios $q(x)$ (quociente) e r (resto).

$$\begin{array}{r|l} f(x) & g(x) \\ r(x) & q(x) \end{array}$$

- Assim temos que $F(x) = G(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e que o grau de $Q(x)$ será sempre menor que $F(x)$.

Se $R(x) = 0$ dizemos que a divisão é exata, ou ainda que o polinômio $F(x)$ é divisível por $G(x)$.

- Uma dos algoritmos utilizados é o método análogo ao da divisão numérica:

Como regra geral a divisão de um polinômio $F(x)$ por um polinômio $G(x)$ segue o mesmo esquema da multiplicação, dividindo elemento por elemento do primeiro pelo segundo. Só que nesse caso o resto de cada divisão deve ser somado aos elementos do mesmo grau do numerador antes da próxima divisão do elemento seguinte.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades



Actividades

Exercício1

Efectuar a divisao inteira do polinómio $1+x^4-3x^2$ pelo polinomio x^2-x+1

Procedimentos

- 1º) Ordenamos os polinómios Segundo as potencias decrescentes de x, divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor: obtem-se o primeiro termo do quociente.

$$\begin{array}{r|l} x^4+0x^3-3x^2+0x+1 & x^2-x+1 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

- 2º) Multiplica-se o primeiro termo do quociente pelo divisor e subtrai-se este produto ao dividendo: obtem-se o primeiro resto parcial.

$$\begin{array}{r|l} x^4+0x^3-3x^2+0x+1 & x^2-x+1 \\ \hline -x^4+x^3-x^2 & x^2 \\ \hline 0+x^3-4x^2+0x+1 & \end{array}$$

Como o grau do resto parcial nao é inferior ao grau do divisor, repete-se o



1 e 2, fazendo o resto parcial, o papel de dividendo.

$$\begin{array}{r|l} x^4+0x^3-3x^2+0x+1 & x^2-x+1 \\ -x^4+x^3-x^2 & x^2+x-3 \\ \hline 0+x^3-4x^2+0x+1 & \\ -x^3+x^2-x & \\ \hline -3x^2-x+1 & \end{array}$$

Como o grau do resto é igual a 1 e portanto inferior ao grau do divisor que é 2, está terminada a divisão.

Quociente: x^2+x-3

Resto: $-4x+4$

Temos então:

$$x^4-3x^2+1 = (x^2-x+1)(x^2+x-3)+(-4x+4)$$

Exercício 2:

Determinar o quociente e o resto da divisão do polinômio $3x^2-2x+1$ pelo polinômio $4x^3+x-3$

Resolução:

Como o grau do dividendo é menor que o grau do divisor, o quociente é um polinômio identicamente nulo e o resto é o próprio dividendo.

$$3x^2-2x+1 = (4x^3+x-3) \cdot 0 + 3x^2-2x+1$$

Exercício 3:

Calcular o quociente e o resto da divisão do polinômio $x^5-29x+12$ pelo polinômio $1-2x-x^2$

Resolução:

Procedendo do mesmo modo vamos ter:

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 29x + 12 \\
 -x^5 - 2x^4 + x^3 \\
 \hline
 -2x^4 + x^3 + 0x^2 \\
 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 5x^3 - 2x^2 - 29x \\
 -5x^3 - 10x^2 + 5x \\
 \hline
 -12x^2 - 24x + 12 \\
 -12x^2 - 24x + 12 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -x^2 - 2x + 1 \\
 x^3 + 2x^2 - 5x + 12 \\
 \hline
 \end{array}$$

Quociente: $x^3 + 2x^2 - 5x + 12$

Resto: 0

Então: $x^5 - 29x + 12 = (-x^2 - 2x + 1)(x^3 + 2x^2 - 5x + 12)$

Como o resto é zero, o primeiro polinómio é divisível pelo Segundo.



Avaliação



Avaliação

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.

