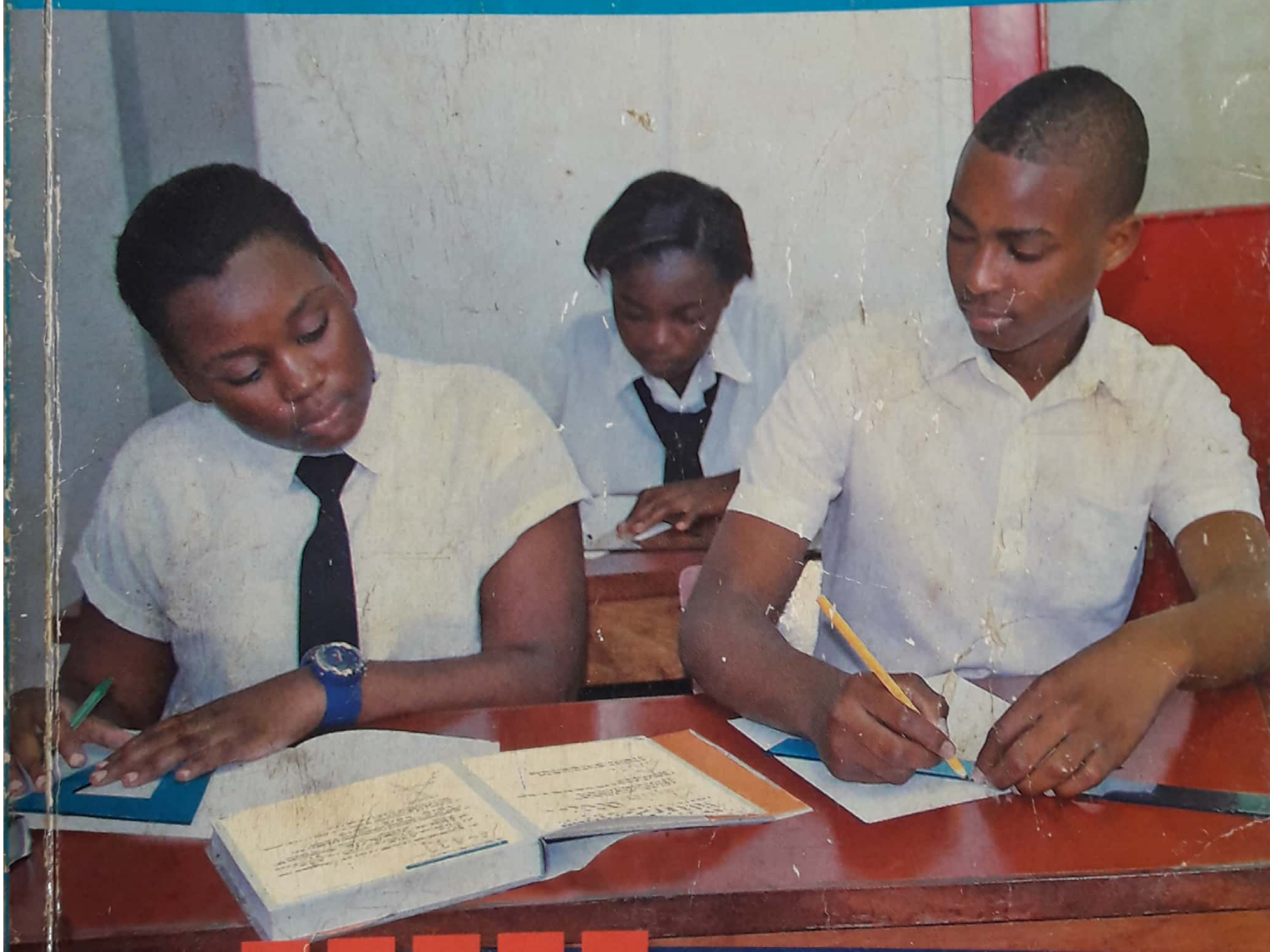


APROVADO PELO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

João Carlos Sapatinha
Dinis Guibundana

9

MATEMÁTICA - 9.ª CLASSE



Saber

MATEMÁTICA



APRENDENDO SEMPRE

PEARSON

Saber

MATEMÁTICA

9

MATEMÁTICA - 9.ª CLASSE



João Carlos Sapatinha
Dinis Guibundana



Baixar Livros & Exames em PDF

Somos o portal MozEstuda.com, um espaço dedicado à educação e ao conhecimento. Fornecemos links para o **download gratuito** de materiais de acesso livre, incluindo [exames anteriores](#), [livros e diversos PDFs](#) educacionais. Nosso objetivo é facilitar o aprendizado e a pesquisa, sempre respeitando os direitos autorais e promovendo o acesso legítimo ao conhecimento. Se você apreciou este conteúdo, considere apoiar os autores e editoras adquirindo versões oficiais sempre que possível. Todos os direitos autorais pertencem aos respectivos criadores e detentores de direitos. **Não vendemos nem lucramos com as obras disponibilizadas.** Aproveite e compartilhe com outros estudantes!

Para baixar livros em PDF, acesse biblioteca.mozestuda.com e pesquise o título desejado na barra de pesquisa. Ou, se preferir, siga/ Clique os links abaixo:

BAIXAR TODOS LIVROS ESCOLARES — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Classe** para Baixar todos livros em PDF

12^a CLASSE

11^a CLASSE

10^a CLASSE

9^a CLASSE

8^a CLASSE

7^a CLASSE

6^a CLASSE

5^a CLASSE

4^a CLASSE

3^a CLASSE

2^a CLASSE

1^a CLASSE

BAIXAR TODOS MÓDULOS ESCOLARES —

MÓDULOS DO I CICLO

MÓDULOS DO II CICLO

LIVROS POR DISCIPLINAS - TODAS

BAIXAR EXAMES DA **6ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

C. NATURAIS

C. SOCIAIS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

BAIXAR EXAMES DA **10ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

FÍSICA

GEOGRAFIA

HISTORIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

BAIXAR EXAMES DA **12ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

DGD

FILOSOFIA

FÍSICA

FRANCÊS

GEOGRAFIA

HISTÓRIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

TODOS EXAMES

TODOS EDITAIS

TODOS LIVROS

BAIXAR EXAMES DE **ADMISSÃO** — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Instituição** para Baixar todos exames em PDF

IFP / Formação de Professores

UEM

UJC/ ISRI

ISPG

ISPSONGO

AC. MILITAR

PRM

ISCAM

ICS — SAÚDE — ENSINO MÉDIO

ETP / Ensino técnico Profissional

UP / UniRios: Save, Rovuma, Licungo, ...

UNIZAMBEZE

ISPT

ISCISA

ACIPOL

CFJJ

IFAPA

EDITAIS

ENEM

VESTIBULARES

ENCCEJA

TODOS EXAMES

Índice

	Pág.
Unidade 1 Números reais e radiciação	1
1 Noção de número real	1
1.1 Revisão dos números racionais	1
1.1.1 Números racionais	1
1.1.2 Operações com números racionais	2
1.1.3 Cálculo de quadrados e raízes quadradas em $\mathbb{Q}$	3
1.2 Cálculo de raízes quadradas de quadrados não perfeitos usando o algoritmo	5
1.2.1 Algoritmo da raiz quadrada	6
1.3 Noção de número irracional	9
1.4 Conjunto dos números reais	11
1.4.1 Notações para representar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$	11
1.5 Relação entre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$	11
1.6 Representação de números reais na recta graduada	12
2 Radiciação	12
2.1 Cálculo de cubos e raízes cúbicas de números positivos	12
2.2 Potência de expoente fraccionário	14
2.2.1 Exemplos de aplicação das propriedades	15
2.3 Multiplicação e divisão de radicais	15
2.3.1 Multiplicação de radicais	15
2.3.2 Divisão de radicais	15
2.4 Passagem de um factor para dentro e para fora do radical	16
2.5 Propriedades dos radicais	16
2.6 Potência de um radical	16
2.7 Comparação de radicais	17
2.8 Adição e subtracção de radicais	17
Exercícios resolvidos	18
Exercícios não resolvidos	21
Unidade 2 Inequações e sistemas de inequações lineares com uma variável	23
2.1 Intervalos numéricos limitados e ilimitados	23
2.2 Reunião e intersecção de intervalos numéricos	25
2.3 Noção de inequação linear	26
2.4 Resolução analítica e geométrica de inequações lineares	26
2.5 Sistema de inequações	30
2.5.1 Noção de sistema de inequações lineares com uma variável	30
Exercícios resolvidos	32
Exercícios não resolvidos	34
Unidade 3 Noção de monómios e polinómios	35
3.1 Expressões algébricas	35
3.2 Valor numérico de uma expressão algébrica	36
3.3 Monómios	37
3.4 Monómios semelhantes	37
3.5 Adição e subtracção de monómios	38
3.6 Potenciação de monómios	38
3.7 Grau de um monómio	38
3.8 Multiplicação de monómios	39
3.9 Divisão de monómios	40
3.10 Polinómios	40
3.11 Grau de um polinómio	41
3.12 Adição e subtracção de polinómios	42

	Pág.
3.13 Multiplicação de polinómios	42
3.13.1 Multiplicação de um monómio por um polinómio	42
3.13.2 Multiplicação de dois polinómios	43
3.14 Produtos notáveis	43
3.15 Decomposição de um polinómio em factores.....	45
3.16 Divisão através da simplificação de um polinómio por um monómio ...	45
Exercícios resolvidos	46
Exercícios não resolvidos.....	50
Unidade 4 Equação quadrática.....	53
4.1 Introdução.....	53
4.2 Equação incompleta do 2.º grau.....	54
4.3 Resolução de equações quadráticas.....	55
4.3.1 Resolução de equações incompletas.....	55
4.3.2 Lei do anulamento do produto	56
4.3.3 Equações quadráticas completas.....	57
4.4 Aplicações de equações quadráticas na resolução de problemas concretos	59
4.4.1 Soma e produto de uma equação quadrática	60
Exercícios resolvidos	62
Exercícios não resolvidos.....	65
Unidade 5 Função quadrática	67
5.1 Introdução.....	67
5.2 Conceito de função quadrática.....	67
5.2.1 Função do tipo $y = ax^2$	69
5.2.2 Função do tipo $y = ax^2 + c$	70
5.3 Algumas aplicações práticas da função quadrática.....	72
Exercícios resolvidos	73
Exercícios não resolvidos.....	75
Unidade 6 Quadriláteros	77
6.1 Noção de quadrilátero	77
6.2 Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero e respectiva aplicação.....	79
6.3 Classificação dos quadriláteros	80
6.3.1 Trapézio	80
6.3.2 Paralelogramo.....	83
6.3.3 Losango	86
6.3.4 Rectângulo.....	87
6.3.5 Quadrado.....	87
Exercícios resolvidos	89
Exercícios não resolvidos.....	90
Unidade 7 Noções básicas de estatística	93
7.1 Objecto da estatística e breve nota histórica	93
7.2 Conceito de população e amostra.....	94
7.3 Caracteres (variáveis) estatísticos	96
7.4 Variável discreta e variável contínua.....	97
7.5 Recolha, organização e apresentação de dados estatísticos	98
7.6 Percentagens, estimativas e arredondamentos.....	99
7.7 Tabelas de frequência para dados simples	100
7.8 Gráficos	102

	Pág.
7.9 Gráfico de barras	105
7.10 Medidas de tendência central	106
Exercícios resolvidos	109
Exercícios não resolvidos	113
Unidade 8 Semelhança de triângulos	115
8.1 Introdução	115
8.2 Ampliação e redução de figuras	116
8.3 Segmentos proporcionais	116
8.4 Propriedade fundamental das proporções	117
8.5 Triângulos semelhantes	118
8.5.1 Noção de semelhança	118
8.5.2 Critérios de semelhança entre triângulos	121
8.6 Relações métricas no triângulo retângulo	122
8.7 Teorema de Tales	125
8.7.1 Feixe de retas paralelas	125
Exercícios resolvidos	127
Exercícios não resolvidos	130
Unidade 9 Cálculo de áreas e de volumes de sólidos geométricos...	135
9.1 Um pouco de história sobre o surgimento da geometria	136
9.2 Conceito de poliedro	136
9.3 Classificação dos poliedros	139
9.3.1 Áreas de figuras planas	141
9.4 Prisma	143
9.4.1 Planificação de um prisma	143
9.4.2 Área de um prisma	144
9.4.3 Volume de um prisma	145
9.5 Pirâmide	146
9.5.1 Conceito de pirâmide	146
9.5.2 Elementos de uma pirâmide	147
9.5.3 Classificação das pirâmides	147
9.5.4 Área lateral de uma pirâmide	148
9.5.5 Área de uma pirâmide	149
9.5.6 Área total de uma pirâmide	150
9.5.7 Volume de uma pirâmide	151
9.6 Cilindro	151
9.6.1 Classificação dos cilindros	152
9.6.2 Área lateral e área total de um cilindro	152
9.6.3 Volume de um cilindro	154
9.7 Cone	154
9.7.1 Conceito de cone de revolução	154
9.7.2 Elementos de um cone	155
9.7.3 Classificação do cone	155
9.7.4 Área de um cone	156
9.7.5 Volume de um cone	157
9.8 Esfera	158
9.8.1 Conceito de esfera	158
9.8.2 Área de uma esfera	158
9.8.3 Volume de uma esfera	159
9.9 Aplicações em volumes de líquidos	159
Exercícios resolvidos	160
Exercícios não resolvidos	162
Soluções	165

Números reais e radiciação

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar números irracionais;
- relacionar os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$;
- representar os números reais na recta graduada;
- calcular cubos e raízes cúbicas de números;
- calcular potências de expoente fraccionário;
- transformar potências de expoente fraccionário numa raiz e vice-versa;
- passar um factor para dentro e para fora do radical;
- comparar radicais;
- operar com radicais.

1. Noção de número real

1.1 Revisão dos números racionais

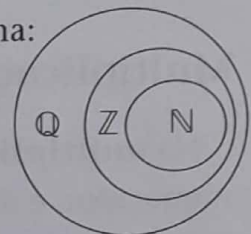
1.1.1 Números racionais

Dá-se o nome de **número racional** ao **quociente** entre dois números inteiros, geralmente escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde b é um número inteiro diferente de zero.

O conjunto dos números racionais é representado pela letra maiúscula $\mathbb{Q}$.

Assim, simbolicamente, a definição é: $\mathbb{Q} = \{x: x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \neq 0\}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ pode ser representado através do seguinte diagrama:



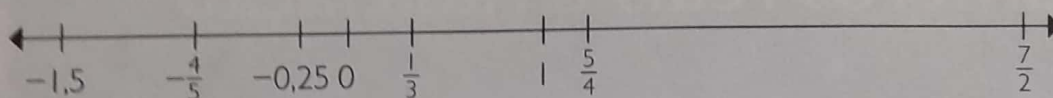
Alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são subconjuntos de $\mathbb{Q}$. $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais e $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros. Existem outros subconjuntos de $\mathbb{Q}$, nomeadamente:

- $\mathbb{Q}^+ = \{\text{números racionais positivos}\}$
- $\mathbb{Q}^- = \{\text{números racionais negativos}\}$
- $\mathbb{Q}^{0+} = \{\text{números racionais não negativos}\}$
- $\mathbb{Q}^{0-} = \{\text{números racionais não positivos}\}$

Representação geométrica de números racionais

Entre dois números racionais existe uma infinidade de outros números racionais:



1.1.2 Operações com números racionais

Nas operações com números racionais devem aplicar-se as mesmas regras dos sinais que utilizamos nas operações com números inteiros.

Adição e subtração

Exemplos:

$$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{12} \quad \text{Porquê?}$$

$$\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{12} \quad \text{Porquê?}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{12} \quad \text{Porquê?}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{12} \quad \text{Porquê?}$$

Para simplificar a escrita, transformamos a adição e a subtração em somas algébricas. Eliminamos os parênteses e escrevemos os números um ao lado do outro, da mesma forma como fazemos com os números inteiros:

$$\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{5}{3}\right) = -\frac{3}{5} - \frac{5}{3} = -\frac{9}{15} - \frac{25}{15} = -\frac{16}{15}$$

Agora, calcula o valor da seguinte expressão:

$$0,3 - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} - 1,8$$

Multiplicação e divisão

Na **multiplicação** de números racionais, devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador.

Exemplos:

$$\left(+\frac{8}{5}\right) \times \left(+\frac{3}{4}\right) = +\frac{6}{5} \quad \text{Porquê?}$$

$$\left(-\frac{8}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{6}{5} \quad \text{Porquê?}$$

$$\left(-\frac{8}{5}\right) \times \left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{5} \quad \text{Porquê?}$$

Na **divisão** de números racionais, devemos multiplicar a primeira fracção pelo inverso da segunda.

Exemplos:

$$\left(+\frac{5}{8}\right) : \left(+\frac{3}{4}\right) = +\frac{5}{6}$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right) : \left(+\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{10}$$

1.1.3 Cálculo de quadrados e raízes quadradas em $\mathbb{Q}$

1. Imagina um curral de forma quadrada com 50 m de lado..



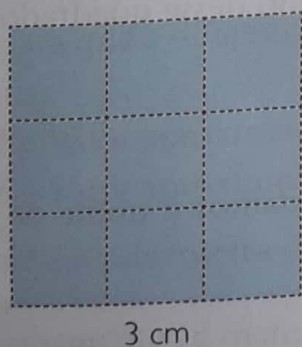
Calcula a área de superfície ocupada pelo curral.

Já sabemos que a superfície é quadrada e, por isso, a sua área obtém-se calculando o quadrado do lado, isto é, $A = l \times l = l^2$.

Assim, a área de superfície pedida corresponde a $50 \text{ m} \times 50 \text{ m} = 2500 \text{ m}^2$.

2. O quadrado da figura seguinte tem 3 cm de lado.

Calcula a sua área.



A área pedida corresponde a: $3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$.

Se o lado do quadrado tivesse 6 cm, a área seria de 36 cm^2 .

Se o lado do quadrado tivesse 8 cm, a área seria de 64 cm^2 .

A tabela seguinte permite determinar o quadrado dos primeiros 40 números inteiros:

Número	Quadrado	Número	Quadrado	Número	Quadrado	Número	Quadrado
1	1	11	121	21	441	31	961
2	4	12	144	22	484	32	1024
3	9	13	169	23	529	33	1089
4	16	14	196	24	576	34	1156
5	25	15	225	25	625	35	1225
6	36	16	256	26	676	36	1296
7	49	17	289	27	729	37	1369
8	64	18	324	28	784	38	1444
9	81	19	361	29	841	39	1521
10	100	20	400	30	900	40	1600

Exemplos:

- A medida do lado do quadrado de área igual a 81 cm^2 é 9 cm.
- A medida do lado do quadrado de área igual a 144 cm^2 é 12 cm.
- A medida do lado do quadrado de área igual a 625 cm^2 é 25 cm.

Com a mesma tabela também podemos responder às seguintes questões:

- Qual é o número positivo cujo quadrado é 9?
- Qual é o número positivo cujo quadrado é 49?
- Qual é o número positivo cujo quadrado é 100?
- Qual é o número positivo cujo quadrado é 121?

Agora vamos resolver o problema seguinte: determinar a medida do lado de um quadrado de área igual a 169 cm^2 .

Como $169 = 13^2$, podemos concluir que a medida do lado desse quadrado é de 13 cm.

Assim:

o número cujo quadrado é 169 é o 13. A esse número damos o nome de **raiz quadrada**. Representa-se do seguinte modo: $\sqrt{169} = 13$

A raiz quadrada de um número X (não negativo) é um número b cujo quadrado é X .

$$\sqrt{X} = b \Leftrightarrow b^2 = X$$

Outros exemplos:

$$\sqrt{25} = 5 \text{ porque } 5^2 = 25$$

$$\sqrt{6,25} = 2,5 \text{ porque } 2,5^2 = 6,25$$

$$\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7} \text{ porque } \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$$

A todo o número inteiro cuja raiz quadrada é um número inteiro dá-se o nome de **quadrado perfeito**. Por exemplo, 25 é um quadrado perfeito porque $\sqrt{25} = 5$.

Outros exemplos: 1, 4, 9, 16, 64, 81, 100, 121, 144, etc.

1.2 Cálculo de raízes quadradas de quadrados não perfeitos usando o algoritmo

Consultando a tabela de quadrados, temos que:

- O número inteiro cujo quadrado é 16 é o 4.
- O número inteiro cujo quadrado é 900 é o 30.
- O número inteiro cujo quadrado seja 1024 é o 32.
- Porém, não existe nenhum número inteiro cujo quadrado seja o 50.

Logo, 50 não é um quadrado perfeito, por isso a sua raiz não é um número inteiro. Mas 50 está compreendido entre dois quadrados perfeitos, nomeadamente 49 e 64.

Isto significa que: $49 < 50 < 64$, ou seja, $7^2 < 50 < 8^2$.

Sabemos que $\sqrt{49} = 7$ e $\sqrt{64} = 8$.

Repara que $\sqrt{50}$ é maior que 7 e menor que 8, isto é, $7 < \sqrt{50} < 8$.

Deste facto resulta que a raiz de 50 não é exacta. Será uma raiz aproximada. A aproximação poderá ser por defeito ou por excesso. Assim, 7 será uma aproximação por defeito e 8 será uma aproximação por excesso.

Repara que a diferença entre as duas aproximações é de uma unidade. Por isso se diz que:

- 7 é o valor aproximado por defeito, a menos de uma unidade;
- 8 é o valor aproximado por excesso, a menos de uma unidade.

Qual é a raiz inteira de 50, aproximada por defeito?

Obviamente que a raiz inteira de 50, aproximada por defeito, é 7.

Vamos agora determinar qual é a raiz quadrada de 2.

- $\sqrt{2} = 1,4142135...$
- $\sqrt{2} = 1$, valor aproximado à unidade
- $\sqrt{2} = 1,4$, valor aproximado por defeito a uma décima
- $\sqrt{2} = 1,41$, valor aproximado por defeito a menos de uma centésima

Os exemplos anteriores mostram que nem sempre temos raízes quadradas exactas. Por exemplo, não existe nenhum número inteiro cujo quadrado seja 50.

Vimos que para a raiz quadrada de 50, 7 é a raiz inteira aproximada. Mas 7 corresponde ao quadrado de 49. Realizemos agora um cálculo simples: $50 - 49 = 1$.

1 é o resto da raiz quadrada de 50. O resto corresponde à diferença entre o número dado e o maior quadrado perfeito nele contido.

Agora diz qual é:

- O resto da raiz quadrada de 78.
- O resto da raiz quadrada de 35.
- O resto da raiz quadrada de 640.
- O resto da raiz quadrada de 1200.

1.2.1 Algoritmo da raiz quadrada

De certeza que ainda te recordas dos processos de adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir, pois aprendemos, desde muito cedo, os algoritmos que nos permitem efectuar esses cálculos.

E a raiz quadrada? Será que existem alguns mecanismos ou algoritmos que nos permitem efectuar o cálculo da raiz quadrada de um número?

Existe um processo não muito complicado que nos permite calcular a raiz quadrada de qualquer número, com a aproximação desejada. Esse algoritmo é chamado **algoritmo da raiz quadrada**.

Vamos apresentar, através de exemplos, a forma como funciona este algoritmo.

Exemplo:

Vamos calcular $\sqrt{2624}$.

1.º passo: decompor o número em grupos de dois algarismos, contados da direita para a esquerda.

$$\sqrt{2624} \quad \begin{array}{|l} \hline \\ \hline \end{array}$$

2.º passo: determinar a raiz inteira, aproximada por defeito, do grupo mais à esquerda. Neste caso, o número desejado é o 5. De seguida, subtrai-se o número formado pelo grupo à esquerda e o quadrado do algarismo encontrado. No nosso exemplo, $26 - 25 = 1$.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2624} & 5 \\ -25 & \\ \hline 01 & \end{array}$$

3.º passo: à direita escreve-se o grupo de algarismos seguinte: 24. Debaixo do 5 escreve-se o seu dobro, ou seja, 10.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2624} & 5 \\ -25 & 10 \\ \hline 0124 & \end{array}$$

4.º passo: de 124, separa-se o algarismo da direita (4) e divide-se o número à esquerda (12) por 10, obtendo-se 1. Coloca-se este quociente à direita do 10 e multiplica-se o número obtido, isto é, 101, pelo quociente anterior.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2624} & 1 \\ -25 & 101 \\ \hline 0124 & \times 1 \\ & 101 \end{array}$$

5.º passo: como o produto obtido (101) é menor do que o número que se encontra à esquerda (124), efectua-se a subtracção do segundo pelo primeiro. Assim, o 1 é o segundo número da raiz quadrada.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2624} & 51 \\ -25 & 101 \\ \hline 0124 & \times 1 \\ -101 & \\ \hline 23 & 101 \end{array}$$

Logo, a raiz quadrada (aproximada por defeito) de $\sqrt{2624}$ é 51 e o resto é 23.

Outro exemplo:Vamos calcular $\sqrt{68478}$.**1.º passo:**

$\sqrt{68478}$	2
-4	
2	

2.º passo:

$\sqrt{68478}$	2 ...
-4	47
284	$\times 7$
	329

Repara que o produto (329) é maior do que o número que se encontra à esquerda (284). Assim, não se efectua a subtracção do segundo pelo primeiro. Vamos tentar, subtraindo uma unidade ao 7, isto é, $7 - 1 = 6$.

3.º passo:

$\sqrt{68478}$	2 ...	2
-4	47	46
284	$\times 7$	$\times 6$
276	329	276
008		

4.º passo:

$\sqrt{68478}$	26
-4	46
284	$\times 6$
-276	276
00878	

5.º passo:

$\sqrt{68478}$	261	
-4	46	521
284	$\times 6$	4
-276	276	521
00878		
- 521		
357		

Logo, a raiz quadrada (aproximada por defeito) de $\sqrt{68478}$ é 261 e o resto é 357.

Vamos agora usar este algoritmo para calcular a raiz quadrada de 3 com valores aproximados por defeito a menos de 0,01.

Para isso, é preciso ter em conta que:

- o quadrado de um número decimal tem sempre um número par de casas decimais;
- o número de casas decimais da raiz quadrada é metade do número de casas decimais do radicando.

Cálculo de $\sqrt{3}$

1. Seja a aproximação a menos de uma centésima, então o radicando deve ter quatro casas decimais. Quer dizer: $\sqrt{3} = \sqrt{3,0000}$.
2. Agora podemos usar o algoritmo.

R3,0000	1,73				
- 1	210	29	28	27	343
200	× 10	× 9	× 8	× 7	× 3
-189	2100	261	224	189	1029
01100					
- 1029					
0,0071					

Logo, a raiz de $\sqrt{3}$ com uma aproximação por defeito a menos de 0,01 é 1,73 e o resto é 0,0071.

Utilizando este método, calcula agora as raízes quadradas de:

- a) 225 b) 7823 c) 5 d) 902571

1.3 Noção de número irracional

É importante relembrar que um número racional $\mathbb{Q}$ pode ser expresso como o quociente $\frac{a}{b}$ entre dois números inteiros, onde b não pode ser igual a zero. Assim, a fracção $\frac{a}{b}$ representa o quociente exacto da divisão de a por b , sendo $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Exemplos:

A fracção $\frac{2}{3}$ representa o quociente exacto da divisão de 2 por 3.

A fracção $\frac{5}{8}$ representa o quociente exacto da divisão de 5 por 8.

A fracção $\frac{12}{36}$ representa o quociente exacto da divisão de 12 por 36.

Toda a fracção ($\frac{a}{b}$) se pode reduzir a uma dízima, que é o número decimal resultante da divisão de a por b . As dízimas podem ser finitas e infinitas.

Exemplos de dízimas finitas:

A fracção $\frac{3}{5}$ pode ser representada pelo número decimal 0,6.

A fracção $\frac{3}{15}$ pode ser representada pelo número decimal 0,2.

A fracção $\frac{9}{6}$ pode ser representada pelo número decimal 1,5.

Exemplos de dízimas infinitas:

A fracção $\frac{7}{15}$ pode ser representada pelo número decimal 0,4666... É uma dízima infinita em que o algarismo 6 se repete indefinidamente. Chama-se **dízima infinita periódica**, e o período é o número que se repete. Neste caso, o período é 6. Escreve-se $\frac{7}{15} = 0,4666... = 04(6)$.

Os números racionais são os que podem ser representados por uma fracção (que é um quociente entre dois números inteiros), enquanto os números irracionais não podem ser representados na forma de fracção.

Na forma de dízima, os números racionais são dízimas finitas ou infinitas periódicas, enquanto os números irracionais são dízimas infinitas não periódicas.

Outros exemplos:

$$\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6), \text{ o período é } 6.$$

$$\frac{7}{12} = 0,583333... = 0,58(3), \text{ o período é } 3.$$

$$\frac{11}{7} = 1,571428571428... = 1,(571428), \text{ o período é } 571428.$$

Número irracional é todo o número representável por uma dízima infinita não periódica.

Exemplos de dízimas não periódicas ou números irracionais:

a) $1,01010010001000001...$

b) $0,141592654...$

c) $3,62283502818272...$

d) $\sqrt{2} = 1,414213562...$

e) $\pi = 3,142857143...$

Assim:

- todas as dízimas periódicas são números racionais;
- todos os números inteiros são números racionais;
- todas as fracções ordinárias são números racionais;
- todas as dízimas não periódicas são números irracionais;
- todas as raízes inexactas são números irracionais.

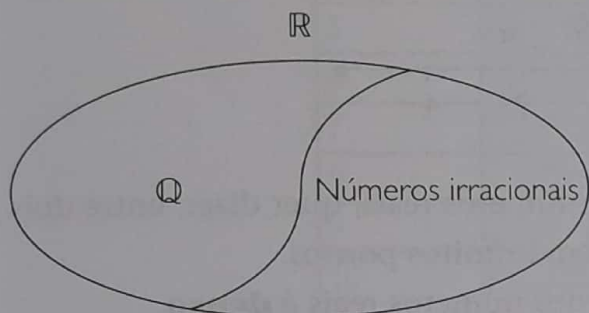
1.4 Conjunto dos números reais

Qualquer número racional ou irracional é denominado número real.

Designa-se por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, podendo-se escrever o seguinte:

$$\{\text{números reais}\} = \{\text{números racionais}\} \cup \{\text{números irracionais}\}$$

$$\text{ou } \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$$



1.4.1 Notações para representar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^+ = \{\text{números reais positivos}\}$$

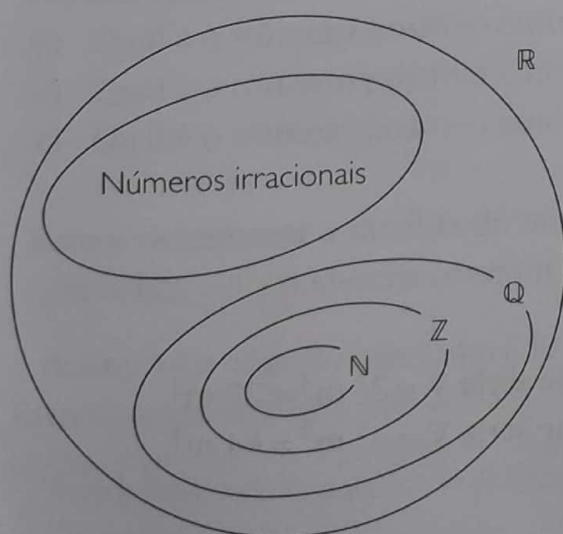
$$\mathbb{R}^- = \{\text{números reais negativos}\}$$

$$\mathbb{R}_0^+ = \{\text{números reais não negativos}\}$$

$$\mathbb{R}_0^- = \{\text{números reais não positivos}\}$$

1.5 Relação entre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

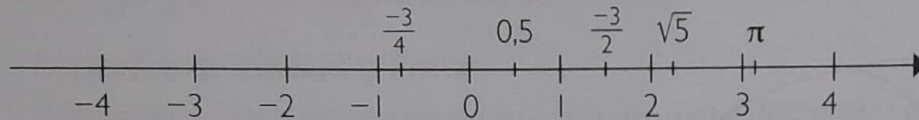
As relações entre os conjuntos numéricos até agora estudados podem ser representadas por meio de um diagrama, do seguinte modo:



1.6 Representação de números reais na recta graduada

A cada ponto de uma recta podemos associar um único número real, e a cada número real podemos associar um único ponto na recta.

Vejam a representação de $\mathbb{R}$ na recta:



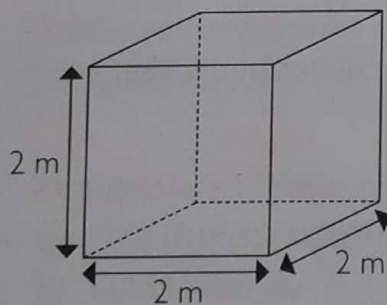
Entre dois números reais existem infinitos números reais, quer dizer, entre dois pontos associados a dois números reais existem infinitos pontos.

Assim sendo, considera-se que o conjunto dos números reais é **denso**.

2. Radiciação

2.1 Cálculo de cubos e raízes cúbicas de números positivos

Considera agora o problema seguinte: qual é o volume de um tanque de água com a forma de um cubo, medindo 2 m de aresta?



Recordemo-nos que $V = a \times a \times a$ ou $V = a^3$.

Sendo $a = 2$ m, então $V = 2^3 \text{ m}^3 = 8 \text{ m}^3$.

Assim, o volume do tanque é de 8 m^3 .

Se a aresta do tanque fosse 3, então o volume seria $V = 3^3 \text{ m}^3 = 27 \text{ m}^3$.

Se a aresta do tanque fosse 4, então o volume seria $V = 4^3 \text{ m}^3 = 64 \text{ m}^3$.

A tabela seguinte permite-nos determinar o cubo de um número:

Número	Cubo	Número	Cubo
1	1	11	1331
2	8	12	1728
3	27	13	2197
4	64	14	2744
5	125	15	3375
6	216	16	4096
7	343	17	4913
8	512	18	5832
9	729	19	6859
10	1000	20	8000

Exemplos:

- Um cubo com um volume de 125 cm^3 tem uma aresta de 5 cm.
- Um cubo com um volume de 1000 cm^3 tem uma aresta de 10 cm.
- Um cubo com um volume de 1728 cm^3 tem uma aresta de 12 cm.

A mesma tabela permite-nos responder à seguinte questão:

- Qual é a medida de um lado de um tanque de água com a forma de um cubo de volume igual a 64 m^3 ?
Observando a tabela, verificamos que o 4 é o número cujo cubo é 64. Assim, o lado do tanque mede 4 m.

Vamos agora consultar a tabela e responder às seguintes questões:

- Qual é o número positivo cujo cubo é 512?
- Qual é o número positivo cujo cubo é 1000?
- Qual é o número positivo cujo cubo é 2744?

Vamos determinar a medida do lado de um cubo de volume igual a 125 cm^3 . Como $125 = 5^3$, podemos concluir que a medida do lado desse cubo é de 5 cm.

Assim: 5 é o número cujo cubo é 125. A esse número dá-se o nome de **raiz cúbica**. Escreve-se da seguinte forma: $\sqrt[3]{125} = 5$.

A raiz cúbica de um número X é um número b cujo cubo é X .

$$\sqrt[3]{X} = b \Leftrightarrow b^3 = X$$

Outros exemplos:

$$\sqrt[3]{512} = 8 \text{ porque } 512 = 8^3.$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ porque } 27 = 3^3.$$

$$\sqrt[3]{343} = 7 \text{ porque } 343 = 7^3.$$

Nota: um número negativo pode ter uma raiz cúbica.

Assim, por exemplo $\sqrt[3]{-27} = -3$ porque $-27 = (-3)^3$.

A tabela a seguir apresenta cubos e raízes cúbicas de alguns números.

x	x^3	$\sqrt[3]{x}$
1	1	1
2	8	1,2599
3	27	1,4422
4	64	1,5874
5	125	1,7100
6	216	1,8171
7	343	1,9129
8	512	2,000
9	729	2,0801
10	1000	2,1544

2.2 Potência de expoente fraccionário

Observemos as seguintes potências:

a) $2^{\frac{2}{3}}$

b) $5^{\frac{1}{2}}$

c) $3^{\frac{4}{5}}$

d) $(\frac{2}{3})^{\frac{3}{5}}$

e) $(0,25)^{\frac{1}{2}}$

Todas estas potências têm expoentes fraccionários.

Assim, toda a potência de expoente fraccionário pode ser representada na forma:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

Exemplos:

a) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

b) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

c) $3^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}}$

Na definição da potência de expoente fraccionário são válidas todas as propriedades de potência de expoente inteiro.

Recordemos estas propriedades:

$$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

$$a^m : a^n = a^{(m-n)}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2.2.1 Exemplos de aplicação das propriedades

$$a) \quad 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{2+1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$b) \quad 16^1 : 16^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1-1}{2}} = 16^{\frac{2-1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$c) \quad (64^{\frac{5}{9}})^{\frac{3}{5}} = 64^{\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}} = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$d) \quad 8^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$e) \quad 8^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}} = (8 : 2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$f) \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

2.3 Multiplicação e divisão de radicais

2.3.1 Multiplicação de radicais

É preciso notar que os radicais devem ter o mesmo índice. Para radicais do mesmo índice, basta multiplicar os seus radicandos. Assim: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ com $a, b \geq 0$, e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Exemplos:

$$a) \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$$

$$b) \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$$

$$c) \quad \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{12}$$

2.3.2 Divisão de radicais

Tal como na multiplicação, também neste caso os radicais têm de ter o mesmo índice. Assim, a divisão é definida da seguinte forma: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ com $a, b \geq 0$, e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, isto é, dividem-se os radicandos.

Exemplos:

$$a) \quad \sqrt{27} : \sqrt{9} = \sqrt{3}$$

$$b) \quad \sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$c) \quad \sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{32} = 2$$

2.4 Passagem de um factor para dentro e para fora do radical

Visto que $a^m = a^{\frac{mn}{n}} = \sqrt[n]{a^{mn}}$, podemos concluir que qualquer coeficiente positivo de um radical pode constituir um factor do seu radicando, desde que se multiplique o seu expoente pelo índice do radical.

Na prática, decompõe-se o radicando num produto de factores primos e aplica-se a propriedade da multiplicação de radicais.

Exemplos:

$$a) \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$b) \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$c) \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Para passar um factor para dentro do radical eleva-se este ao índice do radical.

Exemplos:

$$a) 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$b) 3x\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(3x)^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{27x^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54x^3}$$

2.5 Propriedades dos radicais

1. Multiplicando o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, diferente de zero, o valor do radical não se altera.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \text{ com } a \geq 0, m > 0, p \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \text{ Exemplo: } \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$$

2. Dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, diferente de zero, o valor do radical não se altera.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}, \text{ com } a \geq 0, m > 0, p \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } n \in \mathbb{N}. \text{ Exemplo: } \sqrt[8]{9} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[4]{3}$$

2.6 Potência de um radical

A potência de um radical tem a seguinte forma: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, com $a > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$$\text{Exemplos: } (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} \text{ e } (\sqrt{3})^3 = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$$

2.7 Comparação de radicais

Vamos comparar apenas radicais com o mesmo índice.

Qual dos radicais é maior: $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$?

É importante reparar que estes radicais têm o mesmo índice. Como $3 < 5$, resulta que $\sqrt{3} < \sqrt{5}$. Assim, se os radicais têm o mesmo índice, comparam-se os radicandos. Isto é, se $a < b$, então $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Outro exemplo: $\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{5}$, porque $10 > 5$.

2.8 Adição e subtracção de radicais

Para adicionar ou subtrair radicais, deve ser tido em consideração o seguinte:

- os radicais devem ser semelhantes;
- os radicais devem ter o mesmo índice;
- são **radicais semelhantes** aqueles que apenas diferem nos coeficientes.

Exemplos de radicais semelhantes:

$$\sqrt[3]{5} \text{ e } -4\sqrt[3]{5}; \frac{2}{3}\sqrt{11}, -\sqrt{11} \text{ e } \frac{1}{2}\sqrt{11}; 5\sqrt{a} \text{ e } \frac{2}{3}\sqrt{a}$$

A adição e a subtracção de radicais semelhantes efectua-se aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: $ac + bc = (a + b)c$.

Assim: $a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}$, com $x > 0$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

$$\text{a) } \sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} = (1 + 4)\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$$

$$\text{b) } \sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (1 + 7 - 4)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[5]{5} - 5\sqrt[5]{5} + 2\sqrt[5]{5} = (1 - 5 + 2)\sqrt[5]{5} = -2\sqrt[5]{5}$$

I. Verifiquemos se as dízimas seguintes representam números racionais ou irracionais:

- a) 3,14 b) 0,(6) c) 2,4(5)
 d) 0,6 e) 3,14159... f) $\frac{3}{4}$

Resolução:

Deve ser lembrado que uma dízima representa um número racional caso seja uma dízima finita ou infinita. Assim, são números racionais os números representados nas alíneas a), b), c), d) e f). O número de e) é um número irracional por ser uma dízima infinita não periódica.

Vamos verificar esta constatação:

a) $3,14 = \frac{314}{100} = \frac{157}{50}$. Esta é a representação do número fraccionário, que, como sabemos, é um número racional.

b) $x = 0,666666...$ (o período tem um só algarismo, o 6). Ora multiplicando nesta igualdade ambos os membros por 10:

$$10x = 6,66666...$$

Tendo em conta as equações:

$$x = 0,(6)$$

$$10x = 6,(6)$$

$$\text{Subtraindo as equações: } 10x - x = 6,(6) - 0,(6) \Leftrightarrow 9x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{9} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Neste sentido, 0,(6) é um número racional.

c) Caso $x = 2,4(5)$ ou $x = 2,4555...$, obtemos o seguinte resultado:

$$10x = 24,555... \text{ (multiplicando ambos os membros por 10);}$$

$$10x - x = 24,555... - 2,4555... \text{ (subtraindo as duas expressões membro a membro);}$$

$$9x = 22,1, \text{ daqui resultando que } 90x = 221, \text{ se multiplicarmos ambos os membros por 10.}$$

Assim, $x = \frac{221}{90}$. Por conseguinte, 2,4(5) é um número racional.

d) 0,6 representa a fracção $\frac{3}{5}$, sendo, por conseguinte, um número racional.

e) 3,14159..., por representar uma dízima infinita não periódica, é um número irracional.

f) $\frac{3}{4}$ representa a dízima finita 0,75, sendo, por conseguinte, um número racional.

