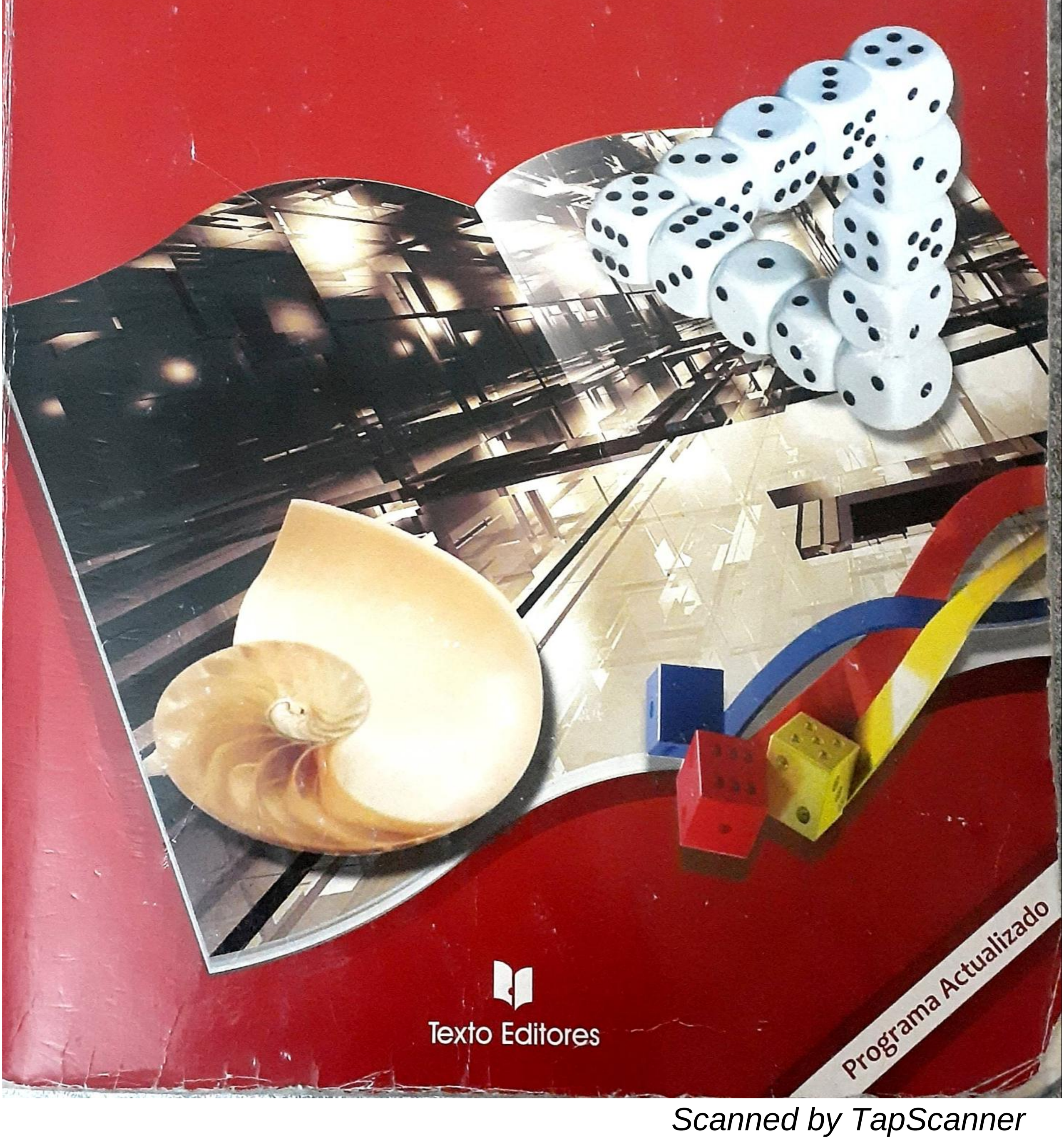
Arone Chilaúle
Orlando Machango

M12

Matemática 12.ª Classe



Texto Editores

Programa Actualizado

Scanned by TapScanner

Baixar Livros & Exames em PDF

*Somos o portal **MozEstuda.com**, um espaço dedicado à educação e ao conhecimento. Fornecemos links para o **download gratuito** de materiais de acesso livre, incluindo **exames anteriores**, **livros e diversos PDFs** educacionais. Nosso objetivo é facilitar o aprendizado e a pesquisa, sempre respeitando os direitos autorais e promovendo o acesso legítimo ao conhecimento. Se você apreciou este conteúdo, considere apoiar os autores e editoras adquirindo versões oficiais sempre que possível. Todos os direitos autorais pertencem aos respectivos criadores e detentores de direitos. **Não vendemos nem lucramos com as obras disponibilizadas**. **Aproveite e compartilhe com outros estudantes**!*

Para baixar livros em PDF, acesse *biblioteca.mozestuda.com* e pesquise o título desejado na barra de pesquisa. Ou, se preferir, siga/ Clica os links abaixo:

BAIXAR TODOS LIVROS ESCOLARES — MOÇAMBIQUE

Toque no nome da Classe para Baixar todos livros em PDF

- 12ª CLASSE
- 11ª CLASSE
- 10ª CLASSE
- 9ª CLASSE
- 8ª CLASSE
- 7ª CLASSE
- 6ª CLASSE
- 5ª CLASSE
- 4ª CLASSE
- 3ª CLASSE
- 2ª CLASSE
- 1ª CLASSE

BAIXAR TODOS MÓDULOS ESCOLARES —

- MÓDULOS DO I CICLO
- MÓDULOS DO II CICLO

LIVROS POR DISCPLINAS - TODAS

BAIXAR EXAMES DA 6ª CLASSE – MOÇAMBIQUE

Toque no nome da disciplina para Baixar todos exames em PDF

- C. NATURAIS
- C. SOCIAIS
- MATEMÁTICA
- PORTUGUÊS

BAIXAR EXAMES DA 10ª CLASSE – MOÇAMBIQUE

Toque no nome da disciplina para Baixar todos exames em PDF

- BIOLOGIA
- FÍSICA
- GEOGRAFIA
- HISTORIA
- INGLÊS
- MATEMÁTICA
- PORTUGUÊS
- QUÍMICA

BAIXAR EXAMES DA 12ª CLASSE – MOÇAMBIQUE

Toque no nome da disciplina para Baixar todos exames em PDF

- BIOLOGIA
- DGD
- FILOSOFIA
- FÍSICA
- FRANCÊS
- GEOGRAFIA
- HISTÓRIA
- INGLÊS
- MATEMÁTICA
- PORTUGUÊS
- QUÍMICA

TODOS EXAMES

TODOS EDITAIS

TODOS LIVROS

BAIXAR EXAMES DE ADMISSÃO – MOÇAMBIQUE

Toque no nome da Instituição para Baixar todos exames em PDF

- IFP / Formação de Professores
- UEM
- UJC/ ISRI
- ISPG
- ISPSONGO
- AC. MILITAR
- PRM
- ISCAM
- ICS – SAÚDE – ENSINO MÉDIO
- ETP / Ensino técnico Profissional
- UP / UniRios: Save, Rovuma, Licungo, ...
- UNIZAMBEZE
- ISPT
- ISCISA
- ACIPOL
- CFJJ
- IFAPA
- EDITAIS
- ENEM
- VESTIBULARES
- ENCCEJA
- TODOS EXAMES

Prefácio

Estimado Estudante!

Este livro da 12.ª classe, que corresponde ao último nível de escolaridade, é fruto do esforço que os autores têm enfrentado no ensino da Matemática. Com efeito, o manual aborda os conteúdos programados do ensino desta disciplina na 12.ª classe do S.N.E.

O livro está dividido em 8 unidades: Módulo, Cálculo combinatório e probabilidades, Funções reais de variável real, Funções reais de variável natural, Limites e continuidade de funções, Cálculo diferencial, Primitiva de uma função e Números complexos.

Para além dos exercícios que acompanham os temas abordados, no final de cada capítulo tem Exercícios propostos e as Soluções de todos os exercícios encontram-se no final do livro.

Depois do último capítulo, pode encontrar Notas históricas, e ainda os exames nacionais de 2010 e as respectivas guias de correcção.

Caro aluno, utilize este livro como princípio de aprendizagem contínua, questionando sempre para que no Ensino Superior não tenha problemas nesta área.

Caro professor, os autores reconhecem que esta não é uma obra acabada, por isso gostaríamos de receber contribuições e críticas da vossa parte, bem como de todos os entendidos na matéria.

Os autores

Scanned by TapScanner

Índice

Unidade 1: Módulo

Módulo dum número real 10
Interpretação geométrica de $|x-y|=|y-x|$ 10
Função módulo 11
Gráficos de $|f(x)|$ e $f(|x|)$ 11
Equações e inequações com módulos 13
Equações do tipo $|x|=a$ 13
Inequações do tipo $|x|<a$ 14
Inequações do tipo $|x|>a$ 14
Exercícios propostos 16

Unidade 2: Cálculo combinatório e probabilidades

Cálculo combinatório 20
Factorial de um número natural n 21
Permutação 21
Arranjos sem repetição (arranjos simples) 23
Combinação sem repetição 24
Propriedades das combinações 26
Binómio de Newton 27
Exercícios propostos 29
Probabilidades 31
Conceitos elementares 31
Operações com acontecimentos 32
Teoria frequencista de probabilidade 34
Definição axiomática de probabilidade 35
Exercícios propostos 40

Scanned by TapScanner

Índice

Unidade 3: Funções reais de variável real

Função real de variável real (revisão) 44
Função do 1.º grau (revisão) 45
Função do 2.º grau (revisão) 47
Paridade de funções 49
Função definida por ramos 50
Função homógrafa 50
Operações sobre funções 51
Função exponencial (revisão) 52
Função logarítmica (revisão) 54
Função trigonométrica (revisão) 55
Função periódica 57
Função trigonométrica inversa 58
Função inversa (revisão) 60
Composição de funções 61
Exercícios propostos 62

Unidade 4: Funções reais de variável natural

Sucessões 66
Sucessão monótona 69
Sucessão limitada 70
Limite duma sucessão 71
Infinitamente grande positivo 71
Infinitamente grande negativo 71
Infinitamente grande ou módulo 72
Infinitamente pequeno ou infinitésimo 72
Sucessão convergente 73
Cálculo do limite de sucessões 74
Indeterminações 76
Número de Neper e o limite notável 79
Progressão aritmética 81
Termo geral duma progressão aritmética 81
Soma dos termos consecutivos duma progressão aritmética 83

Scanned by TapScanner

Índice

Progressão geométrica 84
Termo geral duma progressão geométrica 85
Soma dos termos consecutivos duma progressão geométrica 86
Soma dos termos duma progressão geométrica infinita 87
Exercícios propostos 89

Unidade 5: Limites e continuidade de funções

Limites e continuidade de funções 94
Noção de limite 94
Propriedades dos limites 96
Limites laterais 97
Definição de limite 98
Limites infinitos 99
Propriedades 100
Indeterminações 101
Limites de expressões com exponenciais e logaritmos 104
Limites notáveis 105
Funções contínuas 108
Classificação dos pontos de descontinuidade 110
Propriedades das funções contínuas 110
Teorema de Bolzano ou Bolzano-Cauchy 111
Exercícios Propostos 116

Scanned by TapScanner

Índice

Unidade 6: Cálculo diferencial

Noção de derivada 120
Equação da recta tangente a uma curva
num ponto $x = a$ 121
Função derivada 121
Derivabilidade e continuidade 123
Regras de derivação 125
Monotonia e extremos relativos duma função 136
Concavidade e pontos de inflexão duma função 139
Assímptotas 140
Assímptota vertical 140
Assímptota horizontal 141
Assímptotas não verticais 141
Estudo da função 144
Exercícios propostos 150

Unidade 7: Primitiva de uma função

Primitiva 154
Integral indefinido 154
Primitivas imediatas 155
Primitivas por partes 157
Tabela de integrais 162
Exercícios propostos 165

Scanned by TapScanner

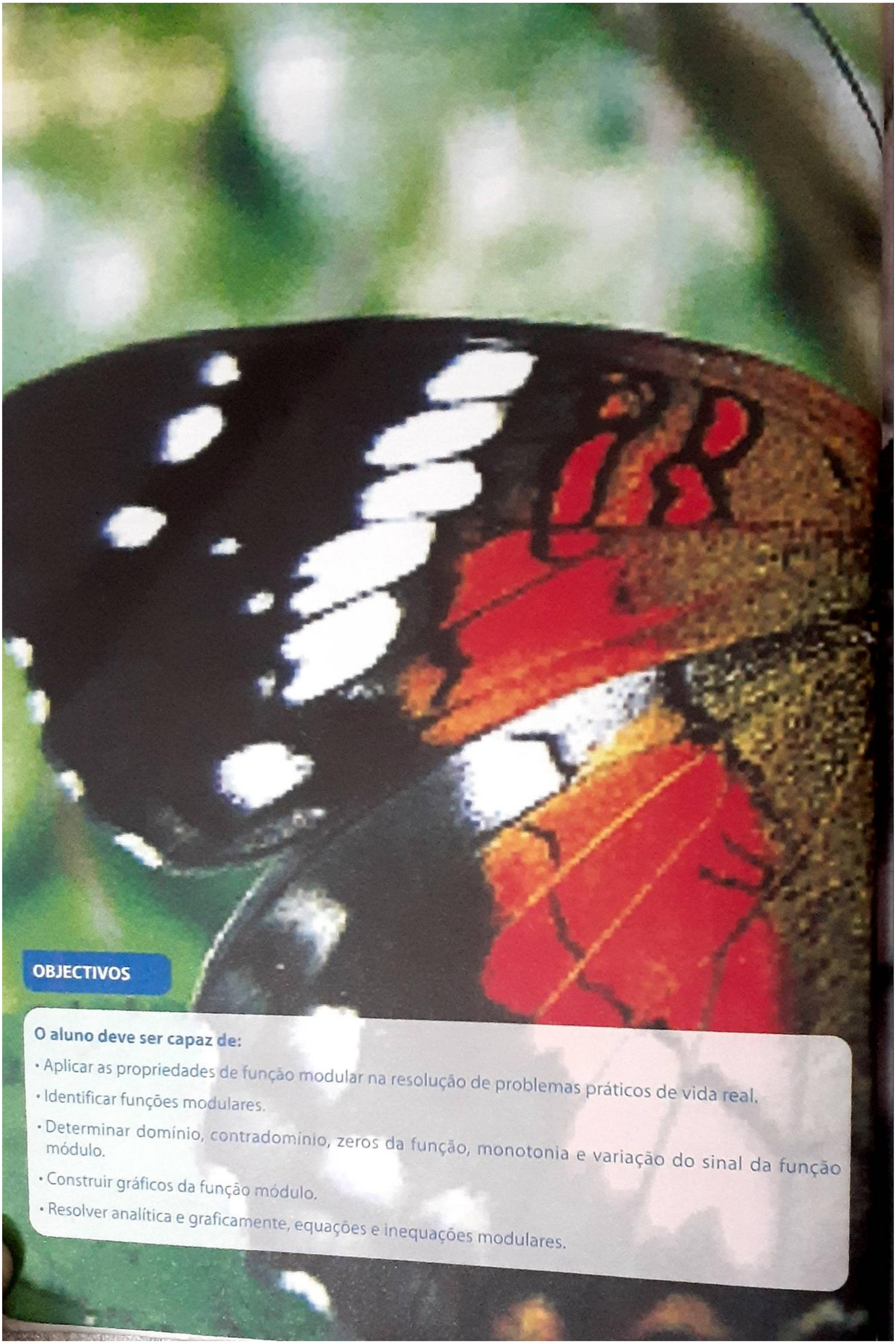
Índice

Unidade 8: Números complexos

Introdução 168
Forma algébrica de um número complexo 169
  Igualdade entre números complexos..... 171
Operações com números complexos
na forma algébrica 171
  Adição..... 171
  Subtracção 171
  Multiplicação..... 172
  Potenciação 173
  Divisão..... 174
Raízes em $\mathbb{C}$ de equações quadráticas
de coeficientes reais..... 176
Representação geométrica dos números complexos 177
Forma trigonométrica de um número complexo 179
  Argumento de um número complexo 179
  Igualdade entre números complexos..... 181
Operações com complexos na forma trigonométrica... 183
  Adição e subtracção de complexos..... 183
  Multiplicação de complexos..... 183
  Potenciação de complexos 184
  Divisão de complexos..... 185
  Radiciação de complexos 185
Exercícios propostos 190

Notas históricas 192
Exame nacional extraordinário 2010 199
Exame nacional 1.ª época 2010 211
Soluções 221
Bibliografia 232

Scanned by TapScanner



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Aplicar as propriedades de função modular na resolução de problemas práticos de vida real.
- Identificar funções modulares.
- Determinar domínio, contradomínio, zeros da função, monotonia e variação do sinal da função módulo.
- Construir gráficos da função módulo.
- Resolver analítica e graficamente, equações e inequações modulares.

Scanned by TapScanner

Módulo

UNIDADE I

CONTEÚDOS

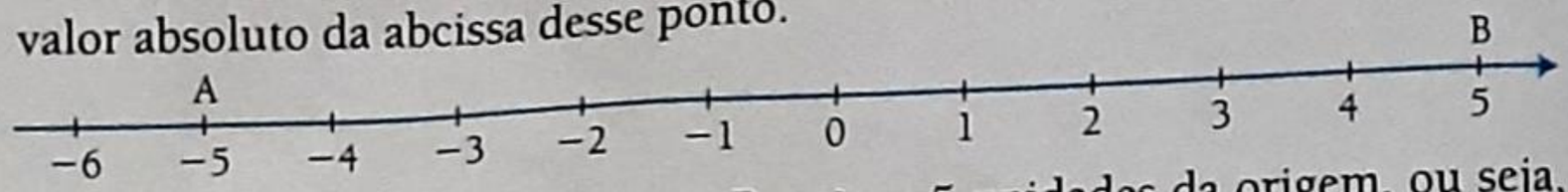
- Definição de módulo de um número real.
- Propriedades.
- Interpretação geométrica de módulo da diferença de dois números.
- Função módulo do tipo: $y = |f(x)|$; $y = f|(x)|$.
- Domínio, contradomínio, zeros da função, monotomia e variação do sinal da função módulo.
- Equações e inequações modulares do tipo: $|f(x)| = a$; $|f(x)| > a$; e $|f(x)| < a$.

Págs. 8 a 17

Scanned by TapScanner

Módulo de um número real

Na recta real, a distância dum ponto à origem chama-se módulo ou valor absoluto da abcissa desse ponto.



Tanto o ponto A como o ponto B estão a 5 unidades da origem, ou seja, a distância do ponto A à origem e do ponto B à origem são iguais a 5.

Então, como a distância é uma medida de comprimento, o valor absoluto é 5.

- $|+5| = 5$ (módulo + 5 é 5)
- $|-5| = 5$ (módulo − 5 é 5)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } \geq 0 \\ -x & \text{se } < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

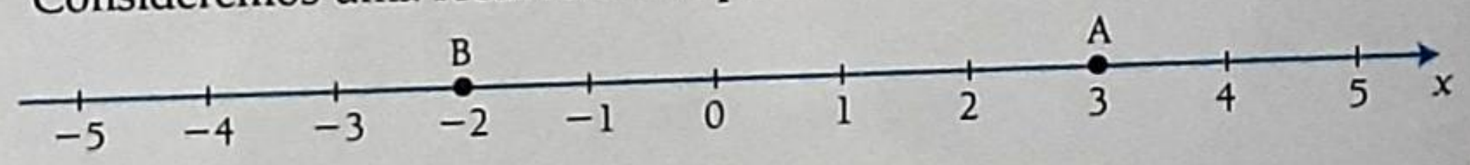
1

De acordo com a definição calcule:

a) $|3 - 5|$
b) $|-3 + 5|$
c) $|-3 - 5|$
d) $|-1| + |-6|$
e) $-3|-5 + 5|$
f) $|-8| + |3 - 1|$

Interpretação geométrica de $|x - y| = |y - x|$

Consideremos uma recta real e os pontos A de abcissa 3 e B de abcissa −2.



A partir de eixo numérico, podemos concluir que a distância entre A e B é 5.

Através da definição de módulo chegamos à mesma conclusão.

Temos:

$|x| = |x - 0|$ representa a distância do ponto da abcissa x ao ponto da abcissa 0.

$|x - y| = |y - x|$ representa a distância do ponto da abcissa x ao ponto da abcissa y.