1. Escolha a opção verdadeira para a seguinte afirmação:

Dividindo-se $P(x) = 2x^5 - x^4 + x^2$ por $(2x+3)$, encontramos como quociente e resto, respectivamente:

- a) $Q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 12$ e $R = -18$
- b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ e $R = -9$
- c) $Q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 12$ e $R = -9$
- d) $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ e $R = -18$
- e) $Q(x) = x^4 - 4x^3$ e $R = 7$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!

Lição 8

Divisão de um polinómio por um binómio $(x - \alpha)$

Error! Reference source not found.

Introdução

Para começarmos este assunto, vamos recordar ou recorrer ao algoritmo da divisão de polinómios para obter uma regra que permite, de forma muito fácil, você acabar de efectuar a divisão de polinómios, para esta aula considerar apenas o divisor que é um binómio. Para tal existe uma regra que é deduzida a partir de procedimentos que acaba de aplicar na lição anterior.



Dois matemáticos (Paolo Ruffini e A. Briot) criaram um método prático para realizar esta divisão, método este que recebeu seus nomes: método ou regra de Briot-Ruffini.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- Aplicar a Regra de Ruffini na divisão de polinómios

Divisão de um polinómio por um binómio ($x - \alpha$)

Error! Reference source not found.

A regra de **Briot-Ruffini** da divisão de polinómios permite, de forma muito fácil, calcular o quociente e o resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por um binómio da forma $(x-a)$:

Nesse algoritmo são utilizados apenas os coeficientes do polinómio e o termo constante (a).

Chamemos de $p(x)$ o polinómio a ser dividido (dividendo); e $h(x)$ o divisor no qual $h(x) = x-a$. Com isso, a estrutura da regra é a seguinte:

Termo constante do divisor com sinal trocado = a	Coeficientes de x do dividendo $p(x)$	Termo constante do dividendo
	Coeficientes do quociente	
		Resto



Para melhor compreendermos como esta regra funciona, vamos considerar um exemplo.

Efetuem os a divisão de $p(x)$ por $h(x)$, na qual:

$$p(x) = x^2 + 4x + 3 \text{ e } h(x) = x + 1$$

-1	1	4	3
	1 (repita o primeiro coeficiente)		

Agora multiplicamos esse termo repetido pelo divisor, o resultado será somado ao próximo termo do dividendo $p(x)$.

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	
	1×(-1)=-1	3	

Repetimos o processo agora para o novo elemento, multiplicando esse número pelo divisor e somando-o ao próximo termo.

-1	1	4	3
	1	-1+4=3	-3+3=0
	1×(-1)=-1	3	0
		3×(-1)=-3	

Obtemos o resto 0 e um quociente da seguinte forma:

$$q(x) = 1x + 3$$

Para verificarmos se a divisão foi feita de forma correta, podemos utilizar o algoritmo da divisão que diz o seguinte:

$$p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Dessa forma, temos:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3) + 0 = x^2 + 3x + 1x + 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

Logo, a divisão foi feita corretamente, pois ao verificar os termos da divisão no algoritmo da divisão constatamos que a igualdade é *verdadeira*.

Ainda relacionado com a divisão de um polinómio por um binómio da forma x-a temos o teorema chamado teorema do resto para tornar os cálculos mais simples ainda

Teorema do resto

O teorema do resto define que a divisão de um polinómio $P(x)$ pelo binómio do tipo $ax+b$ tem como resto $R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Exemplo: considerando que o polinómio

$$5x^3 + 10x^2 + 17x + 35 \text{ Dividido por } x - 2 \text{ com } a = 1 \text{ e}$$

$b = -2$ então:

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right) = P\left(\frac{2}{1}\right) = P(2) = 5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 69$$



Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

1. Regra de Briot-Ruffini

Há um caso particular de divisão pelo denominador do tipo $x-a$ onde o algoritmo da divisão numérica pode ser utilizado. E se o resto da divisão for igual à zero a fator $+a$) será raiz do polinômio numerador.

Um outro método que pode ser utilizado nesse caso é a Regra de Briot-Ruffini, que utiliza somente os coeficientes do polinômio numerador.