2. Vamos transformar as seguintes potências num radical:

a) $5^{\frac{1}{2}}$

b) $6^{\frac{2}{3}}$

c) $8^{\frac{5}{3}}$

d) $(\frac{1}{3})^{-\frac{5}{5}}$

Resolução:

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

b) $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2}$

c) $8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5}$

d) $(\frac{1}{3})^{-\frac{5}{5}} = \sqrt[5]{(\frac{1}{3})^{-5}}$

3. Vamos determinar o valor das seguintes potências:

a) $25^{\frac{1}{2}}$

b) $0,09^{\frac{1}{2}}$

c) $81^{-\frac{1}{2}}$

d) $(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{2}}$

Resolução:

a) $25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

b) $0,09^{\frac{1}{2}} = (0,3^2)^{\frac{1}{2}} = 0,3$

c) $81^{-\frac{1}{2}} = (9^2)^{-\frac{1}{2}} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$

d) $(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{2}} = (\frac{4^2}{9^2})^{-\frac{3}{2}} = [(\frac{4}{9})^2]^{-\frac{3}{2}} = (\frac{4}{9})^{-3} = (\frac{9}{4})^3 = \frac{729}{64}$

4. Aplicando as propriedades da potenciação, vamos realizar o seguinte cálculo:

a) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

b) $(100^{\frac{1}{4}} : 24^{\frac{1}{4}})^8$

c) $(\frac{9}{4})^{\frac{15}{2}} : (\frac{9}{4})^7$

d) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}}$

Resolução:

a) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = (8 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = (4^2)^{\frac{1}{2}} = 4$

b) $(100^{\frac{1}{4}} : 24^{\frac{1}{4}})^8 = [(\frac{100}{24})^{\frac{1}{4}}]^8 = (4^{\frac{1}{4}})^8 = 4^{\frac{8}{4}} = 4^2 = 16$

c) $(\frac{9}{4})^{\frac{15}{2}} : (\frac{9}{4})^7 = (\frac{9}{4})^{\frac{15}{2}-7} = (\frac{9}{4})^{\frac{15-14}{2}} = (\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

d) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{(3+4)}{6}} = 2^{\frac{7}{6}}$

5. Vamos efectuar as seguintes operações, simplificando sempre que possível:

a) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{24} + 5\sqrt{6}$

c) $3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{8}$

Resolução:

a) $\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (1 - 5)\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{24} + 5\sqrt{6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} + 5\sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6} = (2 + 5)\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$

c) $3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{(5^2 \cdot 2)} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = (3 - 5 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{8} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{(2^3)} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = (2 + 1)\sqrt{3} + (-3 + 2)\sqrt{2} = 3\sqrt{3} - \sqrt{2}$

6. Vamos efectuar as seguintes multiplicações e divisões, simplificando o mais possível:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

c) $\sqrt{8} : 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{10} : \sqrt{5} : \sqrt{2}$

Resolução:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

c) $\sqrt{8} : 3\sqrt{2} = \sqrt{8} : \sqrt{(3^2 \cdot 2)} = \sqrt{8} : \sqrt{(9 \cdot 2)} = \sqrt{8} : \sqrt{18} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

d) $\sqrt{10} : \sqrt{5} : \sqrt{2} = \sqrt{10 : 5 : 2} = \sqrt{1} = 1$

7. Vamos resolver as seguintes expressões:

a) $\frac{\sqrt{45} - \sqrt{5}}{\sqrt{60} : \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{7} : 2 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{2 \cdot 7} \cdot \sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{27}}{\sqrt{12}}$

Resolução:

a) $\frac{\sqrt{45} - \sqrt{5}}{\sqrt{60} : \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{5}}{\sqrt{60} : 3} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$

b) $\frac{\sqrt{7} : 2 - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{2 \cdot 7} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2} - 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{2^2 \cdot 7}} = \frac{\frac{\sqrt{7} - 4\sqrt{7}}{2}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{7}} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} = -\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{27}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3^2 \cdot 3}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1 - 3)\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1$

Exercícios não resolvidos

1. Consulta a tabela e determina o quadrado de:
a) 7 b) 2,5 c) 50 d) 6,3 e) 100 f) 1,02
2. Consulta novamente a tabela e determina o número que tem o seguinte quadrado:
a) 144 b) 1024 c) 18,49 d) 70,56 e) 98,01 f) 0,4225
3. Calcula o valor de:
a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{9,61}$ c) $\sqrt{0,9409}$ d) $\sqrt{\frac{81}{100}}$ e) $\sqrt{\frac{441}{1089}}$
4. Um terreno de forma quadrada tem $92,16 \text{ m}^2$ de área. Quanto mede, em metros, o perímetro do respectivo quadrado?
5. Verifica se as dízimas seguintes representam números racionais ou irracionais:
a) 1,5 b) 2,(7) c) 3,5(46) d) 0,75
e) 1,732050... f) 5,(34) g) 10,345 h) 2,64575131...
i) 10,3(45) j) 1,732050
6. Verifica se os números seguintes representam números racionais ou irracionais:
a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{64}$ f) $\sqrt{1,21}$
g) $\sqrt{\frac{121}{144}}$ h) $\sqrt{0,09}$ i) $\sqrt{1,(31)}$ j) $\sqrt{\pi}$ l) $\sqrt{13}$ m) $\sqrt{625}$
7. Determina a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede 3 cm. De seguida, verifica se o resultado obtido é racional ou irracional.
8. Determina a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede 10 cm. De seguida, verifica se o resultado obtido é racional ou irracional.
9. Verifica se a hipotenusa de um triângulo rectângulo, cujos catetos medem 3 cm e 4 cm, representa um número racional ou irracional.
10. Calcula o perímetro de uma circunferência com 5 cm de diâmetro e verifica depois se o resultado é um número racional ou irracional.
11. Transforma as seguintes potências num radical:
a) $5^{\frac{1}{3}}$ b) $2^{\frac{1}{2}}$ c) $6^{\frac{4}{5}}$ d) $\pi^{\frac{2}{3}}$ e) $5^{-\frac{1}{2}}$ f) $0,8^{\frac{1}{3}}$

12. Determina o valor das seguintes potências:

a) $49^{\frac{1}{2}}$

b) $25^{0,5}$

c) $81^{0,25}$

d) $121^{-\frac{1}{2}}$

e) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$

f) $0,008^{-\frac{1}{3}}$

g) $(0,01)^{-\frac{1}{2}}$

13. Aplicando as propriedades da potenciação, efectua as seguintes operações:

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$

b) $2^{\frac{1}{2}} \times (0,18)^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{15}{2}} : \left(\frac{9}{4}\right)^7$

d) $2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

e) $6^{-\frac{1}{6}} \times 2^{-\frac{1}{6}} : 12^{-\frac{7}{6}}$

f) $\left(8^{\frac{1}{2}} : 4^{\frac{1}{2}}\right)^4$

g) $(-5)^{-\frac{1}{2}} : 9^{-\frac{1}{2}} \cdot (-20)^{-\frac{1}{2}}$

h) $\left(5^{-\frac{1}{2}} : 5^{\frac{1}{3}}\right) : \left(5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{-\frac{2}{3}}\right)$

14. Passa os factores possíveis para fora do radical:

a) $\sqrt{18}$

b) $\sqrt{24}$

c) $\sqrt{75}$

d) $\sqrt[3]{40}$

e) $\sqrt[3]{108}$

f) $\sqrt[5]{128}$

g) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$

h) $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$

15. Passa os factores que estiverem fora para dentro do radical:

a) $3\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{2}$

c) $2\sqrt[3]{2}$

d) $3\sqrt[3]{2}$

e) $2\sqrt[4]{5}$

f) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

g) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{8}}$

16. Efectua as seguintes operações, simplificando sempre que possível:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$

c) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}$

e) $\sqrt{32} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 2\sqrt{18}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$

17. Efectua as seguintes multiplicações e divisões, simplificando o mais possível:

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$

d) $\sqrt{30} : \sqrt{10}$

e) $\sqrt{75} : \sqrt{3}$

f) $\sqrt{7} : \sqrt{28}$

g) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{4}$

h) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

i) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

18. Resolve as seguintes expressões e apresenta o resultado de forma simplificada

a) $\frac{\sqrt{27} - \sqrt{25} : \sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

b) $\frac{5\sqrt{6} - 2\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{\sqrt{45} - \sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

d) $\frac{\sqrt{125} + \sqrt{5}}{-2\sqrt{45}}$

Unidade 2

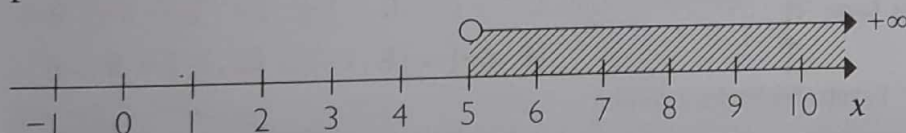
Inequações e sistemas de inequações lineares com uma variável

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- representar intervalos numéricos na recta graduada;
- determinar a reunião e intersecção dos intervalos numéricos;
- resolver inequações lineares na forma analítica e na forma geométrica;
- resolver analítica e geometricamente um sistema de inequações lineares;
- aplicar inequações lineares na resolução de problemas.

2.1 Intervalos numéricos limitados e ilimitados

Dizer $x > 5$ significa que x é qualquer número maior do que 5: por exemplo o 6, pois $6 > 5$. O x também pode ser 7; 8; 9; 15; 28; 1000; 2000; etc., ou 5,2; 5,5; 6,1; etc. Representando num eixo real o conjunto que satisfaz esta condição $x > 5$, podemos observar o seguinte:

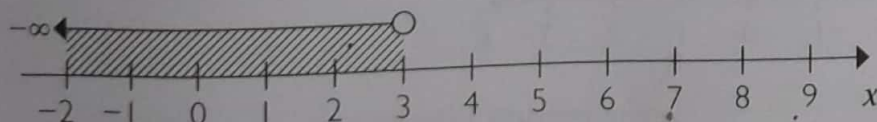


No eixo real estão representados todos os valores de x que satisfazem a inequação $x > 5$, isto é, o conjunto de todos os números que formam a solução desta inequação.

Este conjunto de números que formam a solução poderá ser representado na forma de notação de intervalos, escrevendo-se $]5; +\infty[$, que se deve ler da seguinte maneira: «intervalo aberto de 5 até mais infinito». O limite à esquerda é 5, enquanto à direita não existe limite, continuando assim até o infinito.

Exemplo 1: $x < 3$

Os valores que o x pode assumir são 2; 1; 0; -1; -2; -3; -4; ...; assim como 2,5; 0,5; -0,5; -2,1; etc. No eixo real (geometricamente) podemos representar este conjunto da seguinte forma:

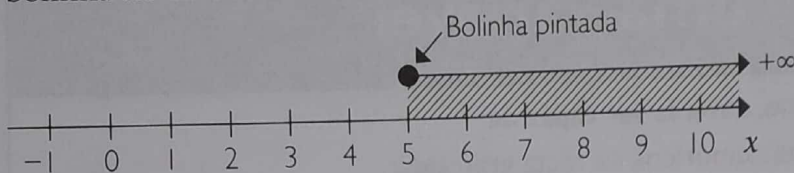


Na notação de intervalos será: $]-\infty; 3[$

$x \geq 5$ significa que o x é maior que 5 ou igual a 5. Os dois casos são válidos, isto é, o sinal $\geq$ é composto por dois sinais: $>$ e $=$.

O x pode assumir valores como 5; 6; 7; 15;...; mas também 5,1; 5,5; 6,3; 9,4;...; etc.

O sinal $=$ indica que o valor 5 é parte do conjunto e para o indicar, pintamos uma bolinha no eixo real:

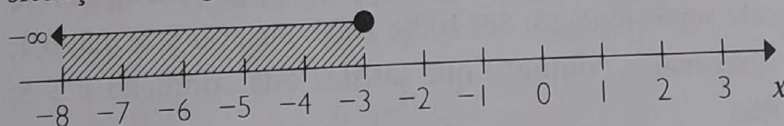


Notação de intervalos: $[5; +\infty[$

↑
Limite fechado à esquerda

Exemplo 2: $x \leq -3$

Os valores (números) menores que ou iguais a -3 são: -3 ; -4 ; -5 ; -6 ;...; assim como $-3,2$; $-3,5$; $-4,3$; $-7,1$; etc. Geometricamente, podemos representar esta situação da seguinte forma:



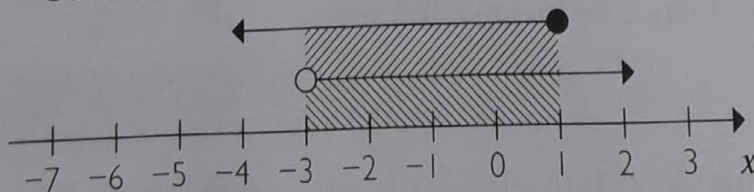
Notação de intervalos: $]-\infty; -3]$

↑
Limite fechado à direita

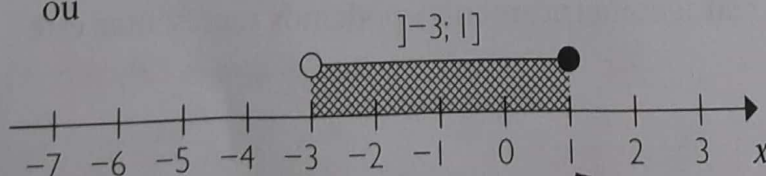
Exemplo 3: como representar $-3 < x \leq 1$ no eixo real e sob a notação de intervalos?

A referida expressão apresenta duas condições: $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Geometricamente, no eixo real, a situação apresenta-se da seguinte forma:



ou



Limite aberto à esquerda, pois -3 não faz parte do conjunto.

Limite fechado à direita, pois 1 faz parte do conjunto.

Podemos então concluir que os números que satisfazem simultaneamente as duas condições vão de -3 a 1 , excluindo -3 e incluindo 1 . Em termos de notação de intervalos, escreve-se $] -3; 1]$.

2.2 Reunião e intersecção de intervalos numéricos

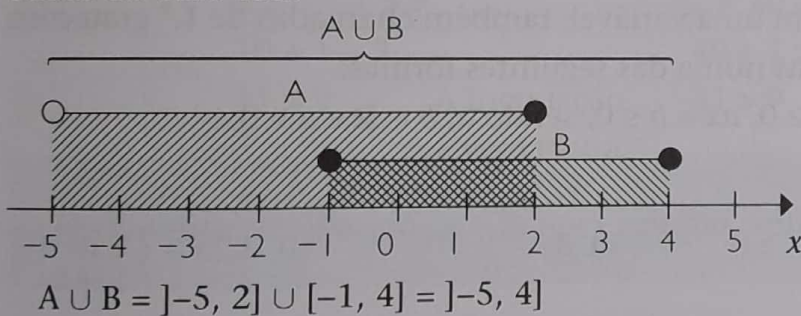
Recordemos que a reunião de dois conjuntos A e B representa o conjunto constituído pelos elementos do conjunto A ou do conjunto B .

Matematicamente escreve-se o seguinte: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemplo: considerando os conjuntos $A =] -5, 2]$ e $B = [-1, 4]$, vamos determinar $A \cup B$.

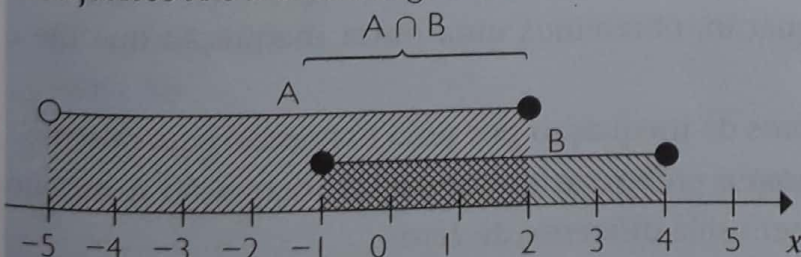
Resolução:

Para uma melhor visualização do resultado, é aconselhável apresentar os intervalos dados no eixo real.



A intersecção de dois conjuntos A e B representa o conjunto constituído pelos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B . Matematicamente, escreve-se o seguinte: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Exemplo: considerando os conjuntos do exemplo anterior, a intersecção dos conjuntos A e B será a seguinte:



2.3 Noção de inequação linear

Damos o nome de **inequação** a toda a expressão matemática com uma ou mais variáveis, expressas por uma desigualdade. Para expressar a desigualdade, usa-se o sinal de $>$ (maior que), $<$ (menor que) $\leq$ (menor ou igual a) ou $\geq$ (maior ou igual a).

Exemplos:

a) $y + 5 \leq 10$

b) $4x^2 - 4 < 8$

c) $3x - 3(2x - 1) \geq 3x - 3$

d) $\frac{x}{2} - 2 \leq \frac{x}{3} + 1$

e) $5x^3 - 4 > 3x^2 + 2$

As variáveis que constam das inequações são designadas por **incógnitas**.

Em qualquer inequação temos dois membros.

Por exemplo, na inequação $5x - 4 > 3x + 2$, temos:

– primeiro membro: $5x - 4$; – segundo membro: $3x + 2$

As **inequações lineares** com uma variável, também chamadas de 1.º grau com uma variável, podem ser escritas numa das seguintes formas:

$ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

a) $2x - 5 > 0$

b) $2 - 4x \geq 0$

c) $3x - \frac{1}{2} \leq 0$

d) $3,2x + \frac{5}{2} < 0$

2.4 Resolução analítica e geométrica de inequações lineares

Resolver uma inequação significa encontrar o valor ou os valores que transformam a condição (inequação) numa identidade verdadeira.

A resolução de uma inequação resume-se através de alguns princípios de equivalência – dada uma inequação, obteremos uma outra inequação que lhe é equivalente se:

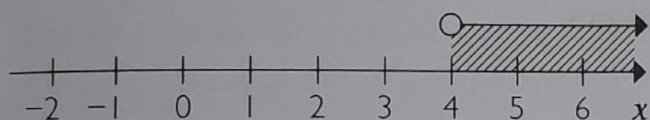
- substituímos um dos membros da inequação por uma expressão equivalente;
- adicionarmos (ou subtraímos) a ambos os membros da inequação o mesmo número, desde que esse número seja diferente de zero;
- multiplicarmos (ou dividirmos) ambos os membros da inequação pelo mesmo número, desde que esse número seja diferente de zero.

Nota: para o caso de multiplicarmos (ou dividirmos) ambos os membros da inequação pelo mesmo número negativo, é necessário invertermos o sentido da desigualdade.

Exemplo 1: como resolver a inequação $2x + 1 > 9$?

$2x + 1 > 9$	Compara esta inequação com esta:	$2x + 1 = 9$
$2x > 9 - 1$		$2x = 9 - 1$
$2x > 8$		$2x = 8$
$x > \frac{8}{2}$		$x = \frac{8}{2}$
$x > 4$		$x = 4$

Geometricamente, a situação é representada da seguinte forma:



Prova: de forma a comprovarmos a exactidão do exemplo proposto, podemos escolher um valor do conjunto das soluções:

Exemplo: Se $x = 5$, então

$$2 \times 5 + 1 > 9$$

$$10 + 1 > 9$$

$$11 > 9$$

A inequação
é verdadeira.

Se $x = 20$, então

$$2 \times 20 + 1 > 9$$

$$40 + 1 > 9$$

$$41 > 9$$

A inequação
é verdadeira.

No entanto, se tivermos $x = 2$, por exemplo, aplica-se a seguinte situação:

$$2 \times 2 + 1 > 9$$

$$4 + 1 > 9$$

$$5 > 9$$

A inequação é falsa, pois o valor de $x = 2$ não está contido no conjunto das soluções.

A variável (incógnita) x não pode assumir valores menores ou iguais a 4.

Exemplo 2: como resolver a inequação $2x - 3 - 10x < 13$?

$$2x - 3 - 10x < 13$$

$$2x - 10x < 13 + 3$$

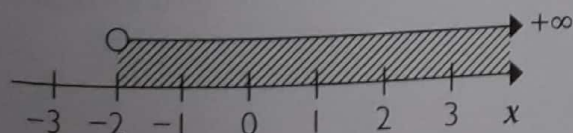
$$-8x < 16$$

$$x > \frac{16}{-8}$$

$$x > -2$$

Observa a mudança do sentido do sinal.

Geometricamente, a situação é representada da seguinte forma:



Solução: $]-2; +\infty[$

Prova: se $x = 1$, então

$$2 \times 1 - 3 - 10 \times 1 < 13$$

$$2 - 13 < 13$$

$-11 < 13$ A inequação
é verdadeira.

se $x = 0$, então

$$2 \times 0 - 3 - 10 \times 0 < 13$$

$$0 - 3 - 0 < 13$$

$-3 < 13$ A inequação
é verdadeira.

Exemplo 3: como resolver $\frac{x}{3} - 2 \geq \frac{x}{2} - 1$?

Para resolver este tipo de inequação, é preciso começar por determinar o menor múltiplo comum (mmc) dos denominadores:

$$\text{mmc}(3; 2) = 6, \text{ logo } \frac{x}{\underset{(2)}{3}} - 2 \geq \frac{x}{\underset{(3)}{2}} - 1$$

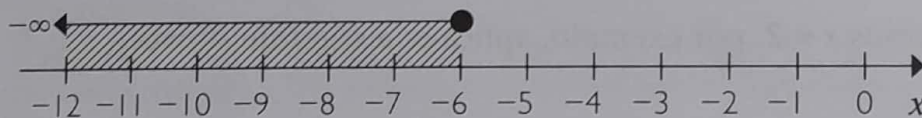
$$2x - 12 \geq 3x - 6$$

$$2x - 3x \geq -6 + 12$$

$(-x \geq 6) \times (-1) \rightarrow$ multiplicando ambos os membros da inequação por um número diferente do zero, obtemos uma inequação equivalente à inequação dada, em que o sentido da desigualdade se mantém caso esse número seja positivo e inverte caso seja negativo.

$$x \leq -6$$

Geometricamente, a situação é representada da seguinte forma:



$$\text{Logo, } x \in]-\infty; -6]$$

Prova: se $x = -12$

$$-\frac{12}{3} - 2 \geq -\frac{12}{2} - 1$$

$$-4 - 2 \geq -6 - 1$$

$-6 \geq -7$ A inequação
é verdadeira.

se $x = -18$

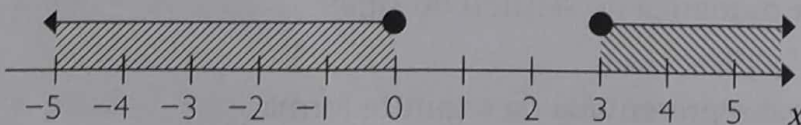
$$-\frac{18}{3} - 2 \geq -\frac{18}{2} - 1$$

$$-6 - 2 \geq -9 - 1$$

$-8 \geq -10$ A inequação
é verdadeira.

Considerando o sistema $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$ e representando-o no eixo real (geometricamente),

obtemos a seguinte situação:



Como podemos observar, os dois conjuntos não têm elementos comuns, isto é, nunca coincidem. Logo, neste caso o sistema de inequações não é satisfeito por qualquer valor de x .

A solução será o conjunto vazio, ou seja, $\{ \}$.

Exemplos de aplicação de inequações

Exemplo 1:

Qual é o maior valor inteiro que se pode atribuir a x de modo que a expressão $\frac{x}{2} + 2x - 7$ assuma um valor negativo?

Resolução:

1.º – equacionar o problema: $\frac{x}{2} + 2x - 7 < 0$.

2.º – resolver a equação obtida: $\frac{x}{2} + 2x - 7 < 0 \Leftrightarrow x + 4x - 14 < 0$, multiplicando ambos os membros da inequação por 2.

$x + 4x - 14 < 0 \Leftrightarrow x + 4x < 14$, adicionando a ambos os membros da inequação o número 14.

$x + 4x < 14 \Leftrightarrow 5x < 14$, juntando os termos semelhantes.

$x < \frac{14}{5}$.

Os valores inteiros não-nulos e não negativos não-nulos e não negativos que satisfazem esta equação são: 1 e 2.

O maior valor inteiro que satisfaz a condição é 2.

Exemplo 2:

A temperatura final ($^{\circ}\text{C}$) de uma mistura de água sujeita a congelamento numa determinada experiência é dada pela expressão $7t + 8 < 2t + 3$.

Determina os valores da temperatura final da mistura.

Resolução:

$7t + 8 < 2t + 3 \Leftrightarrow 7t - 2t < 3 - 8$, isolando os termos que contêm a variável t .

$7t - 2t < 3 - 8 \Leftrightarrow 5t < -5$, simplificando.

$t < -1$, dividindo ambos os membros da inequação por 5.

Na forma de intervalos a solução é: $t \in]-\infty; -1[$

Por conseguinte, a temperatura final de mistura de água sujeita ao congelamento é inferior a -1°C .

2.5 Sistema de inequações

2.5.1 Noção de sistema de inequações lineares com uma variável

Um sistema de inequações representa uma situação em que se pretende determinar o conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente duas inequações.

Por exemplo:
$$\begin{cases} 3x - 2 > 4 \\ 3x - 2 \leq 10 \end{cases}$$

Resolução de sistema de inequações lineares com uma variável

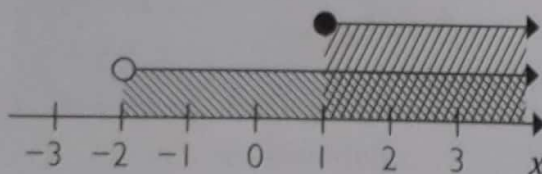
A solução de um sistema de inequações é um conjunto que é composto por possíveis valores que a variável assume para que o sistema exista.

Assim, para se chegar a um conjunto solução devemos, primeiro, achar o conjunto solução de cada inequação do sistema. A partir daí fazemos a intersecção dessas soluções. Ao conjunto formado por essa intersecção chamamos **conjunto solução do sistema**.

Exemplo 1:

Observemos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} x > -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Caso $x > -2$, a solução do sistema abrange todos os valores maiores que 2 até mais infinito e, no caso de $x \geq 1$, de 1 (inclusive) até mais infinito.



Os valores que satisfazem as duas inequações em simultâneo são os seguintes: de 1 (inclusive) a mais infinito.

Por conseguinte, a solução do sistema é $x \in [1; +\infty[$. → Notação na forma de intervalos.

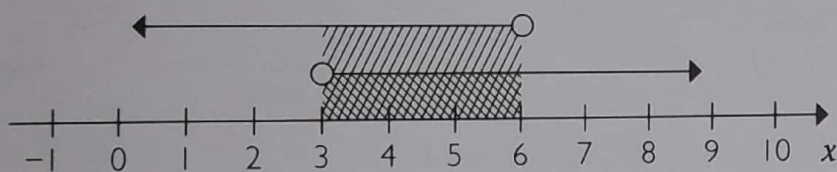
Exemplo 2:

Imaginemos o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} x < 6 \\ x > 3 \end{cases}$$

Agora, procuremos os valores de x que satisfaçam simultaneamente as duas inequações: a inequação $x < 6$ apresenta como conjunto-solução todos os valores inferiores a 6, enquanto a segunda, $x > 3$, engloba todos os valores superiores a 3. Por conseguinte, os valores que satisfazem as duas inequações em simultâneo vão de 3 até 6, sem incluir 3 e 6.

Geometricamente (no eixo real), a situação é representada da seguinte forma:



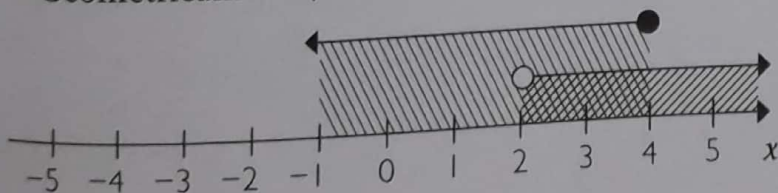
$$x \in]3; 6[$$

Exemplo 3: resolução do sistema $\begin{cases} 3x - 2 > 4 \\ 3x - 2 \leq 10 \end{cases}$

Primeiro, temos de resolver cada uma das inequações:

$$\begin{array}{ll} 3x - 2 > 4 & 3x - 2 \leq 10 \\ 3x > 4 + 2 & 3x \leq 10 + 2 \\ 3x > 6 & 3x \leq 12 \\ x > \frac{6}{3} & x \leq \frac{12}{3} \\ x > 2 & x \leq 4 \end{array} \quad \text{Temos, assim } \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Geometricamente, a situação é representada da seguinte forma:



Logo, a solução é $]2; 4]$.

1. Resolva as seguintes inequações:

a) $3 - 2x < 1$ b) $1 - \frac{x}{3} > 2$ c) $\frac{x+3}{6} > 2 - \frac{4-3x}{2}$

Resolução:

a) $3 - 2x < 1$

$$-2x < 1 - 3$$

$$-2x < -2 \quad | \cdot (-1)$$

$$2x > 2$$

$$x > 1$$

$$S: x \in]1; +\infty[$$

b) $1 - \frac{x}{3} \geq 2$

$$(3) \quad (1) \quad (3)$$

$$3 - x \geq 6$$

$$-x \geq 6 - 3$$

$$-x \geq 3 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \leq -3$$

$$S: x \in]-\infty; -3]$$

c) $\frac{x+3}{6} > 2 - \frac{4-3x}{2}$

$$(1) \quad (6) \quad (3)$$

$$x + 3 > 12 - (12 - 9x)$$

$$x + 3 > 12 - 12 + 9x$$

$$x + 3 > 9x$$

$$x - 9x > -3$$

$$-8x > -3 \quad | \cdot (-1)$$

$$8x < 3$$

$$x < \frac{3}{8}$$

$$S: x \in]-\infty; \frac{3}{8}[$$

2. Resolva os seguintes sistemas de inequações:

$$a) \begin{cases} 3x - 1 > \frac{x}{2} \\ \frac{2-3x}{3} > -4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{3x-1}{2} > x+1 \\ \frac{1-2x}{3} < 2-x \end{cases}$$

Resolução:

$$a) 3x - 1 > \frac{x}{2}$$

$$(2) \quad (2) \quad (1)$$

$$6x - 2 > x$$

$$6x - x > 2$$

$$5x > 2$$

$$x > \frac{2}{5}$$

$$\frac{2-3x}{3} > -4$$

$$(1) \quad (3)$$

$$2 - 3x > -12$$

$$-3x > -12 - 2$$

$$-3x > -14$$

$$3x < 14$$

$$x < \frac{14}{3}$$

$$S: x \in]\frac{2}{5}; \frac{14}{3}[$$

$$b) \frac{3x-1}{2} > x+1$$

$$(1) \quad (2)$$

$$3x - 1 > 2x + 2$$

$$3x - 2x > 2 + 1$$

$$x > 3$$

$$\frac{1-2x}{3} < 2-x$$

$$(1) \quad (3)$$

$$1 - 2x \leq 6 - 3x$$

$$-2x + 3x \leq 6 - 1$$

$$x \leq 5$$

$$S: x \in]3; 5]$$

3. Determina os dois menores números inteiros que satisfazem a seguinte inequação:

$$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{3} < \frac{x}{2}$$

Resolução:

$$\frac{x-1}{4} + \frac{1}{3} < \frac{x}{2}$$

$$(3) \quad (4) \quad (6)$$

$$3x - 3 + 4 < 6x$$

$$3x - 6x < 3 - 4$$

$$-3x < -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}$$

Os dois menores números inteiros que satisfazem a inequação são o 1 e o 2.

1. Representa as seguintes inequações no eixo real e sob a notação de intervalos:

- a) $x \geq -1$ b) $x > 0$ c) $x \leq 5$ d) $x < -25$
 e) $x < 0$ f) $x \leq \pi$ g) $x \leq \frac{1}{2}$ h) $-2 \leq x < 2$
 i) $-1,5 < x < 3,5$ j) $0 < x \leq 2$

2. Tendo em consideração os seguintes conjuntos

$$A =]-\infty; 4]$$

$$B =]-\infty; 1]$$

$$C = [0; 3]$$

determina:

- a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $B \cup C$ d) $A \cap B$
 e) $A \cap C$ f) $B \cap C$ g) $A \cup C \cap B$ h) $A \cap B \cup C$
 i) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

3. Escreve, sob forma de inequação, os seguintes conjuntos, representados sob a notação de intervalos:

- a) $] -2; +\infty[$ b) $] -\infty; 1]$ c) $] -\infty; 3,5[$

4. Resolve as seguintes inequações:

- a) $2x - 3 > 5$ b) $3 - 2(3x + 1) < 3(2x + 1)$
 c) $5x + 2 \geq x - 6$ d) $3x - 2 \leq 3x - 3(2x - 1)$
 e) $\frac{x}{4} + 1 < 0$ f) $\frac{x+5}{3} \leq 1$
 g) $1 \leq \frac{x-3}{3}$ h) $\frac{2x-3}{3} > \frac{x-1}{5}$
 i) $3x - 5 < \frac{3x}{4} + \frac{1-x}{3}$

5. Resolve as seguintes inequações:

- a) $\begin{cases} x + 3 \geq 2 \\ x + 2 < 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 \leq 2x \\ 1 \leq 5 - 2x \end{cases}$
 c) $\begin{cases} \frac{x}{2} \geq 1 \\ x \leq \frac{x}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x < 8 \\ \frac{x}{2} + 1 \geq 2 \end{cases}$

6. Determina os valores inteiros de x que tornam a fracção $\frac{3x-1}{4}$ maior do que 3 e menor do que 5.

7. Um mestre-de-obras tem de ir buscar 1760 sacos de cimento.

Dispõe de um camião que pode levar 150 sacos.

Quantas viagens terá de realizar?

Noção de monómios e polinómios

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- adicionar e subtrair polinómios;
- multiplicar polinómios por monómios;
- multiplicar polinómios por binómios;
- dividir polinómios por monómios;
- decompor polinómios em factores.

3.1 Expressões algébricas

No dia-a-dia usamos muitas vezes expressões que, sem nos apercebermos, representam expressões algébricas ou numéricas.

Observa as seguintes expressões:

$$A = 5 + 20 - 87$$

$$B = 2a + 7b$$

$$C = 9x + 8y - 10$$

$$D = (2 \times 4) + 5 - 10$$

$$E = (3t + 4) - 5s$$

As expressões A e D são expressões matemáticas que envolvem operações com números. São as chamadas expressões numéricas.

As expressões B, C e E são expressões matemáticas que apresentam letras, números e sinais de operações. São as chamadas expressões algébricas ou literais.

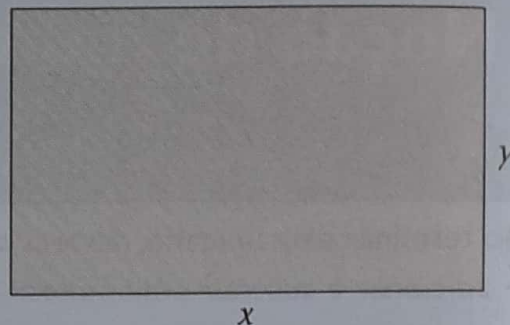
As expressões algébricas são encontradas muitas vezes em fórmulas matemáticas e utilizadas em diversos cálculos, na Matemática, Física, Química, etc. (por exemplo, no cálculo de áreas e volumes, da velocidade, etc.).

Exemplos:

- área do rectângulo: $A = c \times l$
- volume de uma esfera: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$
- $v = v_0 + a \cdot \Delta t$
- $F = m \cdot a$

Uma expressão algébrica é aquela em que se utilizam letras, números e sinais de operações.

Exemplo: como procedemos para expressar o valor do perímetro e da área de um terreno rectangular?



Vamos supor que «x» metros é o comprimento e que «y» metros é a largura. Assim, obteremos:

- perímetro: $P = 2x + 2y$
- área: $A = xy$

São estas as expressões algébricas.

Outros exemplos:

$$2a^3$$

$$a^2 - b^2$$

$$a^2 + b^2$$

$$3x - 2e$$

$$a^2 \pm 2b^2 + b^2$$

$$a^4 + a^3 + a^2 + a$$

3.2 Valor numérico de uma expressão algébrica

Nas expressões algébricas, as letras são chamadas variáveis (ou incógnitas), o que significa que o valor de cada letra pode ser substituído por um valor numérico.

Assim, se numa expressão algébrica substituirmos as letras por números, realizando a operação indicada, obtemos um número que é o «valor numérico» da expressão algébrica para os valores das letras dadas.

Exemplo: se o comprimento de um terreno for de 80 m e a sua largura for de 30 m, obteremos os seguintes valores numéricos:

a) perímetro:

$$P = 2x + 2y = 2 \times 80 + 2 \times 30 = 160 + 60 = 220 \text{ m}$$

b) área:

$$A = xy = 80 \times 30 = 2400 \text{ m}^2$$

3.3 Monómios

Observando as expressões algébricas seguintes podemos verificar que são aplicadas diferentes operações (a adição, a subtração, a multiplicação e a potenciação).

$$3ax; -2xe^2; 8ab^3x; 3ax - 2e; x^2 + 2x - 4$$

Nas três primeiras expressões não aparecem adições nem subtrações: a este tipo de expressões dá-se o nome de **monómios**.

Assim:

Um **monómio** é uma expressão algébrica em que as únicas operações que intervêm entre as variáveis são a multiplicação e a potência de expoente natural.

Num monómio podemos identificar:

- o **coeficiente** do monómio, que é o número que desempenha o papel de multiplicar o valor que as variáveis representam;
- a **parte literal**, que são as variáveis;
- o **grau** do monómio, que é a soma dos expoentes das variáveis.

Exemplos:

a) $3a^2x$

O coeficiente é 3.

A parte literal é a^2x .

O grau é 3.

b) axy^2

O coeficiente é 1.

A parte literal é axy^2 .

O grau é 4.

Nota: se o coeficiente for igual a 1, normalmente não se escreve. Ver exemplo b) acima.

3.4 Monómios semelhantes

São monómios semelhantes aqueles que têm a mesma parte literal, diferindo apenas no coeficiente.

Exemplos:

São monómios semelhantes os seguintes: $2ax^4e^3$; $-3ax^4e^3$; ax^4e^3 ; $5ax^4e^3$.

Não são monómios semelhantes os seguintes: axe^3 ; $3a^2x^4e^3$; $2bx^4$; ax^3e .

É importante não esquecer que os monómios semelhantes têm o mesmo grau.

3.5 Adição e subtração de monómios

Observemos as seguintes operações:

$$A: 5ax^4e^3 - 2ax^4e^3 = (5 - 2) ax^4e^3 = 3ax^4e^3$$

$$B: 4ax^4e^3 + x^2e$$

No primeiro caso, a operação de monómios pode realizar-se, uma vez que estes são semelhantes. Podemos concluir que:

Para adicionar ou **subtrair** dois monómios, estes têm de ser semelhantes. A soma ou a diferença são outros monómios semelhantes, cujo coeficiente é a soma ou a diferença dos coeficientes.

3.6 Potenciação de monómios

Recordas-te que:

$$\bullet 4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$\bullet \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Agora observa:

$$\bullet (-3a)^2 = (-3a) \cdot (-3a) = (-3) \cdot (-3) \cdot a \cdot a = 9a^2$$

$$\bullet (-5x^2b^6)^2 = (-5)^2 \cdot (x^2)^2 \cdot (b^6)^2 = 25 \cdot x^4b^{12}$$

$$\bullet (4y^2z)^3 = (4)^3 \cdot (y^2)^3 \cdot (z)^3 = 64 \cdot y^6z^3$$

Assim, podemos obter a potência de um monómio elevando cada um dos factores ao expoente dessa potência.

3.7 Grau de um monómio

O grau de um monómio é obtido através da soma dos expoentes da sua parte literal (variáveis).

Exemplos:

$$4 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot x$$

Os expoentes são 3, 2 e 1; assim, o grau do monómio é «6», pois $3 + 2 + 1 = 6$.

$9 \cdot x^2 \cdot y^3$ é um monómio do 5.º grau, pois $2 + 3 = 5$.

Nota: o grau de um monómio pode também ser dado em relação a determinada variável.

O grau do monómio $9 \cdot x^2 \cdot y^3$ diz-se de 2.º grau quanto à variável x e de 3.º grau quanto à variável y .

Se um termo (monómio) possuir uma variável com um expoente «invisível», então este termo é de grau 1.

Exemplos:

- $(-\frac{2}{3}x)$ é um monómio de grau 1.
- $2x$ é um monómio de grau 1.

Se um termo (monómio) não tiver uma variável, ou seja, uma parte literal, então o termo é de grau zero.

Exemplo: 5 é um monómio de grau zero.

3.8 Multiplicação de monómios

O produto de dois ou mais monómios é um outro monómio, cujo coeficiente é o produto dos coeficientes e cuja parte literal é o produto de todas as variáveis dos monómios dados, cada uma das quais surge elevada à soma dos expoentes com que figuram em todos os factores.

Multipliquemos, por exemplo, os seguintes monómios: $5x^2$ e $3x^4$.

$$5x^2 \times 3x^4 = (3 \times 5)x^{(2+4)} = 15x^6$$

Outros exemplos:

1) Para calcular o produto dos monómios $4ax^4e^3$, x^2e e $3ab^2e^3$, devemos proceder da seguinte forma:

- a) multiplicar os coeficientes: 4, 1 e 3, respectivamente;
- b) adicionar todos os expoentes das potências de base a ;
- c) adicionar todos os expoentes das potências de base b ;
- d) adicionar todos os expoentes das potências de base x ;
- e) adicionar todos os expoentes das potências de base e .

Resultado: $4ax^4e^3 \times x^2e \times 3ab^2e^3 = 12a^2b^2x^6e^7$

2) Para calcular o produto dos seguintes monómios: $\frac{1}{2}gt^2$ e vt .

$$\frac{1}{2}gt^2 \times vt = \frac{1}{2}g \, vt^{(2+1)} = \frac{1}{2}g \, vt^3$$

3) Para calcular o produto dos monómios seguintes: $2ax^2$, $(-3a^3x)$ e $5e^4x^3$.

$$2 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot a \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot x \cdot x^3 \cdot e^4 = -30 \cdot a^4x^6e^4$$

3.9 Divisão de monómios

Observemos os exemplos seguintes:

- a) $4ax^4e^3 : 2x^2e$
- b) $6x^4 : 6x^3$
- c) $(-9a^5b^3c^2) : 4a^3b$

Resolução:

- a) Dividimos os coeficientes entre si, bem como as partes literais. Assim obtemos o resultado de $2ax^2e^2$.
- b) Usamos o mesmo processo com $6x^4 : 6x^3 = \frac{6}{6} \cdot \frac{x^4}{x^3} = x^{(4-3)} = x$
- c) Pelo mesmo processo chegamos ainda a $(-9a^5b^3c^2) : 4a^3b = -\frac{9}{4}a^2b^2c^2$.
Porquê?

Um processo prático para a divisão de dois monómios é usar a simplificação de fracções.

No exemplo da alínea a):

$$\frac{4ax^4e^3}{2x^2e} = 2ax^2e^2.$$

Outro exemplo:

Se pretendermos calcular a seguinte divisão: $6a^5x^2 : 2a^3x$.

$$6a^5x^2 : 2a^3x = \frac{6a^5x^2}{2a^3x} = 3a^2x.$$

3.10 Polinómios

Quando os monómios não são semelhantes, a sua soma resulta numa expressão algébrica a que se dá o nome de polinómio.

Exemplo:

as expressões $4ax^4e^3 + x^2e + 3ab^2e^3$; $4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$; $\frac{2}{3}ax^2 + a^3x + \frac{1}{2}a$ são polinómios.

Polinómio é a soma de monómios não semelhantes.

Chamam-se **termos** aos monómios que constituem os polinómios.

Podemos assim identificar:

- um binómio, quando o polinómio consta de dois termos.

Exemplos:

$$x^2y + 3ab^2y^3 \quad \text{e} \quad \frac{2}{5}x + 4ax^4$$

- um trinómio, quando o polinómio consta de três termos.

Exemplos:

$$-2x^3 + 3x^2 + 5 \quad \text{e} \quad \frac{1}{3}x^3 + 2x - 6.$$

O **termo independente** de um polinómio é o termo em que não existe a parte literal.

Nos exemplos anteriores, 5 e -6 são termos independentes.

3.11 Grau de um polinómio

Um polinómio é constituído por vários monómios não semelhantes, separados pela operação de adição ou subtração. Assim, o grau de um polinómio corresponde ao monómio de maior expoente. Ou seja, para determinar o grau de um polinómio com mais de um expoente, este corresponde à maior soma dos expoentes dos respectivos monómios.

Exemplos:

- o polinómio $x^3 - x^2 + 2x - 3$ é um polinómio de grau 3 ou de 3.º grau, pois dos 3 monómios que o constituem aquele que tem maior grau é x^3 ;
- o polinómio $-2x^7 + 3x^5 + 5$ é um polinómio de grau 7 ou de 7.º grau, pois dos 3 monómios que o constituem, o termo que tem maior grau é $-2x^7$.
- O polinómio $4a^3 + 5a^5b^3 - 7a^3b^3$ é um polinómio de grau 8, pois o seu termo de maior grau é $5a^5b^3$.
- O polinómio $3x^3 + xy^4 - y$ é um polinómio de grau 5 pois o seu termo de maior grau é xy^4 .

Nota: o polinómio nulo, $P(x) = 0$, é o único polinómio que não possui grau.

Exemplo:

$5x^0 = 5$ é um polinómio de grau zero.

3.12 Adição e subtração de polinómios

Para adicionar ou subtrair polinómios, procedemos da seguinte forma:

- colocamos entre eles o sinal de operação (+) ou (-);
- suprimimos os parênteses;
- reduzimos os termos semelhantes.

Exemplo:

para calcular a soma dos seguintes polinómios procedemos da seguinte forma:

$$A = (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5); B = (5x^3 - x^2 + 2x)$$

$$A + B = (4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (5x^3 - x^2 + 2x)$$

$$= 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 + 5x^3 - x^2 + 2x$$

$$= 4x^4 - 2x^3 + 5x^3 + 3x^2 - x^2 - 2x + 2x + 5$$

$$= 4x^4 + (-2 + 5)x^3 + (3 - 1)x^2 + (-2 + 2)x + 5$$

$$= 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5$$

Podemos assim concluir que para adicionar ou subtrair dois ou mais polinómios, devemos colocá-los uns a seguir aos outros, mantendo os mesmos sinais, e devemos reduzir os termos semelhantes, se os houver. Assim, o polinómio resultante será a soma ou a diferença.

Então, para calcularmos a diferença dos polinómios anteriores:

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) - (5x^3 - x^2 + 2x)$$

Vamos calcular a adição:

$$(4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5) + (-5x^3 + x^2 - 2x) = 4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 4x + 5$$

3.13 Multiplicação de polinómios

3.13.1 Multiplicação de um monómio por um polinómio

Para multiplicar um monómio por um polinómio multiplica-se o monómio por cada um dos termos do polinómio e adicionam-se algebricamente os produtos parciais obtidos.

Exemplo:

$$\begin{aligned} 4x^4(5x^3 - x^2 + 2x) &= 4x^4 \cdot 5x^3 - 4x^4 \cdot x^2 + 4x^4 \cdot 2x \\ &= 20x^7 - 4x^6 + 8x^5 \end{aligned}$$

Podemos concluir que a multiplicação de um monómio por um polinómio efectua-se aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.

Outro exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}a^3(6ax + \frac{3}{2}b^2 - 9x^3) &= \frac{2}{3}a^3 \cdot 6ax + \frac{2}{3}a^3 \cdot \frac{3}{2}b^2 - \frac{2}{3}a^3 \cdot 9x^3 \\ &= 4a^4x + a^3b^2 - 6a^3x^3\end{aligned}$$

3.13.2 Multiplicação de dois polinómios

O produto de dois polinómios obtém-se multiplicando cada termo de um deles por todos os termos do outro, reduzindo os termos semelhantes.

Exemplo:

$$\begin{aligned}(-2x^3 + 3x^2 - 2x + 5)(x + 1) \\ &= -2x^3 \cdot x - 2x^3 \cdot 1 + 3x^2 \cdot x + 3x^2 \cdot 1 - 2x \cdot x - 2x \cdot 1 + 5 \cdot x + 5 \cdot 1 \\ &= -2x^4 - 2x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x + 5x + 5 = 2x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 5\end{aligned}$$

Também se pode usar o algoritmo da multiplicação para efectuar a multiplicação de dois polinómios. Para o conseguirmos devemos cumprir os seguintes passos:

- dispõem-se ordenadamente, e no mesmo sentido, os polinómios dados;
- escreve-se um polinómio por baixo do outro;
- multiplica-se sucessivamente cada termo do polinómio multiplicador por todos os termos do multiplicando, dispondo os produtos parciais obtidos de modo a que os termos semelhantes fiquem todos na mesma coluna;
- adicionam-se, por fim, os termos semelhantes, obtendo-se assim um polinómio reduzido.

3.14 Produtos notáveis

Quadrado de um binómio: adição $(a + b)^2$ ou diferença $(a - b)^2$

$$(a + b) \times (a + b) = ?$$

$$(a - b) \times (a - b) = ?$$

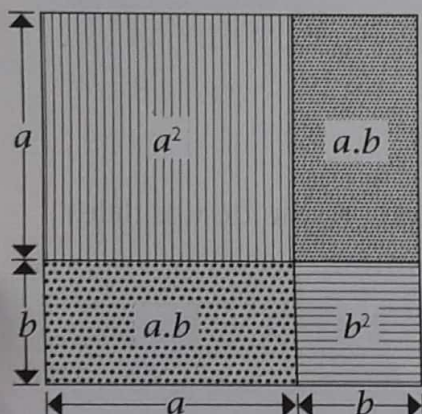
Repara que:

$$(a + b) \times (a + b) = (a + b)^2$$

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo 1: quadrado da soma

Considerando a e b como medidas de comprimento dos segmentos de recta, temos, para o desenvolvimento de $(a + b)^2$:



Assim, fica provado que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ou seja: a medida da área do quadrado de lado $(a + b)$ é igual à soma das medidas dos quadrados de lados a e b , adicionada das áreas de dois rectângulos de lados a e b .

Podemos então concluir que:

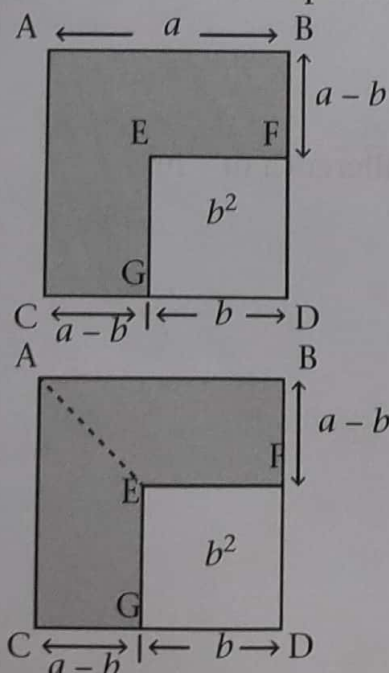
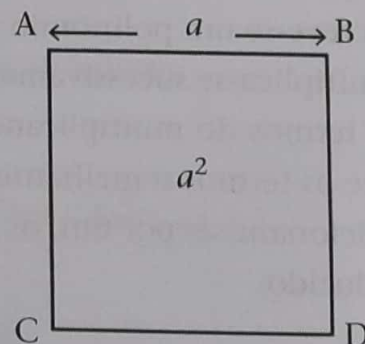
O quadrado de uma soma é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Facilmente podemos verificar que: $(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Poderás assim provar geometricamente a igualdade.