Logo: $|3 - (-2)| = |-2 - 3| = 5$

Representa a distância do ponto A ao ponto B.

De um modo geral será:

$$|y - x| = a \Leftrightarrow x - y = a \vee x - y = -a$$

2

A distância entre A e B é 3 unidades. Represente na recta real.

3

Aplicando a definição determine:

a) $|4x + 1|$ se $x = -1$
b) $|5 - 2x|$ se $x = 1$
c) $|x^2 - 3x + 1| - |x^3 + x|$ se $x = -2$

Propriedades

Sejam x e y dois números reais diferentes de zero.

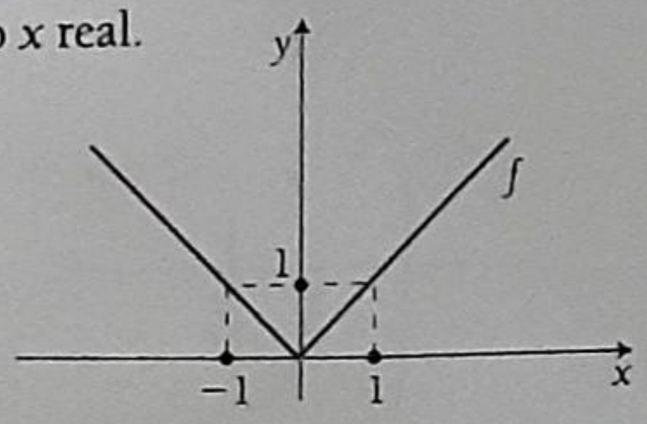
- $|x| \geq 0$
- $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = |-x|$
- $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$
- $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$
- $|x| + |y| \geq |x + y|$ Desigualdade triangular
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Scanned by TapScanner

Função módulo

Denomina-se função módulo à função $f(x) = |x|$ definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ para todo } x \text{ real.}$$



Observe, então, que a função modular é uma função definida por duas condições, ou seja:

$$f(x) = x \text{ se } x \geq 0 \ \wedge \ f(x) = -x \text{ se } x < 0$$

Observando o gráfico podemos concluir que:

- $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = [0, +\infty[$
- Zeros: $x = 0$
- Variação de sinal:
  – A função é positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  – A função nunca é negativa.
- Monotonia:
  – A função é crescente em $[0, +\infty[$.
  – A função é decrescente em $]-\infty, 0[$.
- Extremos relativos:
  – A função tem um mínimo no ponto de abcissa 0.
- Não é injectiva.

4

Estude as seguintes funções, indicando o domínio, contradomínio, zeros, intervalos de monotonia e variação de sinal.

a) $g(x) = |2x|$

b) $h(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$

c) $i(x) = -\left|\frac{3}{2}x\right|$

5

Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 3$

$g(x) = |2x - 3|$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e

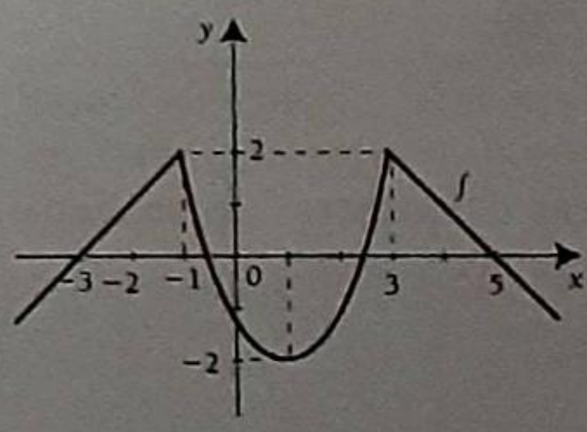
$g(x) = |x^2 - 6x + 8|$

6

Na figura, está representado o gráfico da função f.

Construa o gráfico de

$g(x) = |g(x)|$.



Gráficos de $|f(x)|$ e $f(|x|)$

O gráfico de função $|f(x)|$ obtém-se a partir do gráfico $f(x)$, mantendo-se os pontos de ordenada positiva ou nula e para os pontos de ordenada negativa tem-se uma simetria relativamente ao eixo dos xx.

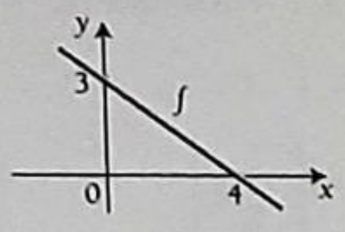
Scanned by TapScanner

7

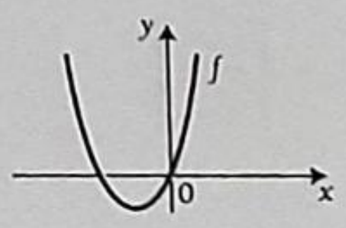
Dado o gráfico da função f. Represente o gráfico g, se

$g(x) = g(|x|)$.

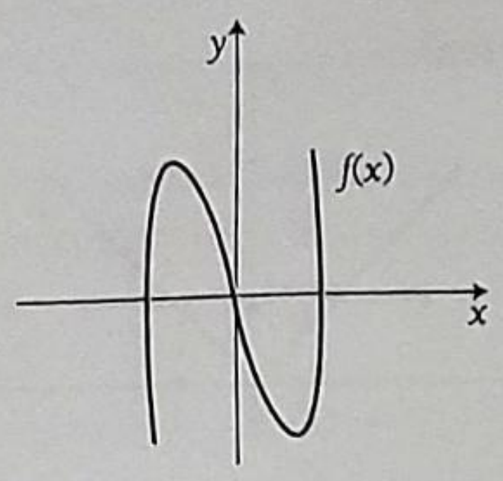
a)

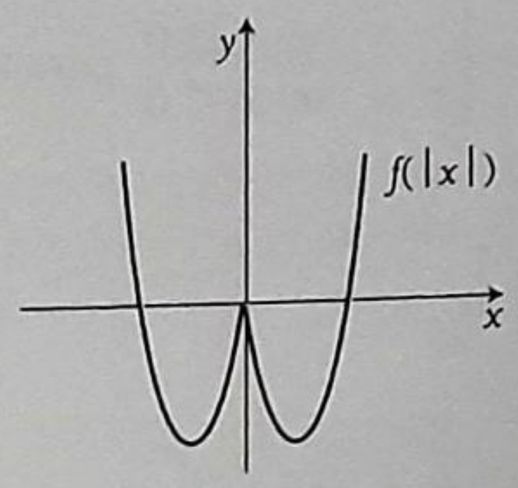


b)



O gráfico de função $f(|x|)$ obtém-se a partir do gráfico $f(x)$, mantendo-se os pontos de abcissa positivos ou nulo e para os pontos de abcissa negativa tem-se uma simetria relativamente ao eixo dos yy.





8

Construa os gráficos das funções seguintes:

a) $f_1(x) = x + 2$

$f_2(x) = |x + 2|$

$f_3(x) = |x| + 2$

b) $g_1(x) = x^2 - 4x + 3$

$g_2(x) = |x^2 - 4x + 3|$

$g_3(x) = x^2 - 4|x| + 3$

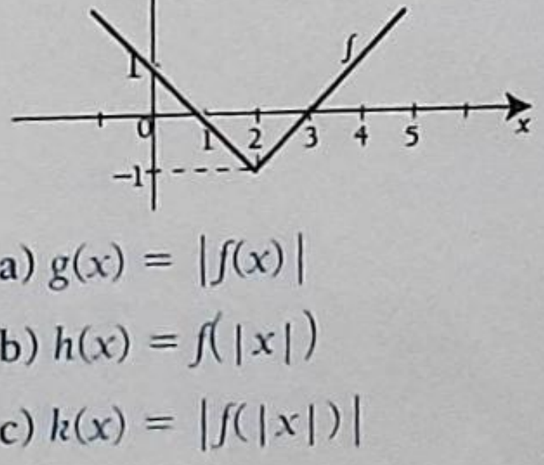
c) $h_1(x) = 2x - 4$

$h_2(x) = 2|x| - 4$

$h_3(x) = |2|x| - 4|$

9

Seja dado o gráfico da função $y = f(x)$. Represente, em figuras diferentes, as imagens geométricas de:



a) $g(x) = |f(x)|$

b) $h(x) = f(|x|)$

c) $k(x) = |f(|x|)|$

Exercícios resolvidos

1. Construa os gráficos de:

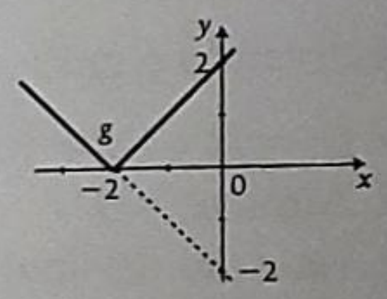
a) $g(x) = |-x - 2|$ b) $g(x) = |x^2 - 1|$

Resolução

1. a) $g(x) = |-x - 2|$

$f(x) = -x - 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$



b) $g(x) = |x^2 - 1|$

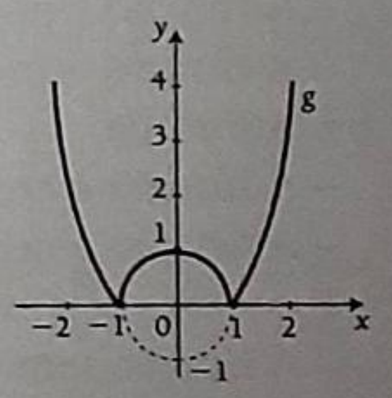
$f(x) = x^2 - 1$

$c = -1$

$f: x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$

$y_v = f(x_v) = f(0) = 1$



2. Construa os gráficos de:

a) $f(x) = |x| - 2$ b) $g(x) = |x|^2 - 2|x|$

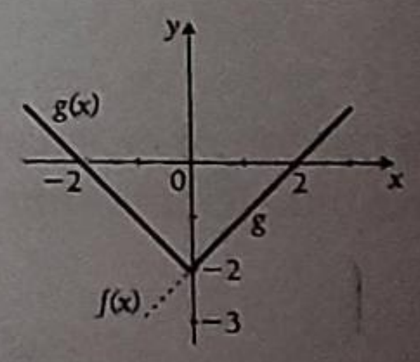
Resolução

2. a) $f(x) = |x| - 2$

$b = -2$

$f(x) = x - 2$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$



b) $g(x) = |x|^2 - 2|x| \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2|x|$ (pois $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$)

$f(x) = x^2 - 2x$

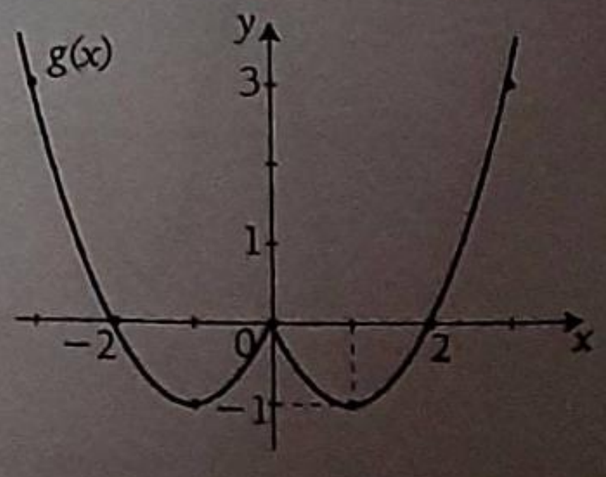
$c = 0$

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$

$f_v = f(x_v) = f(1) = 1$



Scanned by TapScanner

Equações e inequações com módulos

Equações do tipo $|x| = a$

Para a sua resolução usamos a definição de módulo.

De um modo geral:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Exercícios resolvidos

1. Resolva analiticamente as equações seguintes:

a) $|x| = 5$ b) $|x| = -7$ c) $|x| = 0$

Resolução

a) $|x| = 5$ usando a definição teremos:

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$ $S = \{-5, 5\}$

b) $|x| = -7$ neste caso será impossível pois o módulo de um número é sempre positivo.

Então: $S = \{\}$ ou $\varnothing$

c) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $S = \{0\}$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

a) $|x + 2| = -5$ b) $|x - 3| = 0$ c) $|x - 3| = |2x + 1|$

Resolução

a) $|x + 2| = -5$ é uma equação impossível $S = \varnothing$

b) $|x - 3| = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $S = \{3\}$

c) $|x - 3| = |2x + 1|$ se os módulos são iguais é porque os números são iguais ou simétricos.

$\Leftrightarrow x - 3 = 2x + 1 \vee x - 3 = -(2x + 1)$

$\Leftrightarrow -x = 4 \vee x - 3 = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = \frac{2}{3}$

$S = \left\{-4, \frac{2}{3}\right\}$

10

Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x| = 1 - \sqrt{3}$

b) $|-x| = 5$

c) $|2x| = 2$

d) $|x - 3| = 1$

e) $\left|x - \frac{1}{2}\right| = 2$

f) $|x + 5| = 9$

$|x| = a$

se $a \in \mathbb{R}^+$ – duas soluções.
se $a = 0$ – única solução.
se $a \in \mathbb{R}^-$ – nenhuma solução.

Sendo a e b dois números reais positivos podemos afirmar que:

$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

$|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$

Scanned by TapScanner

Inequações do tipo $|x| < a$

Quando se trata $<$, utiliza-se $\wedge$ (conjunção).

$|x| < a$
se $a \in \mathbb{R}^+$ – infinitas soluções.
se $a \in \mathbb{R}_0^-$ – nenhuma solução.

De um modo geral:

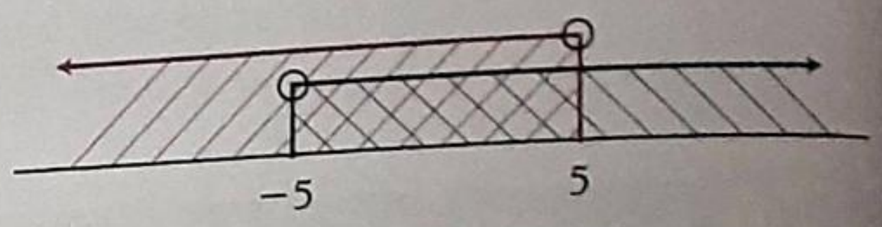
$$x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$$

Exercícios resolvidos

1. Resolva as inequações seguintes:
   a) $|x| < 5$ b) $|x-4| < 2$

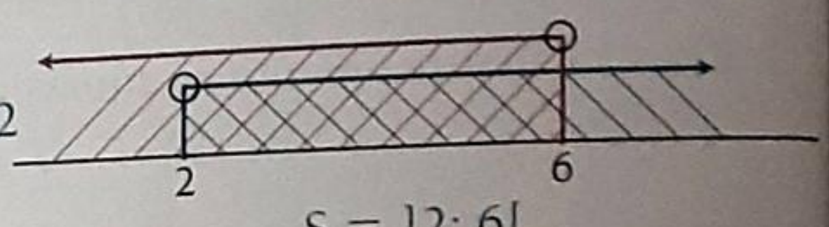
Resolução

a) $|x| < 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < 5 \wedge x > -5$
$\Leftrightarrow -5 < x < 5$



$S = x \in]-5; 5[$

b) $|x-4| < 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 4 < 2 \wedge x - 4 > -2$
$\Leftrightarrow x < 6 \wedge x > 2$



$S =]2; 6[$

11

Resolva, analiticamente, as inequações seguintes:

a) $|x-5| < 3$

b) $|1-7x| \leq \frac{1}{3}$

Inequações do tipo $|x| > a$

Quando se trata $>$, utiliza-se $\vee$ (disjunção).

$|x| > a$
se $a \in \mathbb{R}0^+$ – infinitas soluções.
se $a \in \mathbb{R}^- - \mathbb{R}$ é solução.

De um modo geral:

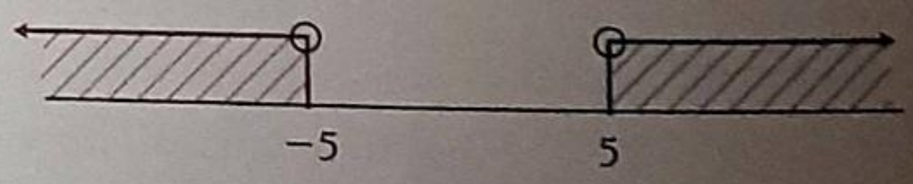
$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$$

Exercícios resolvidos

1. Resolva as inequações seguintes:
   a) $|x| |> 5$ b) $|3 + x| \geq 2$

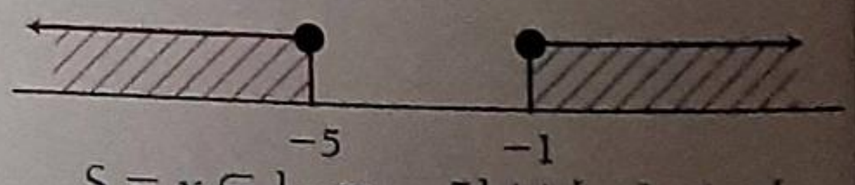
Resolução

a) $|x| > 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > 5 \vee x < -5$



$S = x \in]-\infty, -5[\cup]5; +\infty[$

b) $|3 + x| \geq 2$
$\Leftrightarrow 3 + x \geq 2 \vee 3 + x \leq -2$
$\Leftrightarrow x \geq -1 \vee x \leq -5$



$S = x \in]-\infty, -5] \cup [-1; +\infty[$

12

Resolva, analiticamente, as inequações seguintes:

a) $\left|4x + \frac{3}{5}\right| > 10$

b) $\left|\frac{4}{5} - 2x\right| \geq 5$

13

Resolva analiticamente, as inequações:

a) $\begin{cases} |x| < 2 \\ |-x + 2| \geq 3 \end{cases}$

b) $-\frac{1}{2} \leq |x + 5| < 3$

Resolução geométrica de equações

Como já vimos na interpretação geométrica de $|x - y| = |y - x|$ que é a distância entre o ponto de abcissa x e o ponto de abcissa y, então a resolução de equação usando o método geométrico baseia-se neste princípio.

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

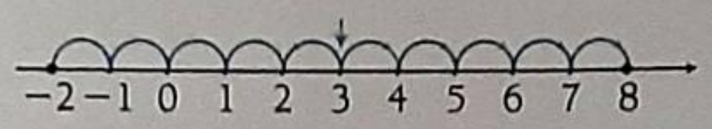
1. Resolva geometricamente as seguintes equações:
   a) $|x-3| = 5$ b) $|x+1| = 4$

Resolução

a) Quais são as abcissas dos pontos cuja distância ao ponto de abcissa 3 é 5?

Deslocando a partir de 3, 5 unidades para a direita obtemos 8 e, para a esquerda obtemos -2.

Logo, a solução da equação será: $S = \{-2, 8\}$.

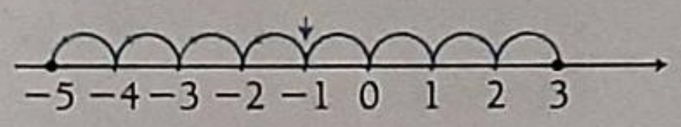


b) $|x+1| = 4 \Leftrightarrow |x-(-1)| = 4$

Quais são as abcissas dos pontos cuja distância ao ponto da abcissa -1 é 4?

Deslocando à esquerda de -1, 4 unidades obtemos -5 e à direita obtemos 3 unidades.

Logo, a solução da equação será: $S = \{-5, 3\}$



Resolução geométrica de inequações

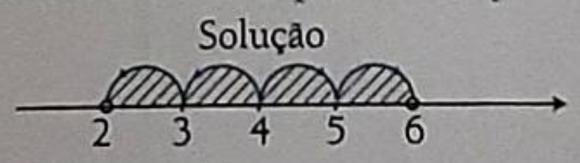
Exercícios resolvidos

1. Resolva, geometricamente, as seguintes inequações:
   a) $|x-4| < 2$ b) $|3+x| \geq 2$

Resolução

a) «Quais são as abcissas dos pontos que distam menos de duas unidades do ponto da abcissa 4?»

Neste caso procede-se do mesmo modo como nas equações. Assim, a partir do ponto 4 deslocam-se 2 unidades para a direita e para a esquerda. As soluções serão todos os valores inferiores ao deslocamento tanto para a direita como para a esquerda.



$S =]2, 6[$

b) $|3+x| \geq 2 \Leftrightarrow |x-(-3)| \geq 2$

«Quais são as abcissas dos pontos que distam da abcissa -3 não menos do que 2 unidades?»

Como a distância entre x e 3 é maior que 2, deslocando a partir de -3, 2 unidades para a direita e 2 para a esquerda, a solução serão os valores superiores a esses deslocamentos.