2. Teorema do resto

O teorema do resto define que a divisão de um polinômio $P(x)$

pelo binômio do tipo $ax+b$ tem como resto $R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades



Actividades

1. Calcular o resto da divisão de $x^3 - 3x + 2$ por $x - 3$

Resolução:

$$a = 3$$

$$P(3) = R = 3^3 - 3 \cdot 3 + 2 = 27 - 9 + 2 = 20$$

2. Efectuar, utilizando a regra de Briot-Ruffini, a divisão do

Polinómio $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 12$ por $D(x) = (x - 1)$.

Resolução

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 & 12 \\ & 2 & 6 & -1 & -1 & 11 \end{array}$$

Assim, temos:

$$\text{Quociente: } Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1$$

$$\text{Resto: } R(x) = 11$$

3. Determine o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^5 - x^3 - 4x + 6$ por $(x + 2)$.

Resolução

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & -4 & 6 \\ & 2 & -4 & 7 & -14 & 24 & -42 \end{array}$$



Assim, temos:

$$\text{Quociente: } Q(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 14x + 24$$

$$\text{Resto: } R(x) = -42$$

$$4. P_1(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 1 \text{ por } x - 2$$

	5	0	-3	1	-1
2	5	10	17	35	69

Como o coeficiente de x^3 é zero deve-se colocá-lo na primeira linha, o resto é o fator (a) do binómio, no caso 2 multiplicado pelo último coeficiente (35) e somado ao último coeficiente do numerador (-1), ou seja: $R = 2 \cdot 35 - 1 = 69$

Agora resolva sozinho os exercícios que se seguem para medir o seu grau de compreensão da matéria

Avaliação



Avaliação

1. Effectue a divisão $p(x) = 2x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ por $x - 1$.

Resposta: o quociente da divisão é $2x^3 + 2x^2 + 0x^1 + 3$ e o resto é 4.

2. Qual é o resto da divisão de $P(x) = x^{40} - x - 1$ por $(x-1)$?

3. Se O polinómio $P(x) = x^4 - kx^3 + 5x^2 + 5x + 2k$ é divisível por $x - 1$.
Então, o valor de k é:

- a) -11 b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) 9

4. divida os polinómios aplicando o método de ruffini

- a) $(3x^4 - 2x^2 + 5x - 2)$ por $(x - 2)$
 b) $(-x^4 + 2x^3 - 3x + 2)$ por $(x + 1)$
 c) $(3x^3 - 2x^2 - x)$ por $(x + 2)$
 d) $(x^3 - 27)$ por $(x - 3)$

Agora compare as suas soluções com as que lhe apresentamos no final do módulo. Sucessos!



Lição 9

Decomposição em fracções racionais

Error! Reference source not found.

Introdução

Tal como aconteceu na lição anterior por vezes é necessário escrever uma fracção de outra forma, simplificada ou na forma de outras fracções. Este método consiste em separar uma fracção em duas ou mais. Deste modo podemos escrever qualquer fracção na forma da soma de fracções.

Ao concluir esta lição você será capaz de:



Objectivos

- *Decompor* uma fracção algébrica em racional.

Decomposição em fracções racionais

Considere a expressão:

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$$

Error! Reference source not found.

Neste caso diz-se que se decompõe em

Fracções racionais

Vamos a partir deste exemplo generalizar, para isso vamos elaborar uma tabela elucidativa:

Tipo de denominador	Exemplo	Decomposicao
1. Produto de factores lineares	$\frac{3x}{(x-1)(x+2)}$	$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$
2. Produto de um factor do 1º grau por um do 2º grau não factorizáveis	$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)}$	$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$
3. Produto de um factor do 1º grau por um factor repetido	$\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)^2}$	$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

Associando ao metodo dos coeficientes indeterminados

Vamos determinar os coeficientes A e B da fracção

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)} =$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} &= \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} = \\ &= \frac{(A+B)x+2A-B}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A=3 \\ A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$



$$\text{Então } \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$$

Resumo da lição



Resumo

Nesta lição você aprendeu que:

- Decompor uma fracção racional significa transformá-la em duas ou mais fracções
- Deve ter em conta os procedimentos para a factorização de polinómios

Agora vamos realizar conjuntamente as actividades que se seguem para que possa aprender como usar o conhecimento que acaba de adquirir.