Exemplo 2: diferença de quadrados

Considera o quadrado [ABCD] de lado a .

A diferença dos dois quadrados está representada a tracejado na figura seguinte: Agora vamos calcular a área da parte tracejada, e para isso vamos decompô-la em dois trapézios AEFB e AEGL. Estes dois trapézios são iguais.



$A_{\text{trapézio}} = \frac{(a-b)}{2} \cdot (a-b)$ que corresponde à semi-soma das bases pela altura.

Sendo dois trapézios, a área será:

$$A_{\text{trapézio}} = 2 \cdot \frac{(a-b)}{2} \cdot (a-b) = (a+b)(a-b).$$

Assim: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Devemos ter sempre em conta que o primeiro termo «a» também pode ser negativo, caso em que o sinal da segunda parcela se altera.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (-2x + 3e)^2 &= (-2x)^2 + 2(-2x) \times 3e + (3e)^2 = 4x^2 - 12xe + 9e^2 \\ \text{b)} \quad (-x + 3)^2 &= (-x)^2 + 2 \times (-x) \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

Podemos assim concluir que:

A diferença de quadrados de dois monómios refere-se ao produto da soma de dois monómios pela sua diferença.

3.15 Decomposição de um polinómio em factores

Um dos processos para a factorização de um polinómio é a aplicação da propriedade distributiva (factor comum).

Exemplo:

$$18x^3y^4z - 9x^2y^3 + 27x^2y^4z^2$$

O máximo divisor comum dos termos do polinómio é $9x^2y^3$. Este monómio será o factor comum.

Destacando-o, obtemos: $18x^3y^4z - 9x^2y^3 + 27x^2y^4z^2 = 9x^2y^3 (2xyz - 1 + 3yz^2)$.

3.16 Divisão através da simplificação de um polinómio por um monómio

O quociente da divisão de um polinómio por um monómio é um polinómio cujos termos são os monómios resultantes da divisão de cada termo do polinómio pelo monómio.

Exemplo:

$$(21a^3b^3 - 15a^2b^2 + 6a^2b - 9a^2) : (3a^2) = \frac{21a^3b^3}{3a^2} - \frac{15a^2b^2}{3a^2} + \frac{6a^2b}{3a^2} - \frac{9a^2}{3a^2} = 7ab^3 + 5b^2 + 2b - 3$$

Um pouco de história

Na Antiguidade, recorreu-se pouco às letras na representação de números e relações. Os gregos Euclides e Aristóteles utilizaram-nas para representar números. O seu uso no cálculo algébrico foi depois estudado, nos séculos XV-XVI, pelo matemático alemão Stifel e pelos matemáticos italianos Germano e Bombelli. Porém, foi com o matemático francês François Viète (1540-1603), que introduziu o uso ordenado de letras nas analogias matemáticas, que se desenvolveu o estudo do cálculo algébrico.

1. Calcula o valor numérico da expressão algébrica.

$$-2x + \frac{3}{4}z \text{ se } x = -1 \text{ e } z = 1$$

Resolução:

Vamos substituir as variáveis x e z pelos valores reais -1 e 1 , respectivamente.

$$\text{Teremos: } -2(-1) + \frac{3}{4} \cdot 1$$

$$= 2 + \frac{3}{4}$$

$$\quad (4) \quad (1)$$

$$= \frac{8+3}{4}$$

$$= \frac{11}{4}$$

2. Escreve em forma reduzida os seguintes monómios:

a) $-6x^2(-\frac{1}{4})z^3$

b) $\frac{1}{2}a(-\frac{4}{3})a^3b$

Resolução:

a) $-6x^2(-\frac{1}{4})z^3$

Vamos multiplicar os coeficientes e simplificar.

$$\text{Assim, teremos: } -6x^2(-\frac{1}{4})z^3 =$$

$$= \frac{6}{4}x^2z^3$$

$$= \frac{3}{2}x^2z^3$$

b) $\frac{1}{2}a(-\frac{4}{3})a^3b$

O processo é o mesmo. Multiplicam-se os coeficientes entre si e as variáveis entre si.

$$\frac{1}{2}a(-\frac{4}{3})a^3b = \frac{1}{2}(-\frac{4}{3})a \cdot a^3b$$

$$= -\frac{4}{6}a^4b$$

$$= -\frac{2}{3}a^4b$$

3. Dadas as seguintes expressões,

$$-2a^3x^2y;$$

$$x^2y \cdot k;$$

$$2^3a^3x^2y;$$

$$-5x^2ykp;$$

indica os monómios semelhantes e justifica.

Resolução:

São monómios semelhantes aqueles que têm a mesma parte literal, diferindo apenas os coeficientes. Assim, $-2a^3x^2y$ e $2^3a^3x^2y$ são monómios semelhantes.

4. Dados os seguintes monómios,

$$A = -4ab;$$

$$B = +3ab;$$

$$C = 2,2ab;$$

$$D = -ab;$$

calcula:

a) $A + B$

b) $A - C$

c) $A - B + C - D$

Resolução:

a) $A + B$

$$-4ab + (+3ab)$$

$$= -4ab + 3ab$$

$$= (-4 + 3)ab$$

$$= -ab$$

b) $A - C$

$$-4ab - (2,2ab)$$

$$= -4ab - 2,2ab$$

$$= (-4 - 2,2)ab$$

$$= -6,2ab$$

c) $A - B + C - D$

$$-4ab - (+3ab) + 2,2ab - (-ab)$$

$$= -4ab - 3ab + 2,2ab + ab$$

$$= (-4 - 3 + 2,2 + 1)ab$$

$$= (-7 + 2,2 + 1)ab$$

$$= (-7 + 3,2)ab$$

$$= -3,8ab$$

5. Reduzindo os termos semelhantes, simplifica cada uma das seguintes expressões:

a) $ab - \frac{5}{2}a^2b + 3a^2b + \frac{1}{2}ab$

b) $-4xy - \frac{3}{2}xy^2 - \frac{1}{3}xy + xy - xy^2$

Resolução:

a) $ab - \frac{5}{2}a^2b + 3a^2b + \frac{1}{2}ab$

$$= ab + \frac{1}{2}ab - \frac{5}{2}a^2b + 3a^2b$$

$$= (1 + \frac{1}{2})ab + (-\frac{5}{2} + 3)a^2b$$

$$= \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}a^2b$$

b) $-4xy - \frac{3}{2}xy^2 - \frac{1}{3}xy + xy - xy^2$

$$= -4xy - \frac{1}{3}xy + xy - \frac{3}{2}xy^2 - xy^2$$

$$= (-4 - \frac{1}{3} + 1)xy + (-\frac{3}{2} - 1)xy^2$$

$$= \frac{(-12 - 1 + 3)}{3}xy + (-\frac{3-2}{2})xy^2$$

$$= \frac{(-13 + 3)}{3}xy + (-\frac{5}{2})xy^2$$

$$= -\frac{10}{3}xy - \frac{5}{2}xy^2$$

6. Dados os seguintes polinómios,

$$A = 3x^2 + x - 1; \quad B = 5x^3 - x + 3; \quad C = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{4}; \quad D = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2};$$

calcula:

a) $A + B + C$ b) $A + B - C$ c) $A + B - (C + D)$

Resolução:

a) $A + B + C = (3x^2 + x - 1) + (5x^3 - x + 3) + (-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{4})$

$$= 3x^2 + x - 1 + 5x^3 - x + 3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{4}$$

$$= 5x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x - x + 3x - 1 + 3 + \frac{1}{4}$$

$$= 5x^3 + (3 - \frac{1}{2})x^2 + 3x + (-1 + 3 + \frac{1}{4})$$

$$= 5x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } A + B - C &= (3x^2 + x - 1) + (5x^3 - x + 3) - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{4}\right) \\
 &= 3x^2 + x - 1 + 5x^3 - x + 3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{4} \\
 &= 5x^3 + \left(3 + \frac{1}{2}\right)x^2 + (1 - 1 - 3)x + (-1 + 3 - \frac{1}{4}) \\
 &= 5x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + \left(2 - \frac{1}{4}\right) \\
 &= 5x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } A + B - (C + D) &= (3x^2 + x - 1) + (5x^3 - x + 3) - \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right)\right] \\
 &= 3x^2 + x - 1 + 5x^3 - x + 3 - \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right] \\
 &= 3x^2 + x - 1 + 5x^3 - x + 3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \\
 &= 5x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2 + x - x - 3x + \frac{3}{4}x - 1 + 3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\
 &= 5x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\
 &= 5x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{8 - 1 - 2}{4} \\
 &= 5x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

7. Desenvolve os seguintes produtos notáveis:

a) $\left(\frac{a}{4} + bx\right)^2$ b) $(y - 3x)^2$ c) $1 - \frac{16x^2}{81}$

Resolução:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \left(\frac{a}{4} + bx\right)^2 &= \left(\frac{a}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{4} \cdot bx + (bx)^2 \\
 &= \frac{a^2}{16} + \frac{abx}{2} + b^2x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (y - 3x)^2 &= y^2 - 2 \cdot y \cdot 3x + 3x^2 \\
 &= y^2 - 6xy + 9x^2
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } 1 - \frac{16x^2}{81} = \left(1 - \left(\frac{4x}{9}\right)\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{4x}{9}\right)\right)$$

8. Efectua as seguintes operações:

a) $\left(\frac{3}{4}st + \frac{1}{2}st^2 - s\right) \cdot 2s^2t$ b) $(1 - mx + 5m^2z) \cdot (-3mx^2)$

Resolução:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \left(\frac{3}{4}st + \frac{1}{2}st^2 - s\right) \cdot 2s^2t &= \frac{6}{4}s^3t^2 + \frac{2}{2}s^3t^3 - 2s^3t \\
 &= \frac{3}{2}s^3t^2 + s^3t^3 - 2s^3t
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } (1 - mx + 5m^2z) \cdot (-3mx^2) = -3mx^2 + 3m^2x^3 - 15m^3x^2z$$

9. Dados os polinómios P e Q,

$$P = 5x^3 - \frac{2}{3}x + 1; \quad Q = 3x^2 - x$$

efectua $P \cdot Q$.

Resolução:

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= (5x^3 - \frac{2}{3}x + 1) \cdot (3x^2 - x) \\ &= 5x^3 \cdot 3x^2 + 5x^3 \cdot (-x) - \frac{2}{3}x \cdot 3x^2 - \frac{2}{3}x \cdot (-x) + 1 \cdot 3x^2 + 1 \cdot (-x) \\ &= 15x^5 - 5x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 3x^2 - x \\ &= 15x^5 - 5x^4 - 2x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x \end{aligned}$$

10. Efectua as divisões:

a) $(-6ax^2 - 3a^3x^2 + 9ax^3) : (-3ax^2)$

b) $(\frac{3}{2}a^2b^3c - 2a^3c) : (-\frac{5}{2}a^2c)$

Resolução:

a) $(-6ax^2 - 3a^3x^2 + 9ax^3) : (-3ax^2)$

$$= \frac{-6ax^2}{-3ax^2} - \frac{3a^3x^2}{-3ax^2} + \frac{9ax^3}{-3ax^2}$$

$$= 2 + a^2 - 3x$$

b) $(\frac{3}{2}a^2b^3c - 2a^3c) : (-\frac{5}{2}a^2c)$

$$= \frac{\frac{3}{2}a^2b^3c}{-\frac{5}{2}a^2c} - \frac{2a^3c}{-\frac{5}{2}a^2c}$$

$$= -\frac{3}{5}b^3 + \frac{4}{5}a$$

- Calcula o valor numérico da expressão algébrica $a^2 - 2ax + 4$, sabendo que:
 - $a = 2$ e $x = 3$
 - $a = -2$ e $x = 1$
 - $a = 2$ e $x = -1$
 - $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{3}$
- Verifica se as expressões seguintes são ou não são monómios e, nos casos afirmativos, indica os respectivos coeficientes e partes literais:
 - $-\frac{3}{4}$
 - $abc + a^2b^2c^2$
 - $\frac{abc}{3}$
 - $\frac{-2abx}{5}$
 - $-x^2y^3z^5$
- Indica os coeficientes, a parte literal e o grau de cada um dos seguintes monómios:
 - $10x^2y$
 - $-xy^2z$
 - $-\frac{1}{5}abc^4$
 - -9
 - $6xy^2$
 - k^3z^2
- Apresenta, na sua forma reduzida, cada um dos seguintes monómios:
 - $2x(3x^3)$
 - $-2x^2(\frac{2}{4})xy^2$
 - $-4ay(\frac{3}{4}ab^7)$
 - $-\frac{1}{3}a^3(\frac{-3}{2})ab^3$
- Diz, justificando, quais dos monómios seguintes são semelhantes:
 - $-x^2y, xy^2z, \frac{2}{3}x^2y, \frac{1}{4}xy^2, -7x^2y$
 - $\frac{3}{2}ab, -\frac{3}{2}aby, \frac{1}{3}ba, \frac{xy}{2}$
 - $2ab, \frac{5}{7}ax, -ab, -\frac{ab^2}{4}, \frac{9ab}{5}, \frac{a^2b}{7}$
- Determina a soma algébrica dos seguintes monómios:
 - $xy, \frac{3}{2}xy$
 - $3a, -5a, -\frac{7}{2}a, -4a$
 - $-\frac{aby}{3}, \frac{5}{6}aby, -2aby, -\frac{1}{2}aby$
- Efectua as seguintes operações:
 - $2ax^4 - 3ax^4 + 5ax^4$
 - $2x^3 - x + x^3 + 3x^3 + 2x$
 - $7xy + (-5xy)$
 - $\frac{5}{6}ax^2 + (-\frac{3}{4}ax^2)$
 - $-\frac{3}{10}by^3 + \frac{by^3}{2} - \frac{2}{5}by^3$

8. Tendo em consideração os seguintes monómios:

$$A = -2x^2$$

$$B = -3x^2$$

$$C = \frac{1}{3}xy$$

$$D = \frac{2}{3}xy$$

$$E = -3x^2y$$

$$F = \frac{1}{3}x^2y$$

Efectua os seguintes cálculos:

a) $A + B$

b) $C + D$

c) $E - F$

d) $A - B + C$

e) $A + B - C$

f) $A - B + C - D$

g) $A + B - C + D - E + F$

9. Reduzindo os termos semelhantes, simplifica cada uma das seguintes expressões:

a) $a + b + 3a + 3b + 7a$

b) $x + x^2 - \frac{x}{2} + 7x^2 + \frac{2}{3}x$

c) $pq + p + n - \frac{1}{2}p + 3q - \frac{pq}{5}$

d) $2ab - \frac{a}{3} - 4ab - 7ab - \frac{2}{3}c + a$

e) $a + 3ab - a^2 + 2ab^2 - 7a - ab - 2a^2 + ab^2$

10. Considera o seguinte monómio:

$$Q = -\frac{3}{2}ab(-\frac{4}{9}ab^3)$$

10.1 Simplifica-o e indica o seu coeficiente e a sua parte literal.

11. Dados os polinómios:

$$A = (-x^3 + 5x^2 - x + 1)$$

$$B = (5x^2 - x - 3)$$

$$C = (x^3 - 5x^2 + x - 1)$$

$$D = (-5x^2 - x + 3)$$

Calcula:

a) $A + B$

b) $A + B - C$

c) $A - C$

d) $A + B - C + D$

e) $B + C$

f) $B - C$

g) $C + D$

h) $C - D$

12. Desenvolve os seguintes produtos notáveis:

a) $(a + 2b)^2$

b) $(2x^2 - y)^2$

c) $(2a + 3b)^2$

d) $(2a - 3b)^2$

e) $(-3x + y)^2$

13. Decompõe num produto de dois binómios:

a) $a^2 - 49$

b) $x^2 - 25y^2$

c) $16x^2 - 36$

d) $a^2 - 100x^2y^2$

e) $(\frac{9}{16}a^2) - (\frac{1}{4}x^2y^2)$

f) $121m^2 - 144n^2$

g) $x^2 - \frac{y^2}{64}$

h) $(\frac{25m^2}{36}) - (\frac{n^2}{81})$

i) $1 - \frac{16z^2}{9}$

j) $\frac{4}{9} - (x + y)^2$

k) $(x + y)^2 - z^2$

14. Calcula o valor das seguintes diferenças de quadrados, sem desenvolver qualquer um dos quadrados:

- a) $382 - 282$ b) $192 - 142$ c) $482 - 452$ d) $1372 - 1352$

15. Efectua as seguintes operações, simplificando os resultados:

- a) $-\frac{5}{2}a[-\frac{3}{2}x^2 - a + \frac{1}{3}]$ b) $2xy(8xy - 2xy^2 + 3)$
 c) $(\frac{3}{4}a^3b) \cdot (-2ab + \frac{1}{2}ax + a)$ d) $(3m^3n - mn + \frac{3}{2}mn^2 - \frac{3}{4}) \cdot (-2a)$
 e) $\frac{1}{2}x(\frac{2}{3}x + \frac{8}{5})$ f) $(18x^4 - 24x^3 - 6x) : 6x$
 g) $(20a^3b^4 - 16a^4b^5) : 4a^3$ h) $(\frac{3}{2}a^3b^4 - \frac{5}{4}a^2b^3c - ab^5) : (-2ab^3)$
 i) $(-6a^4x^2 - 3a^3x^2) : (-3ax^2)$ j) $(\frac{3}{2}m^8 + 6m^6 - m^4) : \frac{3}{4}m^3$
 k) $0,5mx(2 - 4m + 8x^2)$ l) $(-28x^6 - 21x^5 + 35x^3) : 7x^2$

16. Multiplica os seguintes polinómios:

- a) $5x^2 - 6$ e $4x^3 + x$ b) $x - 3x^2 + \frac{1}{2}$ e $-x^3 + 3$
 c) $-\frac{5}{2}x^4 + 4x^2 - \frac{5}{2} + x$ e $-\frac{4}{5}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{4}{3}$
 d) $(\frac{3}{2} - a)(-\frac{5}{3}a - x)$ e) $(\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})(\frac{2}{5}x - \frac{3}{4})$

17. Se $A = 2x^2 + 3x - 1$, $B = x - \frac{1}{2}$ e $C = 2x^3 - 3x$, calcula:

- a) $A \times B - C$ b) $(A - B) \times C$ c) $A \times C - 2B$ d) $A + B - B \times C$

18. Decompõe em factores os polinómios seguintes:

- a) $3x^3 - 6x$ b) $2a - 6b$ c) $ma + na$ d) $9ax + 18bx$
 e) $m^4 - m^3$ f) $3ab - 6a^2b$ g) $a^3x^2 + 4ax - 4a^2x^3$
 h) $15a^6x - 20a^2 + 10x$ i) $7mx^4 - 14m^2x^3 + 21a^3x^2$
 j) $12m^2n^6 - 6mn^5 - 24m^2n^5$ k) $9x^4 + 12x^2y + 4y^2$
 l) $12a^2x^3 + 16a^3x^2 + 20a^3x^3$ m) $12x^2y^6 - 6xy^5 - 24x^2y^5$
 n) $\frac{25x^2}{36} - \frac{y^2}{16}$ o) $10a^2 - 15a$

19. Calcula, utilizando o processo de decomposição em factores:

- a) $85^2 - 15^2$ b) $125^2 - 25^2$ c) $1001^2 - 999^2$

Equação quadrática

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- resolver equações quadráticas aplicando a lei do anulamento do produto;
- resolver equações quadráticas aplicando a fórmula resolvente;
- resolver equações quadráticas através da soma e do produto das raízes da equação;
- equacionar e resolver problemas concretos.

4.1 Introdução

Nas classes anteriores estudámos equações do 1.º grau, ou seja, equações do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$. Agora vamos estudar outro tipo de equações, as equações quadráticas. Nestas equações o maior expoente da incógnita tem grau 2.

Vamos lembrar...

Uma **equação** é uma igualdade onde figura, pelo menos, uma letra (incógnita).
Exemplo $3 + x = 8$.

A **raiz** ou **solução de uma equação** é um número que, colocado no lugar da incógnita, transforma a equação numa igualdade numérica verdadeira.

Duas equações são **equivalentes** quando as soluções da primeira são soluções da segunda, e vice-versa.

Obtemos uma **equação equivalente** quando passamos um termo de um membro para outro, desde que se lhe troque o sinal.

Obtemos uma **equação equivalente** quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero.

As **equações do 2.º grau** ou **equações quadráticas** representam-se pela forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a , b e c são coeficientes reais e $a \neq 0$.

- a é o coeficiente de x^2 ;
- b é o coeficiente de x ;
- c é o termo independente.

Uma equação diz-se completa se b e c forem diferentes de zero; caso contrário, temos uma equação incompleta.

Quando uma equação do 2.º grau tem a forma $ax^2 + bx + c = 0$, diz-se que a equação está na **forma canônica**.

Exemplos:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0,$$

$$a = 3, b = 2 \text{ e } c = -5$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$a = -\frac{1}{3}, b = 3 \text{ e } c = -10$$

$$3x^2 - 8x + 1 = 0,$$

$$a = 3, b = -8 \text{ e } c = 1$$

$$-0,3x^2 - 1 = 0,$$

$$a = -0,3, b = 0 \text{ e } c = -1$$

4.2 Equação incompleta do 2.º grau

Uma equação do segundo grau é incompleta se $b = 0$ ou $c = 0$. Na equação incompleta, o coeficiente a é diferente de zero.

Exemplos:

$$-5x^2 + 3x = 0, \text{ em que } a = -5, b = 3 \text{ e } c = 0$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 9 = 0, \text{ em que } a = \frac{1}{3}, b = 0 \text{ e } c = -9$$

$$2x^2 = 0, \text{ em que } a = 2, b = 0 \text{ e } c = 0$$

Como verificar se um número real é raiz ou solução de uma equação quadrática?

Vejamos o exemplo: vamos verificar se 7 é solução da equação $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Para isso, temos de substituir a variável da equação dada por 7.

$$\text{Assim: } x = 7 \Rightarrow 2 \times 7^2 + 5 \times 7 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \times 49 + 35 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 98 + 35 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 133 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 126 = 0 \text{ (proposição falsa). Logo, 7 não é solução da equação.}$$

Verifica se -1 é solução da equação $x^2 + 2x + 1 = 0$. Recorrendo ao processo anterior, temos:

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \text{ (proposição verdadeira). Logo, -1 é solução da equação.}$$

4.3 Resolução de equações quadráticas

Lembra-te que resolver uma equação é determinar todas as soluções dessa equação.

4.3.1 Resolução de equações incompletas

Para as equações do tipo $ax^2 = 0$ basta dividir todos os termos da equação por a para obter $x^2 = 0$.

Isto significa que a equação possui duas raízes iguais a zero.

Exemplos:

$4x^2 = 0$ – A equação é do tipo $ax^2 = 0$, por isso tem duas raízes nulas.

$-\frac{2}{3}x^2 = 0$ – A equação é do tipo $ax^2 = 0$, por isso tem duas raízes nulas.

Seja $ax^2 + c = 0$ (o coeficiente b é nulo) uma equação quadrática. Dividindo a equação pelo coeficiente $a \neq 0$ temos: $x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ isolando a incógnita

Se $(-\frac{c}{a}) \geq 0$ teremos $x_1 = -\sqrt{(-\frac{c}{a})}$ e $x_2 = \sqrt{(-\frac{c}{a})}$

Se $(-\frac{c}{a}) < 0$ a equação não tem raízes em $\mathbb{R}$.

Exemplos:

$$2x^2 - 8 = 0$$

Vamos dividir toda a equação por 2. Temos: $x^2 - 4 = 0$. Seguidamente, vamos passar o termo independente para o segundo membro: $x^2 = 4$. Assim, a equação tem duas raízes: $x = 2$ ou $x = -2$.

$$4x^2 + 5 = 0.$$

Usando o mesmo procedimento verificarás que a equação não tem raízes reais.

Para as equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ factorizamos a equação para obter $x(ax + b) = 0$ e a equação terá duas raízes, nomeadamente, $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Exemplo:

$4x^2 - 12x = 0$ Se factorizarmos a equação pondo em evidência o factor $4x$, obtemos $4x(x - 3) = 0$. As soluções são: $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.

Para a resolução de algumas equações quadráticas também se pode usar a lei do anulamento do produto.

4.3.2 Lei do anulamento do produto

Analisemos o seguinte problema:

Qual o número pelo qual devemos multiplicar 7 para obter zero?

Ou seja: $7x = 0$

A resposta será **zero**.

Recordemos que o zero é um elemento absorvente na multiplicação.

Isto quer dizer que se um produto de dois factores é zero, um dos seus factores, pelo menos, é zero; e se um dos factores é zero, o produto também será zero.

Em representação simbólica:

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \quad \text{Lei do anulamento do produto}$$

A lei do anulamento do produto permite-nos resolver equações quadráticas com facilidade e rapidez.

Observemos alguns tipos de equações que podem ser resolvidas pela aplicação da lei do anulamento do produto:

a) $ax^2 = 0$

b) $ax^2 + b = 0$

c) $ax^2 + bx = 0$

Por exemplo:

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2) = 0 \text{ ou } (x - 2) = 0$ pela lei do anulamento do produto.

Assim, $(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$S = \{-2, 2\}$$

Outros exemplos:

Consideremos a equação $3x^2 + 7x = 0$.

Vamos resolver esta equação através da aplicação da lei do anulamento do produto. Para isso, começamos por factorizar o binómio $3x^2 + 7x$.

Assim, chegamos a $3x^2 + 7x = x(3x + 7)$ pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação (factor x em evidência).

Deste modo, $3x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 7) = 0$.

Pela lei do anulamento do produto, temos: $x(3x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x + 7 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{7}{3}$

$$S = \{-\frac{7}{3}, 0\}$$

Vamos resolver as equações pela lei do anulamento do produto:

a) $x(x + 3) + 2(x + 3) = 0$

b) $(x - 2)^2 - 9 = 0$

a) $x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 3) = 0$, pondo em evidência o factor comum $(x + 3)$.

$$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -3$$

$$S = \{-3, -2\}.$$

b) Para resolver estas equações, começamos por factorizar o binómio $a^2 - b^2$.

Observa:

$(x - 2)^2 - 9 = 0$ é uma diferença de dois quadrados, logo: $(x - 2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow [(x - 2) + 3][(x - 2) - 3] = 0 \Leftrightarrow (x - 2 + 3)(x - 2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 5) = 0$; e pela lei do anulamento do produto, obtemos: $(x + 1)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$, ou $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 5$.

$$S = \{-1, 5\}$$

Agora resolve as seguintes equações:

a) $(x - \frac{1}{7})^2 = \frac{16}{49}$

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1) = 0$ c) $4x^2 = 100$

Resumindo

Para resolver uma equação pela lei do anulamento do produto devemos proceder do seguinte modo:

- tornar zero o segundo membro;
- decompor em factores o primeiro membro.

4.3.3 Equações quadráticas completas

Já sabemos que estamos perante uma equação completa se a , b e c forem diferentes de zero. Para resolver este tipo de equação é mais fácil usar a **fórmula resolvente** (atribuída a Bhaskara). Esta fórmula permite uma obtenção mais rápida das soluções de qualquer equação quadrática.

A fórmula resolvente para as equações completas de 2.º grau é a seguinte:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ter duas soluções. Por isso representa-se frequentemente deste modo: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

A expressão dentro do radical chama-se binómio discriminante da equação e representa-se pela letra grega Δ . Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vamos determinar o binómio discriminante de algumas equações quadráticas.

a) $-2x^2 + 5x - 2 = 0$

$a = -2, b = 5 \text{ e } c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) =$
 $= 25 - 16 = 9$

Logo $\Delta = 9$.

c) $2x^2 + 3 = 0$

$a = 2, b = 0 \text{ e } c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 2 \times 3 =$
 $= 0 - 24 = -24$

Logo, $\Delta = -24$.

b) $x^2 + 3x + 1 = 0$

$a = 1, b = 3 \text{ e } c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 =$
 $= 9 - 4 = 5$

Logo, $\Delta = 5$.

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1, b = -6 \text{ e } c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 =$
 $= 36 - 36 = 0$

Logo, $\Delta = 0$.

É importante repararmos que no cálculo do binómio discriminante temos três resultados possíveis.

$\Delta < 0$: nesta condição a equação não tem solução real, uma vez que não existe raiz quadrada real de um número negativo.

$\Delta = 0$: nesta condição a equação tem duas soluções iguais ($x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, raiz dupla).

$\Delta > 0$: nesta condição a equação tem duas soluções reais e diferentes ($x_1 \neq x_2$).

Vamos agora resolver algumas equações usando a fórmula resolvente

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

a) $-2x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) =$
 $= 25 - 16 = 9$

Pela fórmula resolvente temos: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(-2)} = x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{-4}$

$S = x_1 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$

b) $x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times (-6) =$
 $= 3 + 24 = 27$

Assim, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Pela fórmula resolvente temos: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{2 \times 1}$

$S = x_1 = \frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ e } x_2 = \frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

Resumindo

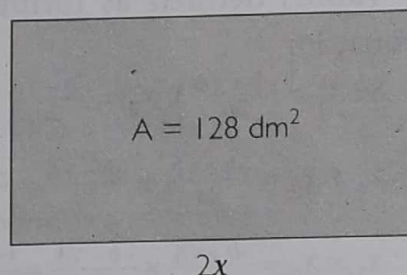
Para usar a fórmula resolvente na resolução de equações, devemos proceder deste modo:

- identificar os coeficientes: a , b e c ;
- calcular o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$;
- escrever a fórmula resolvente e aplicá-la.

4.4 Aplicações de equações quadráticas na resolução de problemas concretos

Há problemas concretos que podem ser resolvidos utilizando conhecimentos das equações quadráticas. Observemos alguns exemplos:

- a) Um carpinteiro pretende construir uma mesa rectangular com uma superfície de 128 dm^2 , de modo a que o seu comprimento seja o dobro da largura. Que dimensões deverá ter esta mesa? Sendo x a largura, o comprimento será $2x$. Como a área de um rectângulo é dada por



$A = c \cdot l$, isto significa que $2x \cdot x = 128$.

$$2x^2 = 128 \Leftrightarrow x^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 8)(x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -8. \text{ Esta solução não está correcta. Porquê?}$$

Resposta: a largura da mesa deve ser de 8 dm e o comprimento de 16 dm.

- b) O raio de um círculo mede 6 cm. Quantos centímetros se devem subtrair ao raio para se obter outro círculo de área igual a $50,24 \text{ cm}^2$? Sabendo que a área do círculo é dada pela relação $A = \pi r^2$ e se x for o número de centímetros que devemos subtrair, então teremos a seguinte equação: $\pi(6 - x)^2 = 50,24$. Se $\pi = 3,14$, obtemos então: $3,14(6 - x)^2 = 50,24$. Dividindo toda a expressão por 3,14, teremos:

$$(6 - x)^2 = 16 \Leftrightarrow 36 - 12x + x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0$$

Resolvendo a equação pela fórmula resolvente: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 1 \times 20 = 144 - 80 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2 \times 1} = x_{1,2} = \frac{12 \pm 8}{2}$$

$x_1 = \frac{12 + 8}{2} = \frac{20}{2} = 10$ (não é solução do problema, embora seja solução da equação. Porquê?) e $x_2 = \frac{12 - 8}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

De acordo com a questão colocada, 2 é a solução única do problema.

- c) Uma criança atirou uma bola de cimento de uma altura de 10 m. A bola foi atirada com força para cima e em frente. Passados t segundos após a bola ser atirada, desprezando a resistência do ar, a altura, h , em metros, a que a bola se encontra, é dada pela função cuja expressão é: $h(t) = 10 + 20t - 5t^2$. Ao fim de quanto tempo a bola atingiu o solo (com valor aproximado às centésimas)? Resposta: a bola atingiu o solo em 2 segundos.

4.4.1 Soma e produto das raízes de uma equação quadrática

A fórmula resolvente aplica-se também na soma e no produto das raízes da equação.

Vamos deduzir as fórmulas da soma e do produto a partir das raízes da equação:

Se $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ forem as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}. \text{ Mas como}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac, \text{ então temos } \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e $\Delta \geq 0$, então:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemplos:

- a) Calcula a soma e o produto das raízes da equação $2x^2 + 5x + 4 = 0$.

Primeiro, vamos verificar qual é o sinal do Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 25 + 32 = 57.$$

O binómio discriminante é positivo, daí que:

$$\text{a soma é: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$\text{o produto é: } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{-2} = -2.$$

- b) Determina o valor de b , sabendo que a soma das raízes de $x^2 + bx + 5 = 0$ é igual a 6.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6 \Leftrightarrow -\frac{b}{1} = 6; \text{ logo, } b = -6.$$

Construção de equações quadráticas a partir das suas raízes

A equação é $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Se dividirmos ambos os membros por a , teremos: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Vamos reescrever a expressão anterior: $x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0$

Sendo a soma $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e produto $S = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ substituindo na equação, teremos: $x^2 + Sx + P = 0$, onde os coeficientes S e P representam a soma e o produto, respectivamente.

Vamos designar a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $S = x_1 + x_2$ e o produto por $P = x_1 \times x_2$.

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo por $a \neq 0$, obtemos a expressão:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} = 0, \text{ mas } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = S \text{ e } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = P.$$

Por isso, a equação assume a seguinte forma: $x^2 - Sx + P = 0$.

$x^2 - Sx + P = 0$ é uma equação quadrática, cuja soma das raízes é igual a S e cujo produto é igual a P .

Exemplos:

Vamos construir uma equação quadrática cuja soma (S) seja igual a 6 e cujo produto (P) seja igual a 10.

Sendo $x^2 - Sx + P = 0$, então obteremos a seguinte equação: $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Um pouco de história

Bhaskara Acharya nasceu na Índia no século XII. A sua família estava muito ligada à Astrologia, área a que também se dedicou. Procurou, porém, seguir uma vertente mais científica, vindo assim a dedicar-se mais à Matemática e à Astronomia. Tornou-se no maior matemático e astrónomo indiano da sua época, tendo mesmo chegado a director do observatório de Ujjain, o mais importante centro de estudos matemáticos e astronómicos do seu tempo.

1. Resolva as equações usando a lei do anulamento do produto:

a) $(x - \frac{1}{2})(x + 3) = 0$

b) $8x^2 - 2 = 0$

Resolução:

a) $(x - \frac{1}{2})(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2}) = 0$ ou $(x + 3) = 0$, aplicando a lei do anulamento do produto.

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } x_2 = -3 \quad S = \{-3, \frac{1}{2}\}$$

b) $8x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ou } 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$$

2. Calcula o discriminante de cada equação e analisa as raízes em cada caso:

a) $x^2 + 9x + 8 = 0$

b) $9x^2 - 24x + 17 = 0$

Resolução:

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 9^2 - 4 \times 1 \times 8 = 81 - 32 = 49$. O discriminante é positivo, logo a equação tem duas raízes reais diferentes.

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 24^2 - 4 \times 9 \times 17 = 576 - 612 = -36$. O discriminante é negativo, logo a equação não tem raízes reais.

3. Na equação $x^2 + 2x + m = 0$, calcula o valor de m de modo a que:

a) A equação tenha soluções reais.

b) A equação não tenha soluções reais.

Resolução:

a) A condição para que uma equação tenha raízes reais é a seguinte: $\Delta \geq 0$; ou seja, $b^2 - 4ac \geq 0$.

Sendo $a = 1$, $b = 2$ e $c = m$, então temos: $2^2 - 4 \times 1 \times m \geq 0 \Leftrightarrow 4m \geq -4$; logo, $m \geq -1$.

b) A condição para que uma equação não tenha raízes reais é a seguinte: $\Delta < 0$; ou seja, $b^2 - 4ac < 0$.

Sendo $a = 1$, $b = 2$ e $c = m$, então temos: $2^2 - 4 \times 1 \times m \leq 0 \Leftrightarrow 4m < -4$; logo, $m < -1$.

4. Resolva as equações usando a fórmula resolvente:

a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

b) $x^2 + \sqrt{5}x = 10$

Resolução:

a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

A fórmula resolvente é: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e o discriminante é $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 1}{2 \times 6} = \frac{5 + 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 1}{2 \times 6} = \frac{5 - 1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$$

b) $x^2 + \sqrt{5}x = 10 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{5}x - 10 = 0$

A fórmula resolvente é: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e o discriminante é $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 5 + 40 = 45$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{2} = \frac{-4\sqrt{5}}{2} = -2\sqrt{5}$$

$$S = \{-2\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

5. Equaciona e resolve os problemas seguintes:

- a) Um pai tem 28 anos de idade e o filho 2 anos. Daqui a quantos anos é que o produto das duas idades será igual a 120 anos?

Resolução:

A equação representa-se do seguinte modo: $(28 + x)(2 + x) = 120$

$$(28 + x)(2 + x) = 120 \Leftrightarrow x^2 + 30x - 64 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 30^2 - 4 \times 1 \times (-64) = 900 + 256 = 1156$$

$$\sqrt{\Delta} = 34$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 + 34}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 - 34}{2} = \frac{-64}{2} = -32. \text{ Esta solução não está correcta.}$$

Resposta: daqui a 2 anos o produto das idades será igual a 120 anos.

- b) Uma machamba de algodão tem a forma quadrada. Qual é a medida do seu lado, sabendo que se acrescentarmos 2 metros a um dos lados e subtrairmos 10 metros ao outro obtemos um rectângulo que tem uma área igual a 8800 m²?

Resolução:

A equação assume a seguinte forma: $(x + 2)(x - 10) = 8800$

$$(x + 2)(x - 10) = 8800 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 8820 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-8820) = 64 + 35280 = 35344$$

$$\sqrt{\Delta} = 188$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 188}{2} = \frac{196}{2} = 98$$

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 188}{2} = \frac{-180}{2} = -90. \text{ Esta solução não está correcta.}$$

Resposta: a medida do lado é de 98 metros.

1. Resolve as seguintes equações aplicando a lei do anulamento do produto:

a) $-2x^2 + 8 = 0$

b) $(x + 2)(x - \sqrt{3}) = 0$

c) $(x - 1)^2 - 4 = 0$

d) $(x + 3)^2 + x + 3 = 0$

e) $x^2 = 5x$

f) $2x^2 + 9x = 0$

2. Calcula o discriminante para cada equação:

a) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

b) $x^2 - 2x + 4 = 0$

c) $3x^2 - 15x + 12 = 0$

d) $10x^2 + 72x - 64 = 0$

e) $x^2 + 4\sqrt{3}x + 9 = 0$

3. Escreve as seguintes equações na sua forma canónica:

a) $6x^2 = 5x - 1$

b) $3x^2 - 4x = 4$

c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x = 2$

d) $0,5x = -0,18 - 2x^2$

4. Forma a equação quadrática:

a) $a = 3, b = -2$ e $c = 1$

b) $a = -1, b = 3$ e $c = 0$

c) $a = 1, b = 0$ e $c = -5$

5. Verifica se:

a) 2 é a solução correcta da equação $5x^2 - 9x - 3 = 0$;

b) -1 é a solução correcta da equação $-x^2 + 1 = 0$;

c) 4 é a solução correcta da equação $x^2 - 3x - 4 = 0$.

6. Indica os valores dos coeficientes a, b e c nas equações seguintes:

a) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

b) $x^2 - 2x + 4 = 0$

c) $3x^2 - 15x + 12 = 0$

d) $10x^2 + 72x - 64 = 0$

e) $x^2 + 4\sqrt{3}x + 9 = 0$

7. Qual das seguintes equações tem a mesma solução que $3x^2 = 12$?

a) $x^2 = 12 - 3$

b) $x^2 = 3 \times 12$

c) $x^2 = \frac{12}{3}$

d) $x^2 = \frac{3}{12}$

8. Resolve as equações em baixo aplicando a fórmula resolvente:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $3x^2 - x - 2 = 0$

c) $2x^2 - 2x - 12 = 0$

d) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

e) $3x = -1 - 2x^2$

f) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

g) $x^2 + \sqrt{2}x + 9 = 0$

9. Encontra dois números cuja soma seja 13 e o produto 40.

10. Equaciona e resolve os problemas seguintes:

a) A soma de um número natural com o seu quadrado é 132. Determina que número é esse.

b) Indica dois números inteiros consecutivos, sabendo que a soma dos seus quadrados é 25.

c) Um ceramista usou 2000 azulejos quadrados para revestir 45 m^2 de parede. Calcula a medida de lado de cada azulejo.

d) Um objecto desloca-se, com um movimento uniforme, à velocidade de 16 m/s . Passados dois segundos, parte um outro objecto (da posição de repouso e do mesmo lugar), seguindo na mesma direcção, animado por um movimento uniformemente acelerado na proporção de 5 m/s^2 . De quanto tempo precisa o segundo objecto para alcançar o primeiro?

11. Na equação $(m - 1)x^2 + 2x - 8 = 0$, calcula o valor de m de modo que:

a) a equação apresente uma raiz dupla;

b) uma das raízes da equação seja igual a 2.

12. Atenta na equação $x^2 + 2x + m = 0$.

12.1 Calcula o valor do discriminante e determina o número de soluções dessa equação, se:

a) $m = -1$; b) $m = 0$; c) $m = 1$.

12.2 Determina o valor de m para que a equação:

a) apresente duas raízes reais;

b) apresente duas raízes reais e diferentes;

c) não tenha raízes reais.

13. Na equação $x^2 - 16x + k = 0$, calcula o valor de k na equação, de modo a que a equação tenha raízes reais.

Função quadrática

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar a função quadrática;
- representar graficamente as funções quadráticas do tipo $y = ax^2$ e $y = ax^2 - c$;
- determinar o domínio, o contradomínio, os zeros da função, as coordenadas do vértice da parábola, a variação do sinal da função, a variação da função e a equação do eixo de simetria;
- indicar o sentido da concavidade da parábola;
- determinar os pontos de intersecção do gráfico com os eixos de coordenadas;
- resolver problemas práticos que envolvem a função quadrática.

5.1 Introdução

Imaginemos um jogador que coloca a bola em jogo com um remate forte. A bola sobe até um determinado ponto e depois começa a descer, descrevendo, assim, uma curva. A esta curva dá-se o nome de parábola e descreve um tipo de função denominado função do 2.º grau.

No dia-a-dia, existem muitas situações definidas pelas funções de segundo grau:

- a trajectória de uma bola lançada para cima é uma parábola;
- se fizermos vários furos num balde cheio de água, os pequenos jorros de água que saem pelos furos descrevem parábolas;
- a antena parabólica tem a forma de parábola, o que está na origem do seu nome;
- os faróis de um carro têm a forma parabólica; etc.

5.2 Conceito de função quadrática

Tentemos agora descobrir o que existe de comum nas seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 3x$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

d) $f(x) = 10x^2$

e) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}$

f) $f(x) = 3x^2 + 5x - 15$

Certamente reparaste que:

- todas as funções estão definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$;
- todas as funções são do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$;
- os coeficientes a , b e c são números reais.

Assim, toda a função sob a forma de polinómio de uma variável, cujo expoente máximo da variável é igual a 2, é chamada de **função quadrática** ou **polinomial de segundo grau**.

Outros exemplos:

- a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$ onde $a = 2$, $b = 6$ e $c = -1$
- b) $f(x) = x^2 - 3x$ onde $a = 1$, $b = -3$ e $c = 0$
- c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ onde $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = 1$
- d) $f(x) = 5x^2$ onde $a = 5$, $b = 0$ e $c = 0$

Em geral, uma função quadrática ou polinomial de segundo grau é expressa da seguinte forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ onde } a \neq 0 \text{ e } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

Resumindo

Para que uma função seja do segundo grau é necessário que:

- exista um termo de segundo grau na função;
- esse termo seja o de maior grau da função.

Assim como os polinómios podem ser completos ou incompletos, as funções de segundo grau também podem ser completas ou incompletas.

Observemos o quadro das funções incompletas:

$$f(x) = ax^2, \text{ sendo } b = c = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx, \text{ sendo } c = 0$$

$$f(x) = ax^2 + c, \text{ sendo } b = 0$$

Os gráficos das funções quadráticas são curvas, conhecidas como **parábolas**.

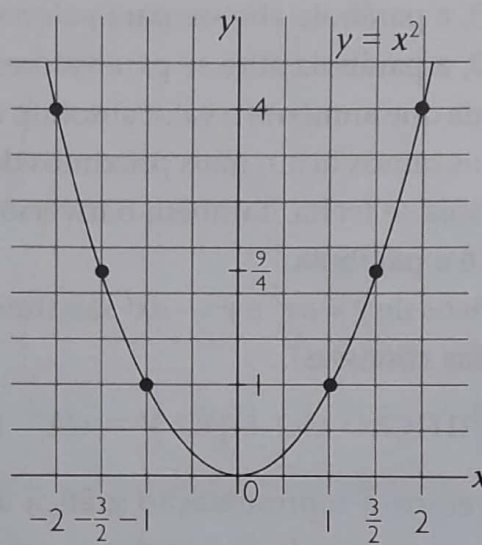
5.2.1 Função do tipo $y = ax^2$

Começemos por representar a função quadrática $y = x^2$, que é a expressão mais simples da função polinomial de segundo grau.

Como acontece com qualquer função, para representá-la graficamente temos, antes de mais, de construir uma tabela de valores.

Se unirmos os pontos com uma linha contínua, obtemos uma parábola, tal como é demonstrado na figura seguinte:

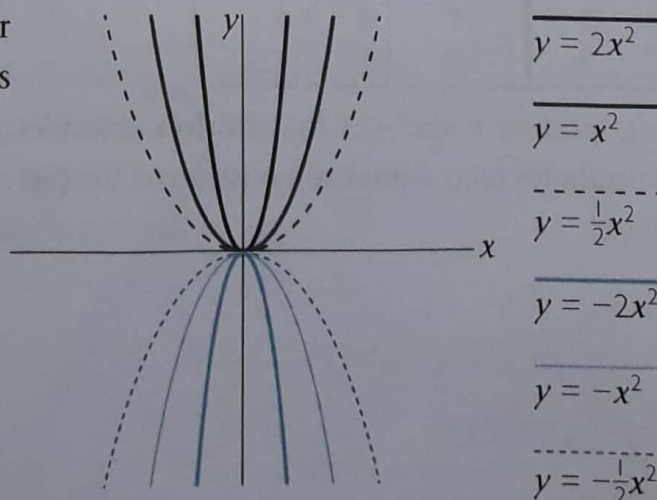
x	$y = x^2$
-2	$y = (-2)^2 = 4$
$-\frac{3}{2}$	$y = (-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$
-1	$y = (-1)^2 = 1$
$-\frac{1}{2}$	$y = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
0	$y = (0)^2 = 0$
$\frac{1}{2}$	$y = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
1	$y = 1^2 = 1$
$\frac{3}{2}$	$y = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$
2	$y = 2^2 = 4$



Observando atentamente a tabela de valores e a representação gráfica da função $y = x^2$, vamos perceber que:

- o eixo dos YY ou das ordenadas é o eixo de simetria do gráfico;
- o ponto mais abaixo da curva (aquele em que a curva se intercepta com o eixo dos YY) é o ponto de coordenadas $(0, 0)$, sendo este ponto denominado o vértice da parábola.