$S =]-\infty, -5] \cup [-1; +\infty[$

14

Represente na forma de intervalo:

a) O conjunto de todos os reais cuja distância a 3 é menor que 2.

b) $\{x \in \mathbb{R}: |x-3| < 7\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}: \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 0{,}1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}: |x+2| < 4{,}5\}$

15

Resolva, graficamente, as equações seguintes:

a) $|x-3| = 2$

b) $|1-x| = 3$

c) $|3-x| = 4$

d) $|x-2| = 5$

16

Resolva, graficamente, as inequações seguintes:

a) $|x+8| < 5$

b) $|x-5| > \frac{3}{4}$

c) $|x-2| \leq 8$

d) $|x+7| \geq \frac{5}{2}$

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

1. Represente na forma dos intervalos, cada um dos subconjuntos em $\mathbb{R}$.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -1, 7\}$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R}: x > -1 \wedge x \leq \frac{3}{2}\right\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}: -4 < x < -3\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R}: |x| < 1\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 2,5\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{R}: |x - 1| < 6\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R}: |x + 2| \leq 1\}$

2. Calcule a distância entre os pontos das abcissas.

a) -4 e $-\frac{3}{2}$ b) -4 e $4,3$

c) 0 e $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{6}$ e $-\frac{5}{3}$

3. Resolva, analiticamente, as equações seguintes em $\mathbb{R}$:

a) $|x| = 7$

b) $|x| = -2$

c) $|x| = 2\sqrt{2}$

d) $|x + 4| = 7$

e) $|x - 2| = \frac{1}{2}$

f) $\left|x + \frac{1}{4}\right| = 0$

g) $|x - 1| = |2x|$

h) $|x + 3| = 3|x - 1|$

i) $|x - 3| = 4x$

j) $|x + 3| = 2\left|x - \frac{1}{3}\right|$

k) $|2 - x| = 3$

4. Resolva cada uma das inequações seguintes em $\mathbb{R}$:

a) $|x| < 5$

b) $|x| \leq 3$

c) $|x| > 4$

d) $|x| \leq 0$

e) $|x| < -2$

f) $|x - 3| < 2$

g) $\left|2x - \frac{1}{2}\right| \leq 3$

h) $|0,1x - 1| < 0,1$

i) $|x| \geq -1$

j) $|2x - 3| > 2$

k) $\left|x - \frac{1}{2}\right| \geq 4$

5. Resolva as inequações seguintes em $\mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} |x - 3| - 2 < 0 \\ |x + 1| - 1 \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x + 1| - 2 \geq 2 \\ |2x - 2| - 1 > 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x + 1| - 2 > 1 \\ |x - 2| - 1 \leq 1 \end{cases}$

d) $|2x + 3| = 2 \wedge |x - 1| > 5$

e) $\begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| > 2 \\ |x - 3| \leq 2 \end{cases}$

6. Calcule:

a) $|-5| + |8|$

b) $|-3| + |-5|$

c) $|-3 - 3|$

d) $|-5 + 5|$

e) $|25| - |-25|$

f) $|-3| + |-72| - |3|$

7. Tomando em conta que: $\sqrt{x^2} = |x|$. Calcule

a) $\sqrt{25b^2}$

b) $\sqrt{36\,p^6\,q^4\,r^2}$

c) $\sqrt{0,81\,p^4\,q^{10}\,r^2}$

Scanned by TapScanner

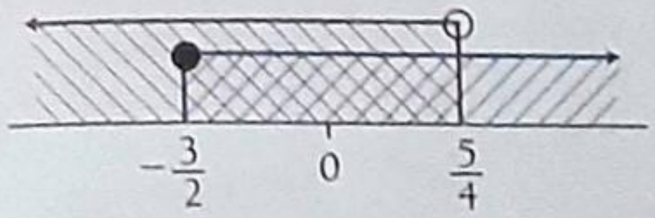
d) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$

e) $\sqrt{p^2 - 6pq + 9q^2}$

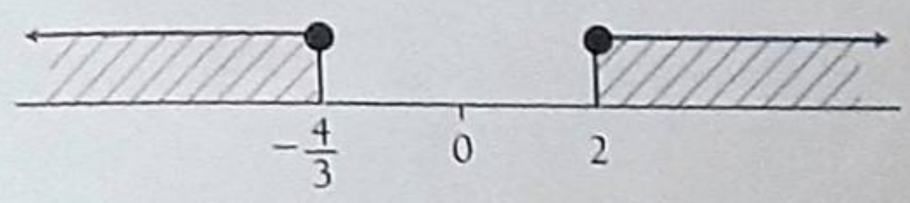
f) $\sqrt{p^4 + 2p^2q^2 + q^4}$

8. Escreva na forma de intervalo de números reais.

a)



b)



9. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$ e apresente o conjunto solução na forma de intervalos e geometricamente:

a) $|8 - x| = -10$

b) $\frac{|x - 1|}{3} = 1$

c) $|3x - 4| = 2$

d) $|17 - 4x| = 1$

e) $|2x - 3| = 2x - 3$

f) $|3x + 2| = 4 - 2x$

g) $|2x - 1| = |5x - 6|$

h) $|4x - 1| = |2x + 3|$

10. Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$ e apresente o conjunto solução na forma de intervalos:

a) $|3x| < 1$

b) $\left|-\frac{x}{2}\right| \leq 5$

c) $|x - 1| \geq -2$

d) $1 > |x + 5|$

e) $|3 - x| \leq 3$

f) $\left|\frac{x - 2}{2}\right| \leq 3$

g) $|5 - 3x| \leq 1$

h) $|3x - 1| < 5$

i) $|3x + 4| \leq -5$

j) $\left|\frac{1 - x}{3}\right| > \frac{1}{2}$

k) $|x^2 - x - 4| > 2$

11. Indique o conjunto solução das seguintes condições:

a) $|3x - 6| < |5 - 3x|$

b) $\left|\frac{2}{3} - x\right| \geq |x + 1|$

12. O conjunto solução de $|x| - 1 < 0$ é:

A. $S =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

B. $S =]-1, 1[$

C. $S = [-1, 1]$

D. $S = \varnothing$

13. O conjunto solução de $-\left|x + \frac{1}{3}\right| + 1 > 4$ é:

A. $S = \left]-\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right[$

B. $S = \varnothing$

C. $S = \left[\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right[$

D. $S = \left]-\infty, -\frac{10}{3}\right[\cup \left]\frac{8}{3}, +\infty\right[$

14. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \frac{1}{1 - |x|}$

b) $f(x) = \sqrt{|x| - 5}$

c) $f(x) = \frac{1}{|x - 2| - 2}$

d) $f(x) = \sqrt{|x - 1| - 3}$

15. Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

b) $g(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 1\right|$

Scanned by TapScanner

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Aplicar fórmulas de factorial, arranjos, combinações e permutações de um número para resolver problemas reais da vida.
- Distinguir arranjos, permutações e combinações.
- Aplicar a fórmula de Newton para efectuar desenvolvimento de $(x+y)^n$ sendo n natural.
- Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios.
- Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida.
- Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento.
- Aplicar as propriedades de frequência relativas para o cálculo de probabilidades.
- Calcular probabilidades de acontecimentos incompatíveis e equiprováveis.
- Calcular a probabilidade de um acontecimento pela regra de Laplace.
- Resolver problemas de determinação da probabilidade de um acontecimento em casos simples.

Scanned by TapScanner

Cálculo combinatório e probabilidades

UNIDADE 2

CONTEÚDOS

Cálculo combinatório e probabilidades

- Factorial e cálculo com factorial.
- Arranjo sem repetição: definição, fórmula de arranjos; A_n^p; aplicações.
- Permutação: definição, fórmula de permutações P_m; aplicações.
- Combinações sem repetição: definição, fórmula de combinação C_n^p; propriedades $C_n^p = C_n^{n-p}$; aplicações.
- Binómio de Newton e aplicações.
- Triângulo de Pascal e aplicações.
- Resolução de problemas.

Introdução ao cálculo de probabilidades

- Fenómenos aleatórios.
- Operação com conhecimentos (união, intersecção).
- Acontecimento certo, impossível.
- Acontecimento contrário e incompatível (disjuntos).
- Frequência absoluta e relativa de um acontecimento.
- Propriedades das frequências relativas.
- Noção de probabilidade obtida a partir da noção de frequência relativa.
- Axiomatização do conceito de probabilidade num espaço finito.
- Determinação da probabilidade de um acontecimento quando os acontecimentos elementares são equiprováveis e não equiprováveis.
- Resolução de problemas.

Págs. 18 a 41

Scanned by TapScanner

Cálculo combinatório

O cálculo combinatório consiste no estudo das diferentes maneiras de formar e ordenar conjuntos a partir de elementos de outros conjuntos.

Em qualquer processo de contagem usa-se sempre o princípio fundamental de contagem.

Se uma tarefa envolve a realização de k tarefas, por uma determinada ordem, e se há n maneiras de realizar a primeira, n_2 maneiras de realizar a segunda, ... n_k maneiras de realizar a última tarefa, então há $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ formas diferentes de realizar essa tarefa.

1

O «segredo» de um cofre é uma sequência de três algarismos e duas vogais. Quantos «segredos» diferentes se podem compor?

2

O Moisés tem 3 calças, 2 casacos, 6 camisas e 2 pares de sapatos. De quantas maneiras pode vestir-se?

3

Capicua é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda e da esquerda para a direita dá o mesmo número. Quantas capicuas de 7 algarismos existem?

4

Cinco amigos vão dar um passeio de automóvel. De quantas maneiras podem «arrumar-se» sabendo que só um tem carta de condução e a Elisa tem que «ir à janela?»

Exercícios resolvidos

1. Qual é o número de casos possíveis de 3 lançamentos dum dado?

Resolução

1.º Lançamento – 6 casos
2.º Lançamento – 6 casos
3.º Lançamento – 6 casos
} $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ casos

2. Qual é o número de opções de escolha do chefe e subchefe numa turma de 48 alunos?

Resolução

1.ª Escolha (chefe da turma) – 48 opções
2.ª Escolha (subchefe) – 47 opções
} $48 \cdot 47 = 2\,256$ opções

O princípio que acabámos de exemplificar tem a ver com o cardinal do produto cartesiano de conjuntos.

Dado um conjunto A e um conjunto B, chama-se produto cartesiano de A por B, e escreve-se $A \times B$, ao conjunto dos pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$$

Se A e B são conjuntos finitos então o cardinal de $A \times B$ será

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

Exemplos

1. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$. Tem-se:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$ $\#(A \times B) = 6$

2. O número de resultados no lançamento de 3 moedas, corresponde ao cardinal de A^3, sendo $A = \{\text{face 1 MT, face logotipo}\}$:
$\#A^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Lê-se cardinal.

Scanned by TapScanner

Factorial dum número natural *n*

Chama-se factorial dum número natural n e representa-se por $n!$ ao produto:

$$n! = n\,(n-1)(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$n!$ lê-se «n factorial» ou «factorial de n».

Exemplo

1. Aplicando a definição:

a) $2! = 2 \cdot 1$

b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

c) $(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)(n-2)!$

d) $0! = 1$ (por convenção)

e) $\dfrac{12!}{6 \cdot 11!} = \dfrac{12 \cdot 11!}{6 \cdot 11!} = 2$

f) $\dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{n\,(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = n(n-1)(n-2)$

5

Calcule o valor de expressão:

$$\frac{100! \cdot 101}{99!}$$

6

Resolva a expressão:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$$

Permutação

Suponhamos que numa corrida de 100 m participam sete pessoas. Não havendo empates, de quantas formas diferentes pode ficar a classificação final?

Há $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ maneiras diferentes dos atletas preencherem os lugares, pois existem 7 possibilidades para escolher o primeiro lugar, 6 para o segundo, 5 para o terceiro, ..., e para o sétimo não temos escolha.

O que pretendemos é contar todas as formas possíveis de ordenar os 7 elementos, ou seja, contar o número total de sequências que se podem formar com 7 elementos que podem trocar (ou permutar) entre si. A uma sequência de 7 elementos chama-se permutação de 7 e o número total de formas de ordenar 7 elementos representa-se por:

P_7 → «Número de permutações de 7» ou

$7!$ → «Factorial de 7» ou «7 factorial».

Ou seja,

$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

7

Verifique que:

a) $5! + 7! \neq 12!$

b) $5 + 4! \neq 8!$

c) $5! + 2! \neq 10!$

8

Cinco raparigas e dois rapazes vão dispor-se em fila para uma fotografia. De quantas maneiras se podem dispor, ficando os dois rapazes nas pontas?

Scanned by TapScanner

Dado um conjunto de n elementos distintos, chama-se permutação de n elementos a toda a sequência que podemos formar com esses n elementos e representa-se por P_n ou permutação de $n!$ e tem-se:

$$P_n = n!$$

P_n lê-se «permutação de n elementos».

9

Seja $A = \{a, b, c\}$.

Escreva todas as permutações dos elementos de A.

10

De quantas maneiras se podem ordenar 5 livros de Matemática e 3 de Física na prateleira de uma estante:

a) Sem qualquer ordem especial?

b) Ficando juntos os livros de cada disciplina.

11

De quantas maneiras se podem escrever as letras da palavra AMOR:

a) Começando por vogal.

b) Mantendo as vogais sempre juntas.

c) Alternando a vogal e a consoante.

Se há n objectos com n_1 do tipo 1, n_2 do tipo 2, ..., n_r do tipo r, onde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, então

há $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_n!}$ permutações diferentes dos n objectos.

Exercícios resolvidos

1. Um teste tem 9 questões e um estudante pode responder às questões, seguindo qualquer ordem. De quantos modos diferentes pode o estudante responder?

Resolução

Pretende-se calcular P_9.

$P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$ maneiras diferentes.

2. a) Com as letras da palavra COMBINATÓRIA, quantas palavras com ordem e sentido é possível formar?

b) Quantas palavras é possível formar ficando as letras BI sempre juntas?

Resolução

2. a) COMBINATÓRIA

Número de letras da palavra: 12
Letra C: 1; Letra O: 2; Letra M: 1;
Letra B: 1; Letra I: 2; Letra N: 1;
Letra A: 2; Letra T: 1; Letra R: 1;

Logo, há $\dfrac{12!}{1!2!1!1!2!1!2!1!1!} = 59\,875\,200$ palavras diferentes que é possível formar.

b) A palavra tem 12 letras.

Considerando que (BI) é como uma única letra, a palavra passa a ter 11 letras para permutar sendo dois pares dessas letras iguais. Como BI também

pode permutar (IB), a solução é: $\dfrac{11!}{2!\,2!} \cdot 2! = 19\,958\,400$

Logo, há 19 958 400 palavras diferentes com as letras B e I juntas.

Scanned by TapScanner

Arranjos sem repetição (arranjos simples)

Dado $B = \{2, 4, 6, 8\}$ procuremos escrever todos os números de três algarismos diferentes que podemos formar.

Como procedimento verifica-se que cada um dos números pedidos corresponde a uma sequência de três elementos distintos, escolhidos entre os elementos de B.

Chamamos a uma sequência deste tipo, arranjo simples ou sem repetição de 4 elementos tomados 3 a 3, ou arranjo de 4, 3 a 3. O número total destes arranjos de sequências representa-se $^4A_3$ e já sabemos que é igual a $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Dado um conjunto com n elementos, o número total de sequências de p elementos distintos, escolhidos de entre os n elementos, com $p \leq n$, representa-se, por ^nA_p que se lê número de arranjos simples, ou sem repetição, de n elementos, tomados p a p, ou número de arranjos de n, p a p, e tem-se:

$$^nA_p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (p-1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

É fácil concluir que, se $p = n$ então $^nA_p = n!$, ou seja:

$$^nA_n = P_n = n!$$

Generalizando

1. $^nA_1 = n$
2. $^nA_2 = {}^nA_1(n-1)$
3. $^nA_3 = {}^nA_2(n-2) = {}^nA_1(n-1)(n-2)$
4. $^nA_4 = {}^nA_3(n-3) = {}^nA_1(n-1)(n-2)(n-3)$

$\vdots$

p. $^nA_p = {}^nA_{p-1}[n-(p-1)] = {}^nA_{p-1}(n-p+1) \quad (p > 1)$

Uma vez que os arranjos de n elementos tomados p a p se podem obter a partir dos arranjos de n elementos tomados $(p-1)$ a $(p-1)$, colocando à direita de cada um deles um dos elementos que, ainda, não figuram ali e que são números de $[(n-p+1)]$.

Fazendo substituição sucessiva, finalmente teremos:

$$^nA_p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \quad n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$$

Logo, o número total de arranjos de n elementos p a p é igual ao produto de p números naturais consecutivos, por ordem decrescente, a partir de n.

12

Calcule:

$$\frac{^6A_2 + {}^4A_3 + {}^5A_2}{^9A_2 + {}^8A_2}$$

13

Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos do sistema decimal, sem os repetir de modo que:

a) Comecem por 1.

b) Comecem por 2 e terminem em 5.

c) Sejam divisíveis por 5.

14

Quantos são os números compreendidos entre 2 000 e 3 000 formados por algarismos distintos?

15

Numa prova olímpica de natação, 6 atletas disputam as medalhas de ouro, prata e bronze.

De quantas maneiras diferentes se pode fazer a distribuição das medalhas?

16

Considere todos os números de cinco algarismos diferentes.

Quantos desses são pares?

Scanned by TapScanner

17

Para pintar um cubo com as faces numeradas de 1 a 6, dispomos de tintas de 8 cores, uma das quais é verde.

De quantas maneiras se pode pintar o cubo sem repetir as cores?

Exemplos

1. ${}^{6}A_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
2. ${}^{n}A_5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
3. Quantos números de quatro algarismos diferentes é possível formar com cinco elementos do conjunto (1, 3, 5, 6, 7)?
   ${}^{5}A_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
4. Numa corrida com 8 participantes, de quantas maneiras se podem distribuir as medalhas de ouro, prata e bronze?
   ${}^{8}A_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
5. O Nuno tem 10 lápis de cor e quer pintar uma figura utilizando 6 cores diferentes. De quantas maneiras pode a figura ser colorida?
   ${}^{10}A_6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$

O número de combinações de n, p a p, também se representa:

$$\binom{n}{p}$$

Combinação sem repetição

Vamos agora estudar a combinação que é um tipo de agrupamento diferente dos anteriores, onde a troca de posição dos elementos escolhidos não dá origem a outra situação diferente, ou seja, a ordem é irrelevante para subconjuntos dum conjunto dado.

Dado o conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$, quais os produtos de três factores que é possível formar com os elementos de A?

Nestes casos podemos concluir que os produtos pedidos não são mais do que o agrupamento de três elementos de A, que apenas se distinguem se forem diferentes os seus elementos.

Assim: $2 \times 3 \times 5$ $2 \times 3 \times 7$ $2 \times 5 \times 7$ $3 \times 5 \times 7$

Preste atenção para a comutividade da multiplicação pois $2 \times 3 \times 5$, $2 \times 5 \times 3$... não são diferentes.

Então neste caso o que importa não são sequências de três elementos, mas sim, combinações de quatro elementos tomados 3 a 3.

18

Numa equipa de 12 médicos, em cada noite devem estar 3 de plantão. Durante quantas noites se formam equipas diferentes?

Dado um conjunto com n elementos, chama-se combinação dos elementos desse conjunto, a qualquer dos seus subconjuntos. O número total de combinações com p elementos escolhidos de entre n representa-se por ${}^{n}C_{p}$, que se lê número de combinações de n, (tomados) p a p.

O número de produtos de três factores que se podem formar com os elementos do conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$ é

$${}^{4}C_3 \text{ ou } \binom{4}{3}$$

Então como obter ${}^{4}C_3$?

Já sabemos que o número de sequências de três elementos se pode obter a partir do conjunto A é ${}^{4}A_3$ e que cada um dos subconjuntos de três elementos origina 3! sequências distintas.

Scanned by TapScanner

Portanto ${}^4A_3 = {}^4C_3 \cdot 3!$

ou seja ${}^4C_3 = \frac{{}^4A_3}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 4$

Dum modo geral, cada conjunto de p elementos permite escrever $p!$ arranjos simples, o que quer dizer que o número de subconjuntos com p elementos escolhidos de entre n pode obter-se dividindo o número de arranjos simples de n, p a p, por $p!$.

$$ {}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}, \text{ com } p \leq n $$

Exercícios resolvidos

1. Calcule:

a) ${}^6C_3$ b) ${}^{n+3}C_3$

Resolução

a). ${}^6C_3 = \frac{{}^6A_3}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

b) ${}^{n+3}C_3 = \frac{(n+3)!}{(n+3-3)!\,3!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}6} =$

$= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$

2. De quantos modos diferentes se pode escolher uma comissão de três pessoas dum grupo de dez pessoas?

Resolução

Cada subconjunto de três elementos satisfaz o pedido.