Actividades



Actividades

Simplifique

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)} =$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{A(x^2+3) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{Ax^2 + 3A + Bx^2 + Bx + Cx + C}{(x+1)(x^2+3)}$$

Assim teremos :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=3 \\ 3A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=3-B \\ -3B+3-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{5}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Deste modo teremos a fracção escrita desta forma:

$$\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{x^2+3}$$

Agora resolva no seu caderno as actividades que lhe propomos para que possa avaliar o seu progresso.



Avaliação



Avaliação

Decomponha em fraccoes racionais :

a) $\frac{x+2}{x^2-5x+6}$

b) $\frac{4x^2+x+1}{x^3+x^2+x}$

c) $\frac{x^2+1}{x^3-2x+x}$

Soluções Módulo 1

Soluções do Módulo 1

Conseguiu resolver correctamente todos os exercícios? Então, confira as suas respostas.

Lição 1

1. Define os seguintes conjuntos por extensão:

a) $\{x: x \text{ é um número natural menor que } 7\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) $\{x: x \text{ é um mês com feriados em Moçambique}\}$

$$B = \{\text{Janeiro; Fevereiro; Abril; Maio; Junho; Setembro; Outubro; Dezembro}\}$$

c) $\{x: x \text{ é o dia da independência de Moçambique}\}$



$$C = \{\text{Junho}\}$$

2. Seja dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
- a) $1 \in A$ V b) 1,2,3 pertencem a A V
c) $\{1, 2, 3\} \in A$ V d) 1,5 não pertencem a A F
e) $\{4, 5\} \notin A$ F
3. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ quais das seguintes afirmações são verdadeiras?
- a) $1 \subset A$ V b) 1,2,3 pertencem a A e a B V
c) $A \in B$ V e) $A \subset B$ V f) $B \supset A$ V
4. Represente os conjuntos na forma explícita:
- a) $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$
b) $B = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$
c) $C = \{2, 5, 8\}$

Lição 2

1. Seja dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Qual das seguintes afirmações é falsa:
- a) $1 \in A$ V b) 1,2 e 3 pertencem a A V
c) $\{1, 2, 3\} \in A$ V d) 1,5 não pertencem a A F
e) $\{4, 5\} \notin A$ F
2. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Determine:

- a) $A \cup B = B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$
- b) $A \cap B = A = \{1, 2, 3\}$
- c) $A \setminus (B \setminus C) = \{1, 2, 3\} \setminus \{8\} = \emptyset$
- d) $A \cap B \cup C = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3\}$
- e) $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- f) $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3\}$
3. Dados: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$ Determine:
- a) $A - B = \{0\}$
- b) $A - C = \{0, 1\}$
- c) $(A \cap B) - C = \{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4, 5\} = \{1\}$
- d) $A - \emptyset = A = \{0, 1, 2, 3\}$
4. Considere os intervalos $[-1, 4]$ e $[1, 5]$ e determine:
- a) $[-1, 4] \cap [1, 5] = [1, 4]$

Lição 3

1. Valor numérico das expressões

$$a) 2x^3 + 3x - 5 = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) - 5 = 2\left(-\frac{1}{27}\right) - 1 - 5 = -\frac{164}{27}$$

$$\text{Para } x = -\frac{1}{3})$$



$$b) x \left(x - \frac{1}{2} \right) + \left(x - \frac{1}{2x} \right) = 2 \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \left(2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \right) = 2 \left(\frac{3}{2} \right) + \frac{7}{4} = \frac{19}{4}$$

Para $(x=2)$

c)

$$\frac{6-x^2-xy-y^2}{-x^3-x^2-4y-xy} = \frac{6-1^2-(1 \cdot (-1))-(-1)^2}{-(1)^3-(1)^2-4(-1)-(1 \cdot (-1))} =$$

$$= \frac{6-1-1+4}{-1-1+4+1} = \frac{5}{3} \quad \text{para } (x=1 \quad y=-1)$$

$$d) \sqrt{x^3+1} = \sqrt{(-1)^3+1} = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0 \quad \text{para } (x=-1)$$