Na figura ao lado podemos observar as representações gráficas de várias funções que têm como expressão geral $y = ax^2$.



Se observarmos com atenção a figura poderemos afirmar que:

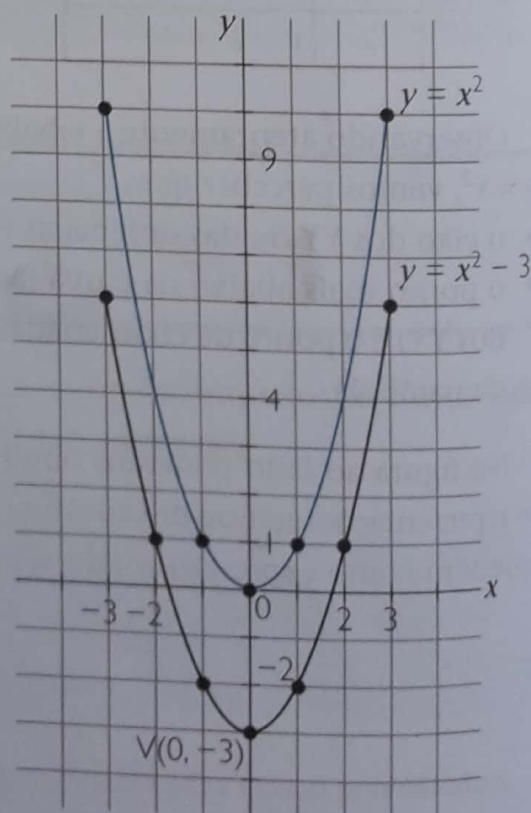
- o eixo dos YY é o eixo de simetria de todos os gráficos;
- como $x^2 = (-x)^2$, a curva é simétrica em relação ao eixo das ordenadas;
- todas as curvas têm o vértice no ponto (0,0);
- se o valor de a for positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima. Se, pelo contrário, o valor de a for negativo, a concavidade da parábola está voltada para baixo. Dessa forma, o sinal do coeficiente determina a orientação da parábola:
 - $a > 0$, a parábola abre-se para valores positivos de y ;
 - $a < 0$, a parábola abre-se para valores negativos de y .
- à medida que aumenta o valor absoluto do coeficiente a , a parábola é mais fechada, isto é, os ramos ficam mais próximos do eixo de simetria: quanto maior $|a|$, mais a parábola se fecha. Também o inverso é verdadeiro: quanto menor for $|a|$, mais aberta é a parábola.
- os gráficos de $y = ax^2$ e $y = -ax^2$ são simétricos entre si em relação ao eixo dos XX (eixo das abscissas).

5.2.2 Função do tipo $y = ax^2 + c$

Observemos a representação gráfica ao lado, que corresponde às funções $y = x^2$ e $y = x^2 - 3$.

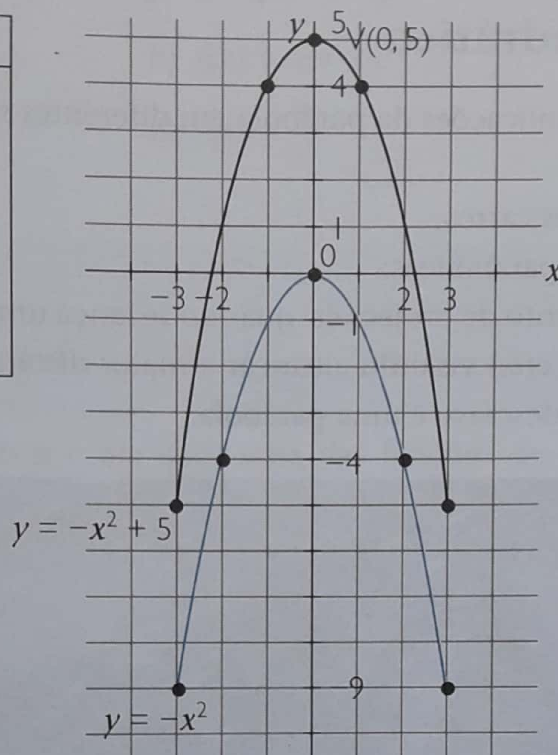
x	$y = x^2$	$y = x^2 - 3$
-3	9	$9 - 3 = 6$
-2	4	$4 - 3 = 1$
-1	1	$1 - 3 = -2$
0	0	$0 - 3 = -3$
1	1	$1 - 3 = -2$
2	4	$4 - 3 = 1$
3	9	$9 - 3 = 6$

O gráfico $y = x^2 - 3$ foi obtido baixando 3 unidades relativamente à posição da função $y = x^2$.



Observemos agora a representação gráfica das funções $y = -x^2$ e $y = -x^2 + 5$:

x	$y = -x^2$	$y = -x^2 + 5$
-3	-9	$-9 + 5 = -4$
-2	-4	$-4 + 5 = 1$
-1	-1	$-1 + 5 = 4$
0	0	$0 + 5 = 5$
1	-1	$-1 + 5 = 4$
2	-4	$-4 + 5 = 1$
3	-9	$-9 + 5 = -4$



O gráfico de $y = -x^2 + 5$ foi obtido subindo 5 unidades relativamente à posição da função $y = -x^2$.

Regra geral:

O gráfico da função $y = ax^2 + c$ obtém-se deslocando o gráfico $y = ax^2$ em c unidades na direcção do eixo dos YY: para cima, se $c > 0$, e para baixo, se $c < 0$.

Importa notar que as duas funções acima apresentam as seguintes características:

- o eixo de simetria é Y;
- para $a > 0$, o gráfico abre-se para as ordenadas positivas;
- para $a < 0$, o gráfico abre-se para as ordenadas negativas;
- o vértice da parábola é o ponto $V(0, c)$;
- o gráfico desloca-se verticalmente em função de c .

5.3 Algumas aplicações práticas da função quadrática

Das várias aplicações da parábola em diferentes situações, podem destacar-se as seguintes:

- a) faróis dos carros;
- b) antenas parabólicas;
- c) lançamento de projecteis: quando se lança um objecto (dardo, pedra, tiro de canhão, etc.) visando alcançar a maior distância possível, a curva que este objecto descreve é uma parábola.



1. Associa «V» às funções de segundo grau e «F» às funções que não são de segundo grau:

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$

b) $f(x) = x + 3x$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}$

Resolução:

a) V

b) F

c) F

d) F

e) V

2. Indica os coeficientes a , b e c em cada uma das funções de segundo grau seguintes:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$

Resolução:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$:

$a = 2, b = 3$ e $c = 0$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$:

$a = -\frac{1}{2}, b = 1$ e $c = -1$

c) $f(x) = x^2$:

$a = 1, b = 0$ e $c = 0$

d) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$:

$a = 3, b = 0$ e $c = \sqrt{3}$

3. Determina o valor de m para que a expressão $f(x) = (2 + m)x^2 + 3x$ defina uma função de segundo grau.

Resolução:

É importante recordar que para que uma função seja quadrática, a condição básica é $a \neq 0$. Assim, sendo $a = 2 + m$, então $2 + m \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$.

Resposta: todos os valores do conjunto $\mathbb{R}$ excepto -2 , ou seja, $\mathbb{R}/\{-2\}$.

4. Determina agora se o gráfico das seguintes funções apresenta uma concavidade voltada para cima ou para baixo, justificando a resposta.

a) $y = 2x^2 - 5x + 6$

b) $y = -x^2 + 1$

Resolução

a) Sendo $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

b) Sendo $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

5. Dada a função $f(x) = -2x^2 - 3$, determina:

- a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f(\frac{3}{2})$ d) $f(2)$

Resolução:

- a) $f(-1) = -2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$
 b) $f(0) = -2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
 c) $f(\frac{3}{2}) = -2(\frac{3}{2})^2 - 3 = 2 \cdot \frac{9}{4} - 3 = -\frac{18}{4} - 3 = -\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{12}{2}$
 d) $f(2) = -2(2)^2 - 3 = -2(4) - 3 = -8 - 3 = -11$

6. Na função $f(x) = x^2 - 4$, indica:

- a) o domínio;
 b) a equação do eixo de simetria;
 c) as coordenadas do vértice;
 d) o contradomínio;
 e) os zeros;
 f) a concavidade da parábola;
- 6.1 Responde também às seguintes questões:
- a) Para que valores de x a função é negativa?
 b) Para que valores de x a função é crescente?
 c) Para que valores de x a função é decrescente?

Resolução:

6. a) O domínio é representado por todo o conjunto dos números reais, ou seja, $D_f = \mathbb{R}$.
 b) A equação do eixo de simetria: $x = 0$.
 c) As coordenadas do vértice: $V(0, c)$, logo $V(0, -4)$.
 d) O contradomínio é $D'_f = [-4, +\infty[$.
 e) Os zeros da função correspondem a: $f(x) = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$. Assim, os valores -2 e 2 constituem os zeros da função.
 f) Concavidade da parábola: dado que o sinal do coeficiente a é positivo, isto é, $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.
- 6.1 a) A função é negativa quando $x \in]-2, 2[$.
 b) A função é crescente quando $x \in]0, +\infty[$.
 c) A função é decrescente quando $x \in]-\infty; 0[$.

1. Indica com «V» as funções quadráticas e com «F» as funções que não são quadráticas:

a) $y = 3x^2 + 5x - 1$

b) $y = 7x - 1$

c) $y = x^2$

d) $y = x^2 - \frac{1}{2}$

e) $y = x^2 - 3x$

f) $y = -x^2 + \frac{1}{x^2}$

g) $y = x^{-2} - 3x + 1$

2. Indica o valor de a , b e c nas seguintes funções:

a) $y = x^2 + 5x - 2$

b) $y = 3x^2 + x - 1$

c) $y = x^2 - 7x$

d) $y = 10x^2$

e) $y = -9x^2 - 63$

f) $y = -x^2 + 1$

3. Quais das seguintes funções apresentam a concavidade virada para cima? Justifica a tua resposta.

a) $f(x) = -3x^2$

b) $g(x) = x^2 - 1$

c) $h(x) = 10x^2$

d) $i(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

4. Das funções $f(x) = -3x^2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 10x^2$ e $i(x) = -\frac{1}{2}x^2$, qual delas apresenta a maior abertura? Justifica a tua resposta.

5. Das funções $f(x) = 5x^2$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 10x^2$ e $i(x) = \frac{1}{2}x^2$, qual delas apresenta a menor abertura? Justifica a tua resposta.

6. Determina valores de m para os quais as expressões abaixo sejam funções de segundo grau:

a) $y = 2(m + 1)x^2 + 8$

b) $y = 2mx^2 - 3x + 1$

c) $y = (3m + 1)x^2 + 6$

7. Considera a função $f(x) = 3x^2$.

a) Determina o domínio da função.

b) O que se pode dizer sobre a concavidade da parábola da função?

c) Faz o esboço gráfico da função.

d) Para que valores de x a função é crescente? E para que valores de x a função decresce?

e) Indica os valores de x para os quais a função é positiva.

f) Quais são as coordenadas do vértice?

g) Indica o contradomínio da função.

h) Qual é a equação do eixo de simetria?

8. Dada a função $f(x) = 5x^2 - 1$, determina:

a) $f(-1)$

b) $f(-\frac{1}{5})$

c) $f(0)$

$f(\frac{3}{2})$

d) $f(2)$

9. Observa as funções $f(x) = 5x^2 - 1$; $g(x) = 2x^2 + 3$ e $h(x) = x^2 + 7$.

9.1 Quais são as coordenadas do vértice destas funções?

10. Sem construir os gráficos, indica quais das afirmações seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

10.1 Os gráficos da funções $y = 5x^2$ e $y = 5x^2 - 1$ têm:

- a) o mesmo eixo de simetria; ✓
- b) os mesmos zeros; ✗
- c) a mesma concavidade; ✓
- d) a mesma abertura; ✗
- e) o mesmo contradomínio. ✓

11. Partindo da função $y = x^2$, representa graficamente as funções $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 2$.

11.1 Na função $y = x^2 - 2$:

- a) Determina o domínio da função.
- b) O que se pode dizer sobre a concavidade da parábola da função?
- c) Faz o esboço gráfico da função.
- d) Para que valores de x a função é crescente? E para que valores de x a função decresce?
- e) Quais são as coordenadas do vértice?
- f) Indica o contradomínio da função.
- g) Qual é a equação do eixo de simetria?

Quadriláteros

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar quadriláteros;
- classificar quadriláteros;
- demonstrar o teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero;
- aplicar o teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero na resolução de problemas da vida real;
- identificar trapézios, paralelogramos, rectângulos, losangos e quadrados;
- diferenciar trapézios, paralelogramos, rectângulos, losangos e quadrados;
- aplicar as propriedades na resolução de problemas sobre trapézios, paralelogramos, rectângulos, losangos e quadrados;
- construir paralelogramos a partir de condições dadas.

6.1 Noção de quadrilátero

Observa as figuras.

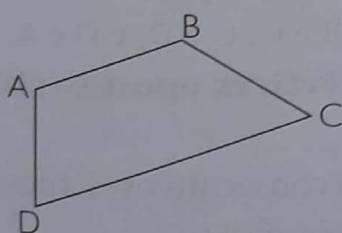


Fig. 1

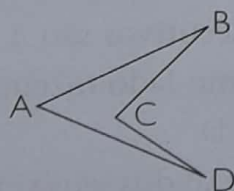


Fig. 2

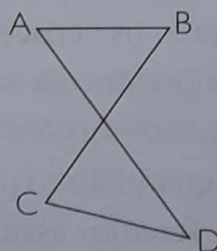


Fig. 3

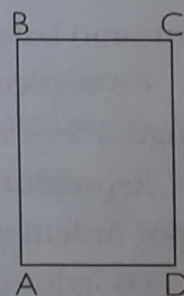


Fig. 4

Todas as figuras são constituídas por 4 lados e 4 ângulos. Por isso, todas elas são designadas por **quadriláteros** ou **quadrângulos**.

No plano, um **quadrilátero** ou **quadrângulo** é toda e qualquer figura geométrica constituída por quatro segmentos de recta consecutivos, não coincidentes, que limitam uma porção desse plano, tendo dois a dois um extremo comum (figuras 1, 2, 3 e 4).

Os segmentos de recta são os **lados** do quadrilátero e os extremos dos segmentos são **vértices**.

Os quadriláteros podem ser **côncavos** ou **convexos**.

Um **quadrilátero** diz-se **convexo** quando está todo para o mesmo lado em relação a qualquer um dos seus lados ou dos seus prolongamentos.

A figura 1 representa um quadrilátero **convexo** chamado trapézio, enquanto as figuras 2 e 3 representam dois quadriláteros **côncavos**.

A figura 3 também é designada por quadrilátero **estrelado**.

No nosso estudo, quando nos referimos a quadriláteros apenas consideramos os quadriláteros convexos.

Observemos agora a figura 5:

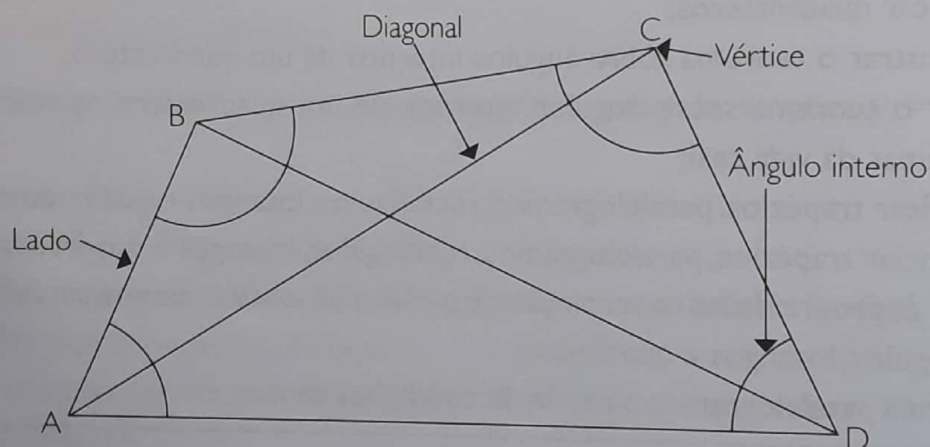


Fig. 5

Num quadrilátero há a considerar os **vértices consecutivos**, que pertencem ao mesmo lado. Na figura 5, os vértices consecutivos são A e B, B e C, C e D, e D e A.

Os vértices que não pertencem ao mesmo lado dizem-se **vértices opostos**. Na figura 5 os vértices opostos são A e C, B e D.

Representamos um quadrilátero pelas letras dos seus vértices consecutivos escritos por ordem alfabética. Teremos assim o quadrilátero [ABCD] (figura 5).

Os lados **consecutivos** são aqueles que têm um vértice comum e os que não o têm dizem-se **opostos**. Na figura 5, os lados consecutivos são $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$. Os lados opostos são $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Nos quadriláteros da figura 5, os ângulos internos são $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ e $\angle DAB$.

Quando dois ângulos de um quadrilátero têm um lado comum chamam-se **ângulos consecutivos**. Caso contrário, chamam-se **ângulos opostos**. Na figura 5, os $\angle A$ e $\angle B$ são consecutivos e os $\angle A$ e $\angle C$ são opostos.

As **diagonais** de um quadrilátero são os segmentos de recta que unem dois vértices opostos. Os segmentos AC e BD são as diagonais do quadrilátero [ABCD] (figura 5).

6.2 Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero e respectiva aplicação

Teorema 1: a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro ângulos rectos (figura 6).

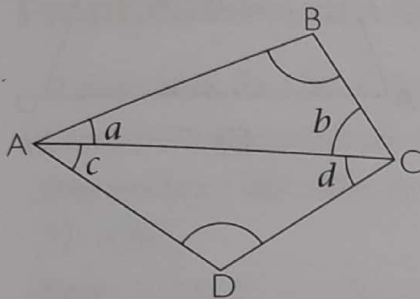


Fig. 6

Hipótese: dado o quadrilátero ABCD.

Tese: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ ângulos rectos.

Demonstração

Passos:

Trace-se agora a diagonal AC do quadrilátero.

1) $\angle a + \angle B + \angle b = 2$ ângulos rectos
e $\angle c + \angle D + \angle d = 2$ ângulos rectos

2) $\angle a + \angle c + \angle B + \angle b + \angle d + \angle D =$
 4 ângulos rectos

3) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$
 4 ângulos rectos

Justificações:

A soma dos três ângulos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

Adicionando a mesma quantidade a ambos os membros da igualdade obtêm-se somas iguais.

Porque $\angle a + \angle c = \angle A$
e $\angle b + \angle d = \angle C$.

O todo é igual à soma das partes.

Corolário 1 – Se os ângulos de um quadrilátero são iguais, então todos os ângulos são rectos. Nesse caso, o quadrilátero é um rectângulo ou um quadrado.

Exemplo:

Vamos determinar o valor de x .

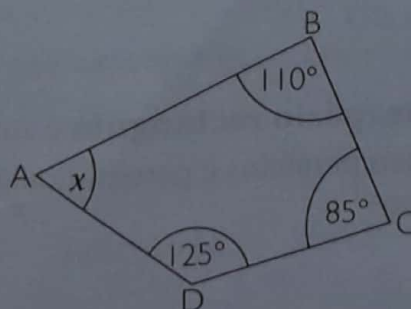
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$x + 110^\circ + 85^\circ + 125^\circ = 360^\circ$$

$$x = 360^\circ - (110^\circ + 85^\circ + 125^\circ)$$

$$x = 360^\circ - 320^\circ$$

$$x = 40^\circ$$



6.3 Classificação dos quadriláteros

6.3.1 Trapézio

O trapézio é um quadrilátero com pelo menos dois lados paralelos.

[ABCD] é um trapézio, visto que $AD \parallel BC$.

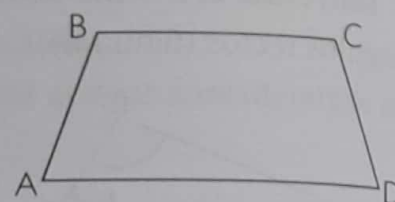


Fig. 7

Linhas notáveis de um trapézio

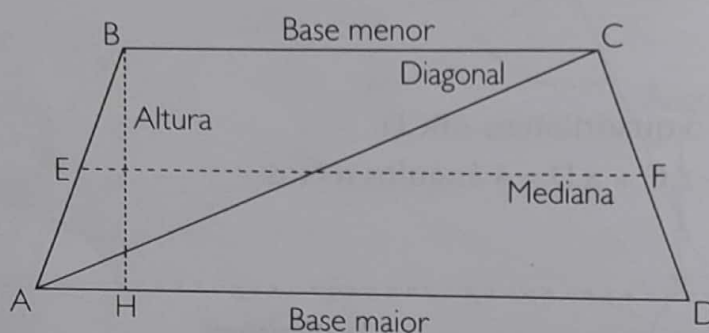


Fig. 8

As **bases** de um trapézio são os seus lados opostos paralelos. $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são bases.

A **diagonal** de um trapézio é o segmento de recta cujos extremos são dois vértices opostos do quadrilátero. $\overline{AC}$ é diagonal.

A **altura** de um trapézio é o segmento de recta perpendicular às suas bases e compreendido entre elas. $\overline{BH}$ é altura.

A **mediana** de um trapézio é o segmento de recta cujos extremos são os pontos médios dos seus lados opostos não paralelos. $\overline{EF}$ é mediana.

Classificação dos trapézios

Um **trapézio isósceles** ou **simétrico** é aquele cujos lados opostos não paralelos são iguais.

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

$$\angle A \cong \angle D$$

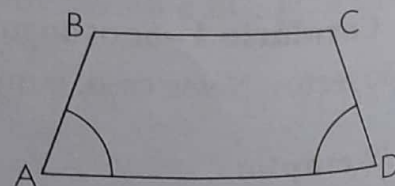


Fig. 9

Um **trapézio rectângulo** é aquele em que um dos lados não paralelos é perpendicular às bases.

$$\hat{D} = 90^\circ$$

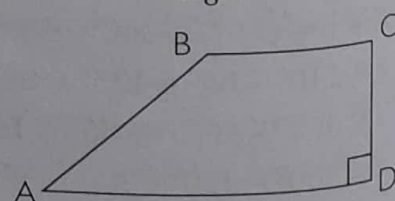


Fig. 10

Um **trapézio escaleno** é aquele cujos lados opostos não paralelos são desiguais.

$$\overline{AB} \neq \overline{CD}$$

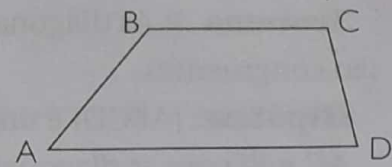


Fig. 11

Propriedades dos trapézios

Teorema 2: Num trapézio isósceles os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.

Hipótese: [ABCD] é um trapézio isósceles de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Tese: $\angle A \cong \angle C$ e $\angle B \cong \angle D$

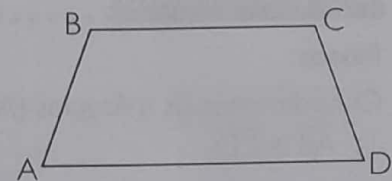


Fig. 12

Demonstração

Passos:

1) Traçam-se as alturas $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ baixadas dos vértices B e C, respectivamente.

2) Traça-se o segmento $\overline{EC}$ diagonal do quadrilátero [BEFC].

3) $\angle CEF \cong \angle ECB$

4) $\triangle EFC \cong \triangle CBE$

5) $\overline{BE} \cong \overline{CF}$

6) $\triangle ABE \cong \triangle CDF$

7) $\angle A \cong \angle C$

8) $\angle B \cong \angle D$
cqd.

Justificações:

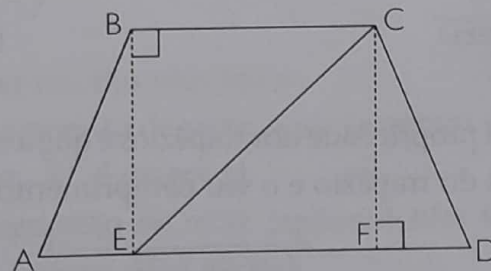


Fig. 13

São ângulos alternos internos determinados em $AD \parallel BC$.

São rectângulos, possuem ângulos agudos congruentes (um cada) e a hipotenusa com o critério ângulo agudo – cateto.

Em triângulos congruentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes.

São rectângulos e possuem um cateto e a hipotenusa iguais. Critério lado – lado.

Em triângulos congruentes, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes.

São suplementares de ângulos congruentes.

Teorema 3: As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Hipótese: $[ABCD]$ é um trapézio isósceles.

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais.

Tese: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

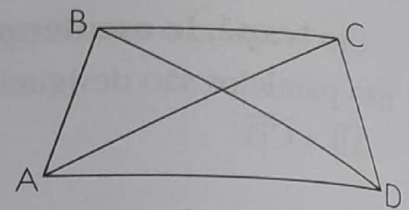


Fig. 14

Demonstração

Passos:

Consideremos os triângulos (ABC) e (BAD) .

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2) $\angle BAD \cong \angle CDA$

3) $\triangle BAD \cong \triangle CDA$

4) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
cq.d.

Justificações:

Lados não paralelos de um trapézio isósceles.

Num trapézio isósceles, os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.

Critério lado-ângulo-lado

Em triângulos congruentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes.

Outra propriedade dos trapézios é que a mediana de um trapézio isósceles é paralela às bases do trapézio e o seu comprimento é igual à semi-soma das bases.

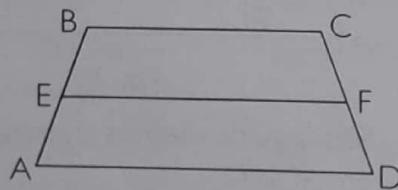


Fig. 15

$$|EF| = \frac{|AD| + |BC|}{2}$$

Exemplo:

Qual é a medida da mediana de um trapézio cujas bases medem 8,5 cm e 3,7 cm?

Resolução:

Da propriedade agora estudada resulta que:

$$|EF| = \frac{|AD| + |BC|}{2}$$

$$|EF| = \frac{8,5 + 3,7}{2} \text{ cm}$$

$$|EF| = \frac{12,2}{2} \text{ cm}$$

$$|EF| = 6,1 \text{ cm}$$

6.3.2 Paralelogramo

O **paralelogramo** é um quadrilátero com dois pares de lados paralelos.

[ABCD] é um paralelogramo, visto que $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.

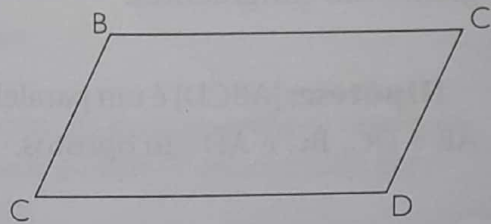


Fig. 16

Linhas notáveis de um paralelogramo

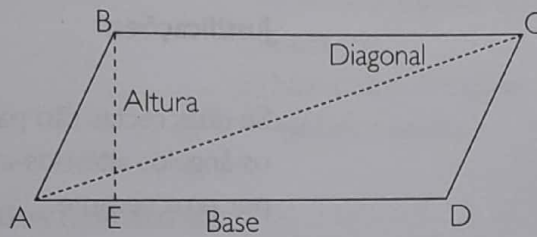


Fig. 17

A **base** de um paralelogramo é qualquer um dos seus lados.

A **diagonal** de um paralelogramo é o segmento de recta cujos extremos são dois vértices opostos do quadrilátero. Na figura, $\overline{AC}$ é diagonal.

A **altura** de um paralelogramo é o segmento de recta perpendicular à base e compreendida entre ela e o lado paralelo oposto. $\overline{BE}$ é altura.

Classificação dos paralelogramos

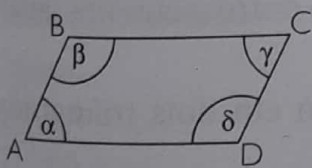


Fig. 18

Paralelogramo

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \cong \overline{BC}$$

$$\angle \alpha \cong \angle \gamma \text{ e } \angle \beta \cong \angle \delta$$

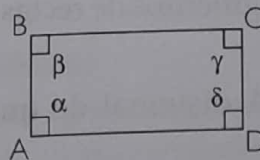


Fig. 19

Rectângulo

(todos os ângulos são geometricamente iguais)

$$\angle \alpha \cong \angle \beta \cong \angle \gamma \cong \angle \delta$$

(ângulos rectos)

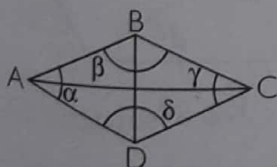


Fig. 20

Losango

ou **rombo**

(todos os lados são geometricamente iguais)

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$

$$\angle \alpha \cong \angle \gamma \text{ e } \angle \beta \cong \angle \delta$$

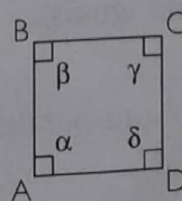


Fig. 21

Quadrado

(todos os lados e ângulos são geometricamente iguais)

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$

$$\angle \alpha \cong \angle \beta \cong \angle \gamma \cong \angle \delta$$

(ângulos rectos)

Teorema 4: os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Hipótese: $[ABCD]$ é um paralelogramo e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são opostos.

Tese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.

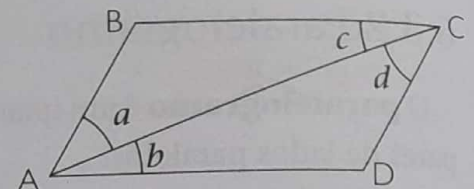


Fig. 22

Demonstração

Passos:

Trace-se a diagonal $\overline{AC}$.

1) $\angle a \cong \angle d$ e $\angle b \cong \angle c$

2) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

3) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
cqd.

Justificações:

Se duas rectas são paralelas então são iguais os ângulos alternos-internos determinados por uma secante.

Dois triângulos são congruentes se têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes congruentes, cada um a cada um.

Nos triângulos congruentes, a ângulos iguais opõem-se lados congruentes.

Consequências do teorema:

Corolário 1 – Os lados de um paralelogramo são congruentes.

Corolário 2 – Segmentos de rectas paralelas compreendidas entre rectas paralelas são congruentes.

Corolário 3 – A diagonal de um paralelogramo divide-o em dois triângulos congruentes.

Teorema 5: as diagonais de um paralelogramo bissectam-se uma à outra (dividem-se em duas partes geometricamente iguais).

Hipótese: $[ABCD]$ é um paralelogramo e $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as suas diagonais.

Tese: $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ e $\overline{BE} \cong \overline{ED}$.

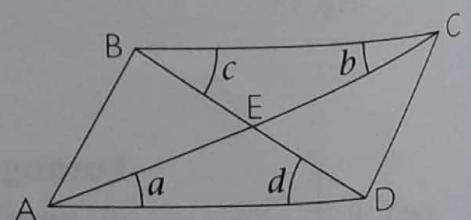


Fig. 23

Demonstração

Passos:

Trace-se a diagonal AC.

1) $\angle a \cong \angle b$ e $\angle d \cong \angle c$

2) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

3) $\triangle AED \cong \triangle BEC$

4) $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ e $\overline{BE} \cong \overline{ED}$
cqd.

Justificações:

Se duas rectas são paralelas então são iguais os ângulos alternos-internos determinados por uma secante.

Os lados opostos de um paralelogramo são iguais.

Dois triângulos são iguais se têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes iguais, cada um a cada um.

Nos triângulos iguais, a ângulos iguais opõem-se lados iguais.

Teorema 6: os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Hipótese: [ABCD] é um paralelogramo.

Tese: $\angle A \cong \angle C$ e $\angle B \cong \angle D$

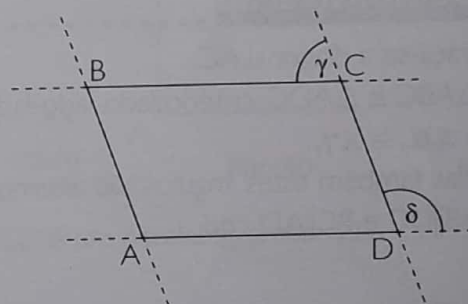


Fig. 24

Demonstração

Passos:

1) $\angle A \cong \angle \delta$

2) $\angle \delta \cong \angle C$

Logo, $\angle A \cong \angle C$

3) $\angle D \cong \angle \gamma$

4) $\angle \gamma \cong \angle B$

Logo, $\angle B \cong \angle D$
cqd.

Justificações:

Ângulos correspondentes.

Ângulos correspondentes.

Ângulos correspondentes.

Ângulos correspondentes.

Exemplo:

Calcula agora a medida dos restantes ângulos.

$\hat{B} = 78^\circ$, logo $\hat{D} = 78^\circ$ graus pelo teorema anterior.

$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$, são medidas de ângulos suplementares.

$$\hat{A} = 180 - \hat{B} \Rightarrow \hat{A} = 102^\circ$$

Sendo que $\hat{A} = \hat{C}$, então $\hat{C} = 102^\circ$.

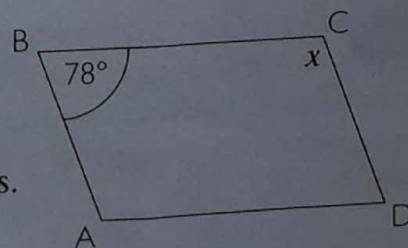


Fig. 25

6.3.3 Losango

Losango, ou **rombo**, é o quadrilátero cujos lados são todos iguais.

[ABCD] é um losango porque $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$.

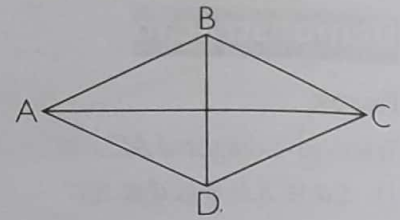


Fig. 26

Teorema 7: um losango é um paralelogramo.

Hipótese: [ABCD] é um losango.

Tese: $AB \parallel DC$ e $BC \parallel AD$.

Demonstração

Traça-se a diagonal AC.

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$, critério lado-lado-lado, assim, $\angle \alpha_1 \cong \angle \gamma_2$ e $\angle \alpha_2 \cong \angle \gamma_1$.

Mas também estes ângulos são alternos internos, por isso: $AB \parallel DC$ e $BC \parallel AD$. cqd.

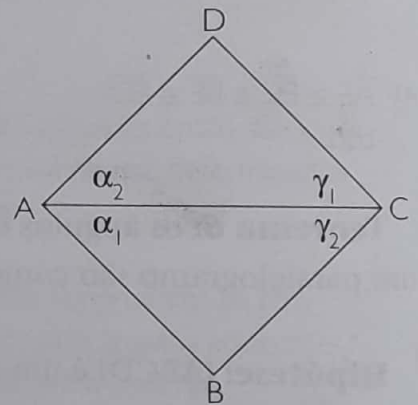


Fig. 27

Do teorema anterior resulta que:

Corolário 1 – As diagonais de um losango bissectam-se.

Corolário 2 – Os ângulos opostos de um losango são iguais.

Corolário 3 – Num losango, os ângulos consecutivos são suplementares.

Teorema 8: as diagonais de um losango são perpendiculares.

Hipótese: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais do losango ABCD.

Tese: $AC \perp BD$.

Demonstração

Sendo $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ lados do losango, o ponto D é equidistante dos pontos A e C, porque $|AD| = |DC|$.

Sendo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ lados do losango, o ponto B é equidistante dos pontos A e C, porque $|AB| = |BC|$. Logo, a recta BD é a mediatriz do segmento AC. Assim, $AC \perp BD$. cqd.

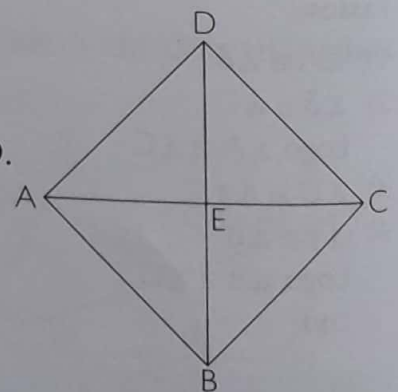


Fig. 28

6.3.4 Rectângulo

Chama-se rectângulo a todo e qualquer quadrilátero cujos lados consecutivos sejam perpendiculares.

$[ABCD]$ é um rectângulo: $AB \perp BC \perp CD \perp DA$.

A base de um rectângulo é qualquer um dos seus lados e a altura é qualquer lado perpendicular à base.

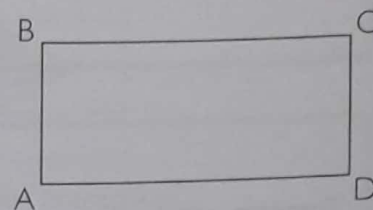


Fig. 29

Teorema 9: um rectângulo é um paralelogramo.

Hipótese: $[ABCD]$ é um paralelogramo.

Tese: $AB \parallel DC$ e $AD \parallel BC$.

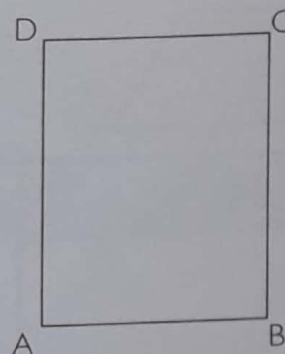


Fig. 30

Demonstração

$AB \perp AD$ e $AD \perp BC$. Logo, $AD \parallel BC$, porque duas rectas que sejam perpendiculares a uma terceira recta são paralelas entre si.

$AD \perp DC$ e $AD \perp AB$. Logo, $AB \parallel DC$. Então, o rectângulo $ABCD$ é um paralelogramo. cqd.

Do teorema anterior resulta que:

Corolário 1 – Os lados opostos de um rectângulo são congruentes.

Corolário 2 – As diagonais de um rectângulo bissectam-se uma à outra.

Corolário 3 – As diagonais de um rectângulo são congruentes.

6.3.5 Quadrado

Um quadrado é um rectângulo cujos lados são congruentes.

$[ABCD]$ é um quadrado.

Propriedades das diagonais de um quadrado:

- as diagonais de um quadrado bissectam-se uma à outra;
- as diagonais de um quadrado dão perpendiculares;
- as diagonais de um quadrado são iguais.

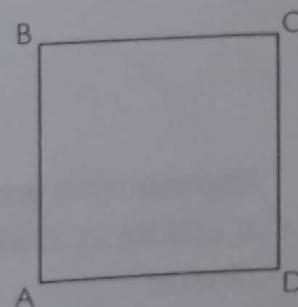
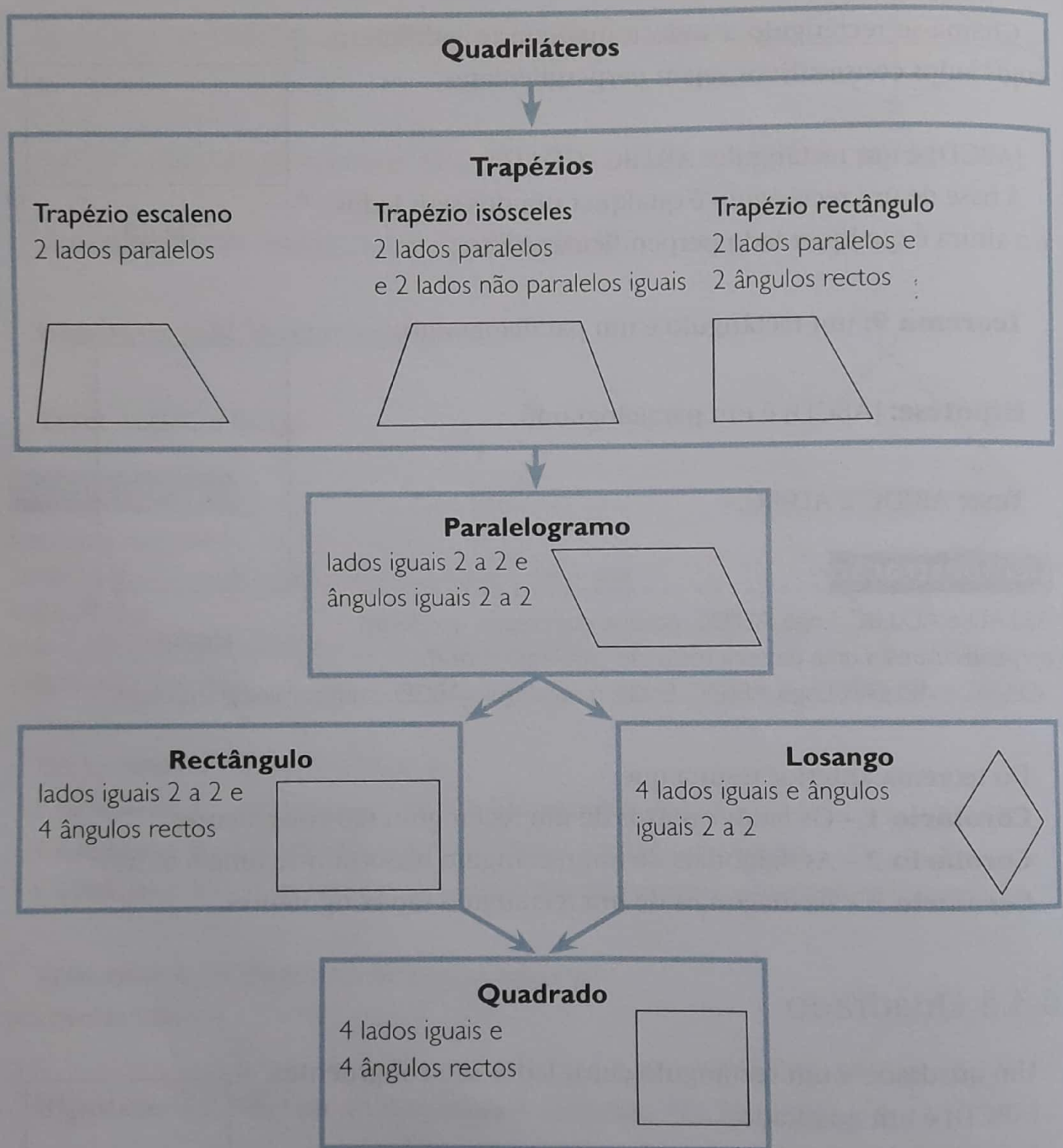


Fig. 31

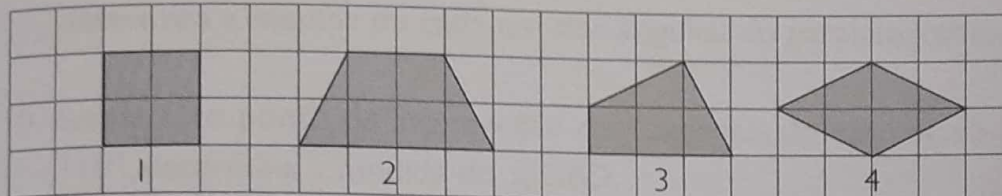
Classificação dos quadriláteros



Pelo esquema podemos verificar que:

- o quadrado, o rectângulo, o losango, o paralelogramo e o trapézio são quadriláteros;
- o quadrado, o rectângulo, o losango e o paralelogramo são trapézios;
- o quadrado, o rectângulo e o losango são paralelogramos;
- o quadrado pode ser considerado um rectângulo pois tem todas as propriedades do rectângulo;
- o quadrado pode ser considerado um losango pois tem todas as propriedades do losango.

1. Observa a figura e responde:

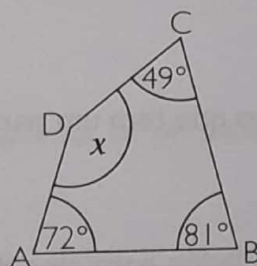


- 1.1 Quais dos quadriláteros representados na figura são trapézios?
- 1.2 Quais dos quadriláteros representados na figura são paralelogramos?
- 1.3 Quais dos quadriláteros representados na figura são losangos?

Resolução:

- 1.1 As figuras 1, 2 e 4 são trapézios.
- 1.2 As figuras 1 e 4 são paralelogramos.
- 1.3 As figuras 1 e 4 são losangos.

2. Determina o valor de x :

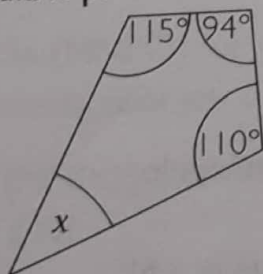


Resolução:

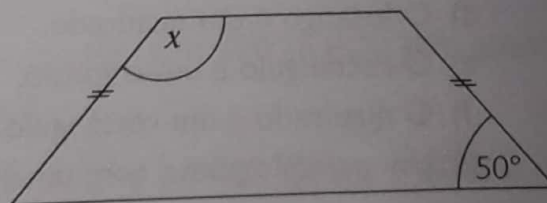
$$\begin{aligned}
 x + 49^\circ + 72^\circ + 81^\circ &= 360^\circ \\
 x + 202^\circ &= 360^\circ \\
 x &= 360^\circ - 202^\circ \\
 x &= 158^\circ
 \end{aligned}$$

3. Calcula x para cada caso:

a)



b)



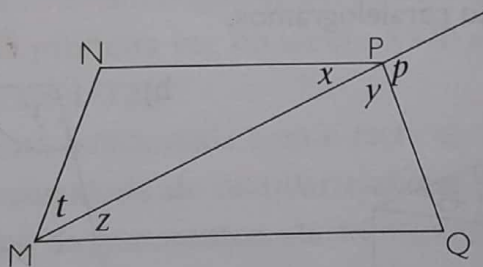
Resolução:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 115^\circ + 94^\circ + 110^\circ + x^\circ &= 360^\circ \\
 x^\circ &= 360^\circ - 115^\circ - 94^\circ - 110^\circ \\
 x^\circ &= 41^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 50^\circ + 50^\circ + x^\circ + x^\circ &= 360^\circ \\
 100^\circ + 2x^\circ &= 360^\circ \\
 2x^\circ &= 260^\circ \\
 x &= 130^\circ
 \end{aligned}$$

1. Indica a opção correcta. Um quadrilátero tem:
 - a) 4 lados
 - b) 6 lados
 - c) 5 lados
2. Qual o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois, não tem ângulos rectos e cujas diagonais se bissectam?
3. Qual o quadrilátero cujas diagonais são iguais, perpendiculares e se bissectam?
4. Quantas diagonais tem um quadrilátero?
 - a) quatro;
 - b) três;
 - c) duas;
 - d) seis.
5. Indica o nome do quadrilátero que tem um par de lados paralelos e cujas diagonais não se cortam ao meio.
6. Qual o polígono que tem os lados paralelos dois a dois, 4 ângulos rectos e cujas diagonais não são perpendiculares?
7. Diz se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:
 - a) O quadrado é um paralelogramo que é, ao mesmo tempo, losango e rectângulo.
 - b) O trapézio é um quadrado.
 - c) O quadrado é um paralelogramo.
 - d) O losango é um quadrado.
 - e) O rectângulo é um trapézio.
 - f) O quadrado é um rectângulo.
 - g) Um paralelogramo com um ângulo recto é um rectângulo.
8. Num paralelogramo $[MNPQ]$, o $\angle M$ é 16° maior do que o $\angle N$.
Determina a medida de cada um dos ângulos do paralelogramo.