${}^{10}C_3 = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$

3. Um saco contém 10 bolas brancas e 7 bolas pretas.
Tiram-se duas bolas. De quantos modos diferentes se podem tirar:

a) Só bolas brancas? b) Só bolas pretas? c) Bolas da mesma cor?

Resolução

a) ${}^{10}C_2 = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\,2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

b) ${}^7C_2 = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

c) ${}^{10}C_2 + {}^7C_2 = 45 + 21 = 66$

19

Dos 8 elementos de uma associação de estudantes vão ser escolhidos 2 para representar a escola num encontro com elementos do Ministério da Educação e Cultura.

De quantas formas diferentes se pode fazer essa escolha?

20

Quantas filas diferentes se podem formar com 6 bolas verdes, 3 bolas azuis e 4 bolas encarnadas?

21

Com os algarismos do número 52 775, quantos números diferentes se podem escrever?

Scanned by TapScanner

Propriedades das combinações

1. ${}^nC_0 + {}^nC_1 + \ldots + {}^nC_{n2-} + {}^nC_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$

Esta propriedade das combinações é o corolário do teorema seguinte:

> O número total de subconjuntos ou partes dum conjunto com n elementos é 2^n.

Exercícios resolvidos

1. Verificação do teorema anterior para B = {b, a, r, c, o}.

Resolução

Subconjunto vazio (∅): 1
Número de subconjuntos com 1 elemento: ${}^5C_1 = 5$
Número de subconjuntos com 2 elementos: ${}^5C_2 = 10$
Número de subconjuntos com 3 elementos: ${}^5C_3 = 10$
Número de subconjuntos com 4 elementos: ${}^5C_4 = 5$
Número de subconjuntos com 5 elementos: ${}^5C_5 = 1$
De facto: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5 = 2^{\#B}$
Como ${}^5C_0 = 1$ e ${}^5C_5 = 1$ podemos afirmar que :
${}^5C_0 + {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 2^5$

2. Quantos subconjuntos tem ${}^4C_0 + {}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4$?

Resolução

${}^4C_0 + {}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

Para procurar propriedades das combinações vamos construir um esquema com os valores das combinações de n elementos numa linha, de $n + 1$ elementos na linha seguinte e assim sucessivamente...

A figura obtida denomina-se triângulo de Pascal.

Em cada linha todas as combinações de elementos:

Linha 0 → ${}^0C_0$
Linha 1 → ${}^1C_0$ ${}^1C_1$
Linha 2 → ${}^2C_0$ ${}^2C_1$ ${}^2C_2$
Linha 3 → ${}^3C_0$ ${}^3C_1$ ${}^3C_2$ ${}^3C_3$
Linha 4 → ${}^4C_0$ ${}^4C_1$ ${}^4C_2$ ${}^4C_3$ ${}^4C_4$
Linha 5 → ${}^5C_0$ ${}^5C_1$ ${}^5C_2$ ${}^5C_3$ ${}^5C_4$ ${}^5C_5$
Linha 6 → ${}^6C_0$ ${}^6C_1$ ${}^6C_2$ ${}^6C_3$ ${}^6C_4$ ${}^6C_5$ ${}^6C_6$

Substituindo os símbolos ${}^nC_p$ pelos respectivos valores, obteremos:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 5 15 20 15 6 1

Scanned by TapScanner

Tendo em conta o triângulo de Pascal, iremos interpretar ou justificar as propriedades seguintes que são válidas para todo $n \in \mathbb{N}_0$:

2. ${}^nC_0 = 1$; ${}^nC_n = 1$

O número de combinações de n, 0 a 0, representa o número de subconjuntos com zero elementos escolhidos de entre n, havendo apenas um conjunto com zero elementos que é o conjunto vazio.

O número de combinações de n, n a n, representa o número de subconjuntos com n elementos escolhidos de entre n, havendo apenas um único conjunto que existe nessas condições que é o próprio conjunto.

3. Para $p \leq n$, $p \in \mathbb{N}_0$ ${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$

Esta propriedade está relacionada com a simetria que existe em cada linha. Pode ser interpretada em termos de conjunto, pois cada vez que se escolhe p elementos de entre n, sobram $n - p$ elementos, então, há tantos conjuntos com p elementos escolhidos de entre n como com $n - p$ elementos.

A demonstração desta propriedade pode ser feita usando a expressão do número de combinações em termos de factoriais:

$${}^nC_p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \quad \text{e} \quad {}^nC_{n-p} = \frac{n!}{[n-(n-p)]!(n-p)!}$$

sendo a segunda expressão equivalente à primeira, o que se torna evidente efectuando as operações dentro do parêntesis.

Binómio de Newton

Sabemos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Como obter o desenvolvimento de $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ ... e de um modo geral $(a+b)^n$, sem efectuar o produto dos polinómios?

Comecemos por usar o algoritmo da multiplicação de polinómios:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Verificamos que, os coeficientes numéricos dos termos são exactamente os números duma das linhas do triângulo de Pascal:

$(a+b)^0 = 1$ ⟶ 1

$(a+b)^1 = 1\,a + 1\,b$ ⟶ 1 1

$(a+b)^2 = 1\,a^2 + 2\,ab + 1\,b^2$ ⟶ 1 2 1

$(a+b)^3 = 1\,a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + 1\,b^3$ ⟶ 1 3 3 1

$(a+b)^4 = 1\,a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4\,ab^3 + 1\,b^4$ ⟶ 1 4 6 4 1

e, se ordenarmos os termos pelas potências de a, é fácil perceber um padrão para a parte literal de cada monómio.

22

Escreva as duas linhas seguintes dos triângulos de Pascal que se encontram ao lado.

23

Observe o triângulo de Pascal e responda às questões seguintes:

a) Quantos números tem a linha das combinações de 5 elementos?

b) A linha que tem 9 elementos é a linha das combinações de quantos elementos?

c) Qual o valor de p no terceiro elemento da linha das combinações ${}^6C_p$. E na linha das combinações ${}^{10}C_p$?

d) Qual o valor de p no quinto elemento da linha em que $n = 7$? E na linha em que $n = 20$?

24

Determine:

a) n tal que ${}^nC_8 = {}^nC_{20}$

b) $n \neq 0$ tal que ${}^{50}C_2 = {}^{50}C_p$

25

Complete, usando combinações:

a) ${}^{15}C_2 + {}^{15}C_3 = \ldots$

b) ${}^{20}C_6 + \ldots = {}^{21}C_7$

c) ${}^{50}C_{20} - {}^{49}C_{20} = \ldots$

$$(a+b)^n = \sum_{n=0}^{n} {}^nC_k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a+b)^n = {}^nC_{10}\,a^n + {}^nC_1\,a^{n-1}\,b + {}^nC_2\,a^{n-2}\,b^2 + \ldots + {}^nC_p\,a^{n-p}\,b^p + \ldots + {}^nC_{n-1}\,ab^{n-1} + {}^nC_n\,b^n$$

Scanned by TapScanner

Donde se induz que:

$(a+b)^5 = 1\,a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + 1\,b^5$, visto que a soma dos expoentes é sempre 5, ou seja,

$(a+b)^5 = {}^5C_0\,a^5 + {}^5C_1\,a^4b + {}^5C_2\,a^3b^2 + {}^5C_3\,a^2b^3 + {}^5C_4\,ab^4 + {}^5C_5\,b^5$

E finalmente, generalizando, com $n \in \mathbb{N}_0$: encontramos a fórmula do binómio de Newton, cujo segundo membro tem $n+1$ termos. Vê-se que a soma dos expoentes em cada monómio é n.

Repare que ${}^nC_2\,a^{n-2}\,b^2$ é o 3.º termo, e também:

> ${}^nC_p\,a^{n-p}\,b^p$ é o termo de ordem $p+1$

26

Escreva os 4 primeiros de:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{y}} + 1\right)^{10}$, $y > 0$

b) $(x - y^2)^5$

Exemplos

1. $(2x-1)^5 = {}^5C_0(2x)^5 + {}^5C_1 \cdot (2x)^4\,(-1)^1 + {}^5C_2(2x)^3\,(-1)^2 + {}^5C_3(2x)^2\,(-1)^3 +$
$+ {}^5C_4(2x)\,(-1)^4 + (-1)^5 = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$

2. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1\,(x^2)^3 \cdot \frac{1}{x} + {}^4C_2(x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^4C_3\,x^2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{1}{x}\right)^4 =$
$= x^8 + 4x^5 + 6x^2 + 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$

3. $(2x-1)^5 = {}^5C_0(2x)^5 + {}^5C_1 \cdot (2x)^4\,(-1)^1 + {}^5C_2(2x)^3\,(-1)^2 + {}^5C_3\,(2x)^2\,(-1)^3 + {}^5C_4\,(2x)\,(-1)^4 +$
$+ {}^5C_5(-1)^5 = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$

27

Determine o 7.º termo do desenvolvimento de:

a) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{2}\right)^{10}$, $x \neq 0$

b) $\left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2}\right)^9$

28

No desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$, $x \neq 0$, existe um termo de grau dois. Determine-o.

Exercícios resolvidos

1. Prova que, sendo $\sqrt[n]{a} > 1$, também $a > 1$.

Resolução

Se $\sqrt[n]{a} > 1$ então $\sqrt[n]{a} = 1 + h$, com $h > 0$

Ora $a = \left(\sqrt{a}\right)^n = (1+h)^n = 1 + {}^nC_1\,h + {}^nC_2\,h^2 + \ldots > 1$ porque as parcelas são todas positivas.

Logo, $a > 1$.

c.q.d.

1. Já provámos que ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$. Demonstra este mesmo teorema, usando a fórmula do binómio de Newton.

Resolução

$2^n = (1+1)^n = {}^nC_0\,1^n \cdot 1^0 + {}^nC_1\,1^{n-1} \cdot 1^1 + {}^nC_2\,1^{n-2} \cdot 1^2 + \ldots + {}^nC_n\,1^0 \cdot 1^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n$

pois qualquer potência de 1 é igual a 1.

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

1. Simplifique:

   a) $\frac{(n+3)! - 2(n+3)!}{(n+2)! - n!}$

   b) $\frac{2(n+1)! + 3(n-1)!}{(n+2)!}$

   c) $\frac{P_{n+1} - P_n}{n!}$

2. Calcule o valor de:

   a) ${}^{7}A_{3}$ b) ${}^{6}A_{2}$

   c) $7!$ d) $\frac{7!}{5!\,2!}$

   e) $\frac{100}{98!}$ f) $\frac{{}^{5}A_{2} \cdot {}^{7}C_{3}}{5!}$

   g) $\frac{{}^{6}A_{3} \cdot {}^{6}C_{6}}{5!}$

3. Determine n sabendo que:

   a) ${}^{n}A_{2} = 110$ b) ${}^{n}A_{7} = 30 \cdot {}^{n}A_{5}$

   c) $(n+2)! = 72 \cdot n!$ d) $\frac{P_n}{n!(n-1)!} = 720$

4. Quantos números de 3 algarismos se podem representar com os algarismos 3, 5, 6, e 8?

5. Quantos números ímpares de 3 algarismos se podem representar com os algarismos 0, 1, 2 e 3?

6. Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números de cinco se podem escrever?

7. Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

   a) Quantos números pares de quatro algarismos se podem escrever?

   b) Quantos números múltiplos de cinco é possível escrever?

8. Quantos números de quatro algarismos diferentes é possível formar com os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

   a) Sendo os algarismos das unidades?

   b) Que sejam múltiplos de 2?

   c) Que estejam compreendidos entre 2 500 e 5 700.

9. Colocam-se num saco bolas de cores diferentes: verde, azul, amarelo, vermelho e lilás. Tirou-se, sucessivamente, uma bola até sair a bola amarela.
   Quantos casos diferentes há em que a bola amarela sai em último?

10. Numa turma de 10 raparigas quantas comissões diferentes de cinco elementos é possível formar?

11. Numa turma de 10 raparigas e 8 rapazes quantas comissões diferentes de cinco elementos é possível formar?

    a) Sem qualquer restrição?

    b) Se em cada uma figurarem 3 raparigas e 2 rapazes?

    c) Se 1 das alunas e 2 dos alunos se recusarem a pertencer a qualquer comissão?

12. Com os algarismos do conjunto

    $$C = \{0, 2, 3, 3, 15\}.$$

    a) Quantos produtos diferentes de dois factores distintos se podem obter?

    b) Quantos produtos de factores diferentes se podem obter?

13. Determine o número de comissões com 4 membros que podem ser formados, escolhendo entre 10 funcionários administrativos e os funcionários auxiliares de uma escola.

    a) Sem quaisquer restrições.

    b) Sendo dois elementos administrativos e dois auxiliares.

14. No Futebol Nacional participam 16 equipas devendo cada uma delas jogar com cada uma das restantes duas vezes. Qual é o número total de jogos do campeonato?

15. De quantos modos diferentes pode ser formada uma comissão de 3 rapazes e 4 raparigas de um grupo de 8 rapazes e 6 raparigas?

16. Em 18 compartimentos para CD's, de quantas maneiras se podem arrumar 4 CD's diferentes?

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

17. Cinco oradores, *A*, *B*, *C*, *D*, e *E* são convidados para discursar num comício. De quantas maneiras podem ser ordenados:

    a) Se *B* não pode falar antes de *A*?

    b) Se *B* falar imediatamente após de *A*?

18. De quantas maneiras se podem colocar 2 anéis nos dedos médio, anelar e indicador das 2 mãos, não ficando 2 anéis no mesmo dedo?

19. Num campeonato distrital de futebol, cada uma das 10 equipas disputa 2 jogos com todas as outras. Quantos jogos se disputam nesse campeonato?

20. De quantas maneiras se podem sentar 10 pessoas numa mesa, 5 de cada lado, se 2 delas só se puderem sentar num dos lados da mesa?

21. Para uma peça de teatro há 5 candidatos ao papel de rei, 7 candidatos ao papel de rainha e 10 possíveis príncipes. De quantos modos pode ser constituído o elenco da peça?

22. Uma ementa de restaurante tem 4 sopas, 5 pratos de peixe, 6 pratos de carne, 5 qualidades de fruta e 3 doces. De quantas maneiras diferentes se pode fazer uma refeição completa? E se a refeição incluir apenas sopa, carne ou peixe, doce ou fruta?

23. A Flávia e o Artur pertencem a uma turma de 25 alunos. Vai constituir-se uma comissão com 5 alunos. Quantas comissões se podem formar, incluindo a Flávia e não incluindo o Artur?

24. De quantas maneiras podem 7 jovens, 4 rapazes e 3 raparigas entrar em fila numa discoteca, supondo que as raparigas entram primeiro?

25. Sem utilizar a calculadora, determina n e p, tais que:

$$^{6}C_{2} + {}^{6}C_{3} + {}^{7}C_{4} + {}^{8}C_{5} = {}^{n}C_{p}$$

26. De quantas maneiras diferentes 5 rapazes e 5 raparigas podem ser separados em 2 grupos de 5, se cada grupo tiver, pelo menos, 1 rapaz?

27. De quantas maneiras se podem distribuir, por 12 pessoas, 4 bolos iguais e 8 diferentes?

28. A turma *A* tem 46 alunos. O professor de Português vai escolher 5 para um trabalho de grupo e 9 para desempenhar, cada um deles, um papel numa peça de teatro. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

29. Para arranjar dinheiro para a viagem de finalistas, os estudantes de uma turma vão fazer e vender rifas. São 500 rifas e os prémios são 5 DVD's diferentes e 7 CD's iguais. De quantas maneiras podem distribuir os prémios pelas rifas?

30. Numa turma de 40 alunos vão ser escolhidos 5 para representar a escola numa cerimónia.

    a) De quantas maneiras pode ser escolhida essa representação?

    b) Quantas representações se podem formar se o Nuno e a Rita, que são irmãos, não puderem ser escolhidos simultaneamente?

31. Quais os valores de x para os quais:

    a) $^{12}C_{2x+3} = {}^{12}C_{9-x}$? b) $^{40}C_{2x+1} = {}^{40}C_{2x+3}$?

    c) $^{21}C_{2x} = {}^{20}C_{x+12} + {}^{20}C_{x+11}$?

32. Calcule:

    a) O quarto termo do desenvolvimento de:

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^{9}, x \neq 0$$

    b) O termo em z^6 do desenvolvimento de:

$$\left(z + \frac{1}{2z}\right)^{10}, z \neq 0$$

33. Considere o desenvolvimento de:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^{12}, x > 0$$

    a) Verifique que existe um termo independente de x.

    b) Prove que não existe um termo em x^2.

34. Um dos termos do desenvolvimento de $(x + 1)^n$ é $12x$. O valor de n é:

    A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

Scanned by TapScanner

Probabilidades

Conceitos elementares

Aos fenómenos cujo aparecimento depende inteiramente do acaso chamam-se fenómenos aleatórios ou acontecimentos.

Exemplos

São aleatórias as experiências que se fazem num jogo: comprar um bilhete de lotaria e saber se tem prémio; o aparecimento da «coroa» no lançamento da moeda ao ar; o aparecimento de 5 no lançamento do dado...

Nas experiências que se fazem nos laboratórios de Química, Física ou Biologia, sabe-se qual o resultado da experiência, por isso, se chamam deterministas.

Exemplos

São deterministas as experiências seguintes: atirar uma pedra num lago e medir o som que se faz; deitar água e azeite num copo e ver qual dos líquidos fica em cima; medir o tempo que demora a germinação de um feijão e de uma ervilha em algodão húmido.

Ao conjunto formado por todos os resultados possíveis de uma experiência chama-se espaço de acontecimentos, espaço amostral duma prova ou universo dos resultados.

Representa-se habitualmente por E, S, ou Ω (Ómega).

Exemplos

1. Experiência: «lançar um dado e observar a face virada para cima».
   Espaço de resultados:
   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Experiência: «lançar uma moeda de 1 MT ao ar e observar a face virada para cima».
   $S = \{\text{face 1 MT, face logotipo}\}$

Acontecimento numa experiência é qualquer subconjunto do espaço de resultados.

Um acontecimento é elementar se é constituído por um único resultado.

Um acontecimento é composto se é constituído por mais de um resultado.

Um acontecimento é certo se é constituído por todos os resultados do espaço central.

Um acontecimento é impossível se não tem qualquer elemento do espaço de resultados.

Uma urna contém 3 bolas (1 branca, 1 preta e 1 vermelha). Na extracção de uma bola indique:

a) Os casos possíveis.

b) O espaço de acontecimentos.

c) Um acontecimento certo.

d) Um acontecimento impossível.

Scanned by TapScanner

30

Considere o espaço de acontecimentos relativo ao lançamento de um dado.

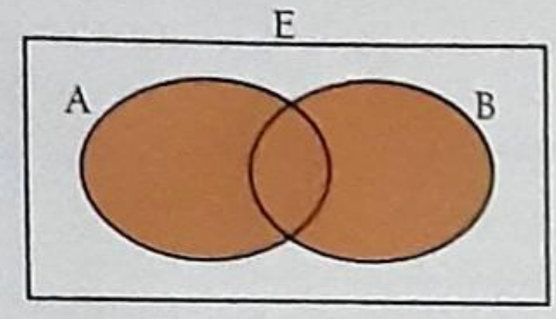
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e

indique:

a) O acontecimento «sair um número superior a 3» em termos de conjunto.

b) O acontecimento associado à condição «é par».

c) A condição associada ao acontecimento $\{1, 3, 5\}$.



Acontecimento união, $A \cup B$.

31

No lançamento de dois dados, multiplicam-se as pintas das faces viradas para cima. Seja:

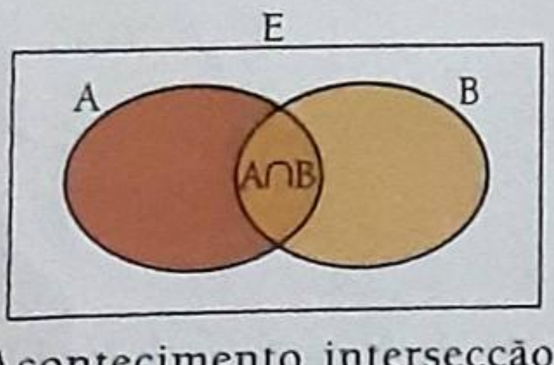
A: «o produto é múltiplo de 4».