1. Domínio de existência

$$a) \quad 2-x^2-\sqrt{3}x-\frac{2}{3}; \quad D=\square$$

b)

$$\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+3}$$

$$D: \begin{cases} 3x \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D = \square \setminus \{-3; 0\}$$

c)

$$\frac{3x}{x^2-4x+4};$$

$$D: x^2-4x+4 \neq 0; \quad D = \square \setminus \{2\}$$

d)

$$\sqrt{5x-20}$$

$$D: 5x-20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D = [4; +\infty[$$

Lição 4

1. Dados os polinómios: $R(x)=3x-x^2+3$; $S(x)=x^3-2x+5$;

$$T(x)=2x^2-2x^3+5-x$$

Calcule:

- a) $R - (S+T)$

$$\begin{aligned} & (3X-X^2+3) - \left[(X^3-2X+5) + (2X^2-2X^3+5-X) \right] = \\ & = (3X-X^2+3) - (X^3-2X+5+2X^2-2X^3+5-X) = \\ & = 3X-X^2+3 - X^3+2X-5-2X^2+2X^3-5+X = \\ & = X^3 - 3X^2 + 6X - 7 \end{aligned}$$

- b) $R-S+T$

$$\begin{aligned} & (3X-X^2+3) - \left[(X^3-2X+5) + (2X^2-2X^3+5-X) \right] = \\ & = (3X-X^2+3) - (X^3-2X+5) + (2X^2-2X^3+5-X) = \\ & = 3X-X^2+3 - X^3+2X-5+2X^2-2X^3+5-X = \\ & = -3X^3 + X^2 + 4X + 3 \end{aligned}$$

2. Escreva com a forma de polinómio, a soma dos pares de polinómios seguintes:

a) $A(x) = 3x^2-2x^3+x+3$ $B(x) = 3x-x^4-4x^2$



	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$A(x)$	0	-2	3	1	3
$B(x)$	-1	0	-4	3	0
$A(x)+B(x)$	-1	-2	-1	4	3

Resposta: $P(x) = -x^4 - x^3 - x^2 + 4x + 3$

b) $C(x) = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x^3$ $D(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$

	x^3	x^2	x^1	x^0
$C(x)$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
$D(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	0
$C(x)+D(x)$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$

Resposta: $P(x) = \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$

$R(x) = x^4 - 1$ $K(x) = x^3 + 3x$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
$R(x)$	1	0	0	0	-1
$K(x)$	0	1	0	3	1
$R(x)+K(x)$	1	1	0	3	0

Resposta: $p(x) = x^4 + x^3 + 3x$

Lição 5

a) $(x^2+2-4x) \cdot (3x-2)$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad -4x \quad 2 \\
 \quad \quad 3x \quad -2 \\
 \hline
 -2x^2 \quad +8x \quad -4 \\
 3x^3 \quad -12x^2 \quad 6x \\
 \hline
 3x^3 \quad -14x^2 \quad 14x \quad -4
 \end{array}$$

Resposta:

$$P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 14x - 4$$

b) $(x-3) \cdot (x+2) \cdot (2x+2)^2$

$$(x-3)(x+2)(2x+2)^2 = (2x^2+2x-3x-6)(4x^2+8x+4) =$$

$$= 8x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 8x^3 + 16x^2 + 8x - 12x^3 - 24x^2 - 12x - 24x^2 - 48x - 24 =$$

$$= 8x^4 + 12x^3 - 24x^2 - 52x - 24$$

c) $[4x^2 - 3x \cdot (\frac{2}{3}x + 1)] \cdot (4x - 1)$



$$\begin{aligned} & \left[4x^2 - 3x \left(\frac{2}{3}x + 1 \right) \right] (4x - 1) = \left(4x^2 - 2x - 3x \right) (4x - 1) = \\ & = 16x^3 - 4x^2 - 8x^2 + 2x - 12x^2 + 3x = \\ & = 16x^3 - 24x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & (2x+1) \cdot (x-1) - (x+4) \cdot (x-2) \\ & \left(2x^2 - 2x + x - 1 \right) - \left(x^2 - 2x + 4x - 8 \right) = \\ & = 2x^2 - \cancel{2x} + x - 1 - x^2 + \cancel{2x} - 4x + 8 = \\ & = x^2 - 3x + 7 \end{aligned}$$