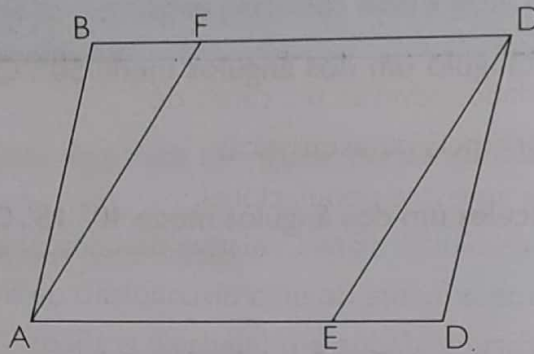
9. Dado o paralelogramo [ABCD]: se representarmos $\hat{A} = 3x + 25^\circ$ e $\hat{B} = 2x - 10^\circ$, determina a medida de cada um dos ângulos do paralelogramo.
10. Sendo O o ponto de intersecção das diagonais do rectângulo [ABCD] e $\hat{AOD} = 110^\circ$, determina a medida do $\angle CBD$.
11. Num trapézio rectângulo um dos ângulos mede 50° . Quanto mede cada um dos outros ângulos?
12. Num trapézio isósceles um dos ângulos mede $40^\circ 15'$. Quanto mede cada um dos outros ângulos?
13. Num trapézio isósceles os ângulos adjacentes à mesma base são representados por $2x + 15^\circ$ e $3x - 25^\circ$. Determina a medida de cada um dos ângulos do trapézio.
14. Observa a figura e depois responde às perguntas, sabendo que [MNPQ] é um trapézio.



- 14.1 Se [MNPQ] for um trapézio isósceles, $\hat{P} = 80^\circ$ e $\hat{Z} = 20^\circ$, quanto mede cada um dos ângulos do trapézio?
- 14.2 Se [MNPQ] for um trapézio escaleno, $\hat{t} = 60^\circ$, $\hat{N} = 110^\circ$ e $PQ \perp MR$, quanto mede cada um dos ângulos do trapézio?
- 14.3 [MNPQ] é um trapézio em que $\hat{NPR} = 170^\circ$ e $\hat{t} = 40^\circ$. Qual é a medida do $\angle N$?
15. Determina a medida de uma das bases de um trapézio, sabendo que a mediana mede 6 cm e a outra base 4 cm.

16. Determina as medidas da mediana e das bases de um trapézio, sabendo que as suas medidas são representadas, respectivamente, por $5x - 4$ cm, $2x + 10$ cm e $18 - x$ cm.

17. $[ABCD]$ é um paralelogramo; $AF \parallel CE$.

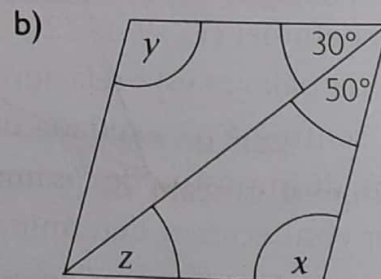
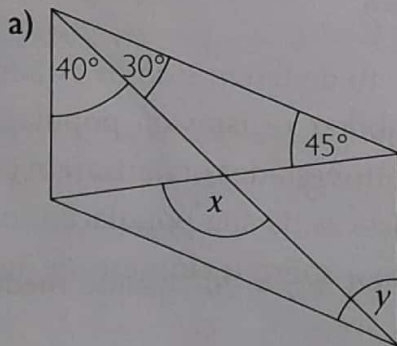


Demonstra que:

a) $\triangle ABF \cong \triangle CDE$

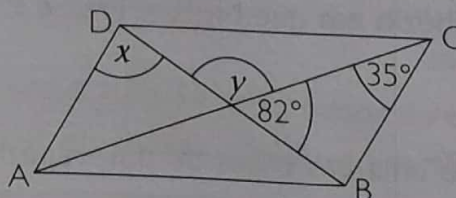
b) $\overline{BF} \cong \overline{ED}$

18. As figuras seguintes são paralelogramos.



- 18.1 Calcula os valores de x , y e z para cada caso.

19. Determina a medida do ângulo x indicado no paralelogramo abaixo.



Noções básicas de estatística

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- reconhecer a importância da estatística;
- definir população e amostra populacional;
- definir frequência absoluta, relativa, relativa percentual e acumulada;
- apresentar dados sob a forma de uma distribuição de frequências;
- representar e interpretar dados em tabelas e gráficos;
- determinar o valor médio, a moda e a mediana;
- analisar o significado do valor médio, da moda e da mediana em dados simples.

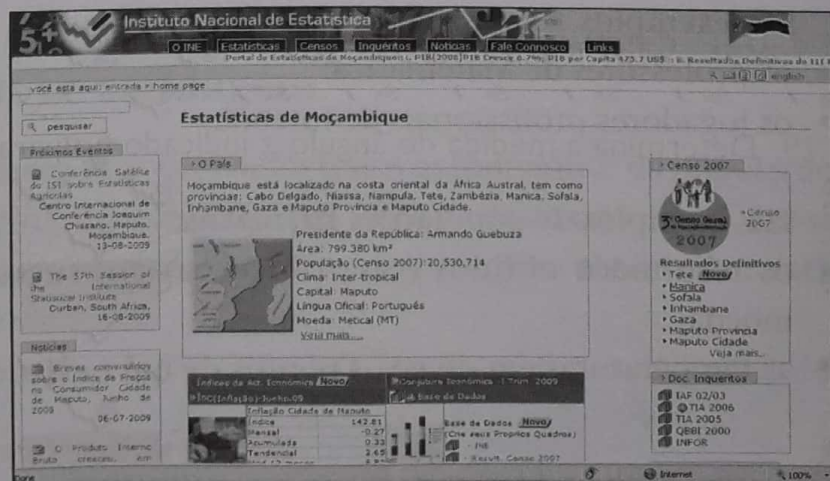
7.1 Objecto da estatística e breve nota histórica

O termo «estatística» deriva etimologicamente do substantivo latino *status* (estado). Esta palavra aparece pela primeira vez no século XVIII e foi sugerida pelo Alemão Gottfried Achemmel (1719–1772).

A origem da palavra está relacionada com o facto de terem sido os estados e os governos a sentirem necessidade de mandar elaborar registos da população, de nascimentos, de impostos, de casamentos, etc. Muitos estados organizaram estudos para melhor conhecerem determinadas características da sua população, nomeadamente para determinarem leis sobre impostos e sobre o número de homens disponíveis para a guerra.

Actualmente, a Estatística não se limita apenas ao estudo da Demografia e da Economia. O seu campo de aplicação alargou-se à análise de dados em Biologia, Medicina, Física, Psicologia, indústria, comércio, meteorologia, educação, etc.

Em muitos países existe um Departamento ou Instituto Nacional de Estatística.



Página da Internet do Instituto Nacional de Estatística de Moçambique.

Definição 1 – A estatística é um método que ensina a recolher, classificar e apresentar um conjunto de dados numéricos.

Definição 2 – A estatística está interessada nos métodos científicos para a recolha, a organização, o resumo, a apresentação e a análise de dados, assim como na orientação de conclusões válidas e na tomada de decisões baseadas nessas análises.

A estatística é importante não só para a organização e planificação das entidades estatais, mas também como instrumento de apoio para a tomada de decisões por estas entidades.

Além disso, para fazer parte integrante de uma sociedade em franco desenvolvimento e que comunica por via de dados numéricos, é absolutamente indispensável adquirir conhecimentos básicos de estatística. É necessário compreender e interpretar o que se passa à nossa volta. A comunicação social utiliza permanentemente instrumentos estatísticos poderosos, como os gráficos, que se distinguem de outras formas de informação pela facilidade e rapidez com que permitem que se apreenda uma ideia. Mas, não raras vezes, estes gráficos são feitos para nos influenciar e, de certa forma, esconder a realidade.

7.2 Conceito de população e amostra

Uma população ou **um universo estatístico** é um conjunto de seres com qualquer característica em comum.

Uma amostra é um subconjunto finito da população.

As unidades estatísticas, ou **indivíduos**, são compostas por cada um dos elementos da população.

A população pode ser **finita** ou **infinita**.

São exemplos de populações **finitas**:

- os professores de Matemática;
- os jogadores profissionais de futebol.

São exemplos de populações **infinitas**:

- os resultados obtidos (cara ou coroa) em sucessivos lançamentos de uma moeda;
- as temperaturas em diversos pontos de um país, num determinado momento.

Razões para a utilização de uma amostra

A utilização de uma amostra, e não de todo o universo populacional, num estudo estatístico deve-se, pelo menos, a uma das seguintes razões:

- a população é infinita;
- às condições económicas (economia de dinheiro, economia de tempo);
- à inutilização de elementos observados;
- às condições de comodidade.

O sucesso de uma análise estatística baseada no estudo de uma amostra depende da escolha desta. Uma amostra mal escolhida conduz a conclusões erradas. As técnicas utilizadas na selecção das amostras são muito complexas e específicas para cada estudo.

Cuidados a ter na formação de uma amostra

De um modo geral, devemos ter sempre os seguintes cuidados na formação das amostras:

- **imparcialidade** – todos os elementos devem ter a mesma oportunidade de fazer parte da amostra;
- **representatividade** – deve conter em proporção tudo o que a população possui, tanto qualitativa como quantitativamente;
- **tamanho** – deve ser suficientemente alargada para que as características da amostra se aproximem, tanto quanto possível, das características da população.

A generalização dos resultados obtidos através do estudo de uma amostra é também muito complexa e comporta sempre uma determinada margem de erro.

Recenseamento (censo) e sondagem

Num **recenseamento (censo)** são observados todos os indivíduos da população relativamente aos diferentes critérios que estão a ser objecto do estudo. Isto é, faz-se um **recenseamento**, ou **censo**, sempre que toda a população é observada relativamente ao objecto de estudo.

Exemplos:

- recenseamento para o serviço militar;
- recenseamento para fins eleitorais.

Numa **sondagem**, o estudo estatístico baseia-se numa parte da população, isto é, baseia-se numa amostra que deve ser representativa dessa população. Por outras palavras, faz-se uma **sondagem** sempre que no estudo estatístico se envolve apenas parte da população.

7.3 Caracteres (variáveis) estatísticos

Num estudo estatístico parte-se sempre de um conjunto determinado. Cada elemento desse conjunto (a unidade estatística) apresenta, provavelmente, muitas características.

Por exemplo, no conjunto dos alunos de uma turma, podemos observar muitas características:

- a cor dos olhos;
- a altura;
- o número de irmãos;
- a última nota de matemática;
- a profissão dos pais;
- o sexo, etc.

Cada estudo estatístico é realizado com uma finalidade específica.

Dependendo do objectivo do estudo, vai observar-se cada unidade estatística em relação a um carácter ou caracteres determinados.

Os caracteres observados ou são **qualitativos** ou **quantitativos**.

Caracteres qualitativos são aqueles que estão relacionados com uma qualidade, apresentando-se em várias modalidades.

Caracteres qualitativos (a)	Modalidades
A cor dos olhos	Verde, castanho, azul, cinzento, etc.
A profissão de uma pessoa	Professor, médico, pedreiro, electricista, etc.
O curso preferido	Economia, Direito, Jornalismo, etc.

Caracteres quantitativos são aqueles a que é possível atribuir uma medida, apresentando-se com diferentes intensidades ou valores.

Caracteres quantitativos (b)	Valor
A altura de uma pessoa	175 cm; 186 cm, etc.
O custo da renda de casa	350,00 Mt ; 500,00 Mt, etc.
O peso de uma laranja	35 g; 40 g, etc.

Ao resultado da observação de um carácter (ou variável) qualitativo (a) ou quantitativo (b) chama-se **dado estatístico**.

Um dado resultante de uma variável quantitativa indica, para cada unidade estatística, a modalidade observada (b). Por exemplo: «O Rui tem olhos castanhos.»

Um dado resultante de uma variável quantitativa indica, para cada unidade estatística, o valor, ou intensidade, observada (a). Por exemplo: «O Rui mede 1,76 metros.»

Os estudos estatísticos incidem essencialmente em variáveis quantitativas, ou seja, naquelas em que o resultado de uma observação é um número.

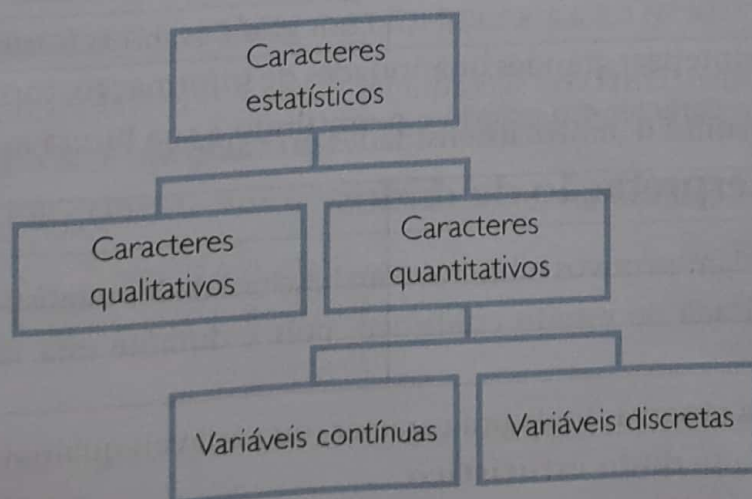
7.4 Variável discreta e variável contínua

Quando as variáveis estatísticas (ou caracteres estatísticos) são quantitativas dividem-se ainda em dois grupos: as variáveis discretas e as variáveis contínuas.

Variáveis discretas são as que só podem tomar um número finito ou uma infinidade numerável de valores.

Variáveis contínuas são aquelas que podem tomar qualquer valor de um intervalo.

Variáveis discretas	Variáveis contínuas
Idade de uma pessoa em número inteiro de anos.	Altura de uma pessoa.
Número de contas bancárias nos diferentes bancos.	Temperatura em diferentes pontos da cidade.
Número de cartões de crédito de diferentes tipos.	Peso de um ananás.
Número de golos marcados pelos dez melhores jogadores de um campeonato.	Quantidade de nicotina existente num cigarro.



7.5 Recolha, organização e apresentação de dados estatísticos

Para facilitar um estudo estatístico, normalmente segue-se um conjunto de passos que designamos por fases do método estatístico.

Definição do problema

O problema a analisar deve ser estabelecido de forma clara e precisa.

Planificação do processo de resolução

Definido o problema, é preciso determinar um processo para o resolver e, em especial, para obter informações sobre a variável em estudo. É nesta fase que se decide pela observação de toda a população ou de uma amostra e se estabelece uma calendarização das actividades a realizar.

Recolha de dados

É a fase operacional, que envolve a obtenção, a reunião e o registo sistemático dos dados. Os dados podem ser recolhidos através de questionários, observações directas, experimentações, entrevistas ou pesquisa bibliográfica.

Organização de dados

A organização de dados consiste em «resumir» os dados através da sua contagem e agrupamento para identificar características genéricas do fenómeno em estudo, ignorando-se assim os seus atributos individuais; isto é, obtém-se um conjunto de números que permite distinguir o comportamento do carácter estatístico.

Apresentação de dados

Há duas formas de apresentação de dados que não se excluem mutuamente: a apresentação por tabelas e a apresentação por gráficos. Estas formas de apresentar dados permitem sintetizar grandes quantidades de informação, tornando mais fácil a compreensão do carácter em estudo e permitindo a sua futura análise.

Análise e interpretação de dados

Nesta fase, calculam-se novos números com base nos dados estatísticos. É a fase mais importante e delicada do estudo estatístico, pois é durante esta fase que se tiram conclusões.

Das fases do método de estudo mencionadas, vamos agora centrar a nossa atenção nas fases de **organização e apresentação de dados através de tabelas e gráficos**. Antes, porém, vamos recordar alguns aspectos do cálculo numérico com interesse para o estudo estatístico.

7.6 Percentagens, estimativas e arredondamentos

Percentagens

A percentagem, valor que se representa pelo símbolo %, traduz uma quantidade em relação a 100. Dizer que 3% (três por cento) dos alunos da nossa escola estudam Economia é o mesmo que dizer que em cada 100 alunos da escola há 3 que se dedicam ao estudo desta disciplina.

A percentagem traduz, assim, uma **fracção** de 100, que pode também ser representada sob a forma de **um número decimal**.

Percentagem	N.º decimal
1%	0,01
10%	0,10
25%	0,25
34%	0,34
50%	0,50
100%	1,00
250%	2,50

A fracção $\frac{1}{100}$ representa um por cento (1%), bem como o número decimal 0,01.
3% traduz a fracção $\frac{3}{100}$, bem como o número decimal 0,03.

Estimativas

Para evitarmos erros nos cálculos estatísticos, devemos prever o resultado antes de calcularmos o valor correcto. A **estimativa** é o cálculo mental, ou seja, corresponde ao valor previsto para um resultado.

Exemplo:

Numa turma da 9.^a classe com 55 alunos, 30 têm a disciplina de Física. Como podemos calcular a percentagem de alunos que estão matriculados nesta disciplina?

Resolução:

Estimativa: como 30 é um pouco mais de metade de 55, o número que devemos encontrar será ligeiramente superior a 50%.

$$\frac{55}{30} \quad \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{30 \cdot 100}{55} \Leftrightarrow x = \frac{300}{55}$$

$$x = 54,54(\dots)$$

Concluimos então que 54,5% dos alunos, aproximadamente, estão matriculados na disciplina de Física.

Arredondamentos

O arredondamento de um dado estatístico deve obedecer a algumas regras:

- deve atender ao número de casas decimais;
- deve atender ao número de algarismos significativos (não nos ocuparemos deste tipo de arredondamentos).

Nos arredondamentos, atendendo ao número de casas decimais (c.d.), procede-se do seguinte modo:

- se a casa decimal imediatamente a seguir à escolhida for 5, 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se uma unidade à casa decimal escolhida;
- se a casa decimal imediatamente a seguir for 0, 1, 2 ou 4, deixa-se a casa decimal escolhida inalterada.

Exemplos:

28,548	(2 c.d.)	28,55
6,648	(1 c.d.)	6,6
15,4027	(2 c.d.)	15,40
1,099	(2 c.d.)	1,10
0,00025	(3 c.d.)	0,000
12,38	(0 c.d.)	12

7.7 Tabelas de frequência para dados simples

Apresentam-se no quadro em baixo as idades (em anos) dos alunos da turma 5 da 9.^a classe de uma escola secundária.

N.º	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Idade	16	13	15	16	14	13	14	15	15	14	15	17
N.º	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
Idade	14	15	15	15	14	16	15	14	14	15	17	

Consideremos a variável estatística **idade** (em anos). Trata-se de uma **variável discreta** que toma os valores 13, 14, 15, 16 e 17.

Recorrendo a letras para representar as variáveis estatísticas, tem-se que:

- x representa a variável idade;
- $x_1; x_2; x_3; x_4$ e x_5 representam os valores da variável x .
 $x_1 = 13; x_2 = 14; x_3 = 15; x_4 = 16$ e $x_5 = 17$.

De forma mais resumida, podemos representar os valores $x_1; x_2; x_3; x_4$ e x_5 por:

- x_i , com $i = 1, 2, 3, 4$ e 5 .

A partir da leitura do quadro anterior, podemos construir a tabela seguinte:

Tabela 1 – Distribuição das idades dos alunos da turma 5		
Idade (em anos) x_i	Contagem	Frequência f_i
13		2
14		7
15		9
16		3
17		2
Total		23

Frequência absoluta (f_i)

Chama-se frequência absoluta de um valor da variável ao número de vezes que esse valor foi observado.

Frequência relativa (f_{ri})

Chama-se frequência relativa de um valor da variável ao quociente entre a frequência absoluta do valor da variável e o número total (n) das observações ($f_{ri} = \frac{f_i}{n}$).

Tabela 2 – Distribuição das idades dos alunos da turma 5			
x_i (idade)	f_i (frequência absoluta)	f_{ri} (frequência relativa)	f_{ri} em % (frequência relativa em percentagem)
13	2	$\frac{2}{23} = 0,09$	9
14	7	$\frac{7}{23} = 0,30$	30
15	9	$\frac{9}{23} = 0,39$	39
16	3	$\frac{3}{23} = 0,13$	13
17	2	$\frac{2}{23} = 0,09$	9
Total	23	1	100

Propriedades das frequências absolutas e relativas:

- a soma das frequências absolutas (f_i) é igual ao número total de observações (n);
- a soma das frequências relativas (f_{ri}) é igual a 1. No caso de se considerarem as frequências relativas em percentagem, essa soma é igual a 100%.

Frequência absoluta e relativa acumulada

A frequência absoluta acumulada, que se representa por F_i , e a frequência relativa acumulada, que se representa por F_{ri} , obtêm-se adicionando as frequências absolutas e relativas, até ao valor considerado da variável estatística.

Tabela 3 – Distribuição das idades dos alunos da turma 5				
x_i (idade)	f_i (frequência absoluta)	f_{ri} (frequência relativa)	F_i (frequência absoluta acumulada)	F_{ri} (frequência relativa acumulada)
13	2	0,09	2	0,09
14	7	0,30	9	0,39
15	9	0,39	18	0,78
16	3	0,13	21	0,91
17	2	0,09	23	1

Na tabela 3 estão calculadas as frequências absolutas e relativas acumuladas da variável idade no conjunto dos alunos da turma 5.

Nesta tabela encontra-se resposta para as questões seguintes:

- Qual é o número de alunos com idade inferior ou igual a 14 anos?
Resposta: há 9 alunos com 14 anos ou menos.
- Qual é a percentagem de alunos com idade inferior a 16 anos?
Resposta: 78% dos alunos tem uma idade inferior a 16 anos.

Naturalmente, o último valor da frequência absoluta acumulada é igual ao número total de observações (neste caso 23) e o último valor da frequência relativa acumulada é igual a 1.

7.8 Gráficos

Os gráficos constituem uma outra forma de representar os dados.

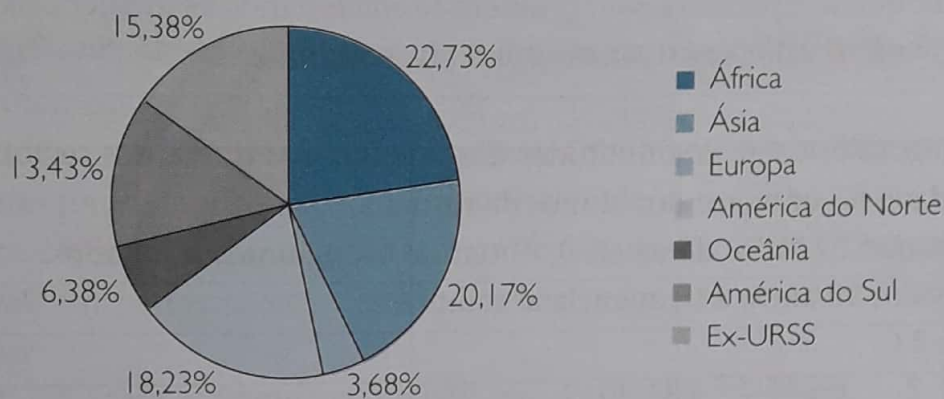
Comparando-os às tabelas, os gráficos são mais atractivos e facilitam a apreensão da informação a veicular. Neste estudo vamos utilizar somente os gráficos circulares, os gráficos de barras e os pictogramas.

Gráfico circular

O **gráfico circular**, também designado por **sectograma**, é representado através de um círculo dividido em sectores circulares cujas amplitudes dos ângulos são proporcionais às frequências dos valores da variável estatística.

Em baixo podemos observar um exemplo de gráfico circular:

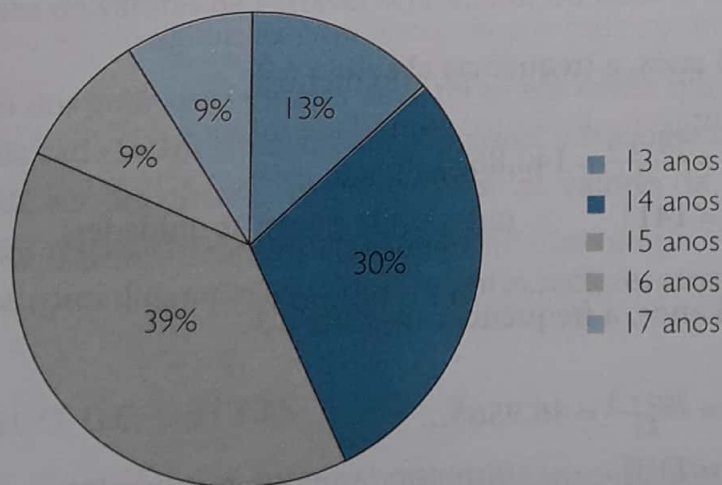
Áreas dos continentes do mundo
(em milhões de quilómetros quadrados)



Nota: foram excluídos da Europa os países da ex-URSS, tendo a Turquia sido incluída na Ásia e não na Europa.

Repare-se que o círculo corresponde a 100%, que é a soma das frequências relativas, em percentagem, dos valores da variável estatística.

A distribuição das idades dos alunos da turma 5, definida pela tabela 3, pode ser representada pelo diagrama circular seguinte:



Na construção de um gráfico circular, a questão central diz respeito à definição dos sectores circulares correspondentes às diferentes frequências. Para definir os sectores circulares, recorre-se à seguinte relação:

Ao círculo completo faz-se corresponder a frequência total.

Como a amplitude total do círculo é 360° , a relação anterior assume a seguinte forma:

À amplitude de 360° faz-se corresponder a frequência total.

De seguida, calculam-se as amplitudes correspondentes às diferentes frequências, recorrendo-se a uma regra de três simples, em que:

$$360^\circ - n$$

e que se lê «360° está para n assim como... (por exemplo: x está para 2)».

Vamos agora calcular as amplitudes dos ângulos dos diferentes sectores para a variável idade no universo dos alunos da turma 5.

Consultando os dados da tabela 3, obtêm-se os seguintes resultados:

- Para o valor 13 anos, a frequência absoluta é 2.

$$360^\circ - 23$$

$$x - 2 \quad x = \frac{360 \times 2}{23} = 31,3043...$$

$$x = 31^\circ \quad (\text{arredondamento às unidades})$$

- Para o valor 14 anos, a frequência absoluta é 7.

$$360^\circ - 23$$

$$x - 7 \quad x = \frac{360 \times 7}{23} = 109,5652...$$

$$x = 110^\circ \quad (\text{arredondamento às unidades})$$

- Para o valor 15 anos, a frequência absoluta é 9.

$$360^\circ - 23$$

$$x - 9 \quad x = \frac{360 \times 9}{23} = 140,8695...$$

$$x = 141^\circ \quad (\text{arredondamento às unidades})$$

- Para o valor 16 anos, a frequência absoluta é 3.

$$360^\circ - 23$$

$$x - 3 \quad x = \frac{360 \times 3}{23} = 46,9565...$$

$$x = 47^\circ \quad (\text{arredondamento às unidades})$$

- Para o valor 17 anos, a frequência absoluta é 2.

$$360^\circ - 23$$

$$x - 2 \quad x = \frac{360 \times 2}{23} = 31,3043...$$

$$x = 31^\circ \quad (\text{arredondamento às unidades})$$

A divisão do círculo nos diferentes sectores circulares torna-se agora mais fácil de executar com a ajuda de um transferidor.

É ainda importante notar que:

- a soma das amplitudes dos ângulos dos diferentes sectores circulares deve totalizar 360° , como acontece nos cálculos anteriores. Caso o resultado desta soma não equivalha a 360° , devem efectuar-se pequenos ajustes (relativamente aos arredondamentos) até que se obtenha 360° como soma.
- os cálculos anteriores relativos às amplitudes dos ângulos dos diferentes sectores circulares foram feitos a partir das frequências absolutas. Estas também podiam, no entanto, ser calculadas com base nas frequências relativas ou nas frequências relativas em percentagem. Nestes últimos casos, recorreríamos às seguintes relações:
 - $360^\circ - 1$ (para as frequências relativas);
 - $360^\circ - 100$ (para as frequências relativas em percentagem).

O gráfico circular é particularmente adequado para estabelecer comparações entre os diferentes valores de uma variável estatística. Contudo, a sua eficácia diminui à medida que aumenta o número de valores da variável estatística, isto é, o número de sectores circulares. Neste sentido, recomenda-se a utilização deste tipo de gráfico quando o número de valores da variável seja menor ou igual a 6.

Na construção dos gráficos circulares deve ter-se em conta que:

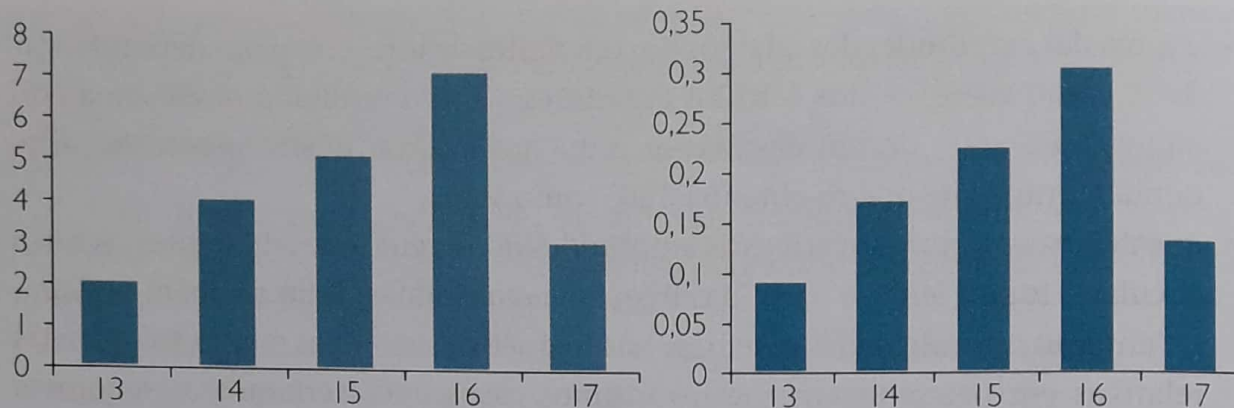
- a amplitude de cada sector circular é proporcional à frequência que representa;
- a legenda pode ser dispensada, inscrevendo-se os valores da variável e as suas frequências nos respectivos sectores circulares;
- podem usar-se cores diferentes para os diferentes sectores circulares.

7.9 Gráfico de barras

A partir da tabela de distribuição das idades dos alunos da turma 5...

x_i (idade)	f_i (frequência absoluta)	f_{ri} (frequência relativa)
13	2	0,09
14	4	0,17
15	5	0,22
16	7	0,30
17	3	0,13
Total	2	0,09

... podemos construir os seguintes gráficos de barras:



O gráfico de barras da esquerda considera as frequências absolutas (f_i), e o da direita as frequências relativas (f_i/n).

Aspectos a considerar na construção de um gráfico de barras:

- as barras só diferem numa das suas dimensões;
- uma das dimensões das barras – exactamente aquela que vai variando – corresponde às frequências dos diferentes valores da variável estatística;
- as barras devem estar separadas umas das outras com espaços iguais.

7.10 Medidas de tendência central

As medidas de tendência central que estudaremos são a média, a moda e a mediana.

Média

Imaginemos que os vencimentos, em meticais, dos empregados domésticos são os seguintes:

500	700	600	600	1500	1700	2600	600	700	600	2000
-----	-----	-----	-----	------	------	------	-----	-----	-----	------

Para conhecer o vencimento médio dos empregados domésticos, teremos de adicionar os vencimentos dos empregados e dividir a soma obtida pelo número total de empregados, isto é,

$$\frac{500 + 700 + 600 + 600 + 1\,500 + 1\,700 + 2\,600 + 600 + 700 + 600 + 2\,000}{11} = 1100$$

Portanto, o vencimento médio dos empregados domésticos atinge os 1100 meticais.

Aos valores observados de uma variável qualitativa ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) divididos pelo número total de observações n chama-se **média** ($\bar{x}$), representando-se da seguinte maneira:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Quando existem observações frequentes do mesmo valor, a média pode ser calculada da seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{\text{frequência de } x_1 \cdot x_1 + \text{frequência de } x_2 \cdot x_2 + \text{frequência de } x_n \cdot x_n}{n}$$

Exemplo:

Fez-se o levantamento do número de filhos de 14 famílias de um determinado bairro, tendo-se obtido os resultados seguintes:

2	1	3	2	4	0	2
3	1	2	5	2	3	4

Usando a fórmula, obtemos:

$$\bar{x} = \frac{2+1+3+2+4+0+2+3+1+2+5+2+3+4}{14} = 2,4 \text{ (1 casa decimal)}$$

Assim, podemos dizer que cada família tem em média 2,4 filhos.

Moda

Vamos voltar a considerar novamente os vencimentos, em meticais, dos empregados domésticos.

500	700	600	600	1500	1700	2600	600	700	600	2000
-----	-----	-----	-----	------	------	------	-----	-----	-----	------

Tendo em consideração estes dados, verifica-se que o vencimento de 600 meticais é o mais frequente, ocorrendo ao todo quatro vezes. A este valor de 600, por ser o mais frequente, dá-se o nome de **moda** dos vencimentos dos empregados domésticos considerados.

Ao valor que ocorre com maior frequência numa série de «n» valores de uma variável estatística ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) chama-se **moda**, representando-se por M_o .

Nota:

- se existir apenas uma moda, diz-se que o conjunto dos dados é **unimodal**;
- se existirem duas modas, diz-se que o conjunto dos dados é **bimodal**;
- se não existir moda, diz-se que o conjunto dos dados é **amodal**;

Em geral, diz-se que um conjunto é **multimodal** quando apresenta mais do que duas modas.

Mediana

Aos valores centrais de uma série de «n» valores ordenados (por ordem crescente ou decrescente) de uma variável quantitativa chama-se **mediana**, representando-se por M_d . Se n é ímpar, a mediana será o valor da variável que ocupa a posição central.

Exemplo: 1 2 5 7 9
 ↓
 mediana

Se n é par, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo: 1 2 5 7 9 10
 ↓
 mediana
 Mediana: $\bar{x} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Dois autocarros efectuam o transporte de passageiros na rota Museu – Malhazine, durante um dia, de acordo com as tabelas:

Autocarro A						
44	78	30	38	28	65	52
50	34	42	46	84	61	

Autocarro B						
54	33	41	60	83	72	48
47	39	90				

Para determinar as medianas dos passageiros transportados por cada um dos autocarros, devemos começar por ordenar os dados e contar o número de viagens feitas.

No autocarro A, que fez 13 viagens, obtemos o seguinte resultado:

28 30 34 38 42 44 46 50 52 61 65 78 84, porque o número de dados é ímpar.

No autocarro B, que fez 10 viagens, obtemos o seguinte resultado:

33 39 41 47 48 54 60 72 83 90

Portanto, $M_d = \frac{48+54}{2} = \frac{102}{2} = 51$, porque n (o número de dados) é par.

1. Pretende-se fazer um estudo sobre o número de filhos dos professores de Matemática de uma cidade. Neste sentido, efectuou-se um inquérito ao qual responderam 30 professores de Matemática. Os resultados obtidos foram os seguintes:

5 4 3 0 0 2 2 2 1 1 1 0 3 0 2

2 0 3 4 6 1 1 0 2 3 1 2 0 0 1

Indica:

- a) a população em estudo;
- b) a amostra escolhida;
- c) a unidade estatística;
- d) a variável em estudo e classifica-a.

Resolução:

- a) A população em estudo é constituída por todos os professores de Matemática da cidade em questão.
- b) A amostra escolhida é constituída pelos 30 professores que responderam ao inquérito.
- c) A unidade estatística ou o indivíduo é o professor de Matemática.
- d) A variável estatística é o número de filhos do professor. Esta variável é discreta, pois só pode tomar um número finito de valores.

2. Mediram-se os comprimentos de cinco mesas rectangulares e obtiveram-se os seguintes dados: 1,3 m; 1,2 m; 1,25 m; 1,02 m; 1,4 m.

Indica:

- a) a quantidade de observações;
- b) a unidade estatística;
- c) a variável estatística e classifica-a.

Resolução:

- a) A quantidade é-nos dada pelo conjunto das cinco mesas.
- b) A unidade estatística é representada por cada mesa.
- c) O comprimento da mesa. Trata-se de uma variável contínua.

3. As classificações (de 1 a 5) nas competições desportivas de duas turmas da 9.^a classe – a 3 e a 4 – no final do ano lectivo de 2007 foram as seguintes:

Turma 3:	1 2 3 3 3 3 4 5 2 2 3 3 3 5 4 2 4 3 3 4	Turma 4:	2 3 3 5 3 4 4 2 3 3 2 1 2 4 4 3 3 3 2 4 3 1 3 2
----------	---	----------	--

- Constrói as tabelas de frequências absolutas, relativas, absolutas acumuladas e relativas acumuladas para cada uma das turmas.
- Determina a percentagem de alunos da turma 3 com classificação inferior a 3.
- Determina o número de alunos da turma 4 com classificação igual ou superior a 3.
- Constrói um gráfico de barras com frequências relativas referentes às duas turmas e faz a comparação entre as classificações da turma 3.
- Constrói um gráfico circular (ou sectorograma) para representar as classificações da turma 3.

Resolução:

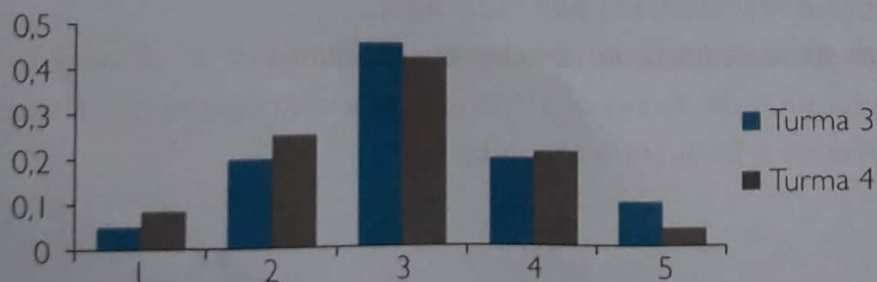
- a) Classificação da turma 3:

Classificação	f_i	f_{ri}	F_i	F_{ri}
1	1	0,05	1	0,05
2	4	0,20	2	0,25
3	9	0,45	14	0,70
4	4	0,20	18	0,90
5	2	0,10	20	1

- Classificação da turma 4:

Classificação	f_i	f_{ri}	F_i	F_{ri}
1	2	0,08	2	0,08
2	4	0,20	5	0,05
3	10	0,42	18	0,75
4	5	0,21	23	0,96
5	1	0,04	24	1

- Para encontrar a percentagem pedida basta multiplicar o valor de f_{ri} até ao valor 2 (inclusive), que é 0,25, por 100, isto é, $0,25 \times 100 = 25$. Logo, a percentagem pedida equivale a 25%.
- Faz-se a diferença entre as frequências absolutas acumuladas para obter as classificações entre 5 e 2: $24 - 8 = 16$.
- Distribuição das classificações das turmas 3 e 4:



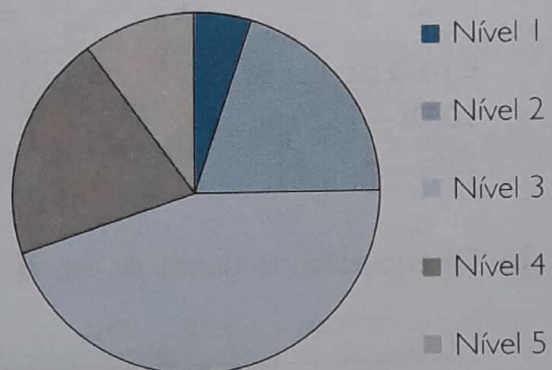
Conclusão:

1.º – a percentagem de negativas da turma 4 (níveis 1 e 2) é superior à da turma 3;

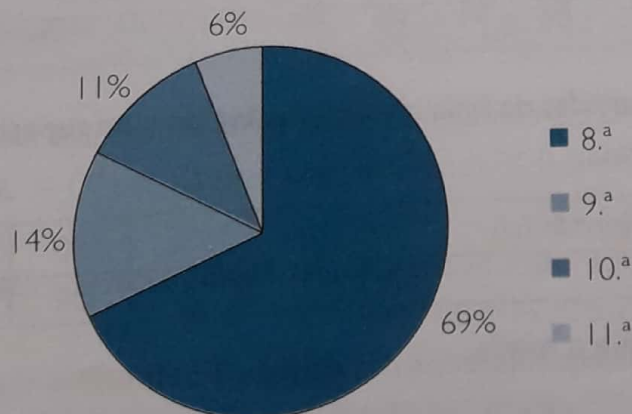
2.º – a percentagem das classificações da turma 4 é inferior à da turma 3 para os níveis 3 e 5.

- e) Para calcular as amplitudes dos ângulos dos sectores circulares correspondentes às diferentes frequências absolutas, f_i , é preciso fazer corresponder o número total de classificações (20) a 360° :

Classificação	f_i	Amplitude do ângulo do sector circular
1	1	$360^\circ \times \frac{1}{20} = 18^\circ$
2	4	$360^\circ \times \frac{4}{20} = 72^\circ$
3	9	$360^\circ \times \frac{9}{20} = 162^\circ$
4	4	$360^\circ \times \frac{4}{20} = 72^\circ$
5	2	$360^\circ \times \frac{2}{20} = 36^\circ$
Total	20	360°



4. O diagrama circular em baixo representa as percentagens das diferentes classes de uma escola privada, sabendo-se que na escola há 10 alunos da 11.ª classe:



- a) Calcula o número de alunos da 10.ª classe e de alunos da 8.ª classe.
 b) Constrói um gráfico de barras que represente a distribuição dos alunos da escola, recorrendo à frequência absoluta.

Resolução:

- a) Sabendo que existem 10 alunos na 11.^a classe e verificando no diagrama circular que isto corresponde a 6%, podemos calcular o número total de alunos usando a regra de três simples:

10 alunos – 6%

x – 100%

$$x = \frac{100 \times 10}{6} \Rightarrow x = \frac{1000}{6} \Rightarrow x = 167 \text{ alunos (arredondado ao número inteiro)}$$

Para calcular o número de alunos na 8.^a classe fazemos novamente uma regra de três simples, certificando que, no diagrama circular, à 8.^a classe correspondem 69% dos alunos:

100% – 167 alunos

69% – x

$$x = \frac{69 \times 167}{100} \Rightarrow x = 115 \text{ alunos}$$

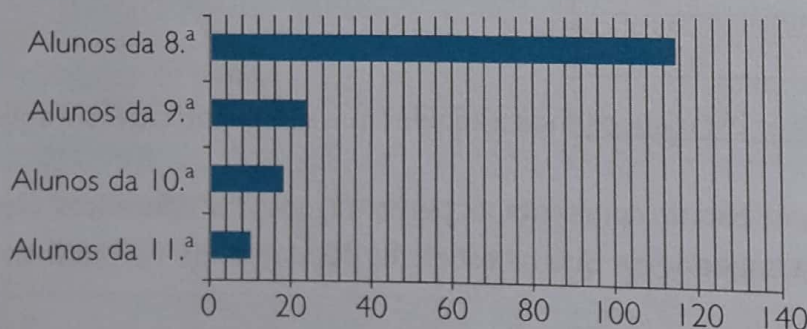
E para os alunos da 10.^a classe, com 11% dos alunos:

100% – 167 alunos

11% – x

$$x = \frac{11 \times 167}{100} \Rightarrow x = 18 \text{ alunos}$$

- b) Distribuição de alunos da escola por classes:



5. O número de garrafas de água mineral existentes num supermercado está distribuído da seguinte forma:

Capacidade da garrafa (cl)	25	50	100	150
N.º de garrafas	12	15	28	28

Calcula a média e a moda.

Resolução:

$$\bar{x} = \frac{12 \times 25 + 15 \times 50 + 28 \times 100 + 28 \times 150}{12 + 15 + 28 + 28}$$

Resposta: a capacidade média é de 97 cl, aproximadamente.

Quanto à moda, como as frequências dos dados $x_3 = 100$ e $x_4 = 150$ são as mesmas (28), cada um deles é modal da distribuição, por isso, neste caso o conjunto de dados é **bimodal**.

1. De um camião de melões, retiraram-se e pesaram-se quatro melões. Obtiveram-se os seguintes resultados: 2,5 kg; 3,4 kg; 4,2 kg; 2,3 kg.
 - a) O que representam, em linguagem estatística, os valores encontrados?
 - b) Indica a população, a amostra e a unidade estatística.

2. Indica a população e a unidade estatística nos seguintes estudos:
 - a) o curso preferido pelos alunos de uma turma;
 - b) a nacionalidade dos políticos que visitaram Moçambique em 2003;
 - c) o tempo gasto pelos 10 melhores atletas moçambicanos na corrida de São Silvestre na cidade de Maputo, em 31 de Dezembro de 2002.

3. Considera o seguinte exemplo:

Num congresso dedicado à criança, 5 pediatras, 3 psicólogos, 4 educadores, 2 assistentes sociais e 2 sociólogos apresentaram as suas comunicações.

Se utilizássemos estes dados para efectuar um estudo estatístico, indica qual seria:

 - a) a população;
 - b) a unidade estatística;
 - c) o carácter estatístico. Classifica-o.

4. Dos seguintes caracteres estatísticos, indica aqueles que são quantitativos e aqueles que são qualitativos:
 - a) raça;
 - b) resultado de um exame;
 - c) cilindrada do motor;
 - d) idade;
 - e) número de calorias;
 - f) uso de óculos;
 - g) estado civil;
 - h) talento musical.

5. Das variáveis a seguir indicadas, diz quais são discretas e quais são contínuas:
 - a) número de nascimentos, por dia, numa maternidade;
 - b) registo de faltas, por dia, dos empregados de uma repartição pública;
 - c) duração de um noticiário;
 - d) temperatura da água do mar;
 - e) número de pontos obtidos no lançamento de um dado.