B: «o produto é múltiplo de 6».

Defina em extensão os acontecimentos:

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.



Acontecimento intersecção.

Exemplos

Experiência: «lançar um dado e verificar a face virada para cima».
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Acontecimento elementar:
  A: Sair múltiplo de 6; $A = \{6\}$
- Acontecimento composto:
  B: Sair múltiplo de 2; $B = \{2, 4, 6\}$
- Acontecimento certo:
  C: Sair um número menor ou igual a 6; $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Acontecimento impossível:
  D: Sair o número 9; $D = \{9\}$

Operações com acontecimentos

União (∪)

A união dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza quando se realiza A ou B (ou ambos).

Representa-se $A \cup B$ e é constituído pelos resultados que pertencem a pelo menos, um dos acontecimentos.

Exemplos

No lançamento dum dado se A é o acontecimento «ser o múltiplo de 3» e B o acontecimento «ser par»:

$A = \{3, 6\}$

$B = \{2, 4, 6\}$

O acontecimento $A \cup B$ é:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

O acontecimento união de A com B é o acontecimento «ser múltiplo de 3 ou par». Os resultados 1 e 5 não fazem parte do acontecimento $A \cup B$ porque não são múltiplos de 3 nem são pares.

Intersecção (∩)

A intersecção dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A e B se realizam simultaneamente.

Representa-se por $A \cap B$ e é constituído pelos resultados comuns a A e B.

Exemplo

Considerando a experiência e os acontecimentos do exemplo anterior:

$A = \{3, 6\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $A \cap B = \{6\}$

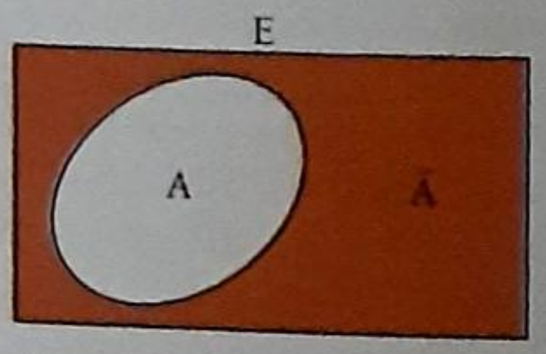
O acontecimento intersecção de A com B é o acontecimento «ser múltiplo de 3 e par». O resultado 3 não pertence, $A \cap B$ porque embora pertença a A, não pertence a B.

Scanned by TapScanner

Acontecimento contrário

O acontecimento contrário ou complementar de A é o acontecimento constituído por todos os resultados do espaço que não pertencem a A. Representa-se por $\overline{A}$ e tem-se:

$$A \cup \overline{A} = E \text{ e } A \cap \overline{A} = \varnothing$$



Acontecimento contrário.

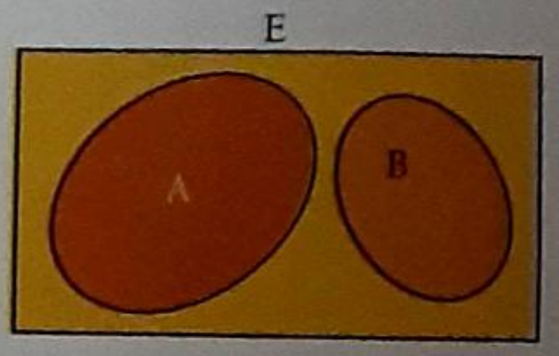
Exemplos

1. No lançamento dum dado o acontecimento A: «sair par» o acontecimento contrário será: A: «sair ímpar».
2. No lançamento de dois dados, o acontecimento contrário de B: «os números das faces são todos iguais» não é «os números das faces são todos diferentes», mas sim B: «pelo menos uma das faces tem um número diferente».

Acontecimentos disjuntos

Os acontecimentos disjuntos, incompatíveis ou mutuamente exclusivos são acontecimentos que não têm resultados comuns e portanto, a realização dum deles implica a não realização do outro. A e B são disjuntos se, e só se,

$$A \cap B = \varnothing.$$



Os acontecimentos A e B são disjuntos ou incompatíveis.

Exemplos

1. Num saco com bolas numeradas de 1 a 10, «ser número primo» e «ser divisível por 4» são acontecimentos disjuntos pois não há números primos que sejam divisíveis por 4.
2. Lança-se duas vezes um dado e registam-se os números das faces viradas para cima. Os acontecimentos A: «os números são ambos ímpares» e B: «o produto dos números é par» são incompatíveis porque o produto de dois números ímpares é sempre ímpar e portanto os dois acontecimentos não têm resultados comuns.

O acontecimento impossível é o que resulta da intersecção de acontecimentos disjuntos; representa-se habitualmente por $\varnothing$.

Dois acontecimentos contrários são sempre incompatíveis, mas dois acontecimentos incompatíveis não são, necessariamente, contrários.

Exercício resolvido

No lançamento dum dado dê exemplos de acontecimentos incompatíveis que não sejam contrários.

Resolução

$A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 5, 6\}$ ou

$A = \{2, 6\}$ e $B = \{1, 5\}$ ou

A: «sair número par» e B: «sair 3 ou 5».

No lançamento de um dado, consideremos o acontecimento A: «sair número ímpar» e o acontecimento B: «sair número inferior a 3».

Indique:

a) O acontecimento união dos acontecimentos A e B.

b) O acontecimento intersecção dos acontecimentos A e B.

c) O acontecimento contrário ao acontecimento A.

d) Dois acontecimentos disjuntos.

Scanned by TapScanner

33

Numa cidade com 56 800 habitantes, 23 200 deles são homens e os restantes são mulheres:

a) Qual a frequência absoluta de homens? E das mulheres?

b) Qual a frequência relativa das mulheres em percentagem?

Equivalência entre a linguagem de acontecimentos e a linguagem de conjuntos

Linguagem de acontecimentos	Linguagem de conjuntos
E é o espaço de acontecimento.	E é o conjunto universal
A é um acontecimento.	$A \subset E$
C é um acontecimento reunião dos acontecimentos A e B.	$C = A \cup B$
C é um acontecimento intersecção de A e B.	$C = A \cap B$
A é um acontecimento certo.	$A = E$
A é um acontecimento impossível.	$A = \varnothing$
A e B são acontecimentos contrários.	$B = \overline{A}$
A e B são acontecimentos disjuntos ou incompatíveis.	$A \cap B = \varnothing$

Teoria frequencista de probabilidade

A teoria frequencista afirma que a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num determinado valor. À medida que o número de vezes em que se realiza a experiência aumenta, é esse valor que se toma para a probabilidade.

Consideremos a experiência de lançamento duma moeda ao ar um número de vezes bastante elevado e regista-se, em cada conjunto de lançamentos o número de vezes e a frequência, por exemplo, que «saiu a cara».

34

Num teste de Geografia, dado a uma turma de 20 alunos, 85% tiveram nota positiva, 10% tiveram nota mediocre e 5% nota de mau:

a) Quais as respectivas frequências absolutas para as notas positivas, de mediocre e de mau?

b) Quais as respectivas frequências relativas?

N.º de lançamentos n	N.º vezes que «saiu cara» c	Frequência relativa $f_r = \frac{c}{n}$
10	4	0,400
20	11	0,550
40	18	0,450
80	42	0,525
160	84	0,525
320	156	0,487
640	321	0,502
1280	630	0,492
2000	1003	0,501

Verifica-se por esta tabela que as frequências relativas, embora não sejam as mesmas, tendem a estabilizar-se à volta de 0,5 valor que, também se chama probabilidade do acontecimento «sair cara».

Scanned by TapScanner

Portanto:

Ao número à volta do qual estabiliza a frequência relativa de um acontecimento, quando o número de repetições da experiência cresce consideravelmente, chama-se probabilidade do acontecimento.

Propriedades das frequências relativas

1. A frequência relativa de um acontecimento A é um número compreendido entre 0 e 1, ou seja

$$0 \leq f_r \leq 1$$

2. A frequência relativa de um acontecimento certo é 1.

$$f_r \text{ (acont. certo)} = 1$$

3. A frequência relativa de um acontecimento impossível é 0 (zero).

$$f_r \text{ (acont. impossível)} = 0$$

4. Ao acontecimento A de uma prova podemos sempre associar o acontecimento contrário ou «não A», que notamos $\overline{A}$ e cuja frequência relativa é

$$f_r(\overline{A}) = 1 - f_r(A)$$

Definição axiomática de probabilidade

Seja E o espaço de acontecimentos e $P(E)$ o conjunto das suas partes. Chama-se probabilidade a toda a aplicação p do conjunto $P(E)$ no conjunto [0,1] de números reais, que verifica os seguintes axiomas:

Axioma 1 – A probabilidade de qualquer acontecimento A do conjunto $P(E)$ é um número compreendido entre zero e um.

$$0 \leq P(A) \leq 1, \text{ com } A \subset E$$

Axioma 2 – A probabilidade do acontecimento certo é 1.

$$P(E) = 1, \text{ sendo } E \text{ o espaço de acontecimentos.}$$

Axioma 3 – A probabilidade da reunião de dois acontecimentos incompatíveis (disjuntos) é igual à soma das probabilidades desses acontecimentos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ se } A \cap B = \varnothing$$

35

Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço E.

Se $P(A) = \frac{1}{4}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, justifica que A e B não são incompatíveis.

36

a) Se $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$ e $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ determine $P(B)$ de modo a que A e B sejam incompatíveis.

b) Se $P(A) = \frac{2}{3}$ e $P(\overline{B}) = \frac{1}{4}$ mostre que A e B não são incompatíveis.

Scanned by TapScanner

37

Sejam A e B dois acontecimentos dum espaço E. Calcule:

a) $P(A \cup B)$ sabendo que $P(A) = 0{,}4$, $P(\overline{B}) = 0{,}3$ e $P(A \cap B) = 0{,}3$

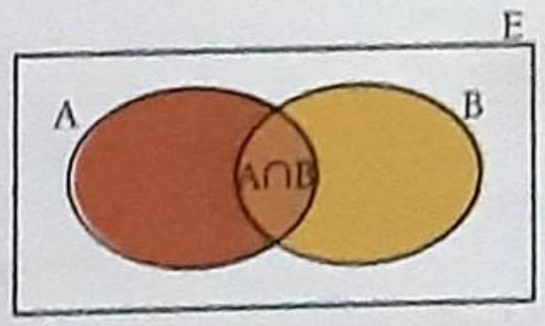
b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ sabendo que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$ e $P(A \cup B) = 0{,}9$

38

Sejam A e B dois acontecimentos de um espaço E. Prove que:

a) $P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$

b) $P(A \cup \overline{B}) + P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cup B)$



Destes axiomas podemos deduzir as seguintes propriedades:

Teorema 1: A probabilidade do acontecimento $\overline{A}$ (não A) é igual a 1 menos a probabilidade do acontecimento A.

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Demonstração:

Sabe-se que $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ donde $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(E) = 1$ então

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Teorema 2 – A probabilidade do acontecimento impossível é zero.

$$P(\varnothing) = 0$$

Demonstração:

$$\varnothing = \overline{E}$$

$$P(\varnothing) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$$

Teorema 3 – Se A, B e C são acontecimentos incompatíveis dois a dois, então

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Demonstração:

$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) + C] = P(A \cup B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Teorema 4 – Sendo A e B dois acontecimentos quaisquer, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração:

$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$

No entanto $A \setminus B$ e B são conjuntos disjuntos.

Por isso $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ e $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemplo

1. Consideremos a experiência que consiste em lançar um dado equilibrado de faces numeradas de 1 a 6.
   Os acontecimentos elementares {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} são igualmente equiprováveis, incompatíveis dois a dois, e a sua união é o universo $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Assim:

$$P\{1\} + P\{2\} + P\{3\} + P\{4\} + P\{5\} + P\{6\} = P(E) = 1$$

$$P\{1\} = P\{2\} = \ldots = P\{6\} = \frac{1}{6}$$

2. Seja A o acontecimento «sair múltiplo de 3», isto é, $A = \{3; 6\}$
   Atendendo a que $A = \{3\} \cup \{6\}$, vem:

$$P(A) = P\{3\} + P\{6\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou seja: } P(A) = \frac{\#A}{\#E} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Scanned by TapScanner

Em geral

A probabilidade de um acontecimento A coincide com o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis sempre que todos os acontecimentos elementares são equiprováveis e incompatíveis.

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Exercícios resolvidos

1. Tem-se um octaedro regular. As faces do octaedro são numeradas de 1 a 8. No lançamento do octaedro, qual é a probabilidade de sair:
   a) O número 8?
   b) Um número ímpar?
   c) Um múltiplo de 3?

Resolução

a) Seja $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
O número de casos favoráveis: 1.
O número de casos possíveis: 8.

$$P(8) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{8}$$

b) A: sair um número ímpar; $A = \{1, 3, 5, 7\}$
O número de casos favoráveis = 4
O número de casos possíveis = 8

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) B: sair um múltiplo de 3; $B = \{3, 6\}$
O número de casos favoráveis = 2
O número de casos possíveis = 8

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

2. Lança-se uma moeda duas vezes. Qual a probabilidade de obter duas vezes coroa?

Resolução

a) Designemos por C_1 – cara; C_2 – coroa
Os acontecimentos possíveis são em número de $2^2 = 4$, já que se podem obter: C_1C_1; C_1C_2; C_2C_1; C_2C_2
O número de casos favoráveis: 1.

$$P(C_2C_2) = \frac{1}{4}$$

39

Sabendo que a probabilidade do acontecimento A, relativo à prova *P*, é 0,16 e que a probabilidade do acontecimento B, relativo à mesma prova, é igual a 0,24, determine a probabilidade:

a) Do acontecimento união dos acontecimentos A e B, sabendo que $A \cap B = \emptyset$.

b) Do acontecimento contrário ao acontecimento A.

40

No lançamento de um dado para efeito ocorre o acontecimento A: «sair um ponto ímpar» e o acontecimento B: «sair um ponto inferior a 3». Calcule a probabilidade dos acontecimentos:

a) A

b) B

c) $A \cap B$

d) $A \cup B$

e) $\overline{A} \cap B$

41

A equipa de basquetebol da escola vai disputar um torneio. Foram seleccionados 12 alunos entre os quais o Amadeu. Para o jogo, o treinador escolheu 5 entre os 12 seleccionados.

a) De quantas maneiras pode ter escolhido a equipa de 5?

b) Qual a probabilidade do Amadeu fazer parte da equipa?

Scanned by TapScanner

42

Uma pessoa quer enviar um fax a um amigo mas não se lembra do último algarismo. Qual é a probabilidade do fax chegar ao destinatário?

43

O Moisés e a Yolanda, recebem cada um, um número de 1 a 5. Qual a probabilidade:

a) De ambos terem pensado no mesmo número?

b) De ambos terem pensado num número ímpar?

c) Do mesmo número em que o Moisés pensou ser superior ao da Yolanda?

44

De um baralho de 52 cartas tira-se uma ao acaso. Qual a probabilidade de que a carta seja:

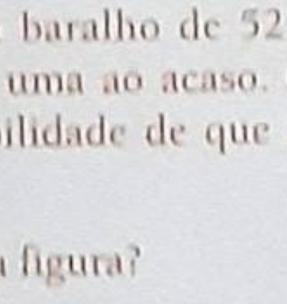
a) Uma figura?

b) Dama ou ás?

c) Rei ou copas?

45

Os círculos da figura são concêntricos de raios 1 e 2.



Escolhendo um ponto do círculo maior, ao acaso, qual a probabilidade de pertencer à coroa circular?

3. Uma urna contém 20 bolas vermelhas e 30 bolas brancas. Extrai-se uma bola ao acaso. Qual a probabilidade de que saia:
   a) Uma bola vermelha?
   b) Uma bola branca?
   c) Uma bola vermelha ou branca?

Resolução

a) O número de casos possíveis: $20 + 30 = 50$
   O número de casos favoráveis: 20
   $P(V) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

b) $P(B) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

c) $P(V \cup B) = P(V) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, já que V e B são conjuntos disjuntos.

4. Uma urna contém 7 bolas pretas e 6 bolas brancas. Retirando, ao acaso e simultaneamente 8 bolas, qual é a probabilidade de se obter 4 e só 4 bolas pretas?

Resolução

O número de casos possíveis: ${}^{4}C_{13} = 1\,287$

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_{7} \cdot {}^{4}C_{6} = 525$
e a probabilidade pedida será:

$$P(\text{obter 4 e só 4 bolas pretas}) = \frac{{}^{4}C_{7} \cdot {}^{4}C_{6}}{{}^{8}C_{13}} = \frac{525}{1287} \simeq 0{,}4$$

5. Uma urna contém 5 bolas: 3 vermelhas numeradas de 1 a 3 e 2 pretas numeradas de 1 a 2. Tira-se uma bola ao acaso. Calcule a probabilidade de obter:
   a) Um bola numerada com 1.
   b) Uma bola vermelha.
   c) Uma bola com um número ímpar.

Resolução

a) Casos favoráveis: 2
   Casos possíveis: 5
   $P = \frac{2}{5}$

b) Casos favoráveis: 3
   Casos possíveis: 5
   $P = \frac{3}{5}$

c) Casos favoráveis: 3
   Casos possíveis: 5
   $P = \frac{3}{5}$

Scanned by TapScanner

Determinação da probabilidade de um acontecimento, quando os acontecimentos elementares não são equipováveis.

Até agora na determinação das probabilidades, admitimos que todos os casos possíveis são equiprováveis. Porém, há casos em que estas condições não se verificam.

Por exemplo: podemos admitir, no lançamento duma moeda ao ar que uma das faces tem mais probabilidades de sair do que a outra, ou no lançamento de um dado não equilibrado, uma das faces tem mais probabilidades de sair que as outras.

Exercícios resolvidos

1. No lançamento duma moeda não equilibrada, verifica-se que a probabilidade de sair cara é dupla da de sair coroa. Determine a probabilidade de sair:
   a) A face cara.
   b) A face coroa.

Resolução

a) Sabe-se que $p(\text{cara}) + p(\text{coroa}) = 1$, mas
$p(\text{cara}) = 2b$ e $p(\text{coroa}) = b$

então, $2b + b = 1 \Leftrightarrow 3b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$

portanto $p(\text{cara}) = 2b = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

b) $p(\text{coroa}) = b = \frac{1}{3}$

2. No lançamento de um dado não equilibrado, a probabilidade de sair o 2 é dupla da de sair outro valor do dado. Determine a probabilidade de sair:
   a) Par.
   b) Um valor não inferior a 3.

Resolução

a) A probabilidade será:
$p(b_2 \cup b_4 \cup b_6)$;
$p(b_2) = 2p(b_1) = 2p(b_3) = 2p(b_4) = 2p(b_5) = 2p(b_6) = 2t$
mas a $p(b_1) + p(b_2) + p(b_3) + p(b_4) + p(b_5) + p(b_6) = 1$
$t + 2t + t + t + t + t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{7}$

A probabilidade pedida será:

$$p(b_2 + b_4 + b_6) = p(b_2) + p(b_4) + p(b_6) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

b) A probabilidade de sair:

$$p(b_3) + p(b_4) + p(b_5) + p(b_6) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

46

Num lançamento de um dado verifica-se que a probabilidade de sair ponto 5 é tripla da probabilidade de sair outro ponto do dado. Determine a probabilidade de, num lançamento, sair:
a) O ponto 2.
b) O ponto 5.
c) Um ponto ímpar.
d) Um ponto superior a 3.
e) Um ponto não inferior a 3.

47

Lançando dois dados, um perfeito e outro tal que a probabilidade de sair a face seis seja dupla da de sair qualquer outra face do dado. Calcule a probabilidade de:
a) Sairem pontos cuja a soma seja 7.
b) Sairem pontos cuja a soma seja inferior a 4.
c) Sairem pontos cuja a soma seja superior a 9.
d) Sairem pontos cuja a soma não seja inferior a 10.

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

35. Considere a experiência que consiste em lançar duas moedas ao ar e anotar o resultado das suas faces superiores.
Determine:
a) O espaço de acontecimentos.
b) O número de acontecimentos possíveis.

36. Na prova que consiste em lançar um dado e tomar nota do número da face superior, considere os acontecimentos:
A: sair múltiplo de 3.
B: sair número primo.
C: sair número par.
a) São compatíveis os acontecimentos A e B? E B e C?
b) Indique o acontecimento $\overline{A}$.
c) Qual o acontecimento $A \cup B$?
d) Caracterize o acontecimento $A \cap \overline{B}$.