Lição 6

Dados: a) A^3 b) C^2 c) $B^2 + A^2$ d) $\frac{2B}{A^2}$ e) D^3

$$\text{a) } A^3 = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\text{b) } C^2 = (2y^2 + x)^2 = 4y^4 + 4xy^2 + x^2$$

$$\begin{aligned} \text{c) } B^2 + A^2 &= (2x-4)^2 + (x-2)^2 = (4x^2 - 16x + 16) + (x^2 - 4x + 4) = \\ &= 4x^2 - 16x + 16 + x^2 - 4x + 4 \\ &= 5x^2 - 20x + 20 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{2 \cdot B}{A^2} = \frac{2(2x-4)}{(x-2)^2} = \frac{\cancel{4(x-2)}}{(x-2)\cancel{2}} = \frac{4}{x-2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } D^3 &= \left(\frac{2}{3}x + 2y^2 \right)^3 = \left(\frac{2}{3}x \right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3}x \right)^2 \cdot 2y^2 + 3 \frac{2}{3}x \left(2y^2 \right)^2 + \left(2y^2 \right)^3 = \\
 &= \frac{8}{27}x^3 + \frac{24}{9}x^2y^2 + \frac{24}{9}xy^4 + 8y^6
 \end{aligned}$$

Lição 7

Resolução:

$$\begin{array}{r}
 2x^5 - x^4 + x^2 \quad | \quad 2x+3 \\
 \underline{-2x^5 - 3x^4} \qquad \quad x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6 \\
 \qquad \quad / -4x^4 + x^2 \\
 \qquad \quad \underline{4x^4 + 6x^3} \\
 \qquad \quad / 6x^3 + x^2 \\
 \qquad \quad \underline{-6x^3 - 9x^2} \\
 \qquad \quad / -8x^2 \\
 \qquad \quad \underline{8x^2 - 12x} \\
 \qquad \quad / -12x \\
 \qquad \quad \underline{12x - 18} \\
 \qquad \quad / -18
 \end{array}$$

Resposta: alínea d)

2. O resto da divisão do polinómio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ pelo binómio $Q(x) = x^2 - 4$ é:
- a) $R(x) = 2x - 2$



- b) $R(x) = x + 2$
c) $R(x) = -2x + 4$
d) $R(x) = 4x - 4$
e) $R(x) = -x + 4$

Resolução:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 4 \quad | \quad x^2 - 4 \\ \underline{-x^3 + 4x + 4} \quad x - 2 \\ -2x^2 + 4x + 4 \\ \underline{2x^2 - 8} \\ 4x - 4 \end{array}$$

Resposta: d)

3. Para que o polinômio $6x^3 - 4x^2 + 2mx - (m + 1)$ seja divisível por $x - 3$, o valor da raiz quadrada do módulo de m deve ser igual a:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

Resolução:

Raiz do divisor será:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x^3 - 4x^2 + 2mx - (m + 1)$$

Resto:

$$R = 6(3)^3 - 4(3)^2 + 2m(3) - (m + 1) \quad 6x^3 - 4x^2 + 2mx - (m + 1) =$$

$$R = 6(3)^3 - 4(3)^2 + 2m(3) - (m + 1)$$

$$R = 6 \cdot 27 - 4 \cdot 9 + 6m - (m + 1)$$

$$R = 162 - 36 + 5m - 1$$

$$R = 125 + 5m$$

Como é divisível o resto é zero:

$$0 = 125 + 5m \Rightarrow 5m = -125 \Rightarrow m = -25$$

$$\Rightarrow |-25| = 25 \quad \text{então} \quad \sqrt{25} = 5$$

Resposta: e)

Lição 8

1. $P(x) = 2x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ por $x - 1$.)