6. O número de idas ao quadro dos alunos de uma turma durante um mês está distribuído da seguinte forma:

Rapazes	Raparigas
2 2 1 4 0	2 1 0 2 4 3
2 3 3 2 1	2 0 3 1 3 1
3 4 5 4 2	1 2 0 4 1

- Constrói uma tabela de frequências, incluindo as frequências absolutas, relativas, absolutas acumuladas e relativas acumuladas, referentes ao número de «idas ao quadro» de rapazes e de raparigas.
 - Indica a percentagem de raparigas que foram ao quadro 2 vezes ou menos.
 - Indica o número de rapazes que foram ao quadro 3 vezes ou mais.
 - Qual é a percentagem de alunos (rapazes e raparigas) que foram ao quadro exactamente 2 vezes?
7. Determina a média, a moda e a mediana de cada um dos conjuntos de dados seguintes:
- 45; 31; 40; 32; 30; 46
 - 96; 81; 85; 96; 87; 83; 85; 96; 94
 - 60; 63; 57; 68; 56; 52; 60; 68; 60; 56
8. Indica o valor de x , sabendo que o conjunto de números (1; 3; 2; 4; 3; 2; 3; 2; 4; x) tem:
- Moda 3; Mediana 2,5; Média 2,8.
9. A tabela seguinte apresenta a distribuição das classificações obtidas pelos alunos no segundo trimestre na disciplina de Matemática da 10.^a classe:

Classificação (0 a 20)	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Número de alunos	1	2	6	8	3	5	5	2	2

- Determina a percentagem de alunos com classificação inferior a 12 valores.
- Determina a média e a moda.
- Descontente com a sua classificação, um aluno afirmou que «as notas da disciplina de Matemática são péssimas». Comenta a opinião do aluno a partir das medidas de tendência central.

Semelhança de triângulos

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- aplicar as homotetias para ampliar e reduzir figuras planas simples;
- determinar razões e proporções de segmentos de recta;
- identificar figuras e triângulos semelhantes;
- aplicar os critérios de semelhança na resolução de problemas;
- aplicar o Teorema de Tales na resolução de exercícios e problemas;
- aplicar as relações métricas do triângulo rectângulo na resolução de problemas.

8.1 Introdução

A expressão «figuras semelhantes» faz-nos pensar em figuras que se assemelham, ou que são parecidas.

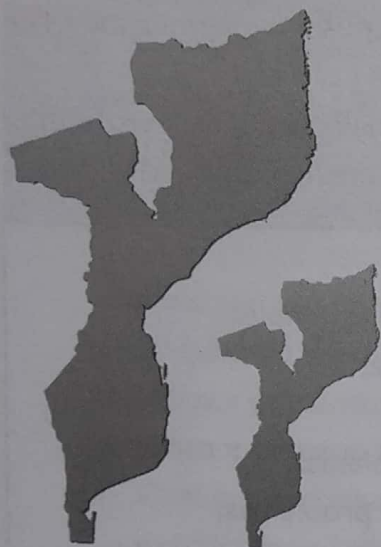
Podemos associar a ideia de figuras semelhantes a ampliações ou reduções de uma figura que não se afasta da sua forma original. No nosso dia-a-dia podemos observar vários exemplos de semelhança entre objectos. Por exemplo, quando tiramos uma fotografia a imagem que vemos é a representação reduzida do objecto em tamanho real e, ao mesmo tempo, é uma ampliação da figura que aparece no negativo.



A planta de uma casa, ou de uma ponte, é também um exemplo de semelhança entre a casa, ou a ponte, em tamanho real e a sua representação no papel.

Procura lembrar-te de outras situações da tua vida diária em que se observa uma semelhança entre figuras.

8.2 Ampliação e redução de figuras



Estas figuras têm a mesma forma, mas apresentam tamanhos diferentes.

8.3 Segmentos proporcionais

Recorda-te que,

Proporção é uma igualdade entre duas razões equivalentes.

Tal como acontece com os números racionais, que já estudámos, é possível estabelecer a proporcionalidade entre segmentos de recta, com base nas medidas desses segmentos.

Consideremos então os segmentos de recta seguintes e as suas medidas:

$$\overline{AB} \quad |AB| = 1 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} \quad |CD| = 2 \text{ cm}$$

$$\overline{PQ} \quad |PQ| = 3 \text{ cm}$$

$$\overline{RS} \quad |RS| = 6 \text{ cm}$$

Agora calcula:

- a razão entre os segmentos AB e CD.
- a razão entre os segmentos PQ e RS.

Verificarás que a razão entre os segmentos AB e CD e os segmentos PQ e RS pode ser representada por fracções equivalentes. Ou seja: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{2}$; $\frac{|PQ|}{|RS|} = \frac{3}{6}$.

Sendo $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ duas fracções equivalentes, existe uma proporção entre estes quatro segmentos de recta.

Assim, podemos dizer que:

- os segmentos de recta AB, CD, PQ e RS são proporcionais se: $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|PQ|}{|RS|}$;
- os segmentos AB e RS são chamados segmentos extremos e os segmentos CD e PQ são chamados segmentos meios;
- a proporcionalidade em cima indicada é garantida pelo facto de existir uma proporção entre os números inteiros que representam as medidas dos segmentos.

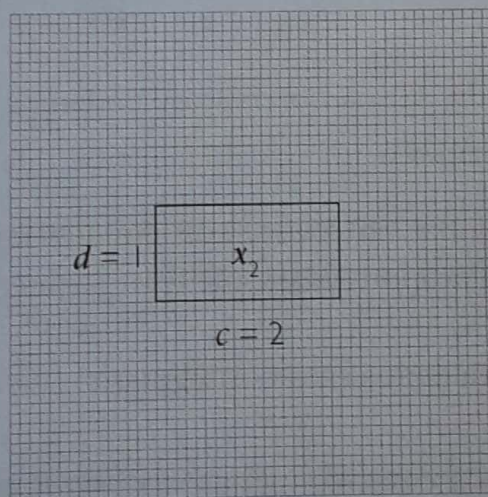
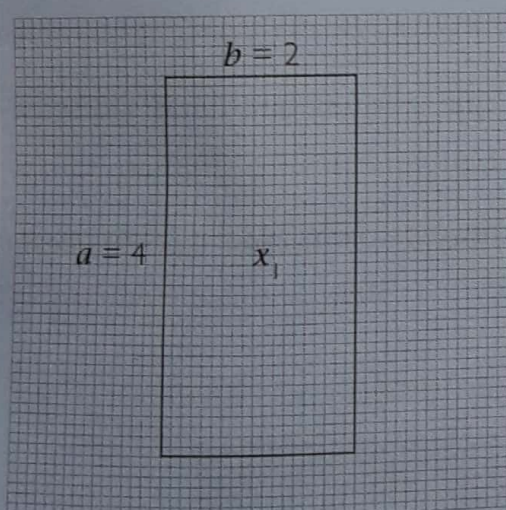
8.4 Propriedade fundamental das proporções

Numa proporção de segmentos, o produto das medidas dos segmentos meios é igual ao produto das medidas dos segmentos extremos.

Deste modo: $|AB| \cdot |CD| = |PQ| \cdot |RS|$

Exemplo:

Observa as figuras:



Verifica se existe proporcionalidade entre os comprimentos dos segmentos.
Em caso afirmativo, indica o valor da constante de proporcionalidade.

Resolução:

	Comprimento dos segmentos			
	x_1	x_2	a	c
x_1	4	2	4	2
x_2	2	1	2	1

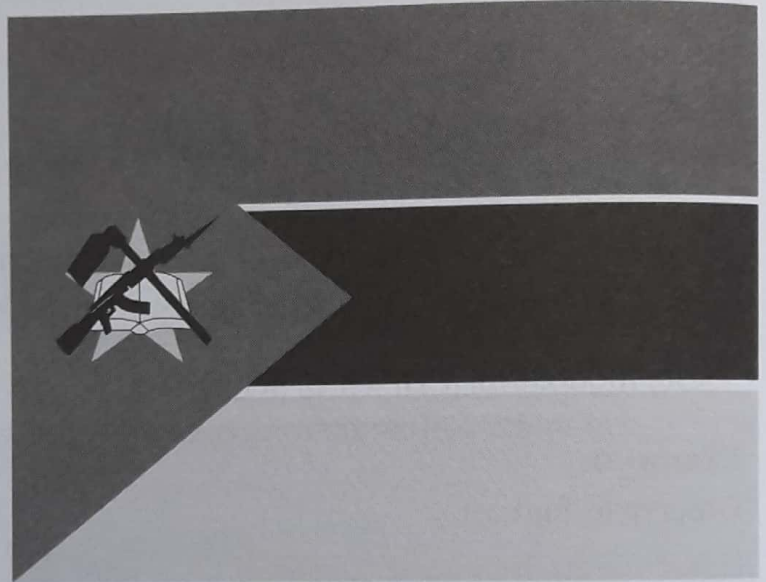
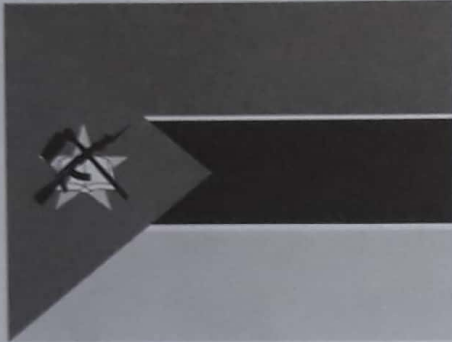
Como $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, isto é $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$, existe proporcionalidade.

A constante de proporcionalidade é igual a 2.

8.5 Triângulos semelhantes

8.5.1 Noção de semelhança

As figuras seguintes representam a bandeira de Moçambique em dois tamanhos diferentes.



Partindo da sua observação, podemos afirmar que as duas bandeiras são semelhantes. Assim:

Duas figuras são **semelhantes** quando têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

Observa com atenção as figuras:

 F_1  F_2  F_3  F_4

Podemos afirmar que:

- a figura F_2 é geometricamente igual à figura F_1 .
- a figura F_3 é uma ampliação da figura F_1 .
- a figura F_4 é uma redução da figura F_1 .

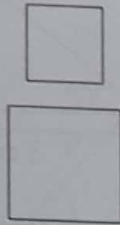
Assim, as figuras F_1 , F_2 , F_3 e F_4 são semelhantes.

Duas figuras são **semelhantes** se forem geometricamente iguais ou se uma delas for uma ampliação ou redução da outra.

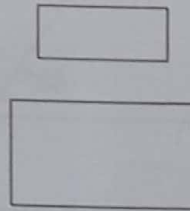
No nosso quotidiano encontramos outros exemplos de figuras semelhantes.



Dois triângulos equiláteros



Dois quadrados



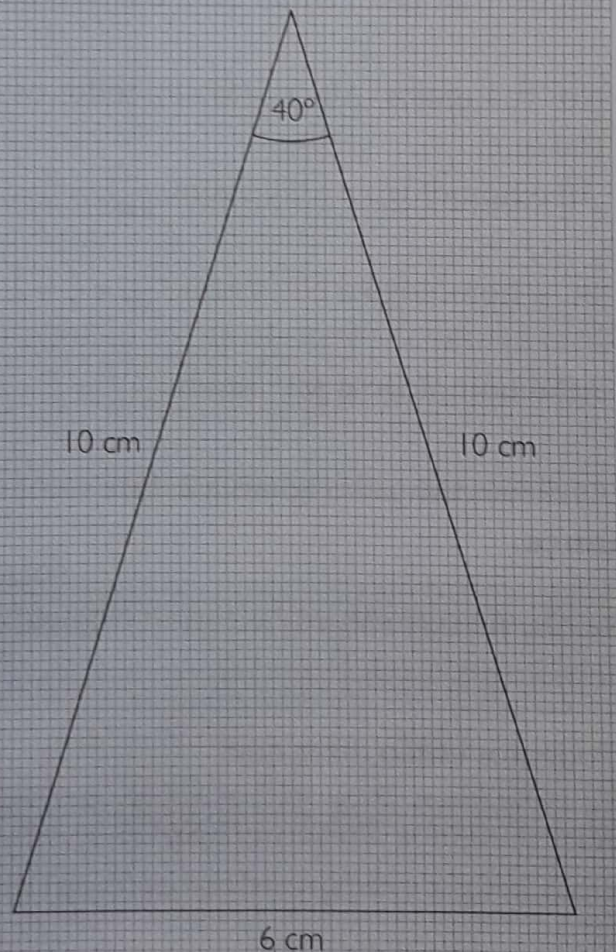
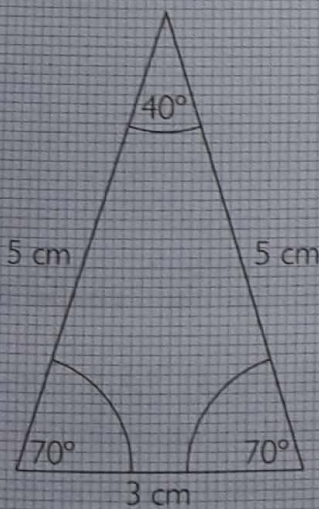
Dois rectângulos



Dois hexágonos regulares

Atenta agora nos seguintes triângulos isósceles:

- Indica os pares de lados proporcionais.
- Verifica se os ângulos correspondentes são congruentes.

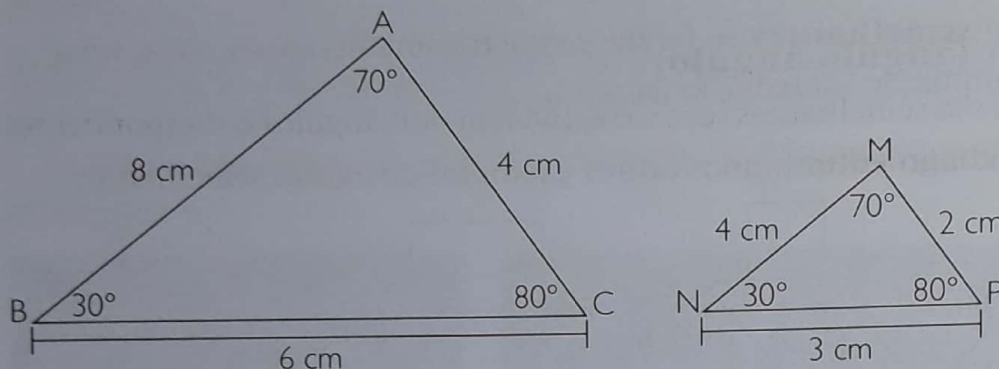


Podemos então dizer que estes dois triângulos são semelhantes, porque:

- os lados são proporcionais dois a dois;
- os ângulos correspondentes são congruentes.

Estas duas condições são essenciais para que dois polígonos sejam semelhantes.

Para os triângulos (ABC) e (MNP):



Os três ângulos são respectivamente congruentes; isto é:
 $\angle A \cong \angle M$, $\angle B \cong \angle N$, $\angle C \cong \angle P$

Repara que dois triângulos semelhantes possuem sempre lados proporcionais e ângulos congruentes. Se um lado do primeiro triângulo for proporcional a um lado do outro triângulo, então esses dois lados são chamados **homólogos**.

Nos triângulos (ABC) e (MNP), todos os lados proporcionais são homólogos.

Daí que:

- $\overline{AB}$ é homólogo a $\overline{MN}$; assim, $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{MN}|} = \frac{8}{4} = 2$;
- $\overline{BC}$ é homólogo a $\overline{NP}$; assim, $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{NP}|} = \frac{6}{3} = 2$;
- $\overline{AC}$ é homólogo a $\overline{MP}$; assim, $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{MP}|} = \frac{4}{2} = 2$.

As razões são todas iguais a 2. Este valor comum é denominado **razão de semelhança**.

Razão de semelhança de dois triângulos semelhantes é a razão de dois lados homólogos.

Podemos então dizer que:

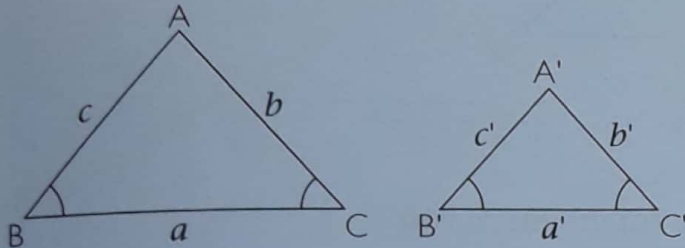
Dois triângulos são **semelhantes** se os seus 3 ângulos forem congruentes e os seus 3 lados **correspondentes** forem proporcionais.

Existem critérios que devem ser observados para que se considere que haja semelhança entre triângulos. Analisemos agora estes critérios e procuremos depois aplicá-los em problemas concretos.

8.5.2 Critérios de semelhança entre triângulos

1) Critério AA (ângulo-ângulo)

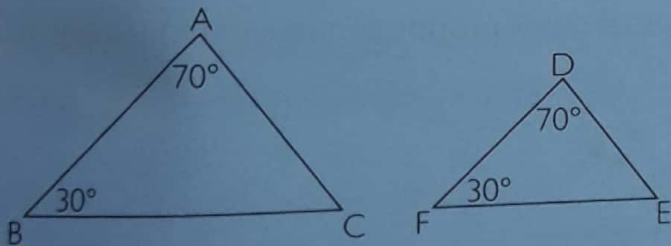
Dois triângulos são semelhantes se, e só se, tiverem dois ângulos correspondentes respectivamente congruentes.



$$\begin{aligned} \angle B &\equiv \angle B' \\ \angle C &\equiv \angle C' \end{aligned} \longrightarrow \text{Logo, } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ (aa)}$$

Exemplo:

Observe os triângulos (ABC) e (DEF):



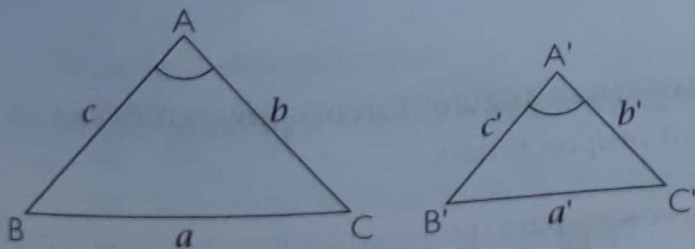
Os ângulos A e D são congruentes, pois têm de amplitude 70° .

Os ângulos C e F são congruentes, pois têm de amplitude 30° .

Assim, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (pelo critério a.a.).

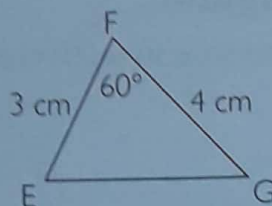
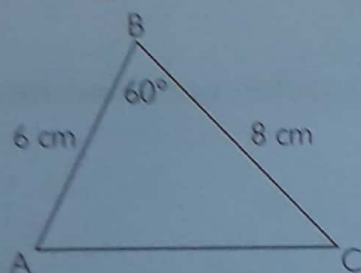
2) Critério LAL (lado-ângulo-lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e só se, tiverem dois lados respectivamente proporcionais, e forem congruentes os ângulos formados por esses lados.



$$\begin{aligned} \angle A &\equiv \angle A' \\ \frac{b}{b'} &= \frac{c}{c'} \end{aligned} \longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ (l.a.l.)}$$

Exemplo:



Repara que: $\frac{[AB]}{[EF]} = \frac{[BC]}{[FG]} = 2$

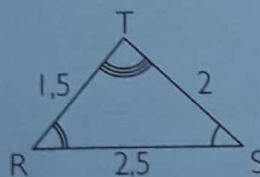
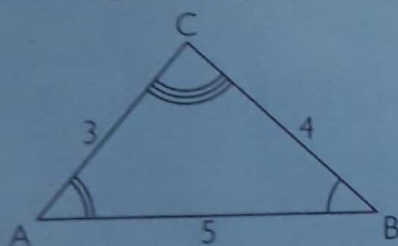
$\hat{B} = \hat{F} = 60^\circ$

Assim, $\triangle ABC \sim \triangle EFG$.

3) Critério LLL (lado-lado-lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e só se, tiverem os três lados respectivamente proporcionais.

Exemplo:



Repara que: $\frac{[AC]}{[RT]} = \frac{[AB]}{[RS]} = \frac{[CB]}{[TS]} = 2$

Logo, $\triangle ABC \sim \triangle RTS$ (l.l.l.).

8.6 Relações métricas no triângulo rectângulo

Para compreender as relações métricas existentes no triângulo rectângulo, é muito importante definir alguns conceitos.

Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

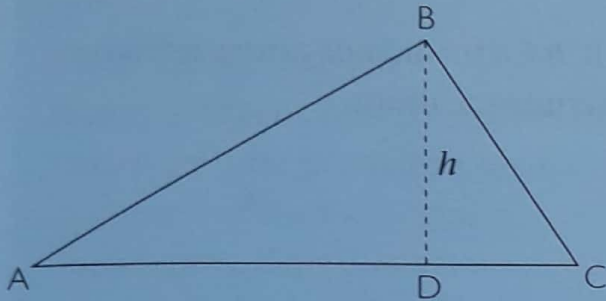
O **meio proporcional** entre dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é o segmento $\overline{MN}$, de tal modo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{CD}}$.

Considera agora três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$.

O **quarto proporcional de três segmentos** $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ é o segmento $\overline{MN}$, tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{MN}}$.

Nota: nos casos em que os meios são iguais, a proporção diz-se terceiro proporcional: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MN}}$. Nestas condições a proporção é designada por contínua.

Considera um triângulo (ABC) rectângulo em B e BD o segmento de altura referente à hipotenusa AC.



$\triangle ABD$ é rectângulo em D.

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{BD}|} = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AD}|}$$

Podemos afirmar que: $\triangle ABD \sim \triangle BDC$. Porquê?

Como acontece com os triângulos semelhantes, a ângulos iguais opõem-se lados proporcionais; logo: $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$.

Podemos então concluir que:

Num triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa é o meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa.

Considera novamente a figura anterior, o $\triangle ABC$ rectângulo em B.

Da sua observação resulta que:

$\triangle ABC \sim \triangle BDC$ sendo que $\angle ABC \cong \angle BDC$, porque se trata de um ângulo recto.

a) $\angle BAC \cong \angle DBC$. Porquê?

b) $\angle BCA \cong \angle BCD$. Porquê?

Em triângulos semelhantes a ângulos iguais opõem-se lados proporcionais, e assim podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$$

Daqui se concluindo que:

a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$

Ou seja: num triângulo rectângulo qualquer cateto é o meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção ortogonal sobre ela.

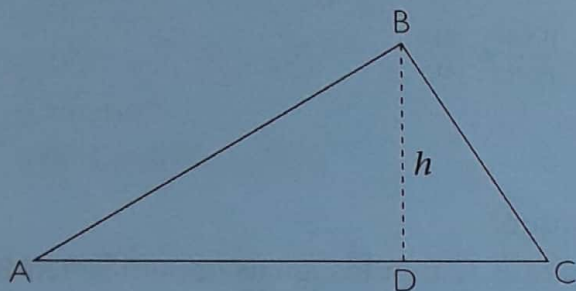
b) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$

Ou seja: num triângulo rectângulo a altura relativa à hipotenusa é o quarto proporcional entre a hipotenusa e os dois catetos.

Num triângulo rectângulo, qualquer cateto é o meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção sobre ela.

Exemplo:

Na figura seguinte, $\triangle ABC$ é rectangular em B, h é a medida da altura referente à hipotenusa $|AD| = 9$ cm e $|DC| = 4$ cm. Determina a altura.



Resolução:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBC \sim \triangle ABD, \text{ logo, } \frac{DC}{BD} = \frac{BD}{AD} \text{ ou } \frac{4}{h} = \frac{h}{9} \Leftrightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6.$$

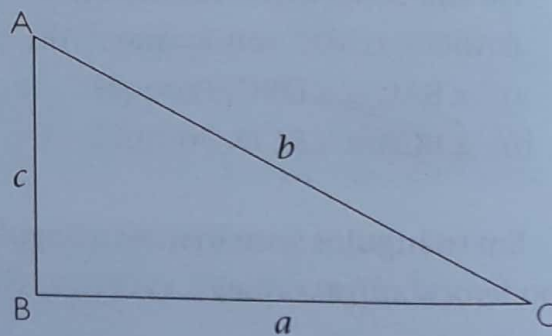
Estes conhecimentos confirmam o já estudado Teorema de Pitágoras.

Ainda te recordas da sua formulação? O Teorema de Pitágoras diz:

Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Atentemos na seguinte hipótese: $\triangle ABC$ é rectângulo em B.

Se pretendermos mostrar que $b^2 = a^2 + c^2$, como devemos proceder?



Demonstração

Passos:

- 1) $\frac{b}{a} = \frac{a}{y} \Rightarrow a^2 = by$
- 2) $\frac{b}{c} = \frac{c}{x} \Rightarrow c^2 = bx$
- 3) $a^2 + c^2 = b(x + y)$
- 4) $a^2 + c^2 = b^2$
- 5) $b^2 = a^2 + c^2$
cq.d.

Justificações:

Num triângulo rectângulo, qualquer cateto é meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção sobre ela.

Somando, membro a membro, as expressões a) e b).

Porque $x + y = b$.

Fica assim demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Agora, sabendo que os catetos de um triângulo rectângulo medem 30 cm e 40 cm, e se quisermos determinar as medidas das suas projecções sobre a hipotenusa, vejamos como devemos proceder.

$$a = 30 \text{ cm e } c = 40 \text{ cm.}$$

Pretende-se encontrar os valores de x e y .

Vamos calcular primeiro a medida de b :

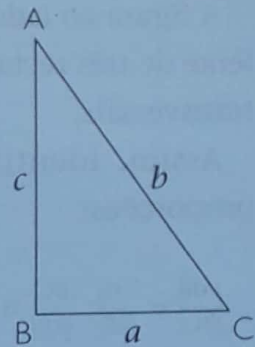
$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = 50 \text{ cm.}$$

Calculemos, depois, o valor da projecção y :

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{y} \Rightarrow a^2 = by \Rightarrow 900 = 50 \cdot y; \text{ logo, } y = \frac{900}{50} = 18 \text{ cm.}$$

Calculemos, por fim, o valor da projecção x :

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{x} \Rightarrow c^2 = bx \Rightarrow 1600 = 50 \cdot x; \text{ logo, } x = \frac{1600}{50} = 32 \text{ cm.}$$



8.7 Teorema de Tales

Um pouco de História Tales de Mileto (c. 625 a.C. – 558 a.C.)

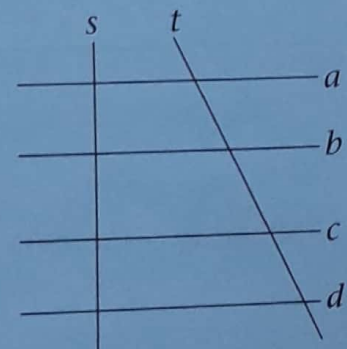
Tales de Mileto, considerado o primeiro filósofo ocidental, nasceu na cidade de Mileto, na Ásia Menor (na actual Turquia) no século VI a.C. Destacou-se também na Matemática, Astronomia e Física. Passou muito tempo no Egipto, de onde trouxe muitos conhecimentos de Matemática e Geometria, ciências às quais deu um grande contributo (chegou mesmo a medir a altura de uma das grandes pirâmides usando a semelhança de triângulos).

Estudou rectas e ângulos, tendo estabelecido um teorema que tem o seu nome.

8.7.1 Feixe de rectas paralelas

Um conjunto de três ou mais rectas paralelas num plano é designado por feixe de rectas paralelas. A recta que intercepta as rectas do feixe é designada por recta transversal.

As rectas a , b , c e d , visíveis no desenho acima, formam um feixe de rectas paralelas, enquanto que as rectas s e t são rectas transversais.



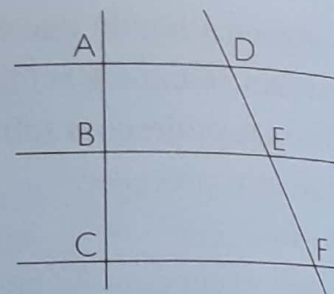
Teorema de Tales

Quando duas rectas transversais cortam um feixe de rectas paralelas, as medidas dos segmentos correspondentes determinados nas transversais são proporcionais.

A figura ao lado representa uma situação onde um feixe de três rectas paralelas é cortado por duas rectas transversais.

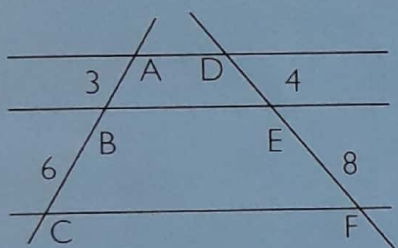
Assim, identificamos as seguintes sequências de proporções:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}, \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|DE|}, \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}, \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$



Exemplo:

Consideremos a figura seguinte com um feixe de rectas paralelas, sendo as medidas dos segmentos indicadas em centímetros.



Assim:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|DE|} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

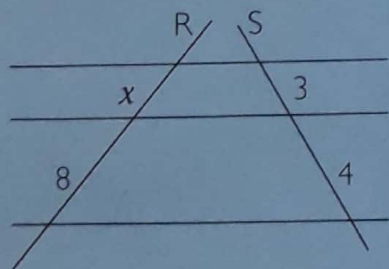
$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

Neste exemplo pudemos verificar que a proporção pode ser formulada de várias formas.

Nota: se um dos segmentos do feixe de paralelas for desconhecido, a sua dimensão pode ser determinada recorrendo às suas razões proporcionais.

Exemplo:

Neste caso, pretendemos calcular x .



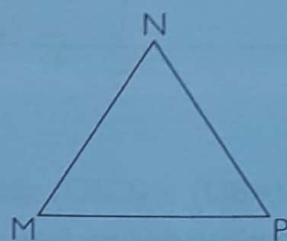
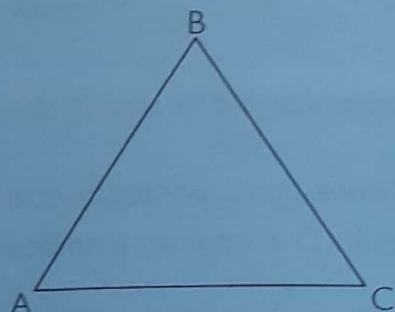
Aplicando o Teorema de Tales, obtemos: $\frac{8}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 3}{4} \Rightarrow x = \frac{24}{4} \Rightarrow x = 6$

1. Sendo dados dois triângulos (ABC) e (MNO), tais que:

$$\hat{A} = \hat{M} = 60^\circ; \hat{B} = 70^\circ; \hat{P} = 50^\circ;$$

justifica que $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

Resolução:



$$\hat{A} \cong \hat{M}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

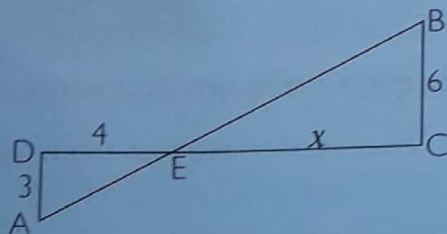
$$\Rightarrow 60^\circ + 70^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 130^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 50^\circ$$

Então, $\hat{C} = \hat{P} = 50^\circ$.

E por ser $\hat{A} \cong \hat{M}$ e $\hat{C} \cong \hat{P}$, então os triângulos são semelhantes pelo critério a.a.

2. Na figura seguinte, $\triangle BCE$ e $\triangle ADE$ são semelhantes. Calcula o valor de x em centímetros.



Resolução:

Sendo semelhantes os triângulos (BCE) e (ADE), pode determinar-se x identificando os lados homólogos das figuras. Assim, é possível construir a seguinte proporção:

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|CE|} = \frac{|AE|}{|BE|}$$

Da proporcionalidade $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}$, substitui-se os valores para obter $\frac{3}{6} = \frac{4}{x}$

Resolvendo a equação:

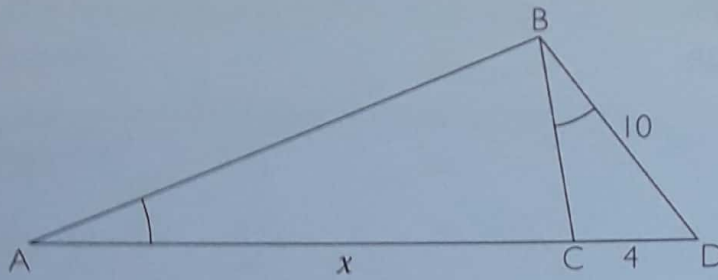
$$3x = 6 \cdot 4$$

$$3x = 24$$

$$x = 8 \text{ cm}$$

Resposta: $x = 8 \text{ cm}$

3. Determina a medida x na figura em baixo.



Resolução:

Como podes ver, os triângulos (ABD) e (CBD) são semelhantes, pois possuem dois ângulos com a mesma medida (assinalados na figura). O ângulo D é comum a ambos os triângulos.

Comparando os lados correspondentes marcados nas duas figuras acima, resulta imediatamente que:

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

Substituindo os valores, obtemos: $\frac{10}{4} = \frac{(x+4)}{10}$

Resolvendo a equação:

$$4(x+4) = 10 \cdot 10$$

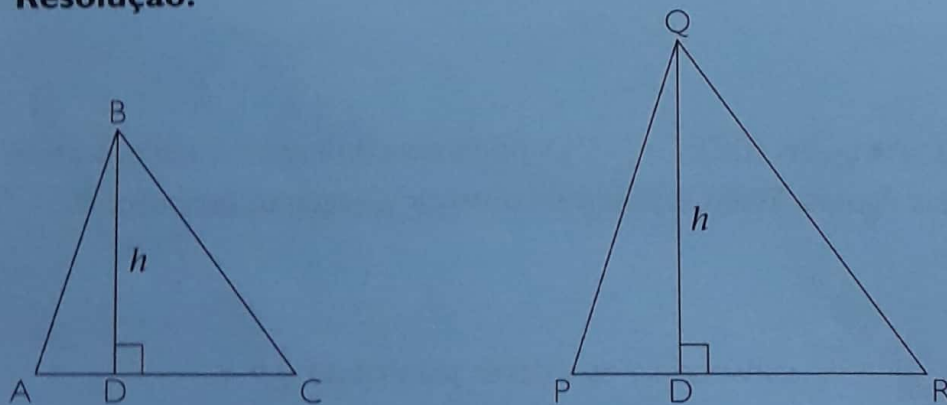
$$x+4 = 100 : 4$$

$$x+4 = 25 \therefore x = 21$$

Resposta: $x = 21$

4. Sendo dados dois triângulos semelhantes, justifica que a razão dos seus perímetros é igual à respectiva razão de semelhança.

Resolução:



Sendo r a razão de semelhança, temos:

$$\frac{PQ}{AB} = r \Rightarrow PQ = r AB$$

$$\frac{PR}{AC} = r \Rightarrow PR = r AC$$

$$\frac{QR}{BC} = r \Rightarrow QR = r BC$$

Seja $P_{\triangle ABC}$ o perímetro do $\triangle ABC$ e $P_{\triangle PQR}$ o perímetro do $\triangle PQR$, então:

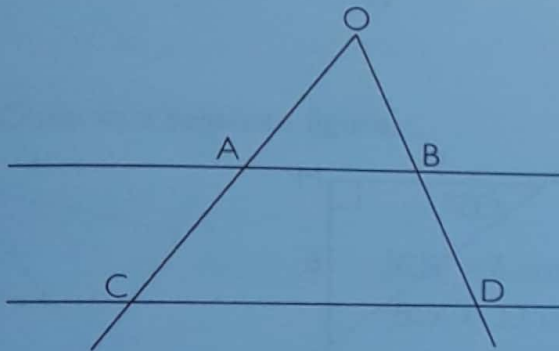
$$P_{\triangle ABC} = |AB| + |BC| + |AC|$$

$$P_{\triangle PQR} = |PQ| + |QR| + |PR| = r|AB| + r|AC| + r|BC|, \text{ ou seja,}$$

$$P_{\triangle PQR} = r(|AB| + |BC| + |AC|)$$

$$\text{Assim, } P_{\triangle PQR} = rP_{\triangle ABC} \Rightarrow r = \frac{P_{\triangle PQR}}{P_{\triangle ABC}}.$$

5. Observa a figura seguinte:



Dados:

$$AB \parallel CD$$

$$|OA| = 10 \text{ cm}$$

$$|OB| = 8 \text{ cm}$$

$$|BD| = 6 \text{ cm}$$

Determina o comprimento AC.

Resolução:

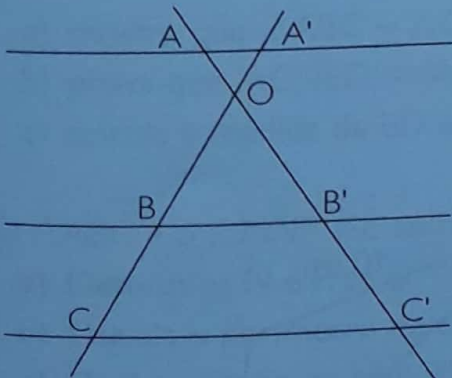
Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|}, \text{ donde: } \frac{10}{8} = \frac{|AC|}{6}$$

$$\text{Assim, } |AC| = \frac{10 \cdot 6}{8} = \frac{60}{8} \Rightarrow |AC| = 7,5 \text{ cm.}$$

Resposta: o comprimento de AC é de 7,5 cm.

6. Na figura, as rectas BB' e CC' são paralelas.



Dados:

$$|OB| = 21 \text{ cm}$$

$$|OB'| = 20 \text{ cm}$$

$$|B'C'| = 10 \text{ cm}$$

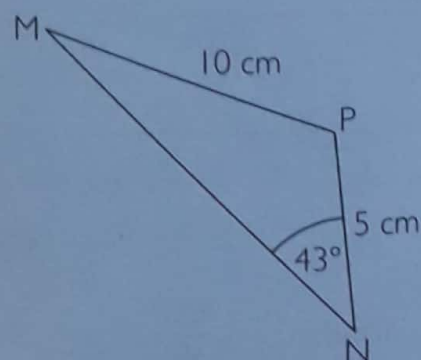
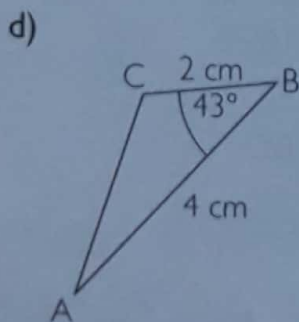
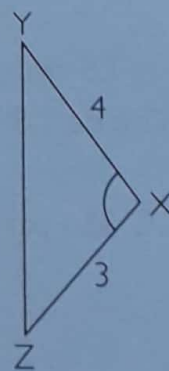
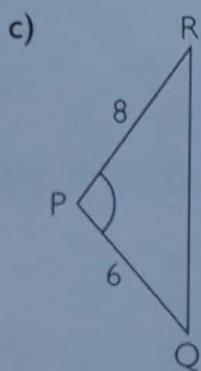
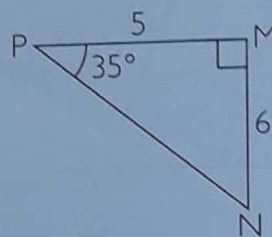
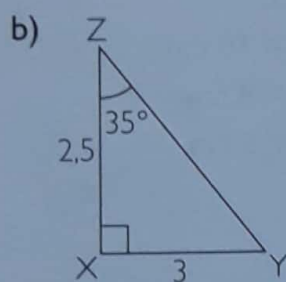
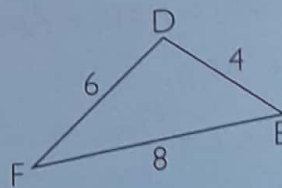
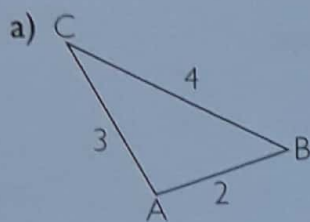
Calcula: BC

Resolução:

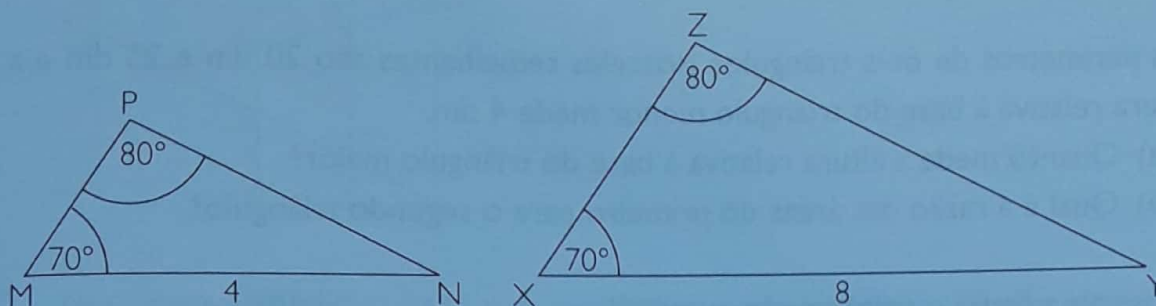
$$\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \text{ donde: } \frac{21}{20} = \frac{|BC|}{10}$$

$$\text{Assim, } |BC| = 21 \cdot \frac{10}{20} = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ cm.}$$

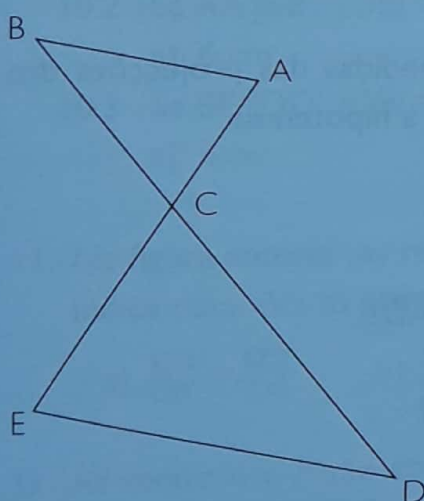
I. Justifica a semelhança dos triângulos seguintes:



2. Verifica se estes dois triângulos são ou não semelhantes. Em caso afirmativo, indica a razão de semelhança.



3. Observa a seguinte figura:



$$\begin{aligned} |CB| &= 6 \text{ cm} \\ |BD| &= 22 \text{ cm} \\ |AC| &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Determina a medida de CE para que $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

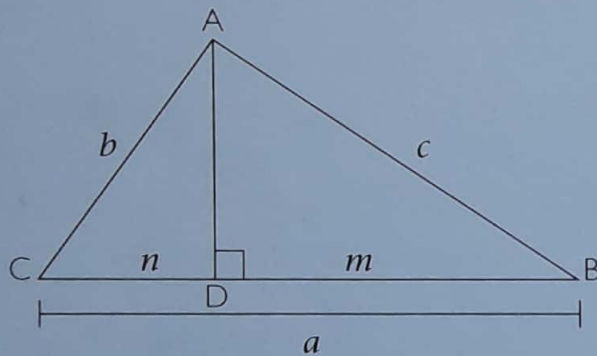
4. Observa de novo a figura anterior. Supondo que $AB \perp AE$, $|AE| = 3 \text{ cm}$, $|BC| = 5 \text{ cm}$, $DE \perp EA$ e $|CE| = 6 \text{ cm}$:

- mostra que $\triangle ABC \sim \triangle CDE$;
- prova que $|AC| \cdot |ED| = |AB| \cdot |CE|$;
- calcula a medida de ED e DC.

5. O $\triangle ABC$ e o $\triangle MNP$ são semelhantes, sendo $\angle A \cong \angle N$ e $\angle B \cong \angle P$.

- Determina N e P, se $a = 4 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$; $c = 10 \text{ cm}$ e $M = 32 \text{ cm}$.
- Calcula o perímetro de cada um dos triângulos.
- Qual é a razão de semelhança dos triângulos (ABC) e (MNP)?
- Qual é a razão entre os perímetros dos dois triângulos?

6. Sendo dados dois triângulos semelhantes, justifica que:
A razão das suas áreas é igual ao quadrado da respectiva razão de semelhança.
7. Os perímetros de dois triângulos isósceles semelhantes são 20 dm e 25 dm e a altura relativa à base do triângulo menor mede 4 dm.
- Quanto mede a altura relativa à base do triângulo maior?
 - Qual é a razão das áreas do primeiro para o segundo triângulo?
8. Observa a figura e responde às questões:

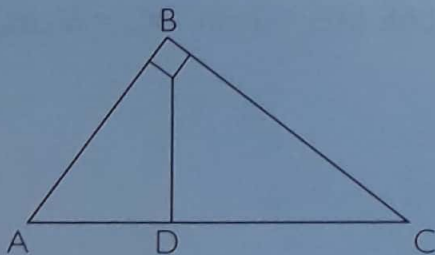


$\triangle ABC$ é rectângulo em A.

$AD \perp BC$

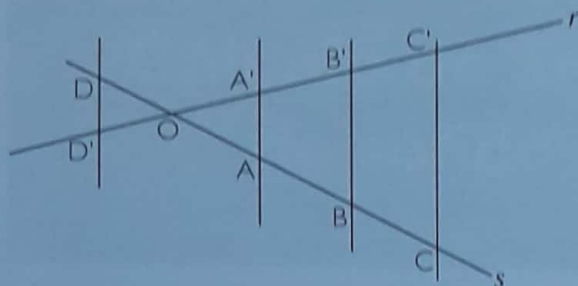
m e n são medidas das projecções dos catetos sobre a hipotenusa.

- Se $m = 10$ cm, $a = 12,5$ cm, qual é a medida de $\overline{AD}$?
 - Se $m = 6$ cm e $n = 2$ cm, qual é a medida de b ?
 - Se $a = 25$ cm e $c = 24$ cm, qual é a medida de n ?
9. Na figura está representado um $\triangle ABC$, rectângulo em B. Traçou-se a altura BD relativamente à hipotenusa.



- Se $|AC| = 10$ cm e $|AB| = 6$ cm, qual é a medida de BC?
- Se $|AC| = 18$ cm e $|AD| = 8$ cm, determina a medida de AB.

10. Observa a figura seguinte:



10.1 Se $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|BC| = 6 \text{ cm}$ e $|A'B'| = 10 \text{ cm}$, quanto mede $|A'C'|$?

- a) 17 cm b) 16,5 cm c) 17,5 cm d) 15 cm

10.2 Se $AA' \parallel BB'$, $|OB| = 4 \text{ cm}$, $|AC| = 10 \text{ cm}$ e $|A'A'| = 2 \text{ cm}$, quanto mede $|CC'|$?