37. Uma dada prova *P* foi executada *n* vezes; o acontecimento A, relativo a *P*, ocorreu *x* vezes e o acontecimento B, também relativo a *P*, ocorreu *y* vezes.
a) Determine a frequência relativa, respectivamente, de A e de B.
b) Qual a frequência relativa do acontecimento contrário ao acontecimento A?
c) Sendo os acontecimentos *x* e *y* incompatíveis, determine $f_r(A + B)$, (f_r – frequência relativa).

38. Num lançamento duma moeda ao ar indique:
a) Um acontecimento certo.
b) Um acontecimento impossível.
c) A frequência relativa dum acontecimento certo.
d) A frequência relativa dum acontecimento impossível.
e) A frequência relativa do acontecimento «sair cara».
f) A probabilidade de «sair coroa».

39. No lançamento dum dado perfeito, em forma de tetraedro regular, cujas faces são numeradas com 1, 2, 3 e 4, determine a probabilidade do acontecimento $A \cup B$, sabendo que o acontecimento A é «sair um número ímpar» e o acontecimento B é «sair um número inferior a 3».

40. Prove que:

$$P(A) + P(B) \geq P(A \cup B), \forall A, B \subset E$$

41. Um saco contém 12 bolas, sendo 3 brancas, 5 azuis e 4 pretas. Tirando uma bola ao acaso, diga qual a probabilidade de sair:
a) Bola branca.
b) Bola preta.
c) Bola branca ou azul.
d) Bola vermelha.

42. De 30 declarações do imposto sabe-se que 10 apresentam erros.
a) Se um fiscal seleccionar ao acaso 5 declarações para verificar, qual é a probabilidade dessas 5 conterem erros?
b) Se seleccionar 8, qual a probabilidade de pelo menos 1 conter erro?

43. Qual a probabilidade de aparecer 3 ou 6 no lançamento dum dado?

44. Lançam-se dois dados equilibrados simultaneamente. Qual a probabilidade de se obter uma soma de pontos igual a 9?

45. Uma urna contém 7 bolas pretas e 6 bolas brancas. Retirando, ao acaso e simultaneamente, 8 bolas, qual a probabilidade de se obter 4, e só 4, bolas pretas?

46. Uma caixa contém 10 camisas das quais 4 são defeituosas. Extraem-se 2 ao acaso. Encontre ou apresente a probabilidade de que entre estas:
a) Nenhuma camisa é defeituosa.
b) Nenhuma camisa é boa.

(1.ª Chamada – 1996)

47. Numa caixa há 24 bolas de 4 cores diferentes: vermelhas, azuis, verdes e amarelas. De cada uma das cores há seis bolas numeradas de 1 a 6. Extrai-se uma bola ao acaso da caixa. Qual é a probabilidade de a bola ser um 6? Indique a letra correspondente à resposta correcta.

A. $P = \frac{1}{6}$; B. $P = \frac{1}{4}$;

C. $P = \frac{1}{24}$; D. $P = 1$

(1.ª chamada – 2000)

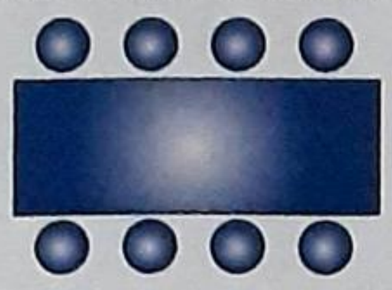
48. Numa caixa há 5 laranjas e 4 maçãs. Tiram-se simultaneamente 2 frutos ao acaso. Qual é a probabilidade de ambos serem maçãs?

(1.ª chamada – 2001)

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

49. Quatro rapazes e quatro raparigas vão sentar-se ao acaso numa mesa como a da figura.



Qual a probabilidade de cada rapaz ficar à frente de uma rapariga?

50. Seis amigos vão ao cinema e sentam-se ao acaso em lugares consecutivos. Qual a probabilidade de a Ana, o Omaia e o Rui ficarem em lugares seguidos?

51. Quando se altera, a ordem dos algarismos no número 13 245, obtém-se outro. Considere todos os números que se podem obter por alteração da ordem dos algarismos de 13 245. Qual a probabilidade de, escolhendo um desses números ao acaso, se obter um número ímpar?

52. Três rapazes e três raparigas vão ao cinema e ocupam os lugares de uma fila, numerados de 1 a 6. Supondo que se sentam ao acaso, qual a probabilidade de as raparigas ficarem nos números pares?

53. Um saco tem bolas numeradas de 8 a 16.

a) Escolhendo uma bola ao acaso, qual a probabilidade de o número da bola ser primo?

b) Escolhendo duas bolas ao acaso, qual a probabilidade de apenas uma delas ter um número primo?

54. A Marta tem três filmes de terror, quatro filmes cómicos e cinco filmes policiais.

a) Vai de férias e quer levar metade dos filmes. De quantas formas pode fazer a selecção de modo a levar, pelo menos três filmes cómicos?

b) Por fim decidiu levar dois filmes de cada género e vai arrumá-los numa prateleira. Supondo que o faz ao acaso, qual a probabilidade dos filmes ficarem arrumados por género?

55. Lançaram-se dois dados. Calcule a probabilidade de obter soma 5 ou produto 6.

56. Um jogo educativo tem peças de madeira com as formas:

Cada forma apresenta-se em três cores (azul, branco e vermelho) e em dois tamanhos (grande e pequeno).

a) Quantas são as peças?

b) Tirando uma peça ao acaso, qual a probabilidade de ser um círculo vermelho?

57. Sejam x e y dois acontecimentos de um espaço E, tais que:

$$P(x) = \frac{1}{4},\ P(x \cup y) = \frac{1}{3} \text{ e } P(y) = k$$

Determine k, sabendo que:

a) x e y são incompatíveis.

b) $x \subset y$.

58. Sejam A e B acontecimentos de um espaço E. Determine $P(A \cap B)$, sabendo que:
$P(A) = 0{,}35$; $P(B) = 0{,}6$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2$.

59. No início do ano, o director de uma turma fez a sua caracterização, na qual incluiu a seguinte tabela

	17 anos ou menos	Mais de 17 anos
Rapazes	6	4
Raparigas	12	6

Escolhido um aluno ao acaso, considere os acontecimentos:

R: «Ser rapaz.»

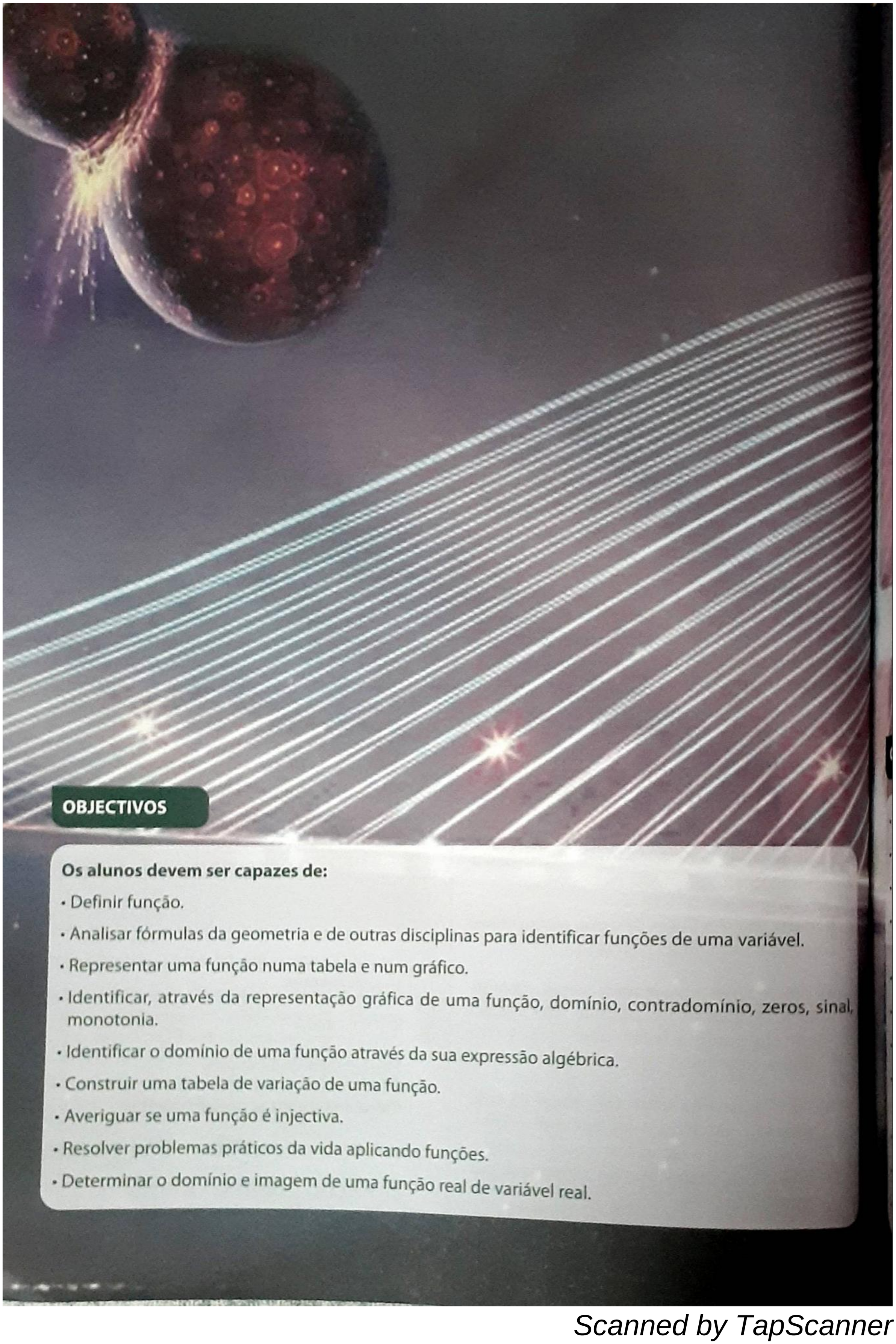
M: «Ter mais de 17 anos.»

Calcule as seguintes probabilidades:

a) $P(R)$ b) $P(\overline{M})$ c) $P(R \cap M)$

d) $P(\overline{R} \cup M)$ e) $P(\overline{R} \cap \overline{M})$

Scanned by TapScanner



OBJECTIVOS

Os alunos devem ser capazes de:

- Definir função.
- Analisar fórmulas da geometria e de outras disciplinas para identificar funções de uma variável.
- Representar uma função numa tabela e num gráfico.
- Identificar, através da representação gráfica de uma função, domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia.
- Identificar o domínio de uma função através da sua expressão algébrica.
- Construir uma tabela de variação de uma função.
- Averiguar se uma função é injectiva.
- Resolver problemas práticos da vida aplicando funções.
- Determinar o domínio e imagem de uma função real de variável real.

Scanned by TapScanner

Funções reais de variável real

UNIDADE 3

CONTEÚDOS

- Funções reais de variável real.
- Revisão da noção de função e gráfico de uma função.
- Domínio e contradomínio.
- Revisão das funções linear, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica.
- Função homógrafa: gráfico e propriedades.
- Operações com funções.
- Classificação das funções (injectiva, sobrejectiva e bijectiva).
- Função inversa: propriedades e determinação da expressão analítica.
- Função monótona.
- Paridade de funções (interpretação gráfica e geométrica).
- Composição de funções.

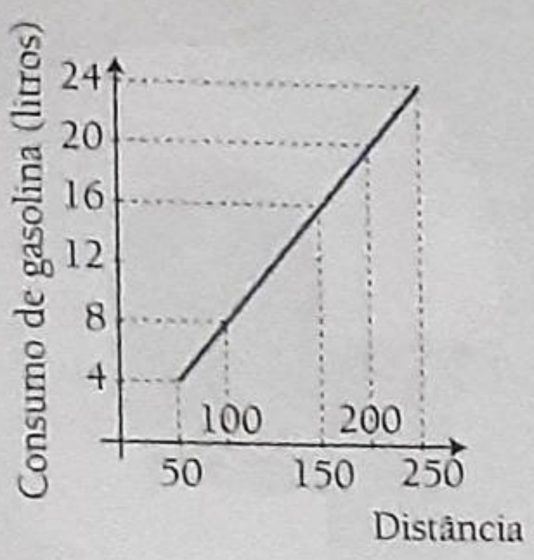
Págs. 42 a 63

Scanned by TapScanner

Função real de variável real (revisão)

1

Observe o gráfico que mostra o consumo de gasolina de um carro em função da distância percorrida.



Para a função representada graficamente, indique:

a) O domínio e o contradomínio.

b) A variável independente e a variável dependente.

c) Quantos litros de gasolina gastou o carro depois de ter percorrido 200 km?

d) Que distância percorreu o carro se gastou 16 litros de gasolina?

e) Qual é a imagem por f de 100?

f) Qual é o objecto que tem por imagem 24?

2

Seja $h(x) = x^3 + 4x^2$:

a) Determine $h(1)$, $h(2)$, $h(-1)$ e $h(-3)$.

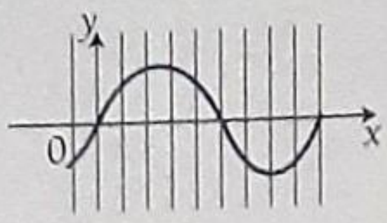
b) Determine x se $h(x) = 0$.

As **funções reais de variável real** são as funções em que o domínio e o conjunto de chegada são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

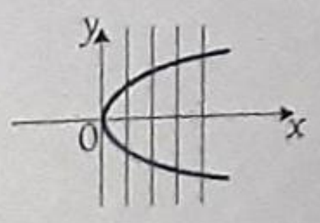
Dos anos anteriores sabemos que uma função pode ser definida por:

- Diagrama de Venn.
- Tabela.
- Expressão analítica.
- Gráfico.

Praticamente **verifica-se** se o **gráfico representa ou não uma função**, traçando rectas perpendiculares ao eixo das abcissas. Se elas intersectam o gráfico num único ponto, é uma função, caso contrário não é uma função, ou seja, numa **função** a **cada valor duma variável x está associado um e um único valor de outra variável y.**



É uma função



Não é uma função

Monotonia

Uma função é **monótona** num intervalo do domínio se for crescente ou decrescente nesse intervalo.

$\forall x_1, x_2 \in D_f$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. A função diz-se crescente.

$\forall x_1, x_2 \in D_f$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. A função diz-se decrescente.

Os **intervalos de monotonia** são os intervalos do domínio onde a função é crescente ou decrescente.

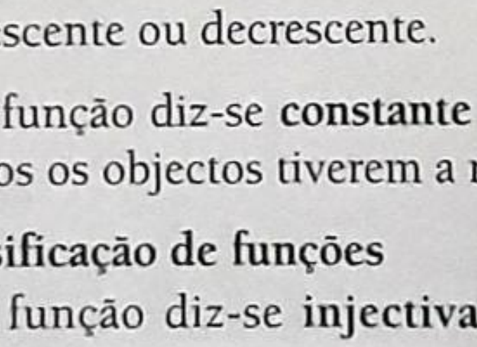
Uma função diz-se **constante** num intervalo do domínio se nesse intervalo todos os objectos tiverem a mesma imagem.

Classificação de funções

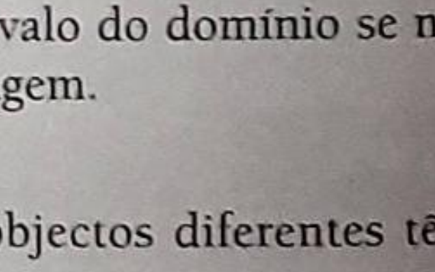
Uma função diz-se **injectiva** quando objectos diferentes têm sempre imagens diferentes.

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Verifica-se se a função é ou não injectiva, graficamente, traçando rectas paralelas ao eixo das abcissas e se elas intersectam o gráfico em apenas um ponto, a função é injectiva, caso contrário ela é não injectiva.



É injectiva



Não é injectiva

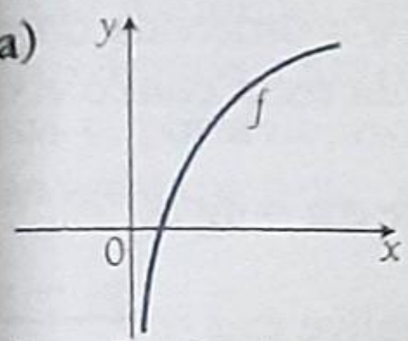
Uma função diz-se **sobrejectiva** quando o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Scanned by TapScanner

Exemplos

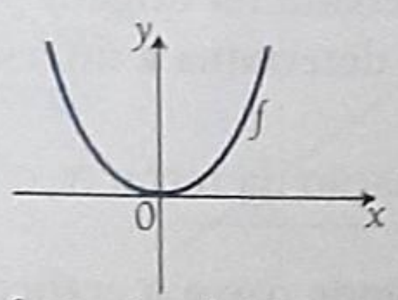
1. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a)



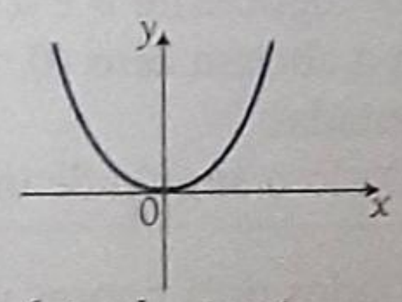
f é sobrejectiva

b)



f não é sobrejectiva

2. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$



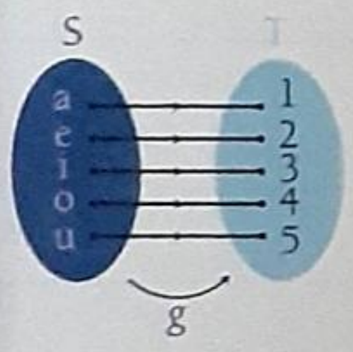
f é sobrejectiva

$D'_f = \mathbb{R}_0^+ =$ conjunto de chegada

Uma função diz-se **bijectiva** quando é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

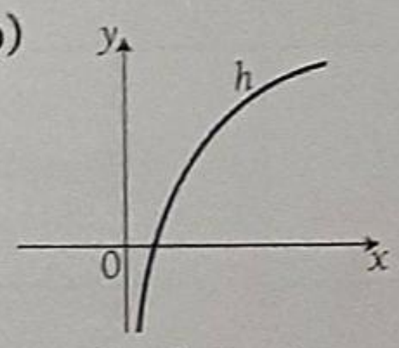
Exemplo

1. a)



g é bijectiva

b)



h é bijectiva

Função do 1.º grau (revisão)

Chama-se função do 1.º grau a toda a função real de variável real cuja expressão analítica é dada na forma:

$$f(x) = ax + b \text{ com } a, b \in \mathbb{R}$$

O **zero** de uma função é todo o objecto que tem como imagem o valor zero.

$$a \text{ é zero de } f \Leftrightarrow f(a) = 0$$

Graficamente, os zeros de uma função são os pontos onde o gráfico intersecta o eixo das abcissas.

A função diz-se **negativa** num certo intervalo, se nesse intervalo toma valores negativos.

A função diz-se **positiva** num certo intervalo, se nesse intervalo toma valores positivos.

A função diz-se crescente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

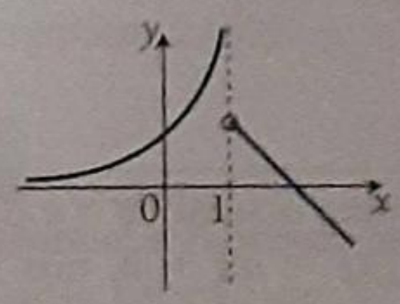
A função diz-se decrescente se:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

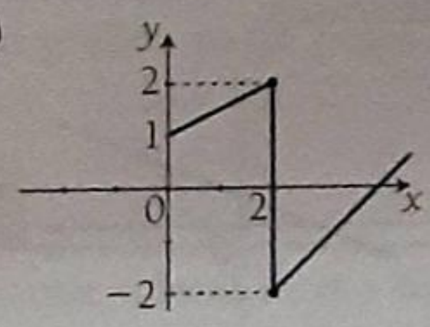
3

Verifique se os gráficos seguintes representam funções ou não.

a)



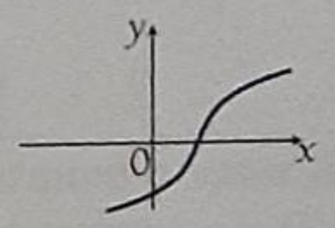
b)



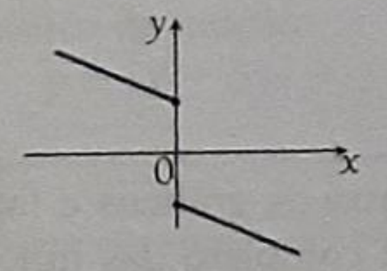
4

Indique as funções que são monótonas e os intervalos de monotonia.