Resposta: o quociente da divisão é $2x^3 + 2x^2 + 0x^1 + 3$ e o resto é 4.

2. $P(x) = x^{40} - x - 1$ por $(x-1)$?

Resolução

$$R = P(1) = 1^{40} - 1 - 1 = -1$$

3. $P(x) = x^4 - kx^3 + 5x^2 + 5x + 2k$ por $x - 1$

Resolução

$$P(x) = x^4 - kx^3 + 5x^2 + 5x + 2k$$

$$P(x) \text{ divisível por } (x - 1); P(1) = 0$$



$$1^4 - k \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 2k = 0$$

$$1 - k + 5 + 5 + 2k = 0$$

$$k = -11$$

Resposta: a)

4. a) $3x^4 - 2x^2 + 5x - 2$ por $x - 2$

		3	0	-2	5	-2
2			6	12	20	50
		3	6	10	25	48

Resposta: quociente $Q(x) = 3x^3 + 6x^2 + 10x + 25$ e resto $R(x) = 48$

b) $-x^4 + 2x^3 - 3x + 1$ por $x + 1$

		-1	2	0	-3	1
-1			1	-3	3	0
		-1	3	-3	0	1

Resposta: quociente $Q(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x$ e resto $R(x) = 1$

c) $-x^4 + 2x^3 - 3x + 1$ por $x + 1$

		3	2	-1	0
-2			-6	8	-14
		3	-4	7	-14

Resposta: Quociente $Q(x) = 3x^3 - 4x + 7$ e resto $R(x) = -14$

c) $x^3 - 27$ por $x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -27 \\ 3 & & 3 & 9 & 27 \\ \hline & 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

Resposta: quociente $Q(x) = x^2 + 3x + 9$ e resto $R(x) = 0$

Lição 9

a) $\frac{x+2}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

b) $\frac{4x^2+x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{(2x+1)^2}{x(x^2+x+1)}$

c) $\frac{x^2+1}{x^3-2x+x} = \frac{x^2+1}{x(2x^2+1)}$



$$\frac{y^4 - 26y^2 + 25}{y^3 - 6y^2 + 5y} =$$

$$\text{seja } t^2 = y \Rightarrow y^4 - 26y^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 26t + 25 = 0$$

$$\text{com } \Delta = 576 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 24$$

$$\log o \quad t_1 = 1 \quad \vee \quad t_2 = 25 \quad \Rightarrow \log o \quad y_{1,2} = \pm 1 \quad \vee \quad y_{3,4} = \pm 25$$

$$\frac{y^4 - 26y^2 + 25}{y^3 - 6y^2 + 5y} = \frac{(y-1)(y+1)(y-5)(y+5)}{y(y-1)(y-5)} = \frac{(y+1)(y+5)}{y}$$

c)

$$\frac{(x+1)^3 - 3x(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{\cancel{(x+1)^3}}{(x+1)^{\cancel{3}^2}} - \frac{3x\cancel{(x+1)^2}}{(x+1)^{\cancel{2}^4}} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3x}{(x+1)^4}$$

Módulo 1 de Matemática

Teste Preparação de Final de

Módulo

Error! Reference source not found.

Introdução

Este teste, querido estudante, serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

1. Sendo $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, podemos afirmar que:
 $A \cup B$ é igual:

A: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ B: $\{4, 6\}$ C: $\{1, 3, 5, 7\}$ D: $\{ \}$

2. Considerando o exercício anterior podemos afirmar que a solução de
 $A \cap B$ será:

A: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ B: $\{4, 6\}$ C: $\{1, 3, 5, 7\}$ D: $\{ \}$

3. Numa turma de 36 alunos, 24 gostam de Matemática e 18 de português. Quantos alunos gostam de Matemática e português?

A: 60 B: 36 C: 24 D: 12

4. Se $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e N são conjuntos tais que
 $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $M \cap N = \{1, 2, 3\}$ então o conjunto N é

A: $\{1, 2, 3\}$ B: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ C: $\emptyset$ D: $\{4, 5\}$