- a) 6 cm b) 7 cm c) 8 cm d) 5 cm

10.3 Se $BB' \parallel DD'$, $|OB| = 16 \text{ cm}$, $|BD| = 23 \text{ cm}$ e $|BB'| = 10 \text{ cm}$, quanto mede DD' ?

- a) 4 cm b) 4,375 cm c) 4,5 cm d) 3,475 cm

11. Na figura anterior, as rectas r e s são concorrentes e $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$.

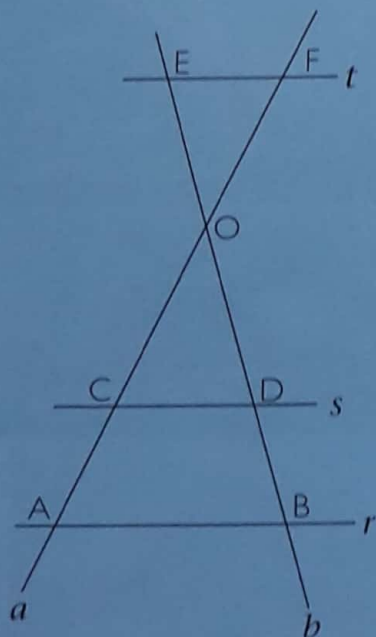
Indica com «V» as proposições verdadeiras e com «F» as falsas.

- a) $\frac{OD}{OB'} = \frac{OD'}{OB}$ b) $\frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'}$ c) $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'D'}{AD}$

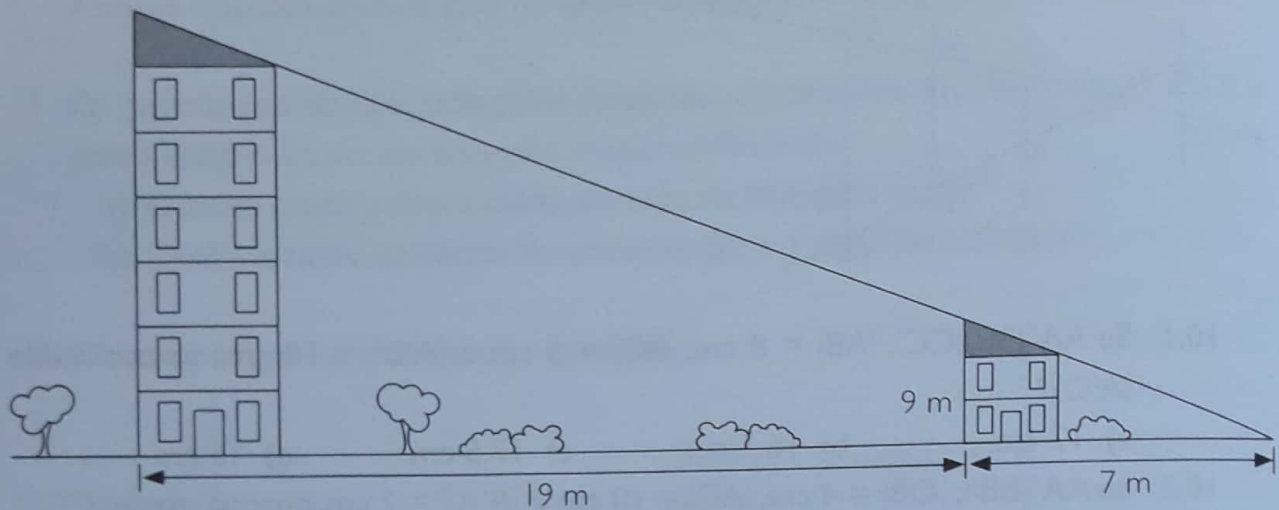
12. As rectas a e b são concorrentes no ponto O e as rectas r , s e t são paralelas.

Calcula $|AB|$ e $|OB|$, sabendo que:

$|OC| = 6 \text{ cm}$; $|CD| = 5 \text{ cm}$; $|CA| = 3 \text{ cm}$; $|DB| = 4 \text{ cm}$

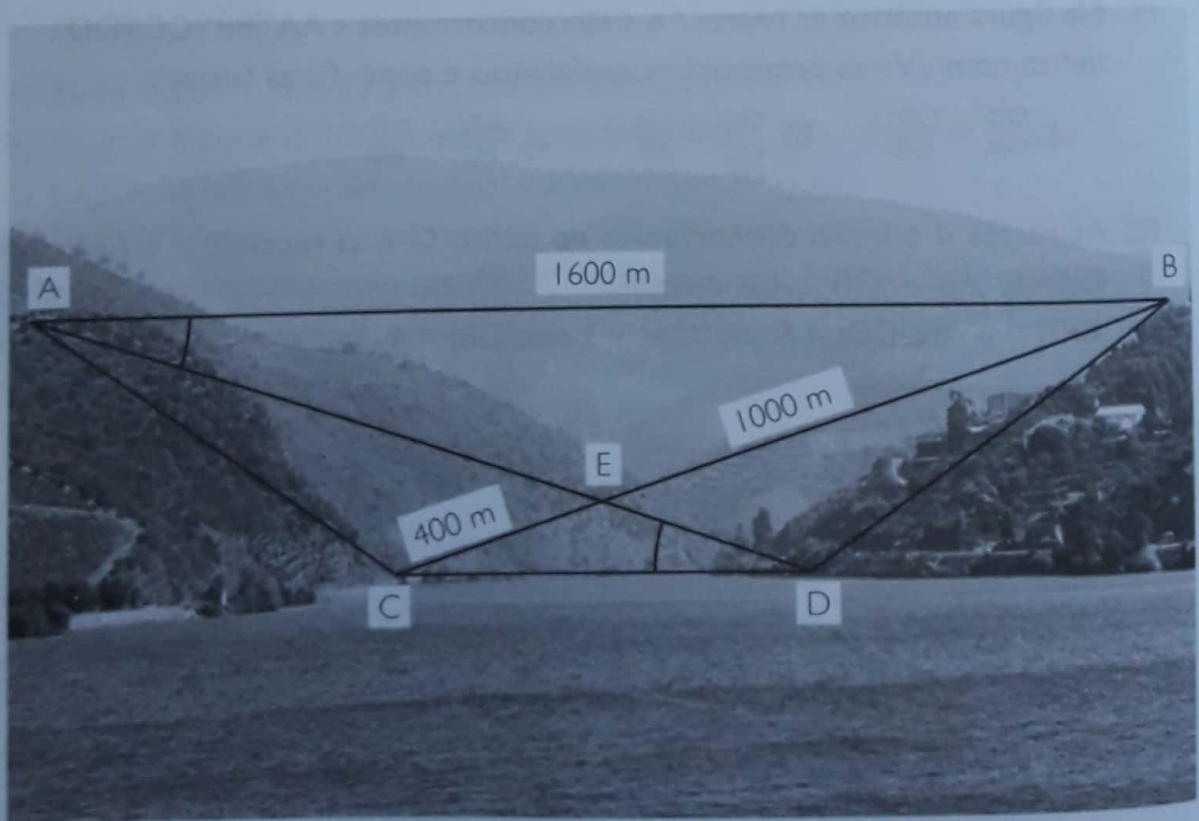


13. Observa a figura:



Determina a altura do prédio maior.

14. Para medir a largura de um rio, foi usado o esquema do desenho abaixo. Sabendo que os triângulos (ABE) e (CDE) são semelhantes, determina a largura do rio.



Unidade 9

Cálculo de áreas e de volumes de sólidos geométricos

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar poliedros;
- classificar poliedros;
- aplicar a relação de Euler no cálculo do número de faces, de vértices e de arestas;
- identificar prismas e pirâmides e seus elementos;
- classificar prismas e pirâmides;
- calcular áreas de prismas e de pirâmides;
- calcular volumes de prismas e de pirâmides;
- calcular áreas de cilindros, cones e esferas;
- calcular volumes de cilindros, cones e esferas;
- resolver problemas concretos do dia-a-dia, aplicando conhecimentos de áreas e volumes de sólidos.



9.1 Um pouco de história sobre o surgimento da geometria

A geometria é o ramo da Matemática que se dedica ao estudo das formas, sejam planas ou espaciais. Está intimamente ligada à vida do Homem, ajudando-o a resolver diversos problemas que enfrenta no seu quotidiano. Isto explica que a geometria tenha surgido há já muito tempo, e ao longo de muitos milhares de anos o Homem foi adquirindo e melhorando os seus conhecimentos sobre este ramo.

Alguns historiadores acreditam que a Geometria (do grego *geo* = *terra* + *metria* = medida, ou seja, «medir a terra») teve a sua origem no Egipto, cerca de 3000 a. C. Os seus inventores teriam sido os habitantes do vale do Nilo, não só para fazerem as medições dos terrenos que se seguiam a cada inundação causada pelas cheias deste rio, mas também para a construção das pirâmides e de outros edifícios.

Alguns séculos mais tarde, por volta de 500 a. C, deu-se na Grécia um desenvolvimento muito importante desta ciência, com vários estudiosos a dedicarem-se ao estudo da Geometria. Destacaram-se Tales de Mileto e Euclides de Alexandria, o mais célebre dos géometras de todos os tempos.

9.2 Conceito de poliedro

Observa as fotografias e em cada uma identifica modelos de sólidos geométricos que estudámos.



1. Cone



2. _____



3. _____

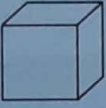
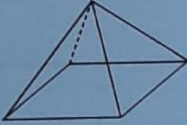
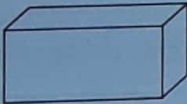
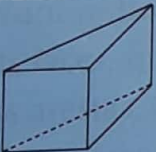


4. _____



5. _____

Com a ajuda dos modelos de sólidos geométricos da escola, completa o quadro seguinte no teu caderno.

Sólido	Nome	Número de arestas	Número de faces	Número de vértices
				
				
				
				
				

Recordemo-nos que um paralelepípedo rectangular é composto pelos seguintes elementos:

- 6 faces;
- todas as faces são superfícies planas;
- duas das faces são bases e as outras são faces laterais;
- as seis faces formam no seu todo a fronteira do paralelepípedo rectangular.

Indica agora outros sólidos cujas superfícies são planas.

Como sabemos, há sólidos cujas superfícies não são planas.
Consegues indicar alguns exemplos?
Observemos a figura seguinte.

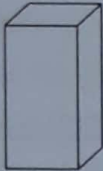
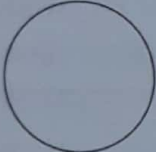
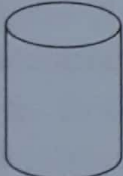
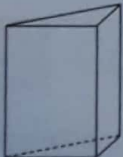
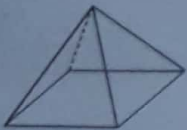
A figura ao lado representa um cilindro.

A sua superfície é formada por:

- duas superfícies planas (as bases);
- uma superfície curva.



Completa o quadro seguinte no teu caderno:

Sólido	Superfícies planas		Número de superfícies curvas	Nome do sólido
	Número de bases	Número de faces laterais		
				
				
				
				
				
				

Na tabela que preenchestes pudeste notar que:

- há sólidos que apresentam superfícies planas;
- há sólidos que apresentam superfície não planas.

Os sólidos geométricos cuja fronteira é constituída por superfícies planas são poliedros .	Os sólidos geométricos em que pelo menos uma das superfícies que constituem a fronteira é uma superfície curva não são poliedros .
	

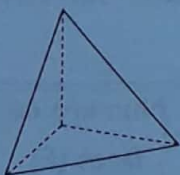
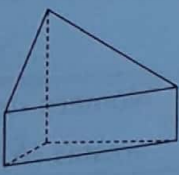
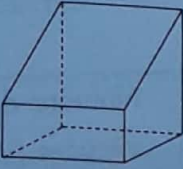
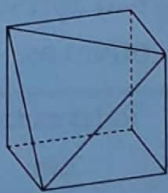
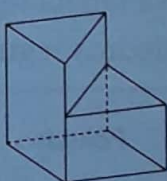
São **poliedros** os sólidos limitados por superfícies planas.

Num poliedro podemos identificar os seguintes elementos:

- as faces, que são os polígonos que limitam um poliedro;
- as arestas, que são os lados dos polígonos que limitam um poliedro;
- os vértices, que são os vértices dos polígonos;
- a superfície que limita um poliedro chama-se superfície poliédrica.

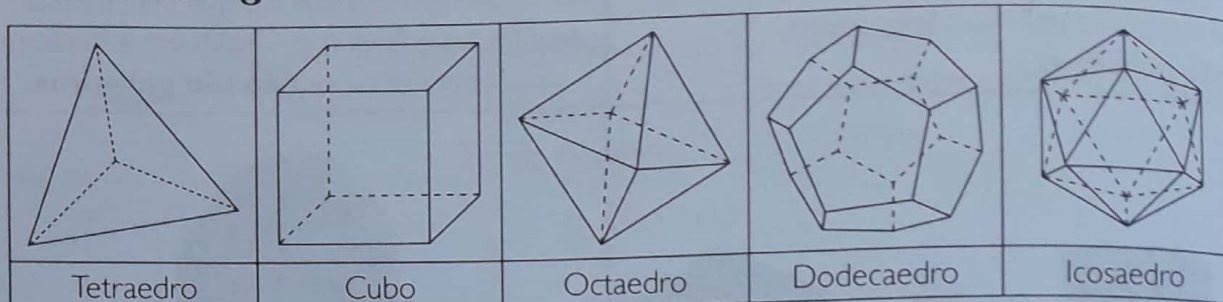
9.3 Classificação dos poliedros

Os poliedros podem classificar-se de acordo com o número de faces.

				
Tetraedro	Pentahedro	Hexaedro	Heptaedro	Octaedro

Existem **poliedros convexos** e **poliedros côncavos**. Dá-se o nome de **poliedros regulares** aos poliedros em que as faces constituem polígonos regulares e iguais. Quando tal não sucede, diz-se que são **irregulares**. Vamos estudar apenas poliedros convexos e regulares.

Poliedros regulares



Resumindo

- o tetraedro regular tem 4 faces que são triângulos equiláteros;
- o cubo ou hexaedro regular tem 6 faces que são quadrados;
- o octaedro regular tem 8 faces que são triângulos equiláteros;
- o dodecaedro regular tem 12 faces que são pentágonos regulares;
- o icosaedro regular tem 20 faces que são triângulos equiláteros.

Teorema de Euler:

Em qualquer poliedro convexo, verifica-se a seguinte relação: $F + V - A = 2$, sendo F o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas.

Exemplo:

Um poliedro convexo tem 18 vértices e 30 arestas. Quantas faces tem o poliedro?

$$F + V = A + 2 \Leftrightarrow F + 18 = 30 + 2 \Leftrightarrow F = 32 - 18 = 14.$$

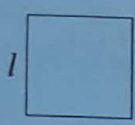
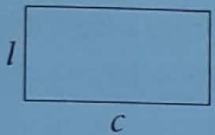
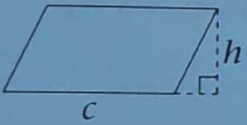
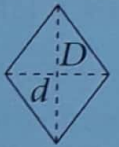
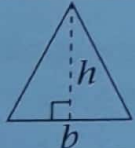
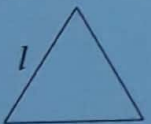
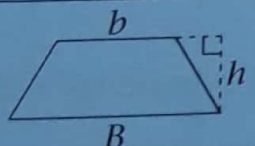
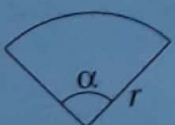
Logo, o poliedro convexo tem 14 faces.

Na tabela seguinte são apresentados os chamados poliedros de Platão – são cinco poliedros regulares convexos.

Poliedro	Todas as faces são:	Número de vértices (V)	Número de arestas (A)	Número de faces (F)
Tetraedro regular	Triângulos	4	6	4
Hexaedro regular	Quadrados	8	12	6
Octaedro regular	Triângulos	6	12	8
Dodecaedro regular	Pentágonos	20	30	12
Icosaedro regular	Triângulos	12	30	20

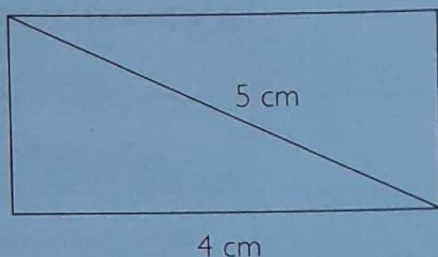
9.3.1 Áreas de figuras planas

Relembremos agora as fórmulas das áreas de algumas figuras planas estudadas.

Figura	Nome	Área
	Quadrado	$A = l \cdot l = l^2$
	Retângulo	$A = c \cdot l$
	Paralelogramo	$A = c \cdot h$
	Rombo	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
	Triângulo	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
	Triângulo equilátero	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$
	Trapézio	$A = \frac{B + b}{2} h$
	Círculo	$A = \pi r^2$
	Hexágono regular	$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$
	Polígono regular	$A = \frac{p \cdot a}{2}$
	Sector circular	$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$

Exemplos:

- a) Vamos determinar a área de um retângulo com uma diagonal de 5 cm e um comprimento de 4 cm.



Dados: $d = 5$ cm e $c = 4$ cm.

Pretende-se determinar: A_R .

$d^2 = c^2 + l^2$, pelo teorema de Pitágoras.

$$5^2 = 4^2 + l^2 \Leftrightarrow l^2 = 25 - 16$$

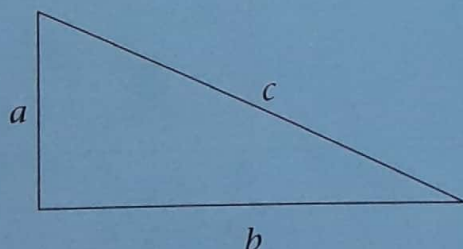
$$l^2 = 9, \text{ logo } l = 3 \text{ cm}$$

$$A_R = c \times l \Leftrightarrow A_R = 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2.$$

- b) Vamos calcular a área de um paralelogramo, em que a altura relativa à base mede 3 cm e a base mede 8 cm.

$$A_{Pmo} = c \times h \Leftrightarrow A_{Pmo} = 8 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$$

- c) A hipotenusa e um dos catetos de um triângulo rectângulo medem 20 m e 12 m, respectivamente. Vamos determinar a medida da área.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$20^2 = a^2 + 12^2$$

$$400 = a^2 + 144$$

$$400 - 144 = a^2$$

$$a^2 = 256 \Rightarrow a = 16, \text{ porque } 16^2 = 256$$

$$\text{Assim, a área é: } A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ m}^2.$$

- d) Vamos determinar a área de um hexágono regular cujo perímetro é 72 m.

Dados:

$$P = 72 \text{ m}$$

A área de um hexágono regular é dada por: $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$. Mas $P = 6 \cdot l$

Pelo que $72 \text{ m} = 6 \times l \Rightarrow l = 12 \text{ m}$.

Sendo $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$ e $l = 12 \text{ m}$, então

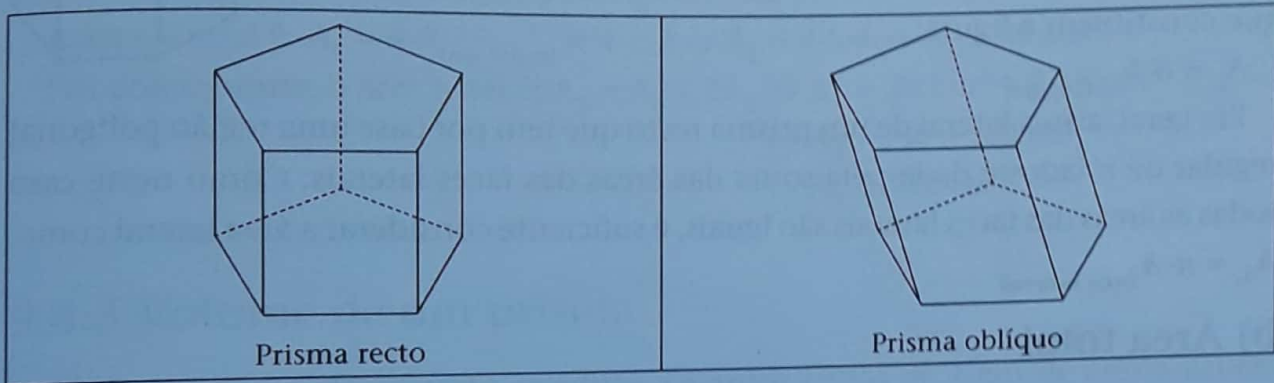
$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 12^2 \text{ m}^2 \Rightarrow A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 144 \text{ m}^2 = 3\sqrt{2} \cdot 72 \text{ m}^2 = 216\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

Resposta: o hexágono regular tem uma área de $216\sqrt{3} \text{ m}^2$.

9.4 Prisma

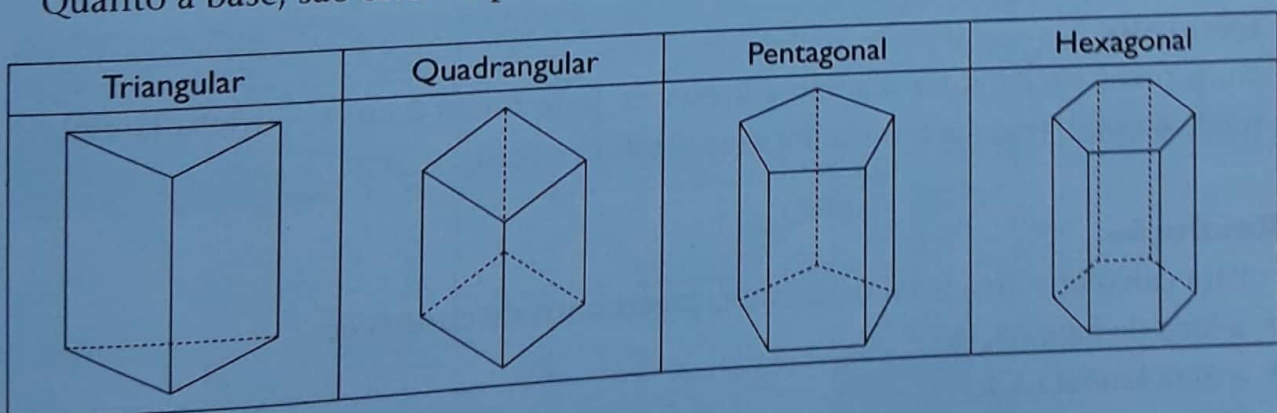
Um prisma é um sólido geométrico limitado por duas bases, situadas em planos paralelos, e com várias faces, que são paralelogramos.

Dependendo da **inclinação** das suas arestas laterais, os prismas podem ser considerados **rectos** ou **obliquos**.



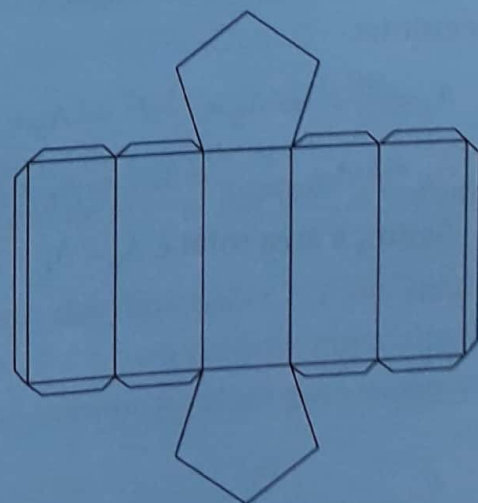
Um prisma recto é todo aquele cujas arestas laterais são paralelas e perpendiculares às bases, têm a mesma medida e as faces são rectângulos. No prisma oblíquo as arestas laterais não são perpendiculares às bases.

Quanto à base, são estes os prismas mais comuns:



9.4.1 Planificação de um prisma

A planificação é muito importante porque nos facilita o cálculo das áreas lateral e total. Observa a planificação de um prisma de bases pentagonais:



9.4.2 Área de um prisma

a) Área lateral

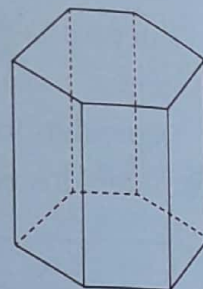
A área lateral de uma superfície lateral é a soma das áreas das faces laterais, sendo designada por A_L . Observemos a figura ao lado:

Assim, a área lateral é a soma das áreas dos seis (6) retângulos que constituem a figura:

$$A_L = 6 \cdot A_{\text{rectângulo}}$$

Em geral, a área lateral de um prisma recto que tem por base uma região poligonal regular de n lados é dada pela soma das áreas das faces laterais. Como neste caso todas as áreas das faces laterais são iguais, é suficiente considerar a área lateral como:

$$A_L = n \cdot A_{\text{face lateral}}$$



b) Área total

Dá-se o nome de área total à soma da área da superfície lateral com as áreas das bases, sendo representada pelo símbolo A_T .

Assim, a área total do prisma é dada pela relação: $A_T = A_L + 2A_B$, sendo A_B a área da base.

Exemplo:

Num prisma triangular regular, a aresta da base mede 2 cm e a aresta lateral mede 6 cm. Vamos determinar a área total do prisma.

Resolução:

Para calcular a área total do prisma, precisamos de conhecer:

- a área da base (A_B);
- a área lateral (A_L).

Neste caso, a base é um triângulo equilátero, pelo que a área da base é a seguinte:

$$A_B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2 \Rightarrow A_B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 \Rightarrow A_B = \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_L = 3 \cdot A_{\text{face lateral}} = 3c \cdot l \Rightarrow A_L = 3 \cdot 6 \cdot 2 \Rightarrow A_L = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Assim, a área total é } A_T = A_L + 2A_B \Rightarrow A_T = 36 \text{ cm}^2 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_T = 2(18 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

Outro exemplo:

Num prisma de base quadrangular, a área da base mede 16 cm^2 e a aresta lateral 5 cm. Qual é a medida da superfície total do prisma?

Resolução:

A área da base já é conhecida, pois $A_B = 16 \text{ cm}^2$:

A área lateral é: $A_L = 4 \cdot A_{\text{face lateral}} = 4 \cdot c \cdot l \Rightarrow A_L = 4 \cdot 5 \cdot 4 \Rightarrow A_L = 80 \text{ cm}^2$.

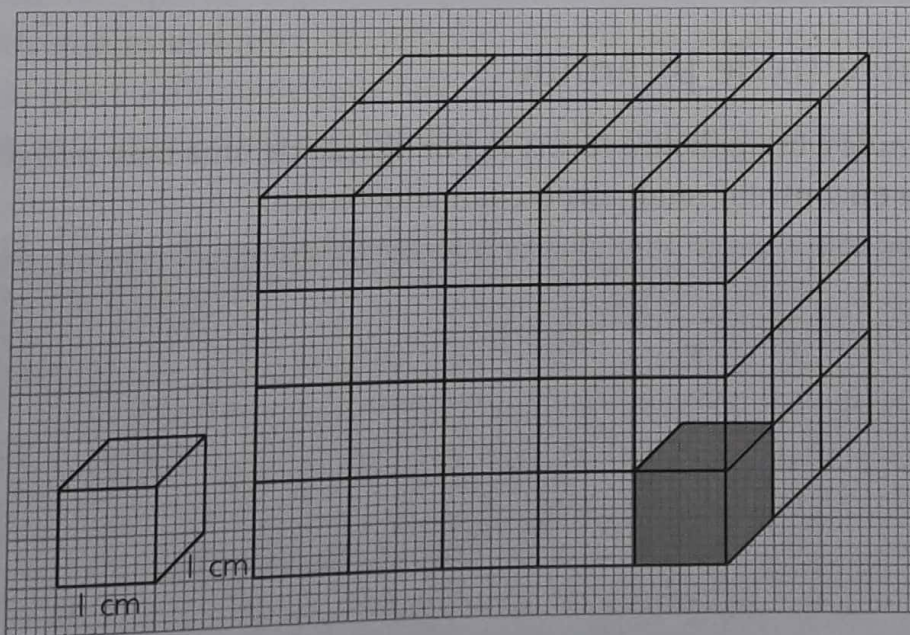
Por conseguinte, a área total é: $A_T = A_L + 2A_B \Rightarrow A_T = 80 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 16 \text{ cm}^2$

$$\Rightarrow A_T = (80 + 32) \text{ cm}^2$$

$$A_T = 112 \text{ cm}^2$$

9.4.3 Volume de um prisma

Observemos o prisma recto seguinte. Quantos cubos de 1 cm de aresta cabem nele? Vamos contá-los:



Podemos observar que cabem exactamente 60 cubos de 1 cm de aresta no prisma recto. Isto quer dizer que cabem $5 \cdot 4 \cdot 3$ cubos de 1 cm de aresta. Por isso, o volume do prisma é $V = 60 \text{ cm}^3$.

Assim, o volume de um prisma recto é o produto das dimensões c , l e h , sendo representado pela expressão $V = c \cdot l \cdot h$. Mas como $c \cdot l$ é a área da base e h a altura, temos que $V = A_B \cdot h$. Na realidade, esta fórmula de volume é válida para qualquer prisma, oblíquo ou recto.

Exemplos:

- Vamos determinar o volume de um prisma recto com as seguintes dimensões: 6 cm, 1 cm e 3 cm.
- Vamos calcular o volume de um prisma de 5 cm de altura, cuja base é um triângulo equilátero de lado igual a 2 cm.

Resolução:

a) $V = c \cdot l \cdot h$

$$V = 6 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^3.$$

b) $V = A_B \cdot h$

A área da base de um triângulo equilátero é dada por $A_B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$ e sendo $l = 2 \text{ cm}$, então $A_B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3} \text{ cm}^2$.

$$\text{Assim: } V = A_B \cdot h = \sqrt{3} \cdot 5 = V = 5\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

9.5 Pirâmide

9.5.1 Conceito de pirâmide

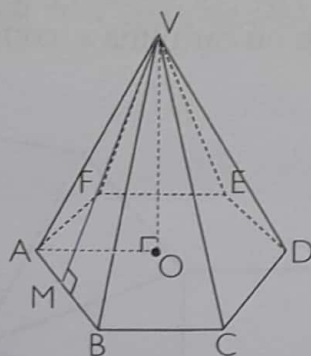
Uma pirâmide é um poliedro formado por ligação de uma base poligonal a triângulos, que se encontram num ponto chamado vértice.



A pirâmide de Chichen Itza, no México.

9.5.2 Elementos de uma pirâmide

Podemos identificar vários elementos numa pirâmide:



Pirâmide regular

$\overline{VO}$ é a altura

$\overline{OM}$ é o apótema da base

$\overline{VM}$ é o apótema da pirâmide

- a base da pirâmide, que é o polígono determinado pelo plano;
- o vértice de superfície, que é o vértice da pirâmide;
- a altura, que é a distância do vértice da pirâmide ao plano da base;
- as faces laterais, que são regiões planas triangulares que passam pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base;
- as arestas laterais, que são segmentos que têm um extremo no vértice da pirâmide e outro extremo num vértice do polígono situado no plano da base;
- o apótema, que é a altura de cada face lateral;
- a aresta da base, que é qualquer um dos lados do polígono da base.

9.5.3 Classificação das pirâmides

As pirâmides podem ser classificadas das seguintes formas:

a) segundo o número de arestas da base;

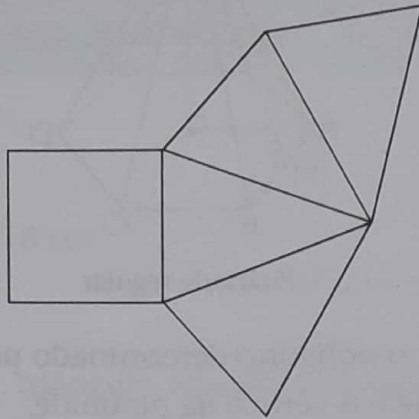
Pirâmide triangular	Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal
A base é um triângulo.	A base é um quadrilátero.	A base é um pentágono.	A base é um hexágono.

b) segundo a forma das suas bases.

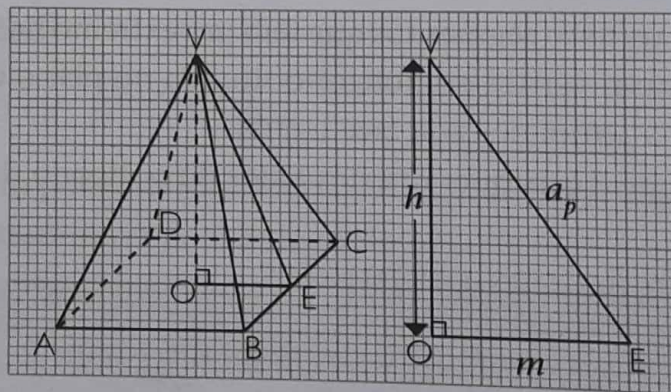
A pirâmide é regular quando a sua base é um polígono regular e a projecção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com o centro da base.

Planificação da pirâmide

Para construir a pirâmide, pode-se utilizar papelão ou cartolina. Desenha-se o plano da pirâmide em papelão ou cartolina e, com uma tesoura, corta-se de forma exacta sobre as arestas.



9.5.4 Área lateral de uma pirâmide



m = apótema da base e a_p apótema da pirâmide

Na pirâmide regular, podemos destacar dois elementos muito importantes:

- o **apótema da pirâmide**, que é o segmento de recta com uma extremidade no vértice da pirâmide e outra no ponto médio de qualquer aresta da base;
- o **apótema da base**, que é o segmento de recta com uma extremidade no centro da base e o ponto médio de qualquer aresta da base.

Na figura acima, $\triangle VOE$ é um triângulo rectângulo. Pode-se então dizer que $a_p^2 = m^2 + h^2$, de acordo com o teorema de Pitágoras, sendo a_p o apótema da pirâmide e m o apótema da base.

Quando a base da pirâmide for um triângulo equilátero, o apótema da base é dado pela fórmula $m = \frac{a_b \sqrt{3}}{6}$, sendo a_b a aresta da base. Se a base da pirâmide for quadrada, então o apótema da base é $m = \frac{a_b}{2}$.

Exemplo:

Uma pirâmide triangular regular tem 2 cm de altura e a aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm. Vamos determinar:

- o apótema da base;
- o apótema da pirâmide.

Resolução:

Dados:

$$h = 2 \text{ cm e } a_b = 2\sqrt{3}$$

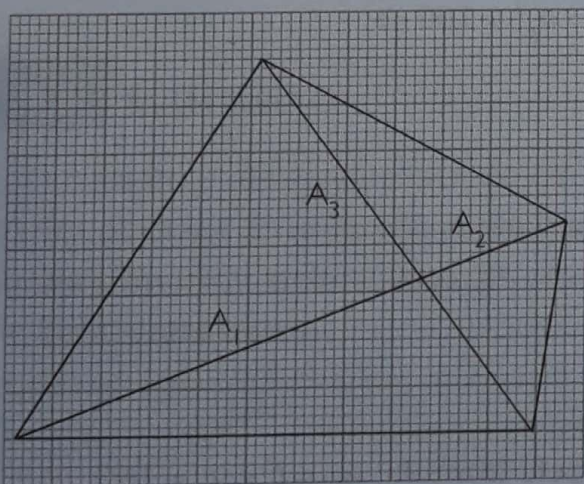
$$\text{a) } m = \frac{a_b \sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{2 \cdot 3}{6} \Rightarrow m = 1 \text{ cm}$$

$$\text{b) } a_p^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow a_p^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \text{ logo } a_p = \sqrt{5} \text{ cm.}$$

9.5.5 Área de uma pirâmide

Vamos considerar uma pirâmide regular cuja base tem n lados.

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ as áreas dos triângulos das faces laterais de uma pirâmide. Então, a área lateral (A_L) da pirâmide pode ser obtida da seguinte forma:
 $A_L = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$.

Exemplo:

$$A_L = A_1 + A_2 + A_3$$

Neste caso, $A_L = A_1 + A_2 + A_3$.

É importante notar que se a pirâmide é regular, todos os triângulos têm a mesma área. Neste caso, basta calcularmos a área de um dos triângulos da face e multiplicarmos esse valor pelo número de lados da base. Teremos $A_L = n \cdot A_{\text{face triangular}}$, se a pirâmide for regular.

9.5.6 Área total de uma pirâmide

A área total de uma pirâmide é a soma da área da base com a área lateral, isto é: $A_T = A_L + A_B$.

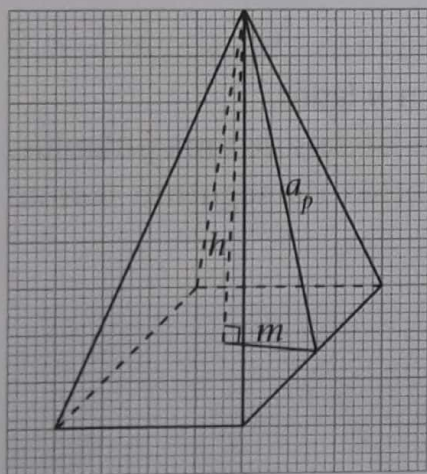
Exemplo:

Consideremos uma pirâmide quadrangular com a altura de 6 cm e uma aresta da base 16 cm.

Vamos calcular:

- a área lateral;
- a área total da pirâmide.

Resolução:



Dados:

$$a_b = 16 \text{ cm e } h = 6 \text{ cm.}$$

Pretende-se: A_L e A_T .

Vamos começar por calcular os apótemas:

$$m = \frac{a_b}{2} \Rightarrow m = \frac{16}{2} \text{ cm} \Rightarrow m = 8 \text{ cm}$$

$$a_p^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow a_p^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow$$

$$a_p^2 = 64 + 36 \Rightarrow a_p^2 = 100 \Rightarrow$$

$$a_p = 10 \text{ cm}$$

Agora vamos calcular a área lateral:

$$A_{\text{face triangular}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16 \cdot 10}{2} = 80 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 4 \cdot 80 \text{ cm}^2 = 320 \text{ cm}^2$$

Resposta: a área lateral é de 320 cm^2 .

Depois, vamos calcular a área da base (A_B).

Sendo a base um quadrado, a área é dada pela fórmula: $A_B = l^2$ e $a_b = 16$.

$$A_B = a_b^2 \Rightarrow A_B = 16^2 = 256 \text{ cm}^2.$$

$$A_T = A_L + A_B = 320 \text{ cm}^2 + 256 \text{ cm}^2 = 576 \text{ cm}^2.$$

Resposta: a área total da pirâmide é de 576 cm^2 .

9.5.7 Volume de uma pirâmide

O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura:
 $V = \frac{1}{3}A_B \cdot h$.

Exemplo:

Um frasco de perfume tem a forma de uma pirâmide regular com base quadrangular.

A medida da aresta da base é de 3 cm e a medida da altura é de 9 cm.

Qual é a capacidade do frasco?



Resolução:

Vamos calcular a área da base: como a base tem uma forma quadrada de lado $l = 3$ cm, obtemos $A_B = l^2 = (3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2$.

Para calcularmos a capacidade do frasco, precisamos de começar por calcular o volume de pirâmide.

$$V = \frac{1}{3}A_B \cdot h$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}9\text{ cm}^2 \cdot 9\text{ cm}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}9\text{ cm}^2 \cdot 9\text{ cm}$$

$$\Rightarrow V = 9\text{ cm}^2 \cdot 3\text{ cm} = 27\text{ cm}^3.$$

9.6 Cilindro

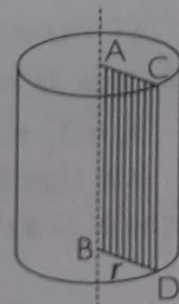
O cilindro pode ser encontrado em muitos objectos do nosso quotidiano. Vários objectos do nosso dia-a-dia têm forma cilíndrica: tachos, latas, garrafas de água, entre outros.



Um cilindro de revolução é um sólido geométrico gerado por uma revolução de um rectângulo em torno de um dos seus lados.

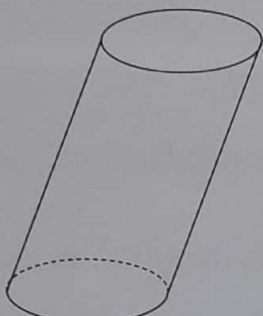
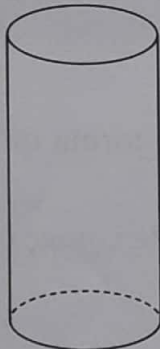
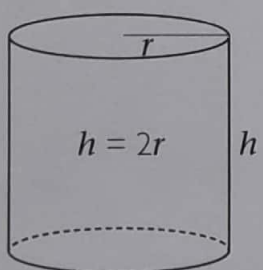
- AC e BD são raios do cilindro.
- Os dois círculos gerados pelos raios são as bases do cilindro.
- AB é a altura do cilindro.

A recta r que contém o segmento AB é denominada **geratriz**, enquanto a curva que fica no plano do «chão» é a **directriz**.



9.6.1 Classificação dos cilindros

Alguns tipos de classificação de cilindros:

	Cilindro circular obluo As geratrizes não são perpendiculares em relação aos planos das bases.
	Cilindro circular recto As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Este tipo de cilindro  também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um rectângulo.
	Cilindro equilátero O cilindro  recto. A altura do cilindro  duas vezes o raio da base.

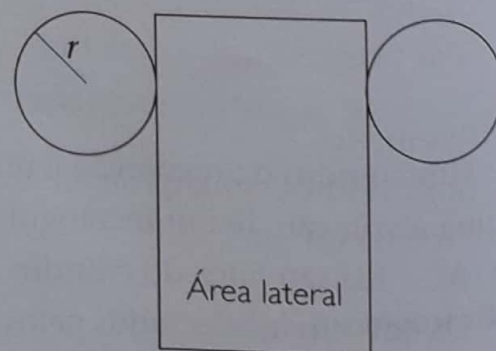
9.6.2 rea lateral e área total de um cilindro

Num cilindro de revolução, a área lateral é dada por $A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$, sendo r o raio da base e h a altura do cilindro.

A rea total é a soma da área lateral com o dobro da área da base:

$$A_T = A_L + 2A_B.$$

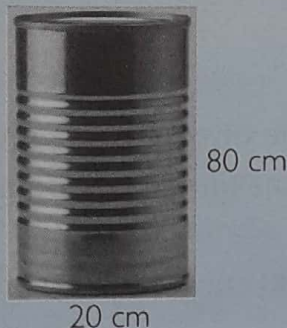
Isto significa que $A_T = 2\pi \cdot r(h + r)$. Recordemos que $A_B = \pi \cdot r^2$  a área do círculo.



Exemplo:

Uma lata de petróleo de forma cilíndrica tem um diâmetro da base que mede 20 cm e uma altura de 80 cm.

Vamos determinar a área lateral e a área total da lata.

**Resolução:**

a) $A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$

$$A_L = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 80 \text{ cm}^2 = 5024 \text{ cm}^2.$$

b) Para calcular a A_T precisamos de conhecer a A_B assim como a A_L .

Vamos calcular a A_B :

$$A_B = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2$$

Assim, a área total será $A_T = A_L + 2A_B$.

$$\begin{aligned} \text{Isto é, } A_T &= (5024 + 2 \cdot 314) \text{ cm}^2 \\ &= (5024 + 628) \text{ cm}^2 \\ &= 5652 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Para o cilindro circular equilátero, sendo $h = 2r$:

$$A_L = 4\pi \cdot r^2.$$

A área da base é $A_B = \pi \cdot r^2$.

Por conseguinte, a área total será $A_T = A_L + 2A_B$, isto é $A_T = 2\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot r^2 = 6\pi \cdot r^2$.

Exemplo:

Um cilindro equilátero tem de área lateral $A_L = 100\pi \text{ cm}^2$. Calcula a sua altura e o seu raio.

Resolução:

Sabendo que $A_L = 4\pi r^2$ e $A_L = 100\pi \text{ cm}^2$, então $4\pi r^2 = 100\pi \Rightarrow r^2 = 25$

$$\Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

Sendo um cilindro equilátero, então $h = 2r$. Logo, $h = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$.

9.6.3 Volume de um cilindro

O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura.

Isto é:

$$V = A_B h \text{ ou } V = \pi r^2 h.$$

Exemplo:

Para calcularmos o volume de uma lata de petróleo de forma cilíndrica, cujo diâmetro da base mede 50 cm e que apresenta uma altura de 80 cm, a fórmula será: $V = 3,14 \cdot 25^2 \cdot 80$.

O volume da lata será $157\,000 \text{ cm}^3$ (ou 1570 m^3).

9.7 Cone

9.7.1 Conceito de cone de revolução

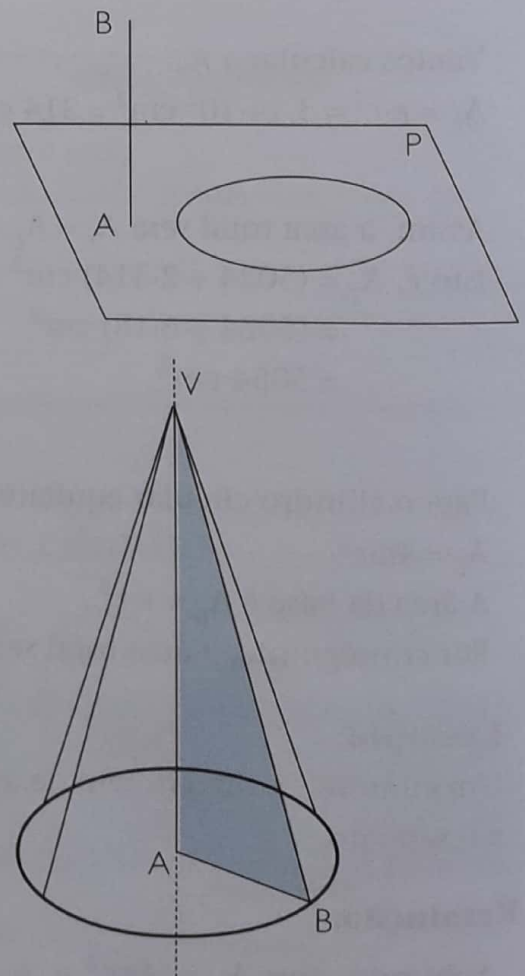
Vamos considerar um círculo de centro no ponto O, um raio r contido numa região plana e um ponto P fora desse plano.

Damos o nome de **cone de revolução** ao sólido geométrico gerado por uma revolução de um triângulo rectângulo em torno de um dos seus catetos.

A base do cone é um círculo.

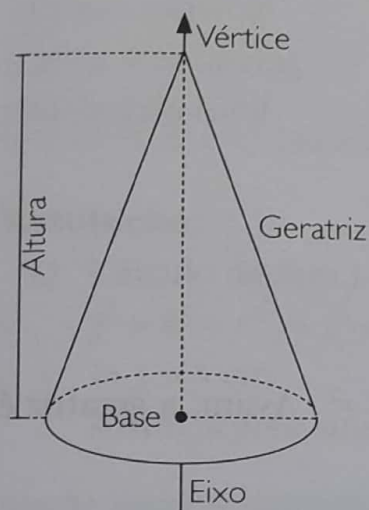
A superfície lateral do cone é uma superfície curva e tem um ponto notável que se denomina vértice do cone.