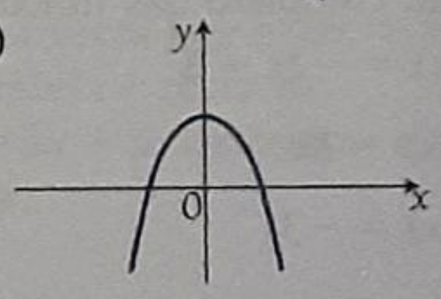
a)



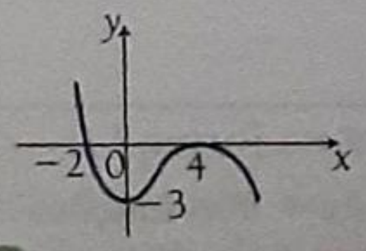
b)



c)



d)



5

$f(x) = ax + b; a \neq 0$ é injectiva?

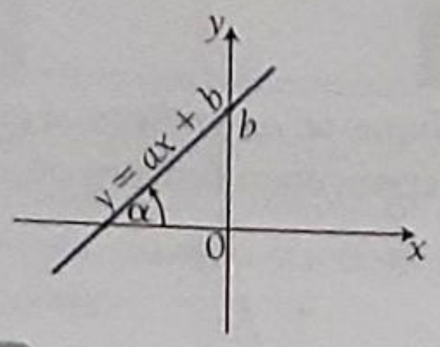
6

A função $g(x) = 5$ diz-se uma função constante.

a) Represente o gráfico de g.

b) g é injectiva?

Scanned by TapScanner



Significado dos coeficientes *a* e *b*

O coeficiente a é o coeficiente angular ou simplesmente o declive da recta e determina a inclinação da recta pois provém de $a = \text{tg}\ \alpha$, onde α é o ângulo de inclinação da recta em relação ao eixo das abcissas.

O coeficiente b é a ordenada na origem porque é a ordenada do ponto com a abcissa zero $(0, b)$ e determina a intersecção da recta com o eixo das ordenadas.

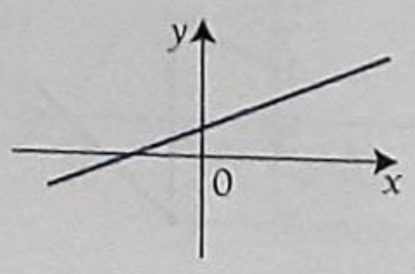
Dado o ângulo de inclinação da recta, α, o declive é $a = \text{tg}\ \alpha$.

Dados dois pontos por onde passa o gráfico, o declive é: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

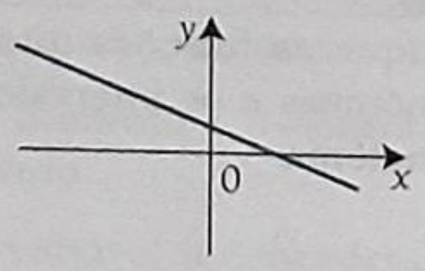
7

Determine o sinal de a e de b para $f(x) = ax + b$, nos seguintes casos:

a)

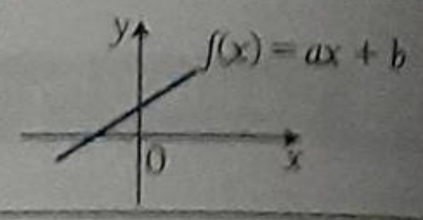
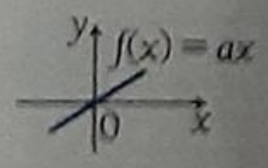
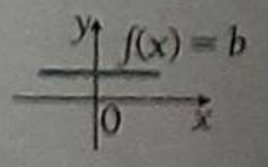


b)



Tipos de funções

De um modo geral temos:

Expressão algébrica	Designação	Gráfico
$f(x) = ax + b$	Função afim	
Se $b = 0$ $f(x) = ax$	Função linear	
Se $a = 0$ $f(x) = b$	Função constante	

8

Construa os gráficos e faça o estudo completo das funções:

a) $f(x) = -2x + 3$

b) $g(x) = 2x$

c) $h(x) = -3$

Exercícios resolvidos

1. Determine a expressão analítica duma função afim cujo gráfico passa por $(3, -5)$ e forma um ângulo de $-30°$ com o sentido positivo do eixo Ox.

Resolução

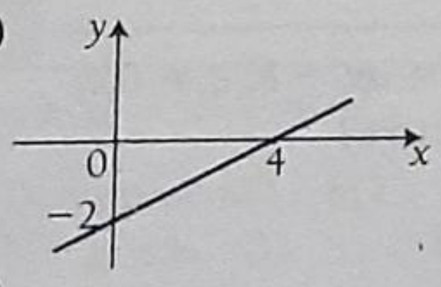
$\alpha = -30° \Rightarrow a = \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ (-30°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$(3, -5) \in f \Rightarrow -5 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = \sqrt{3} - 5$; como $f(x) = ax + b$ então, $f(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} - 5$

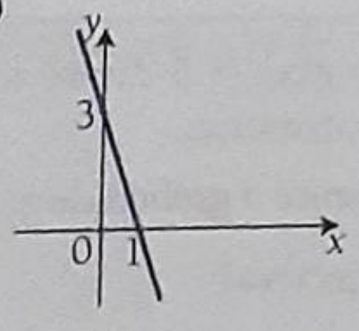
9

Escreva na forma $f(x) = ax + b$ as funções representadas graficamente:

a)



b)



2. Determine a e b da função $f(x) = ax + b$, se o gráfico de f passa por $(3, 6)$ e $(1, 2)$.

Resolução

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \dfrac{6 - 2}{3 - 1} = \dfrac{4}{2} = 2$; $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$

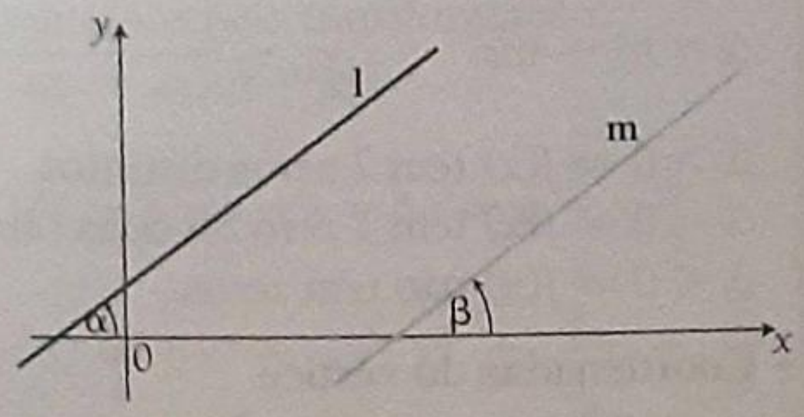
$y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x$

Então, $f(x) = 2x$

Scanned by TapScanner

Condição de paralelismo das rectas

Se duas rectas **l** e **m** (não verticais) são paralelas, elas formam ângulos iguais com o eixo das abcissas e, portanto, os seus declives são iguais: $a_l = a_m$, ou seja,



$$l \parallel m \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow a_l = a_m$$

Exercício resolvido

Uma recta **l** passa por (2, 3) e é paralela à recta **m** de equação $y = 2x + 10$. Determine a expressão analítica de **l**.

Resolução

m: $y = 2x + 10$ logo $a = 2$

l: $y = ax + b$ $\qquad l \parallel m \Rightarrow a = 2$

$(2, 3) \in l \Rightarrow 3 = 2 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 1$

Então l: $y = 2x - 1$

Condição de perpendicularidade das rectas

Duas rectas **r** e **s** são perpendiculares se:

$$a_r = -\frac{1}{a_s}$$

Exercício resolvido

Determine o declive da recta **r** perpendicular à recta **s**: $y = 3x$.

Resolução

$a_s = 3$

$a_r = -\frac{1}{3}$

Função do 2.º grau (revisão)

Chama-se **função do 2.º grau** ou **função quadrática**, a toda a função real de variável real cujo gráfico é uma parábola e cuja expressão analítica é dada na forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{com } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ b, c \in \mathbb{R}$$

10

Determine a expressão analítica duma função do 1.º grau, sabendo que é linear e passa pelo ponto (2, 10).

11

Determine a expressão analítica de uma função do 1.º grau, cujo gráfico passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(1, 2)$.

12

Para que valores de m a função $g(x) = (m - 3)x + 1$ é:

a) Crescente?

b) Decrescente?

c) Constante?

13

Determine o valor de k para que o ponto $(-1, 0)$ pertença ao gráfico da função:

$y = (k - 5)x + 3$

14

Uma recta l: $y = ax + b$ é paralela à recta **m**: $y = 2x + 3$. Determine o valor de a.

15

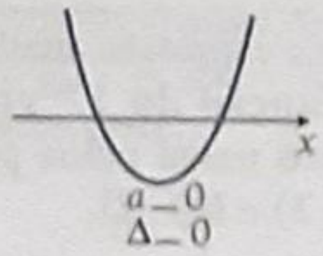
Uma recta l passa por (3, 2) e é paralela à recta m de equação $y = -3x + 5$. Determine a expressão analítica de l.

Scanned by TapScanner

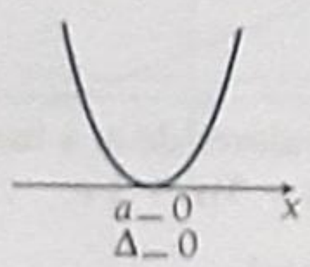
16

Seja dado o gráfico duma função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Complete com um dos símbolos «>», «=» ou «<», de modo a obter afirmações verdadeiras.

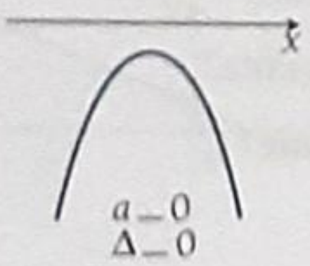
a)



b)



c)



17

Determine as coordenadas do vértice das funções quadráticas seguintes:

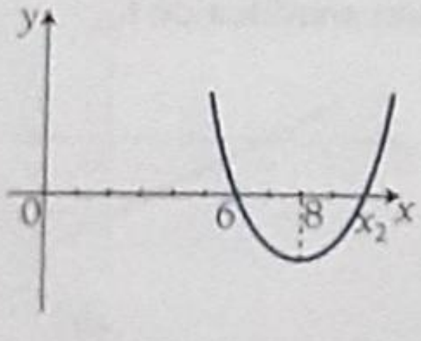
a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

b) $g(x) = 2x + x^2$

18

A figura representa o gráfico duma função quadrática, com $x_1 = 6$ e $x_v = 8$.

Determine x_2.



- **Zeros da função**

  Os zeros da função são as soluções de $ax^2 + bx + c = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac \quad ; \quad x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

  $\Delta > 0 \Rightarrow f(x)$ tem 2 zeros distintos.
  $\Delta = 0 \Rightarrow f(x)$ tem 1 zero ou duas raízes reais iguais.
  $\Delta < 0 \Rightarrow f(x)$ não tem zeros.

- **Coordenadas do vértice**

  $x_v = \dfrac{-b}{2a} \; ; \qquad y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ ou

  $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \; ; y_v = f(x_v)$

- **Concavidade da parábola**

  $a > 0 \Rightarrow$ a parábola tem a concavidade virada para cima.
  $a < 0 \Rightarrow$ a parábola tem a concavidade virada para baixo.

- **Ordenada na origem**

  O coeficiente c é chamado ordenada na origem pois
  $x = 0 \Rightarrow y = c$ e tem-se o ponto $(0, c)$

- **Eixo de simetria**

  Uma parábola é uma figura simétrica, cujo eixo de simetria passa pelo vértice e é paralelo ao eixo dos yy.
  Equação do eixo de simetria: $x = x_v$

- **Transformação do trinómio $ax^2 + bx + c$**

  Se x_1 e x_2 são zeros de $f(x) = ax^2 + bx + c$, então esta expressão pode ser escrita na forma:

  $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  Um caso particular deste é quando x_1 é um único zero, então:

  $$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow f(x) = a(x - x_1)^2$$

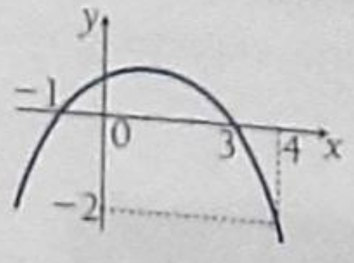
  Se (x_v, y_v) são as coordenadas do vértice, então a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma:

  $$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

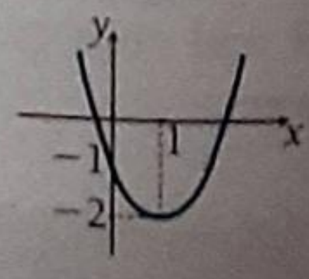
Exercício resolvido

Determine as expressões analíticas das funções quadráticas seguintes:

a)



b)



Scanned by TapScanner

Resolução

a) São dados os 2 zeros, por isso optamos pela transformação:

$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a(x + 1)(x - 3)$

$(4, -2) \in f \Rightarrow -2 = a(4 + 1)(4 - 3) \Leftrightarrow -2 = 5a \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}$

Então $f(x) = -\frac{2}{5}(x + 1)(x - 3) \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{6}{5}$

b) São dadas as coordenadas do vértice, por isso optamos por:

$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ então $x_v = 1$ e $y_v = -2$

$(0, -1) \in f \Rightarrow -1 = a(0 - 1)^2 - 2 \Leftrightarrow a = 1$

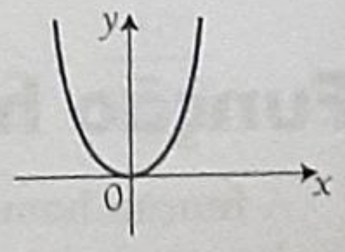
Então, $f(x) = 1 \cdot (x - 1)^2 - 2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x - 1$

Paridade de funções

Uma função diz-se **par** se os valores equidistantes da origem (simétricos) tiverem a mesma imagem.

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$$

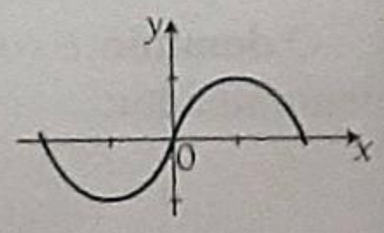
O **gráfico** de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, ou seja, o ponto (x, y) pertence ao gráfico e o ponto $(-x, y)$ também pertence ao gráfico.



Uma função diz-se **ímpar** se aos valores simétricos de x correspondem imagens simétricas.

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$$

O **gráfico** de uma função ímpar é simétrico em relação à origem, ou seja, o ponto (x, y) pertence ao gráfico e o ponto $(-x, -y)$ também pertence ao gráfico.



Exercício resolvido

Estude, analiticamente, a paridade das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x$ b) $g(x) = x^2 - 3$ c) $h(x) = 5x + 7$

Resolução

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x \\ f(-x) = -2x \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f \Rightarrow f(x)$ é ímpar

b) $\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 - 3 \\ g(-x) = x^2 - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow g(-x) = g(x), \forall x \in D_g \Rightarrow g(x)$ é par

c) $\left.\begin{array}{l} h(x) = 5x + 7 \\ h(-x) = -5x + 7 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x)$ não é par nem ímpar

19

Determine os valores de m para os quais a função do 2.º grau:

a) $y = mx^2 + (2m - 1)x + m - 2$, tem a concavidade virada para cima e duas raízes reais distintas.

b) $y = -mx^2 + (4m - 1)x + 8m - 2$, tem a concavidade voltada para baixo e 2 raízes reais iguais.

20

O gráfico duma função quadrática f tem como vértice V e passa pelo ponto P.

Escreva a expressão analítica de f se:

a) $V(3, 4)$ e $P(5, 0)$

b) $V(-2, -1)$ e $P(1, 3)$

21

Construa o gráfico e faça o estudo completo da função:

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

22

Classifique, analiticamente, as seguintes funções quanto à sua paridade.

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = 3x - 2$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = 3x^2 - 2$

f) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

23

Determine os valores de a, b e c, de modo que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja par.

Scanned by TapScanner

24

Dado o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 4x - 1, \text{se } 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

a) Determine o domínio de f.

b) Construa o gráfico f.

25

Construa o gráfico de

$$g(x) = \begin{cases} 2 & , \text{se } x < -1 \\ 2x + 1, \text{se } -1 \leq x \leq 7 \\ 2 & , \text{se } x > 7 \end{cases}$$

e determine o domínio da função.

26

Dadas as funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -\frac{2}{x}$.

a) Qual é o domínio de f e de g?

b) Determine $f(1)$, $g(2)$, $f(3)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$

c) Verifique, analiticamente, se as funções são pares ou ímpares.

d) Represente, graficamente, as funções: $f(x)$ e $g(x)$.

e) Qual é o contradomínio de f e de g?

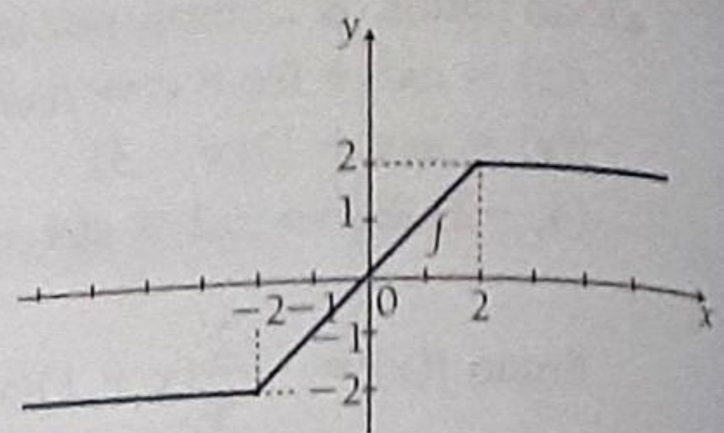
f) Estude a monotonia das funções.

Uma assimptota é uma recta para a qual o gráfico duma função se aproxima indefinidamente, ou seja, a distância que lhes separa tende para o zero.

Função definida por ramos

Observemos a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{se } x > 2 \\ x + 1, & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & , \text{se } x < -2 \end{cases}$$



Enquanto que, nos exemplos anteriores, a função era definida por uma única expressão analítica em x, agora a **função é representada**, por exemplo, por três **expressões analíticas diferentes**, que dependem do valor atribuído a x.

Verifica-se que existe uma **correspondência unívoca** entre o conjunto dos valores de $f(x)$ e os de x, pois a cada ponto (valor) x corresponde um e um só valor de $f(x)$, que pertence ao domínio da função ($D_f = \mathbb{R}$).

Para se obter o **gráfico** deste tipo de funções é necessário construir o gráfico de cada expressão analítica, no intervalo correspondente. Assim, no caso do nosso exemplo, constrói-se o gráfico de $f(x) = -2$ se $x \in]-\infty, -2[$, o gráfico de $f(x) = x + 1$ se $x \in [-2, 2]$ e $f(x) = 2$ se $x \in]2, +\infty[$.

Função homógrafa

A **função homógrafa** é toda a função real de variável real cuja expressão analítica é da forma:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ onde } cx + d \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

O **domínio** é constituído por todos os números reais que não anulam o denominador:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ pode ser transformada na forma $f(x) = B + \frac{k}{x + m}$.

As **assimptotas verticais** (AV) são os zeros do denominador:

$$\text{AV: } cx + d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c} \text{ ou } x = -m$$

Desde que o grau do numerador seja menor ou igual ao grau do denominador, a função terá **assimptota horizontal** (AH).

Se o grau do numerador é igual ao grau do denominador, a assimptota horizontal é a razão dos coeficientes de x:

$$\text{AH: } y = \frac{a}{c} \quad \text{ou} \quad y = B$$

Scanned by TapScanner

Se o grau do numerador é menor que o grau do denominador, a assimptota horizontal é:

$$\text{AH: } y = 0$$

Se $B = m = 0$ então $f(x) = \frac{k}{x}$ e terá como assimptotas os eixos coordenados e encontra-se:

- No 1.º e 3.º quadrantes quando $k > 0$. A função é decrescente.
- No 2.º e 4.º quadrantes quando $k < 0$. A função é crescente.