5. Dados os polinômios $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 5x$, a soma de $f(x) + g(x)$ é:

A: $-2x + 2x^2 - 1$ B: $2x^2 + 1 + 2x$

C: $2x^2 + 8x$ D: $2x^2 - 8x + 1$

6. Se $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, o valor numérico de $P(x)$, para $x = -2$, é:

A: 14 B: -6 C: -18 D: 12

7. O desenvolvimento do binômio $(x^2 + 20)^2$ resulta na expressão:

A: $x^2 + 40x + 400$ B: $x^4 + 40x^2 + 20$

C: $x^4 + 40x^2 + 400$ D: $x^4 + 40x^2 + 40$



8. Simplifique a expressão $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ teremos:

A: 1 B: $\frac{x+2}{x-2}$ C: $\frac{x-2}{x+2}$ D: $x-2$

9. A solução da equação $y = -\frac{1}{2}x$ é:

A: -2 B: 0 C: 2 D: $-\frac{1}{2}$

10. Considere a equação $100x - 3x = 0$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- A A equação tem três termos
- B A equação tem dois termos independentes
- C A equação apresenta uma solução impossível
- D A equação apresenta uma solução indeterminada

11. A figura seguinte representa um rectângulo em que o comprimento excede em dois centímetros a largura.



Representando por x a largura, o perímetro do rectângulo, em centímetros, é dado pela expressão:

A: $x + 2 + x$ B: $x - 2 + x$ C: $2(x - 2)$ D: $2x + 4 + 2x$

Soluções do teste de preparação do Módulo 1

1. Sendo $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, podemos afirmar que:

$A \cup B$ é igual:

A: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ B: $\{4, 6\}$ C: $\{1, 3, 5, 7\}$ D: $\{ \}$

Resposta : A

2. Considerando o exercício anterior podemos afirmar que a solução de $A \cap B$ será:

A: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ B: $\{4, 6\}$ C: $\{1, 3, 5, 7\}$ D: $\{ \}$

Resposta : B

3. Numa turma de 36 alunos, 24 gostam de Matemática e 18 de português. Quantos alunos gostam de Matemática e português

A: 60 B: 36 C: 24 D: 12

Resposta : D

4. Se $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e N são conjuntos tais que

$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $M \cap N = \{1, 2, 3\}$ então o conjunto Q é

A: $\{1, 2, 3\}$ B: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ C: $\emptyset$ D: $\{4, 5\}$

Resposta : A

5. Dados os polinômios $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 5x$, a soma de $f(x) + g(x)$ é: A: $-2x + 2x^2 - 1$ B: $2x^2 + 1 + 2x$

C: $2x^2 + 8x$ D: $2x^2 - 8x + 1$

Resposta : A

6. Se $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, o valor numérico de $P(x)$, para $x = -2$, é:

A: 14 B: -6 C: -18 D: 12



Resposta : B

7. O desenvolvimento do binómio $(x^2 + 20)^2$ resulta na expressão:

A: $x^2 + 40x + 400$

B: $x^4 + 40x^2 + 20$

C: $x^4 + 40x^2 + 400$

D: $x^4 + 40x^2 + 40$

Resposta : C

8. Simplifique a expressão $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ teremos:

A: 1

B: $\frac{x+2}{x-2}$

C: $\frac{x-2}{x+2}$

D: $x - 2$

Resposta : B

9. A solução da equação $0 = -\frac{1}{2}x$ é:

A: -2

B: 0

C: 2

D: $-\frac{1}{2}$

Resposta : B

10. Considere a equação $100x - 3x = 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. A equação tem três termos

B. A equação tem dois termos independentes

C. A equação apresenta uma solução impossível

D. A equação apresenta uma solução indeterminada

Resposta : nenhuma

11. A figura seguinte representa um rectângulo em que o comprimento excede em dois centímetros a largura.



Representando por x a largura, o perímetro do rectângulo, em centímetros, é dado pela expressão:

A: $x + 2 + x$

B: $x - 2 + x$

C: $2(x - 2)$

D: $2x + 4 + 2x$

Resposta : D

Fim...