O vértice do cone de revolução é equidistante de todos os pontos da circunferência da base.



9.7.2 Elementos de um cone

Num cone podemos identificar os seguintes elementos:

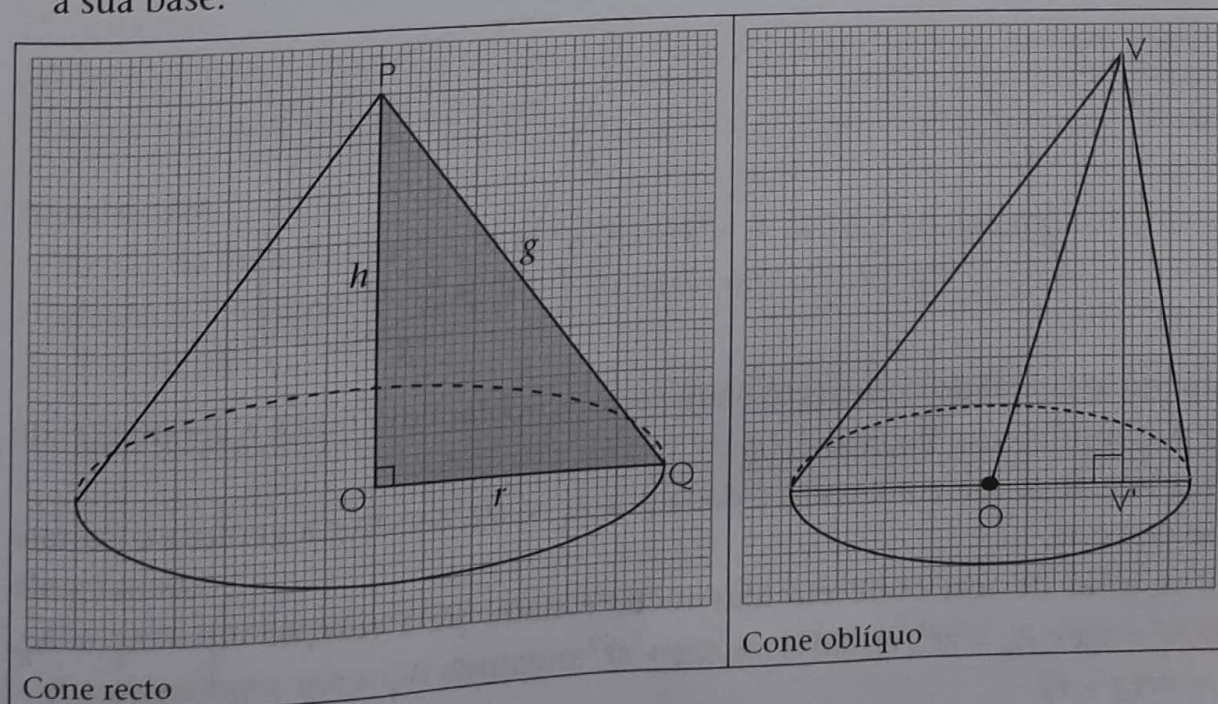


- o vértice de um cone é o ponto onde concorrem todos os segmentos de recta;
- a hipotenusa do triângulo gerador é a **geratriz**, que gera a superfície lateral do cone;
- o cateto que não é o eixo chama-se **raio do cone** e gera um círculo que é a base do cone;
- a **altura** é a distância do vértice do cone ao plano da base.

9.7.3 Classificação do cone

Os cones podem ser classificados em:

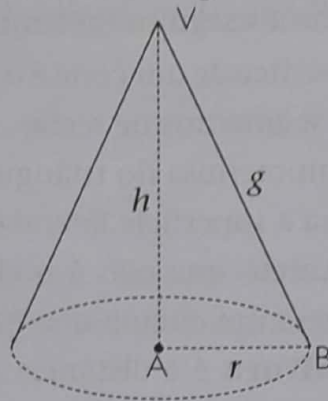
- **cone recto**, também chamado cone de revolução, porque é o sólido gerado por um triângulo rectângulo, também chamado triângulo gerador (na figura em baixo, é o triângulo OPQ), que gira em torno de um dos seus catetos (eixo) até completar uma volta;
- **cone oblíquo** porque não é um cone recto e o seu eixo é oblíquo relativamente à sua base.



Cone recto

Cone oblíquo

Nota: Para efeito de aplicações, os cones mais importantes são os cones rectos. Num cone recto, todas as geratrizes são iguais.



De acordo com o teorema de Pitágoras, temos: $g^2 = h^2 + r^2$. Assim, a geratriz é dada por: $g = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Exemplo: num cone de revolução, o raio da base mede 3 cm e a altura mede 4 cm. Vamos calcular a medida da geratriz:

Como $g^2 = h^2 + r^2$, então $g^2 = 4^2 + 3^2$

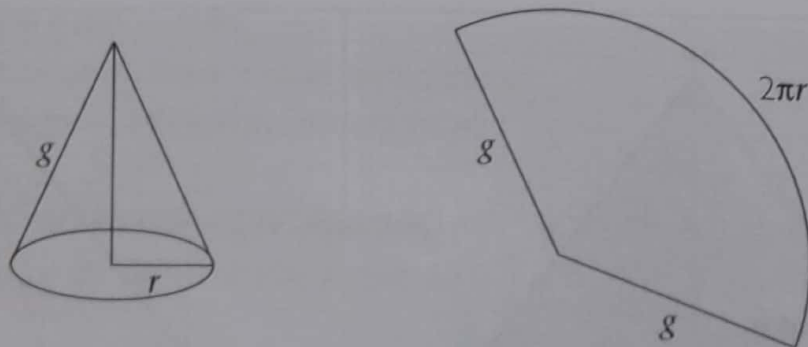
$$\Rightarrow g^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow g = 5 \text{ cm}$$

Nota: um cone de revolução é conhecido por cone equilátero quando a geratriz for o dobro do raio.

9.7.4 Área de um cone

Vamos observar as figuras seguintes:



A superfície lateral do cone recto é um sector circular cujo raio é a geratriz (g) do cone e o comprimento do arco é $2\pi r$.

A área lateral de um cone recto é dada por $A_L = \pi r g$, sendo g a geratriz e r o raio da base do cone.

A área total de um cone circular recto é dada pela relação $A_T = A_L + A_B$. Como $A_L = \pi r g$ e $A_B = \pi r^2$, então $A_T = \pi r g + \pi r^2$ ou ainda $A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

$$A_T = \pi r(g + r)$$

Exemplo:

Um cone de revolução cujo raio de base é igual a 4 cm e altura de 3 cm. Vamos calcular:

- a) a área lateral;
- b) a área total.

Resolução:

- a) Cálculo da área lateral – vamos começar por calcular a geratriz:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow g = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Assim, a área lateral é: } A_L = \pi r g = 3,14 \cdot 4 \cdot 5 = 62,8 \text{ cm}^2.$$

- b) Cálculo da área total:

$$A_T = \pi r (g + r) = 3,14 \cdot 4 (5 + 4)$$

$$A_T = 3,14 \cdot 4 \cdot 9 \Rightarrow A_T = 113,04 \text{ cm}^2.$$

9.7.5 Volume de um cone

O volume do cone de revolução é a terça parte do produto da área da base pela medida da altura.

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h \text{ ou } V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Exemplo:

Vamos calcular o volume de um cone de revolução cujo raio de base é igual a 4 cm e com uma altura de 3 cm.

Resolução:

$$\text{Cálculo da área da base: } A_B = \pi r^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 3,14 \cdot 16 = 50,24 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Cálculo do volume: } V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 50,24 \cdot 3 \text{ cm}^3.$$

$$\Rightarrow V = 50,24 \text{ cm}^3.$$

Outro exemplo:

Um cone equilátero tem um raio de 2 cm. Vamos calcular o seu volume.

Resolução:

No cone equilátero, $g = 2r$. Por conseguinte, $g = 4$ cm.

É importante recordar que $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 4^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 16 = h^2 + 4 \Rightarrow$

$$h^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 8,37\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

9.8 Esfera

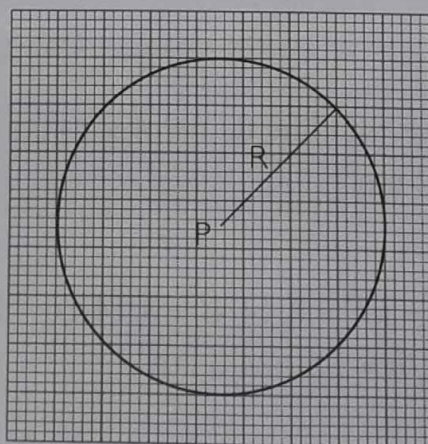
9.8.1 Conceito de esfera

Vamos observar as figuras seguintes:



O globo terrestre e a bola de basquetebol sugerem-nos a ideia de um sólido geométrico chamado esfera.

Consideremos um ponto P . Chama-se esfera ao conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto P é menor ou igual a R . O ponto P é denominado centro da esfera e R é o raio da esfera.



9.8.2 Área de uma esfera

A área da superfície esférica de raio R é dada pela fórmula: $A = 4\pi R^2$.

Exemplo:

Vamos determinar a área da superfície esférica de raio $R = 3$ cm.

Resolução:

Através da relação $A = 4\pi R^2$ podemos obter a área da superfície esférica pedida.
Assim: $A = 4 \cdot 3,14 \cdot 3^2 \Rightarrow A = 113,04 \text{ cm}^2$.

Outro exemplo:

Vamos determinar a área do globo terrestre em km^2 , tendo em conta que o raio da Terra é de 6400 km.

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4 \times 3,14 \times 6400 = 80\,384 \text{ km}^2$$

9.8.3 Volume de uma esfera

O volume da esfera de raio r é: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemplo:

Vamos calcular o volume de uma esfera de $R = 2 \text{ cm}$.

Resolução:

Aplicando a fórmula para o cálculo do volume da esfera ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$), obtemos:

$$V = \frac{4}{3}\pi 2^3 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot 8\pi \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V = \frac{32}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{100,48}{3} \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V = 33,49 \text{ cm}^3$$

Exemplo:

Vamos determinar o volume de uma esfera cuja superfície tem de área $256\pi \text{ cm}^2$.

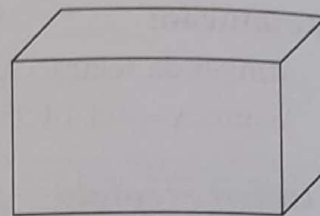
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 8^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 512 \Rightarrow V = 6430,72 \text{ cm}^3$$

$$A = 4\pi R^2 = 256\pi \Rightarrow 4R^2 = 256 \Rightarrow R^2 = 64 \Rightarrow R = 8 \text{ cm}$$

9.9 Aplicações em volumes de líquidos

Uma das aplicações das superfícies esféricas e cilíndricas está relacionada com a armazenagem de líquidos em tanques esféricos e cilíndricos, como por exemplo os tanques de combustível, os tanques de água e os silos para armazenagem de cereais.

1. Quantos litros de água são necessários para encher completamente um tanque de água com o formato de um paralelepípedo rectângulo (tal como a figura ilustra) e que apresenta as seguintes dimensões: 0,90 m de comprimento, 0,80 m de largura e 0,70 m de altura?

**Resolução:**

Sabe-se que $1\text{ m}^3 = 1000$ litros.

O volume é o produto da área da base (A_B) pela altura (h).

Assim, $A_B = 0,90 \times 0,80 = 0,72\text{ m}^2$. Como $h = 0,70$, então $V = 0,72 \times 0,70 = 0,504\text{ m}^3$.

Por conseguinte: $V = 0,504 \times 1000 = 504$ litros.

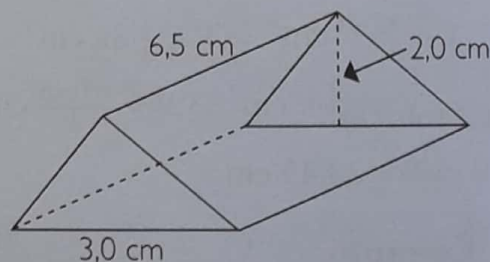
2. Calcula o volume de um prisma recto cuja base é um triângulo de 3 cm de base e 2 cm de altura, considerando que a altura do prisma é de 6,5 cm.

- a) Calcula a área da face lateral que tem a aresta da base igual a 3 cm de comprimento.

Resolução:

$$2. V = A_B \cdot h = \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 6,5 = 19,5 \approx 20\text{ cm}^3$$

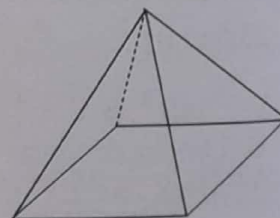
$$a) A_{\text{face lateral}} = b \cdot h = 3 \cdot (6,5) = 19,5 \approx 20\text{ cm}^2$$



3. Uma tenda tem a forma de uma pirâmide quadrangular, como se pode ver na figura ao lado. A aresta da base mede 8 metros e a altura 10 metros.

Determina:

- a) a área lateral da tenda;
b) a área total ocupada pela tenda.

**Resolução:**

- a) Seja m o apótema da base, a_p o apótema da pirâmide e h a altura.

Vamos determinar, em primeiro lugar, o valor do apótema da base. O apótema da base será igual a metade da aresta de base. Isto é, o apótema da base é $m = 4\text{ m}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos: $a_p^2 = m^2 + h^2$.

Assim, $a_p^2 = 4^2 + 10^2$.

$$a_p^2 = 16 + 100$$

$$a_p^2 = 116$$

$$a_p = 4\sqrt{7} \text{ m}$$

O apótema da pirâmide corresponde à altura de um dos 4 triângulos laterais que constituem a tenda, por isso, $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$, ou seja,

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{8 \cdot 4\sqrt{7}}{2} = 16\sqrt{7} \text{ m}^2.$$

A área lateral da pirâmide é: $A_L = 4 \cdot 16\sqrt{7} \text{ m}^2 = A_L = 64\sqrt{7} \text{ m}^2$

b) Sendo a base um quadrado, então a área será dada pela fórmula: $A_B = l^2$.

$$A_B = 8^2 \text{ m}^2 = 64 \text{ m}^2$$

A área total será $A_T = A_L + A_B = 64\sqrt{7} \text{ m}^2 + 64 \text{ m}^2$

$$A_T = (64\sqrt{7} + 64) \text{ m}^2$$

4. Um cone apresenta um volume de $96\pi \text{ dm}^3$ e uma altura de 8,0 dm. Calcule o diâmetro da base.

Resolução:

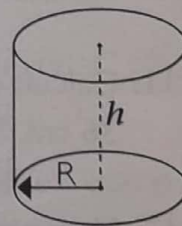
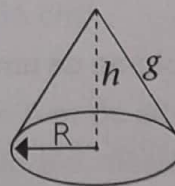
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$96\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 8 \Leftrightarrow r^2 = \frac{96\pi}{\frac{8}{3}\pi} \Leftrightarrow r^2 = 96 \cdot \frac{3}{8} \Leftrightarrow r^2 = 36 \Leftrightarrow r = 6 \text{ dm.}$$

Por conseguinte, $d = 2 \cdot 6 = 12$, ou seja, o diâmetro da base é de 12 dm.

Portanto, o diâmetro da base é 12 dm.

5. Um líquido que se encontra num recipiente em forma de cone será despejado noutro recipiente com uma forma cilíndrica. Se o raio da base dos dois recipientes for 25 cm e a altura dos dois for 1 m, que altura atingirá o líquido no cilindro?



Resolução:

O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$, sendo o volume do cilindro dado por $V = \pi r^2 h$.

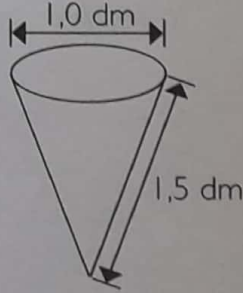
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3} \pi (25)^2 \cdot 1 = \frac{1}{3} \pi 625 \text{ m}^3.$$

$$V = \pi r^2 h = \pi (25)^2 \cdot 1 = \pi 625 \text{ m}^3.$$

Como o volume do cone é um terço do volume do cilindro, quando o líquido for despejado alcançará $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro, ou seja, $\frac{1}{3} \cdot 1 \text{ m} = \frac{1}{3} \text{ m}$.

1. Um poliedro convexo tem 12 vértices e 18 arestas. Qual é o número de faces?
2. Quantos vértices tem um poliedro convexo que possui 6 faces quadrangulares e 12 triangulares?
3. Num poliedro de 12 faces, o número de faces é dois terços do número de arestas. Calcula o número de vértices deste poliedro.
4. Determina a área de um tetraedro regular cuja aresta mede 6 cm.
5. A soma das arestas de um cubo mede 60 cm. Calcula a área desse cubo.
6. A soma das medidas de todas as arestas de um tetraedro regular é 42 dm. Qual é a área total desse tetraedro?
7. Calcula a área total e o volume de um cubo de 5 cm de aresta.
8. O volume de um paralelogramo rectângulo é de 108 cm^3 . Duas das suas dimensões medem 3 cm e 4 cm. Quanto mede a outra dimensão?
9. O apótema de uma pirâmide quadrangular regular mede 5 cm e o apótema da base 3 cm. Calcula os comprimentos da aresta lateral, a altura e o comprimento da aresta da base.
10. O volume de um tetraedro regular é de $18\sqrt{3} \text{ dm}^3$. Calcula o comprimento da aresta.
11. Calcula o volume de um tetraedro regular cujos comprimentos das arestas somam 36 cm.
12. Uma pirâmide quadrangular regular tem 85 dm de aresta lateral e 80 dm de aresta da base. Calcula:
 - a) a área lateral;
 - b) a área total.
13. Calcula as áreas, lateral e total, e o volume de um cilindro que tem:
 - a) 3 cm de raio e 6 cm de altura;
 - b) 10 m de raio e 20 dm de altura.

Exercícios não resolvidos

14. O raio da base de um cilindro tem um comprimento de 2,0 dm e uma altura de 10,0 dm. Calcula as áreas, laterais e total, do cilindro.
15. Calcula a A_L e A_T de um cilindro circular recto de 5 m de altura e 3 m de raio da base.
16. Em cada um dos casos seguintes os dados são de um cilindro.
- a) $d = 8,0$ m e $A_L = 126$ m². Calcula A_T
 - b) $h = 10,0$ cm e $A_L = 157$ m². Calcula r .
 - c) $h = 25$ cm (l : comprimento da circunferência da base), $A_B = 50$ cm² e $A_T = 150$ cm². Calcula h .
17. Que quantidade de latão é necessária para se fabricar uma lata de conservas de forma cilíndrica com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura?
18. Calcula as áreas, laterais e total, de um cone que tem 3 dm de raio e 5 dm de geratriz.
19. A figura à direita representa um funil em forma de cone que foi construído com uma lâmina metálica. Que quantidade de lâmina (em centímetros quadrados) foi necessária para a sua construção?
- 
20. Calcula a área total de uma esfera com 7 cm de raio.
21. Calcula o diâmetro de uma esfera cuja área total é 1256 cm².
22. Qual é o volume de um cilindro que tem 2 m de raio e 6 m de altura?
- a) Qual é o volume do cone que tem o mesmo raio e a mesma altura que o cilindro?
 - b) Que parte do volume do cilindro representa o volume do cone?
23. Calcula a quantidade de água que se pode armazenar num tanque cilíndrico de 0,50 m de raio e 2 m de altura.

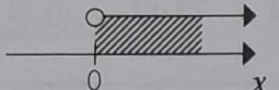
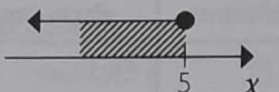
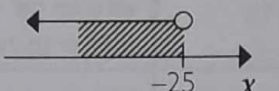
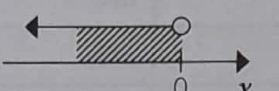
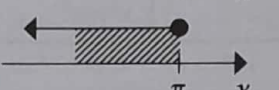
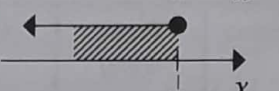
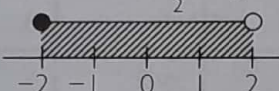
24. Calcula o volume de uma esfera com 8 dm de diâmetro.
25. O João tem um bloco de chumbo de 100 cm^3 de volume com o qual pretende fazer bolas esféricas de 1 cm de raio. Quantas bolas poderá fazer?
26. Para a construção da sua casa, o Senhor Zandamela comprou uma quantidade de areia que assumiu a forma de um cone quando foi despejada do camião. Se este cone tem uma altura de 2 m e o perímetro da sua base equivale a 18,84 m, quantos metros cúbicos de areia comprou o Senhor Zandamela?

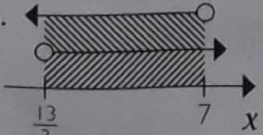
Soluções

Unidade 1

1. a) 49 b) 6,25 c) 2500
d) 39,69 e) 10000 f) 1,0404
2. a) 12 b) 32 c) 4,3
d) 8,4 e) 9,9 f) 0,65
3. a) 7 b) 3,1 c) 0,97
d) $\frac{9}{10}$ e) $\frac{21}{33}$
4. 38,4 m
5. a) Racional b) Racional
c) Racional d) Racional
e) Irracional f) Racional
g) Racional h) Irracional
i) Racional j) Racional
6. a) Racional b) Irracional
c) Racional d) Irracional
e) Racional f) Racional
g) Racional h) Racional
i) Irracional j) Irracional
l) Irracional m) Racional
7. $d = 4,242640\dots$ Irracional
8. $d = 4,472135\dots$ Irracional
9. $h = 5$. Racional
10. $P = 15,7$ cm. O número é racional.
11. a) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ b) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
c) $6^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{6^4}$ d) $\pi^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\pi^2}$
e) $5^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$ f) $0,8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0,8}$
12. a) 7 b) 5 c) 3 d) $\frac{1}{11}$
e) $\frac{3}{2}$ f) 5 g) 10
13. a) $2^{\frac{7}{6}}$ b) 0,6 c) $\frac{3}{2}$ d) $6^{\frac{1}{3}}$
e) 12 f) 4 g) $\frac{3}{10}$ h) $5^{\frac{13}{30}}$
14. a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[4]{6}$ c) $\sqrt[5]{3}$ d) $2\sqrt[3]{5}$
e) $3\sqrt[4]{4}$ f) $2\sqrt[5]{4}$ g) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ h) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$
15. a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt[3]{54}$
e) $\sqrt[4]{80}$ f) $\sqrt{\frac{1}{6}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$
16. a) $\sqrt[8]{2}$ b) $4\sqrt[3]{2}$ c) $-\sqrt{3}$ d) $\sqrt[4]{2}$
e) $\sqrt[7]{2}$ f) $\sqrt{2}$
17. a) $\sqrt{21}$ b) 5 c) 12 d) $\sqrt{3}$
e) 5 f) $\frac{1}{2}$ g) $\sqrt[4]{2}$ h) 3
i) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$
18. a) $\frac{2}{3}$ b) -1 c) 1 d) $-\frac{2}{3}$

Unidade 2

1. a)  Sol: $[-1; +\infty[$
- b)  Sol: $]0; +\infty[$
- c)  Sol: $]-\infty; 5]$
- d)  Sol: $]-\infty; -25[$
- e)  Sol: $]-\infty; 0[$
- f)  Sol: $]-\infty; \pi]$
- g)  Sol: $]-\infty; \frac{1}{2}]$
- h)  Sol: $[-2; 2[$
- i)  Sol: $]-1,5; 3,5[$
- j)  Sol: $]0; 2]$

2. a) $A \cup B =]-\infty; 4]$
b) $A \cup C =]-\infty; 4]$
c) $B \cup C =]-\infty; 3]$
d) $A \cap B =]-\infty; 1]$
e) $A \cap C = [0; 3]$
f) $B \cap C = [0; 1]$
g) $A \cup C \cap B =]-\infty; 1]$
h) $A \cap B \cup C =]-\infty; 3]$
i) $(A \cup B) \cap (A \cup C) =]-\infty; 4]$
3. a) $x > -2$ b) $x \leq 1$
c) $x < 3,5$
4. a) $x > 4$ b) $x > \frac{1}{6}$
c) $x \geq -2$ d) $x \leq \frac{5}{6}$
e) $]4; +\infty[$ f) $]-\infty; -2]$
g) $[6; +\infty[$ h) $]\frac{12}{7}; +\infty[$
i) $]-\infty; \frac{64}{31}[$
5. a) $-1 \leq x < 2$ ou $[-1, 2[$
b) $1 \leq x \leq 2$ ou $[1, 2]$
c) $\{ \}$
d) $2 \leq x < 4$ ou $[2, 4[$
6.  Sol: $\{5; 6\}$

7. Terá de realizar 12 viagens.

Unidade 3

1. a) -4 b) 12 c) 12 d) $\frac{55}{12}$
2.

Monômios	Coeficiente	Parte literal
a) $-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	Qualquer variável de expoente zero
c) $\frac{abc}{3}$	$\frac{1}{3}$	abc
d) $-\frac{2abx}{5}$	$-\frac{2}{5}$	abx
e) $-x^2y^3z^5$	-1	$x^2y^3z^5$

3.

Monômio	Coeficiente	Parte literal	Grau
a) $10x^2y$	10	x^2y	3
b) $-xy^2z$	-1	xy^2z	4
c) $-\frac{1}{5}abc^4$	$-1/5$	abc^4	6
d) -9	-9	Qualquer variável de grau zero	0
e) $6xy^2$	6	xy^2	3
f) k^3z^2	1	k^3z^2	5

4. a) $6x^4$ b) $-x^3y^2$
c) $-3a^2b^7y$ d) $\frac{1}{2}a^4b^3$
5. a) $-x^2y$ e $-7x^2y$ porque têm a mesma parte literal.
b) $\frac{3}{2}ab$ e $\frac{1}{3}ba$ porque têm a mesma parte literal.
c) $2ab$, $-ab$ e $\frac{9}{5}ab$ porque têm a mesma parte literal.
6. a) $\frac{5}{2}xy$ b) $-\frac{19}{5}a$ c) $-2aby$
7. a) $4ax^4$ b) $6x^3 + x$
c) $2xy$ d) $\frac{1}{2}ax^2$
e) $-\frac{1}{5}by^3$
8. a) $-5x^2$ b) xy
c) x^2y d) $x^2 + \frac{1}{3}xy$
e) $-5x^2 + \frac{1}{3}xy$ f) $x^2 - \frac{1}{3}xy$
g) $-5x^2 + xy + \frac{10}{3}x^2y$

9. a) $11a + 4b$ b) $8x^2 - \frac{7}{6}x$
c) $\frac{4}{5}pq + \frac{1}{2}p + n + 3q$
d) $-9a + \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}c$
e) $-3a^2 + 3ab^2 + 2ab - 6a$

10. Q = $\frac{2}{3}a^2b^4$; 10.1 O coeficiente é $\frac{2}{3}$; A parte literal é a^2b^4 .

11. a) $-x^3 + 10x^2 - 2x - 2$
b) $5x^2 - x - 3$ c) 0
d) $10x^2 - 2x - 6$;
e) $-x^3 + 10x^2 - 2x - 2$
f) $x^3 - 4$
g) $-x^3 + 10x^2 - 2x - 2$
h) $-x^3 + 4$

12. a) $a^2 + 4ab + 4b^2$ b) $4x^4 - 4x^2y + y$
c) $4a^2 + 12ab + 9b^2$
d) $4a^2 - 12ab + 9b^2$
e) $9x^2 - 6xy + y^2$

13. a) $(a - 7)(a + 7)$ b) $(x - 5y)(x - 5y)$
c) $(4x - 6)(4x + 6)$
d) $(a - 10xy)(a + 10xy)$
e) $(\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}xy)(\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}xy)$
f) $(11m - 12n)(11m + 12n)$
g) $(x - \frac{7}{8})(x + \frac{7}{8})$
h) $(\frac{5m}{6} - \frac{n}{9})(\frac{5m}{6} + \frac{n}{9})$
i) $(1 + \frac{4z}{3})(1 + \frac{4z}{3})$
j) $[\frac{2}{3} - (x + y)][\frac{2}{3} + (x + y)]$
k) $[(x + y) - z][(x + y) + z]$

14. a) 100 b) 50 c) 30 d) 20

15. a) $\frac{15}{4}ax^2 + \frac{5}{2}a^2 - \frac{5}{6}a$
b) $16x^2y^2 - 4x^2y^3 + 6xy$
c) $-\frac{2}{3}a^4b^2 + \frac{3}{8}a^4bx + \frac{3}{4}a^4b$
d) $-6am^3n + 2amn - 3amn^2 + \frac{3}{2}a$
e) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{5}x$ f) $3x^3 - 4x^2 - x$
g) $5b^4 - 4ab^5$
h) $-\frac{3}{4}a^2b + \frac{5}{8}ac + \frac{1}{2}b^2$ i) $2a^3 + a^2$
j) $2m^5 + 8m^3 - \frac{4}{3}m$
k) $mx - 2m + 4mx^3$
l) $-4x^4 - 3x^3 + 5x$
16. a) $20x^5 - 19x^3 - 6x$
b) $3x^5 - x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 3x + \frac{3}{2}$
c) $-\frac{25}{6}x^7 + 2x^6 + \frac{20}{3}x^5 + \frac{9}{5}x^4 + \frac{101}{30}x^3 + \frac{22}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$
d) $\frac{5}{3}a^2 - \frac{5}{2}a + ax - \frac{3}{2}x$
e) $\frac{3}{5}x^3 - \frac{61}{40}x^2 + \frac{19}{20}x - \frac{3}{8}$

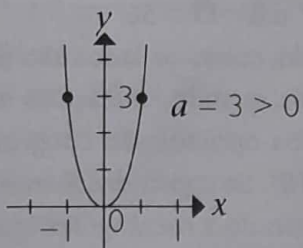
17. a) $2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 b) $4x^4 - 2x^3 - 7x^2 + \frac{3}{2}x$
 c) $4x^5 + 6x^4 - 8x^3 - 9x^2 + x + 1$
 d) $-2x^4 + x^3 + 5x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$
18. a) $3x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
 b) $2(a - 3b)$ c) $a(m + n)$
 d) $9x(a + 2b)$ e) $m^3(m - 1)$
 f) $3ab(1 - 2a)$
 g) $ax(a^2x + 4 - 4ax^2)$
 h) $5(3a^6x - 4a^2 + 2x)$
 i) $7x^2(mx^2 - 2m^2x + 3a^3)$
 j) $6mn^5(2mn - 4m - 1)$
 k) $(3x^2 + 2y)^2 = (3x^2 + 2y) \cdot (3x^2 + 2y)$
 l) $4a^2x^2(3x + 4a + 5ax)$
 m) $6xy^5(2xy - 4x - 1)$
 n) $(\frac{5x}{6} - \frac{y}{4})(\frac{5x}{6} + \frac{y}{4})$
 o) $5a(2a - 3)$
19. a) 7000 b) 15 000 c) 4000

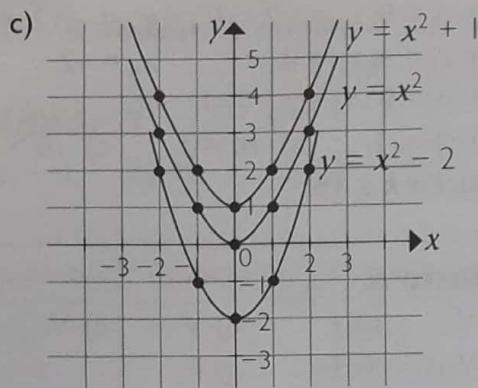
Unidade 4

1. a) $\{-4; 4\}$ b) $\{-2; \sqrt{3}\}$
 c) $\{-1; 3\}$ d) $\{-4; -3\}$
 e) $\{0; 5\}$ f) $\{-\frac{9}{2}; 0\}$
2. a) $\Delta = 0$ b) $\Delta = -12$
 c) $\Delta = 81$ d) $\Delta = 7744$
 e) $\Delta = 12$
3. a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 4x - 4 = 0$
 c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 2 = 0$
 d) $-2x^2 - 0,5x - 0,18 = 0$
4. a) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $-x^2 + 3x = 0$
 c) $x^2 - 5 = 0$
5. a) Não é solução.
 b) -1 é a solução. c) 4 é solução.
6. a) $a = 9, b = 24, c = 16$
 b) $a = 1, b = -2, c = 4$
 c) $a = 3, b = -15, c = 12$
 d) $a = 10, b = 72, c = -64$
 e) $a = 1, b = 4\sqrt{3}, c = 9$
7. A alínea c).
8. a) -3 b) $-\frac{2}{3}$ e 1
 c) -2 e 3 d) $\frac{1}{3}$ e 3
 e) -2 e $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$ e 1
 g) 3 e $\frac{1}{2}$
9. 5 e 8.
10. a) 11 b) 3 e 4 ou -3 e -4
 c) 15 cm d) 8 segundos
11. a) $\frac{7}{8}$ b) 2

- 12.1 a) $\Delta = 8; x_1 = \sqrt{2} - 1$ $x_2 = -(\sqrt{2} + 1)$
 b) $\Delta = 4; x_1 = 0$ $x_2 = -2$
 c) $\Delta = 0; x_1 = x_2 = -1$
- 12.2 a) $m \leq 1$ b) $m < 1$ c) $m > 1$
13. Solução: $k \leq 16$.

Unidade 5

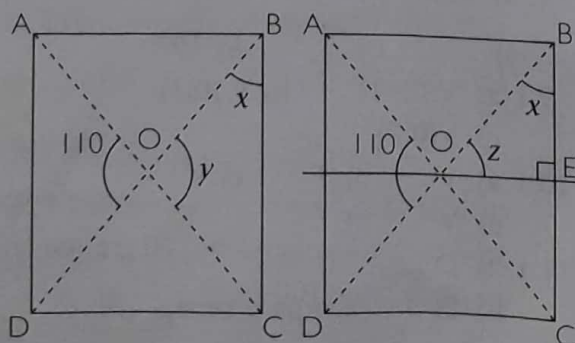
1. a) V b) F c) V d) V
 e) V f) F g) F
2. a) $a = 1, b = 5, c = -2$
 b) $a = 3, b = 5, c = -1$
 c) $a = 1, b = -7, c = 0$
 d) $a = 10, b = 0, c = 0$
 e) $a = -9, b = 0, c = -63$
 f) $a = -1, b = 0, c = 1$
3. As funções b) e c), porque $a > 0$.
4. A função $i(x) = -\frac{1}{2}x^2$, porque tem menor valor absoluto de a ($a = -\frac{1}{2}$).
5. A função $h(x) = 10x^2$, porque tem maior valor absoluto de a ($a = 10$).
6. Para que as funções sejam de segundo grau, $a \neq 0$. Logo, a) $m \neq -1$, b) $m \neq 0$ e c) $m \neq -\frac{1}{3}$.
7. a) $D_f: x \in \mathbb{R}$
 b) A concavidade está virada para cima, porque $a = 3 > 0$
 c)
- 
- d) $f(x)$ é crescente para $x \in]0; +\infty[$,
 $f(x)$ é decrescente para $x \in]-\infty; 0[$.
- e) A função é positiva para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- f) As coordenadas são as seguintes: $V(0; 0)$.
- g) $D'_f = [0; +\infty[$.
- h) A equação do eixo de simetria $x = 0$.
8. a) 4 b) $-\frac{4}{5}$
 c) d) $\frac{41}{4}$ e) 19
- 9.1 a) $V(0; -1)$ b) $V(0; 3)$
 c) $V(0; 7)$
- 10.1 a) V b) F c) V
 d) V e) F
- 11.1. a) $D: x \in \mathbb{R}$
 b) Está virada para cima.



- d) $f(x)$ é crescente para $x \in]0; +\infty[$;
 $f(x)$ é decrescente para $x \in]-\infty; 0[$
e) $V(0; -2)$
f) $D'_f = [-2, +\infty[$
g) $x = 0$

Unidade 6

1. a)
2. É o paralelogramo.
3. É o rombo.
4. c)
5. É o trapézio.
6. É o rectângulo.
7. a) V b) F c) V d) F
e) V f) V g) V
8. $\hat{M} = \hat{P} = 98^\circ$ e $\hat{N} = \hat{Q} = 82^\circ$
9. $\hat{A} = \hat{C} = 124^\circ$ e $\hat{B} = \hat{D} = 56^\circ$
10. No rectângulo, como os lados são paralelos dois a dois, quando se traça as diagonais os ângulos opostos são congruentes, isto é, $y = 110^\circ$. Se agora dividirmos os rectângulos em dois rectângulos iguais, traçando uma linha que passa pelo ponto O e paralela a AB e CD, criamos um novo triângulo (rectângulo) BOE. Neste caso, $z = \frac{y}{2} = 55^\circ$. Como a soma de todos os ângulos num triângulo é igual a 180° , temos que $z + x + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow 55^\circ + x + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$.



11. $90^\circ, 90^\circ$ e 130°
12. $40^\circ 15'$ e $139^\circ 45'$
13. 85° e 95°
- 14.1 $\hat{M} = \hat{Q} = 60^\circ$ e $\hat{N} = \hat{P} = 120^\circ$
- 14.2 $\hat{M} = 70^\circ; \hat{P} = 100^\circ$ e $\hat{Q} = 80^\circ$
- 14.3 $\hat{N} = 130^\circ$
15. 8 cm
16. 16 cm, 18 cm e 14 cm
- 18.1. a) $\hat{X} = 105^\circ, \hat{Y} = 70^\circ$
b) $\hat{X} = 100^\circ, \hat{Y} = 100^\circ$ e $\hat{Z} = 30^\circ$
19. 63°

Unidade 7

1. a) Representam dados brutos.
b) População – conjunto de melões do camião
Amostra – 4 melões
Unidade estatística – cada melão
2. a) População – alunos da turma
Unidade estatística – cada aluno da turma
b) População – todos os políticos que visitaram Moçambique em 2003
Unidade estatística – cada político
c) População – os 10 melhores atletas moçambicanos na corrida em Maputo
Unidade estatística – cada atleta
3. a) Todas as crianças.
b) Cada uma das crianças.
c) Qualitativo
4. a) Qualitativa b) Quantitativo
c) Quantitativa d) Quantitativa
e) Quantitativo f) Qualitativo
g) Qualitativo h) Qualitativo
5. a) Discreto b) Discreto
c) Contínua d) Contínua
e) Discreto
6. Distribuição do número de idas ao quadro dos rapazes:

N.º de idas ao quadro (x_i)	f_i	f_{ri}	F_i	F_{ri}
0	1	0,07	1	0,07
1	2	0,13	3	0,20
2	5	0,33	8	0,53
3	3	0,20	11	0,73
4	3	0,20	14	0,93
5	1	0,07	15	1

Tabela de números de idas ao quadro das raparigas:

No.º de idas ao quadro (x_i)	f_i	f_{ri}	F_i	F_{ri}
0	3	0,18	3	0,18
1	5	0,29	8	0,47
2	4	0,23	12	0,70
3	3	0,18	15	0,88
4	2	0,12	17	1

- b) 70% c) 7 d) 28%
7. a) média = 37; não tem moda (é amodal); mediana = 35
b) média = 60; moda = 60; mediana = 60
c) média = 89; moda = 85 e 96 (distribuição bimodal); mediana = 86
8. a) $x = 3$
b) $x \leq 2$
c) $x = 4$
9. a) 58,8%
b) média = 11; moda = 10
c) A opinião do aluno não está correcta, pois a distribuição das classificações (de acordo com os valores da média e moda) revela uma tendência para notas positivas. Isto é, a média e moda são maiores ou iguais a 10.

Unidade 8

1. a) $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ b) $\hat{X} = \hat{M}; \frac{5}{2,5} = \frac{6}{3}$
c) $\hat{X} = \hat{P}; \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ d) $\hat{A} = \hat{N}; \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$
2. Os triângulos são semelhantes, pois $\hat{M} = \hat{X}$ e $\hat{P} = \hat{A}$, sendo a razão de semelhança $r = \frac{1}{2}$
3. $|CE| = 12$ cm
4. $|ED| = 8$ cm
a) $\triangle BCA \cong \triangle DCE$
 $|CE| = 12$ cm $\triangle BAC \cong \triangle DEC$ (ângulo recto), logo $\triangle ABC \sim \triangle CDE$
b) $\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|CE|}$, logo $|AB||CE| = |AC||ED|$
c) $|ED| = 8$ cm
 $|DC| = 10$ cm
5. a) $\hat{N} = 12,8^\circ, \hat{P} = 25,6^\circ$
b) $P_{\triangle ABC} = 70,4$ cm e $P_{\triangle MNP} = 22$ cm
c) $r = 3,2$
d) $\frac{P_{\triangle MNP}}{P_{\triangle ABC}} = 3,2$
7. a) 5 dm b) $\frac{16}{25}$

8. a) 5 cm b) 4 cm c) 1,96 cm
9. a) 8 cm b) 12 cm
10.1 17,5 cm 10.2 7 cm 10.3 4,375 cm
11. a) V b) F c) V
12. $|AB| = 7,5$ e $|OB| = 12$ cm
13. O prédio tem uma altura de 33,4 m
14. O rio apresenta 40 m de largura.

Unidade 9

1. 8 faces
2. 4 vértices
3. 8 vértices
4. $A = 36\sqrt{3}$ cm²
5. 150 cm²
6. $49\sqrt{3}$ dm²
7. 150 cm² e 125 cm³
8. 9 cm
9. 4 cm, 4 cm e 6 cm
10. 6 m
11. $18\sqrt{2}$ cm³
12. a) 1,2 dm² b) 1,84 dm²
13. a) 113,04 cm²; 169,56 cm²; 169,56 cm²
b) 125,6 m²; 753,6 m²; 628 m³
14. 94,2 m²; 151 m²
15. $A_L = 126$ dm² $A_T = 151$ dm²
16. a) 226 m² b) 2,50 m
c) 2,0 cm
17. 402 cm²
18. 47 dm², 75 dm²
19. 2,4 dm²
20. 615 cm²
21. 20 cm
22. 75 m³
a) 25 m³
b) O volume do cilindro é três vezes maior que o do cone, ou seja, o volume do cone é um terço do volume do cilindro.
23. $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot R^2 \cdot h = (3,14) \cdot (0,5)^2 \cdot 2 = 1,57$ cm³. O tanque pode armazenar 1,57 cm³ de água.
24. $2,7 \times 10^2$ dm³
25. $V_{\text{uma bola}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot (3,14) \cdot (1)^3 = 4,19$ cm³. Se cada bola ocupa um volume de 4,19 cm³, um volume de 100 cm³ de chumbo pode fazer $100 : 4,19 = 23,87$ bolas. Ou seja, pode fazer aproximadamente 24 bolas.
26. 19 m³

Pearson Moçambique Limitada

Maputo, Moçambique

© Maputo – 2014 Pearson Moçambique, Lda., 1.ª Edição

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, offset, fotografia, etc.) sem o consentimento prévio da Editora, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código dos Direitos de Autor, D.L. 4 de Fevereiro de 2001.

Título: *Saber Matemática 9*

3.ª Tiragem 2014

ISBN: 9780636086753

Registado no INLD sob o número: 5991/RLINLD/2009

Arranjo gráfico – capa: Mark Standley

Paginação: Lizette Van Greunen; Lorne McGregor

Fotografia da capa: CDFF / Martinho Fernando

Impressão e acabamentos: Clyson Printers, Maitland, Cape Town
200187898 / SW10367

Autores:



Dinis Hilário Guibundana

Licenciado em Ensino da Matemática e Física pela Universidade Pedagógica de Maputo. Foi professor de Matemática e Didáctica de Matemática nos Institutos Médios Pedagógicos da Manhica e do Maputo. Fez igualmente parte da equipa do INDE que elaborou os programas de Matemática, no âmbito do novo currículo do Ensino Básico e da equipa de revisão dos programas de Matemática da Reforma Curricular do Ensino Secundário Geral. Actualmente, é técnico pedagógico no Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE) no Departamento de Planificação e Desenvolvimento Curricular.



João Carlos Sapatinha

Licenciado em Matemática e Física pela Universidade Pedagógica de Maputo. Foi professor de Matemática nas Escolas Samora Machel-Beira, Escola Francisco Manyanga, Escola Secundária Josina Machel e ADPP. Actualmente, é instrutor do Instituto de Formação de Professores na disciplina de Metodologia da Matemática, em Maputo, onde é chefe do Departamento de Ciências Naturais e Matemática.

Créditos fotográficos:

Agostinho de Nazombe: P. 115 (vista de Maputo); P. 135 (dois edifícios diferentes, em Maputo). **Bigstock.com:** Joanne Lane (P. 3); mmedia (P. 72 - antena parabólica); kuponjabah (P. 118 - mesquita); Gonçalo Carreira (P. 134 - rio); Luís Santos (P. 135 - catedral de Maputo); DrTI (P. 135 - depósitos de combustível); Sura Nualpradid (P. 136 - salina); Robyn Mackenzie (P. 139 - sólidos geométricos); Parushin (P. 139 - esferas); tobkatrina (P. 151 - panela); phakimata (P. 158 - jogador de basquetebol). **CDFF:** P. 135 (mesquita). **Dreamstime.com:** alesnowak (P. 72 - faróis de automóvel); Petesalouts (P. 72 - atleta); Skvoor (P. 116 - mapa de Moçambique); Kheng Guan Toh (P. 118 - bandeira de Moçambique); Mehmet Fatih Kocyildir (P. 135 - pirâmides de Gizé); pascalou95 (P. 135 - casas numa aldeia em Moçambique); Marianne De Jong (P. 118 - Torre de Pisa); Manfredyx (P. 136 - troncos empilhados); Jorgefelix (P. 136 - tanque com água); Bellevue (P. 136 - caixa com livros); Albo (P. 146 - pirâmide de Chichén Itzá, no México); Gordana Sermek (P. 151 - frasco de perfume); Cloki (P. 151 - garrafa de água); Patrick Breig (P. 158 - globo). **Instituto Nacional de Estatística de Moçambique:** P. 93. **iStock.com:** asiseeit (P. 116 - menina). **Pearson Southern Africa:** DIS/David Pickett (P. 139 - octógono e cubo). **PhotoSpin.com:** P. 136 (bola de basquetebol); P. 151 e P. 153 (lata).

Todos os esforços foram feitos no sentido de se obter permissão para usar material com copyright. Se involuntariamente utilizámos materiais com copyright, pedimos que nos informe de modo a podermos atribuir os créditos devidos.

SÍMBOLOS DA REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

Bandeira



Emblema



Hino Nacional

Pátria Amada

Na memória de África e do mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro

Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

Flores brotando no chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique.
Nenhum tirano nos irá escravizar.



ISBN 978-0-636-08675-3