O **gráfico** de função homógrafa é uma **hipérbole**.

Exercício resolvido

Estude e construa o gráfico de $f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$.

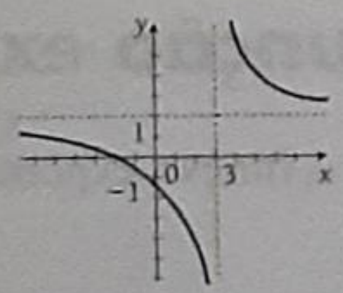
Resolução

Transformação de $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ em $f(x) = B + \frac{k}{x + m}$

$$\begin{array}{r|l} 2x + 4 & x - 3 \\ \hline -2x + 6 & 2 \\ \hline 10 & \end{array} \qquad \text{Assim, } f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3} \Leftrightarrow f(x) = 2 + \frac{10}{x - 3}$$

Estudo da função:

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$
2. Ponto de intersecção com Ox: $y = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
3. Ponto de intersecção com Oy: $x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{-3} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}$
4. Zeros: $2x + 4 = 0 \wedge x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x = -2$
5. Variação do sinal: $f(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$
   $f(x) < 0$ se $x \in]-2, 3[$ (ver ao lado)
6. Paridade: f não é par nem ímpar. (ver ao lado)
7. f é injectiva; f não é sobrejectiva; f não é bijectiva.
8. $k = 10 > 0 \Rightarrow$ A função é decrescente.
9. Assimptotas: AV: $x = 3$; AH: $y = 2$
10. Gráfico:



Operações sobre funções

Consideremos duas funções, f e g, reais de variável real. As expressões:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

27

Seja $f(x) = \frac{ax + b}{cx + 8}$; determine os valores de a, b e c, sabendo que o gráfico passa por $\left(1, -2\right)$ e $\left(0, -\frac{5}{8}\right)$ e tem como assimptota vertical $x = 2$.

28

Seja $f(x) = \frac{ax + b}{cx + 6}$ determine a e c, se AV: $x = -2$ e AH: $y = 4$.

Paridade

$f(x) = f(-x)\ \forall x \in D_f$
$f(x)$ é par.

$$\frac{2x + 4}{x - 3} \neq \frac{2x - 4}{x + 3}$$

$f(x)$ não é par.

$f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D_f$
$f(x)$ é ímpar.

$$\frac{2x - 4}{x + 3} \neq -\frac{2x + 4}{x - 3}$$

$f(x)$ não é ímpar.

Variação do sinal

$f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$

	$-\infty$		-2		3	$+\infty$
$2(x-2)$	$-$		0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$		$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x-4}{x-3}$	$+$		0	$-$	ND	$+$

29

Considere as funções:

$f(x) = \frac{2}{x}$ e $g(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 2}$

a) Determine D_{f-g} e D_{f+g}.

b) Determine a expressão analítica de $f - g$ e $f + g$.

c) Construa os gráficos de $f - g$ e $f + g$.

Scanned by TapScanner

representam novas funções de x, que se chamam respectivamente:

- Soma de f com g.
- Produto de f por g.
- Diferença entre f e g.
- Quociente de f por g.

cujos domínios são:

- $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
- $D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x: g(x) \neq 0\}$

30

Sendo as funções definidas por $h(x) = -2$ e $i(x) = \frac{1}{x+1}$.

a) Determine as expressões analíticas de $(h \cdot i)(x)$ e $\left(\frac{h}{i}\right)(x)$.

b) Determine $D_{h \cdot i}$ e $D_{\frac{h}{i}}$.

Exercícios resolvidos

1. Sejam dadas as funções reais de variável real: $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = \sqrt{1+x}$ cujos domínios são, respectivamente:
$D_f = \{x: x \in \mathbb{R}, x \leq -1\}$ $D_g = \{x: x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$
Calcule:
a) $f(x) + g(x)$ b) $f(x) - g(x)$ c) $f(x) \cdot g(x)$ d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

Resolução

As novas funções serão:

a) $f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$; $D_{f+g} = [-1, 1]$

b) $f(x) - g(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$

$D_{f-g} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$; $D_{f-g} = [-1, 1]$

c) $f(x) \cdot g(x) = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} = \sqrt{(1-x) \cdot (1+x)} = \sqrt{1-x^2}$

$D_{f \cdot g} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x \geq -1\}$; $D_{f \cdot g} = [-1, 1]$

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1 \wedge x \geq -1 \wedge 1 + x \neq 0\}$; $D_{\frac{f}{g}} =]-1, 1]$

31

Considere as seguintes funções:

- $f(x) = 3^x$
- $g(x) = 8^{-x}$
- $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$

a) As funções f, g e h são funções exponenciais? Justifique.

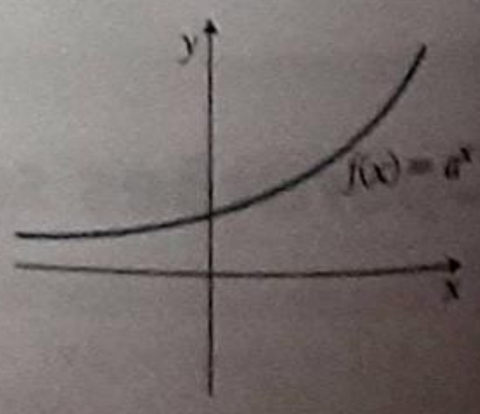
b) Calcule:

$(f + g)(0) \cdot (f - g)(1)$

Função exponencial (revisão)

A função exponencial de base a e expoente a variável x de domínio $\mathbb{R}$ é:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = a^x$



onde a é um número real e diferente de 1.
Se $a > 1$ a função é **crescente**.
Se $0 < a < 1$ a função é **decrescente**.

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

1. Se $f(x) = a^x$ e $a = -9$ então, $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9}$, que não é um número real.

2. Sejam as funções exponenciais definidas por:

$$f_1(x) = 2^x; \qquad f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \qquad f_3(x) = 4^x; \qquad f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

a) Calcule: $f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) + f_4(0)$

b) Construa, no mesmo referencial, os gráficos de cada uma das funções.

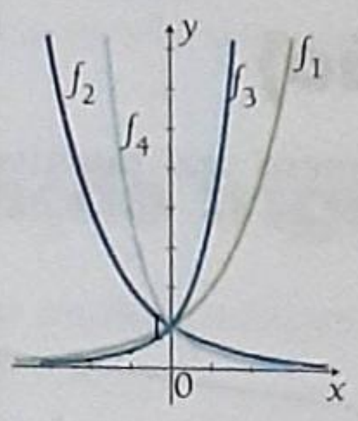
c) Indique para cada uma das funções:

- O domínio
- A variação do sinal
- A injectividade
- O contradomínio
- A monotonia
- A sobrejectividade

Resolução

a) $f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) + f_4(0) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

b)



c)
- O domínio de cada uma das funções é $\mathbb{R}$.
- O contradomínio é $\mathbb{R}^+$.
- Todas as funções são positivas.
- f_1 e f_3 são monótonas crescentes.
- f_2 e f_4 são monótonas decrescentes.
- Todas são injectivas.
- Nenhuma é sobrejectiva.

Dos anos anteriores, já sabemos que:

A função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tem as seguintes propriedades:

1. $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = \mathbb{R}^+$
2. A função exponencial é injectiva, mas não é sobrejectiva e por isso não é bijectiva.
3. A função exponencial não é par nem ímpar.
4. A monotonia depende dos valores da base:
   - se $0 < a < 1$ então a função é monótona decrescente.
   - se $a > 1$ então a função é monótona crescente.
5. A função exponencial tem sempre uma assimptota horizontal que coincide com o eixo das abcissas e cuja equação é $y = 0$.
6. Todos os gráficos da função exponencial passam pelo ponto (0, 1), isto é, intersectam o eixo das ordenadas no ponto 1.

Transformações lineares (revisão)

Partindo do conhecimento do **gráfico** duma função elementar f pode-se obter o gráfico de $g(x) = Af(ax + b) + B$ através de transformações.

Eis os passos a seguir:

1. $y = f(x)$: construir o gráfico de $f(x)$ através da tabela de valores (x, y).
2. $y = f(x + b)$: deslocar horizontalmente o gráfico obtido em 1. em b unidades: para a direita, se $b < 0$ ou para a esquerda, se $b > 0$.

32

Construa os gráficos das funções:

$$f(x) = 3^x \text{ e } g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

no mesmo sistema de coordenadas e faça o estudo completo das funções.

33

Seja $g(x) = Af(ax + b) + B$. Quais são os valores de A, a, b, e B, se:

a) $f(x) = 3^x$ e $g(x) = 3^{x+4} + 5$

b) $f(x) = 2^x$
$g(x) = 2 \cdot 2^{3x+5} - 6$

c) $f(x) = 3^x$ e
$g(x) = 3^{-3x-1} + 4$

d) $f(x) = x^2$ e
$g(x) = -(x-1)^2 + 4$

e) $f(x) = x^2$ e
$g(x) = 2^{x-2} + 1$

Scanned by TapScanner

34

Dada a função:

$$f(x) = 2^x + 1$$

a) Complete:

O gráfico de f obtém-se a partir do gráfico de $y = 2^x$ através duma translação de __ unidades para __.

b) Usando transformações lineares, construa o gráfico de $f(x) = 2^x + 1$.

c) Qual é a equação da recta que é assimptota do gráfico de f?

d) Qual é o D'_f?

35

Seja dada a função:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

a) Faça uma tabela e construa o gráfico de f.

b) Determine o D_f e o D'_f.

c) Classifique a função quanto à injectividade, monotonia e paridade.

36

Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 (x + 3)$

b) $g(x) = \log_3 \frac{1}{x}$

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} (-x)$

d) $k(x) = \log_5 \frac{x+4}{x-2}$

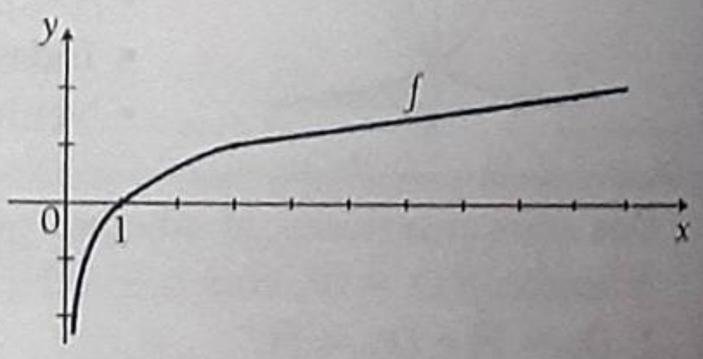
e) $l(x) = \log \frac{x^2 - 1}{2 - x}$

3. $y = f(ax + b)$: multiplicar as abcissas dos pontos obtidos no gráfico anterior pelo factor «$\frac{1}{a}$». A função vai alargar na horizontal.
4. $y = Af(ax + b)$: multiplicar as ordenadas dos pontos do gráfico anterior pelo factor A. A função irá esticar na vertical para cima se $|A| > 1$.
5. $y = Af(ax + b) + B$: deslocamento na vertical do gráfico anterior em B, unidades para cima, se $B > 0$ ou para baixo, se $B < 0$.
   - Se $A = -1$ temos $y = -f(x)$: simetria do gráfico anterior em relação ao eixo dos xx.
   - Se $a = -1$ temos $y = f(-x)$: simetria do gráfico f em relação ao eixo dos yy.
6. A e B só alteram as ordenadas dos pontos do gráfico de f, isto é, apenas têm efeitos verticais. Isto implica que $y = f(x)$ e $y = Af(x) + B$ têm o mesmo domínio e contradomínios diferentes.
7. a e b só alteram as abcissas do gráfico de f, isto é, $y = f(x)$ e $y = f(ax + b)$, não têm, em geral, o mesmo domínio mas têm o mesmo contradomínio.
8. Os coeficientes A, a, b e B não mudam, na essência, o tipo de gráfico de f.

Função logarítmica (revisão)

A **função logarítmica** é a função a que cada número real positivo x faz corresponder o logaritmo de x na base a:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \smile y = \log_a x$$



$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Dos anos anteriores já sabemos que:

- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $D'_f = \mathbb{R}$
- f é injectiva e sobrejectiva, logo bijectiva.
- f é monótona crescente.
- f não é par nem ímpar.

Comparação entre as funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$; $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

		$f(x) = a^x$	$g(x) = \log_a x$
Domínio		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
Contradomínio		$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Monotonia	$a > 1$	Crescente	Crescente
	$0 < a < 1$	Decrescente	Decrescente
Assimptotas		A.H.: $y = 0$	A.V.: $x = 0$

Então: $\log_a 0$; $\log_a (-1)$; $\log_a (-100)$ não têm sentido pois o $D_f = \mathbb{R}^+$.

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

1. Qual é o domínio de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$?

Resolução

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 > 0\}$

$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \qquad D_g =]2, +\infty[$

2. Qual é o domínio de $h(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$?

Resolução

$D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1+x}{1-x} > 0\right\}$

$\frac{1+x}{1-x} > 0$

$1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		-1		1	$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	ND	$-$

Da análise da tabela, verificamos:

$D_h =]-1, 1[$

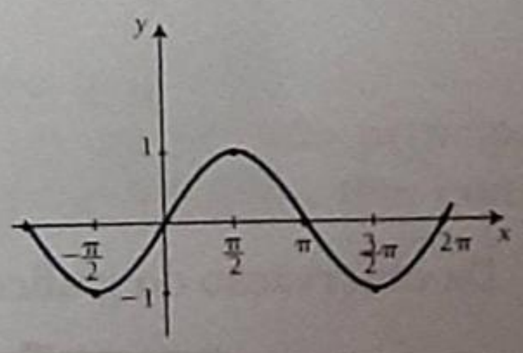
Função trigonométrica (revisão)

Dos anos anteriores, já está bastante familiarizado com as funções trigonométricas.

- $f(x) = \text{sen } x$

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$x \mapsto f(x) = \text{sen } x$

Da observação do gráfico vem:



1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $D'_f = [-1; 1]$
3. Paridade: f é ímpar.
4. f não é injectiva nem sobrejectiva.
5. Período principal: $T = 2\pi$, pois $\text{sen } [2\pi + x] = \text{sen } x$
6. A função é monótona crescente se:

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right], \forall x \in [0, 2\pi]$$

A função é monótona decrescente se:

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \forall x \in [0, 2\pi]$$

7. Zeros da função: $\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; k \in \mathbf{Z}$
8. Máximo da função: $\text{sen } x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

37

a) Construa, usando transformações lineares, o gráfico de $g(x) = \log_3(x+2)$.

b) Determine, graficamente, o D_g e o D'_g

c) Determine, analiticamente, D_g

d) Complete: o gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de $f(x) = \log_3 x$, através duma translação de __ unidades para a __.

38

Dada a função:

$$h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$$

a) Como se obtém o gráfico de h a partir do gráfico de

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

b) Construa o gráfico de h.

39

Dadas as funções:

$g(x) = 2^x - 8$ e $h(x) = 2^{x-3}$

a) Explique como se obtêm os gráficos de $g(x)$ e de $h(x)$ a partir de 2^x.

b) Indique o D'_h.

Scanned by TapScanner

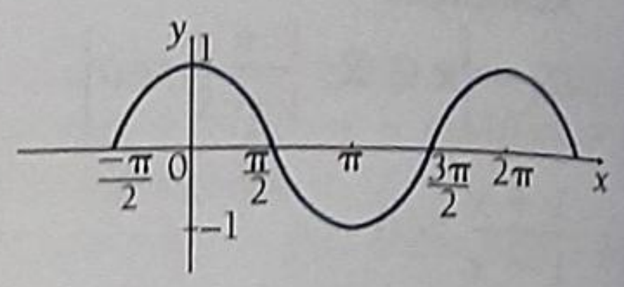
9. Mínimo da função $\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

10. Equação geral dos senos:
$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \vee x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

- $f(x) = \cos x$

$$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

Da observação do gráfico vem:



1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $D'_f = [-1, 1]$
3. Paridade: f é par.
4. f não é injectiva nem sobrejectiva.
5. Período principal: $T = 2\pi$
6. A função é monótona crescente se:
   $x \in [\pi, 2\pi]\ \forall\ x \in [0, 2\pi]$
   A função é monótona decrescente se:
   $x \in [0, \pi],\ \forall\ x \in [0, 2\pi]$
7. Zeros da função: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
8. Máximo da função: $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
9. Mínimo da função: $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\,k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
10. Equação geral dos co-senos:
    $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm\, a + 2\,k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

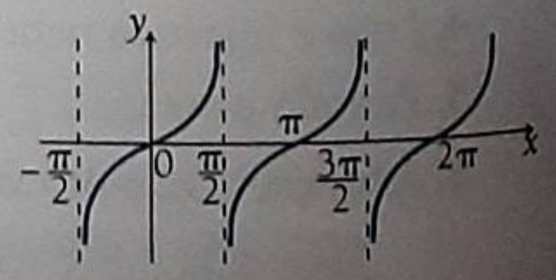
Seja $f(x) = \operatorname{sen} ax$ ou $g(x) = \cos ax$ então o período será:

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

- $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$f: \{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbb{R}$$

Da observação do gráfico:



1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$
2. $D'_f = \mathbb{R}$
3. Paridade: f é ímpar.
4. f não é injectiva mas é sobrejectiva.
5. Período principal: $T = \pi$
6. A função é monótona crescente.
7. Zeros da função: $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.
8. A função não tem máximo nem mínimo.
9. Equação geral da tangente:
   $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow x = a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

40

Construa os gráficos e faça o estudo das funções seguintes:

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$

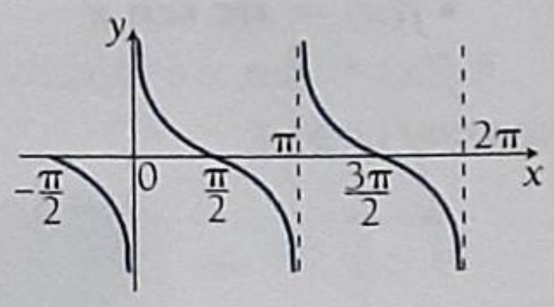
c) $f(x) = \operatorname{cotg} x$

Scanned by TapScanner

• $f(x) = \text{cotg}\, x$

$$f: \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \text{cotg}\, x$$

Da observação do gráfico, vem:



1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
2. $D'_f = \mathbb{R}$
3. Paridade: f é ímpar.
4. f não é injectiva mas é sobrejectiva.
5. Período principal: $T = \pi$
6. A função é monótona decrescente.
7. Zeros da função: $\text{cotg}\, x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
8. A função não tem máximo nem mínimo.
9. Equação geral da tangente:
   $\text{cotg}\, x = \text{cotg}\, a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Seja $g(x) = \text{tg}\, ax$ ou $g(x) = \text{cotg}\, ax$ então o período será:

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

Função periódica

Uma função f diz-se periódica se existir um número real T, tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x + T) = f(x)$$

Ao número T chama-se período da função f.

Proposição:

Se T é período da função f, então qualquer número «nT», onde

$$n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

também é período da função f.

Ao menor número positivo T que verifique a condição dada chama-se **período principal**.

As funções trigonométricas são funções periódicas.

As funções $f(x) = \text{sen}\, x$ e $f(x) = \cos x$ têm como período principal $T = 2\pi$ enquanto que as funções $f(x) = \text{tg}\, x$ e $f(x) = \text{cotg}\, x$ têm como período principal $T = \pi$.

Exercício resolvido

1. Calcule cos 1 590°.

Resolução

Como o ângulo 1 590° é superior ao período 360°, vamos reduzi-lo através da fórmula:

$f(x + nT) = f(x)$

$$\begin{array}{r|l} 1\,590^\circ & 360^\circ = T \\ \hline -1\,440^\circ & 4 = n \\ \hline 150 = x & \end{array} \quad \Rightarrow 1\,590^\circ = 150^\circ + 4 \cdot 360^\circ$$

Então: $\cos 1\,590^\circ = \cos(150^\circ + 4 \cdot 360^\circ) = \cos 150^\circ$

$150^\circ \in$ 2.º Q logo $\cos 150^\circ$ tem um sinal (−)

Logo $\cos 1\,590^\circ = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Scanned by TapScanner

Função trigonométrica inversa

As funções trigonométricas têm inversa nos intervalos em que são funções injectivas.

- **$f(x)$ = arc sen x**

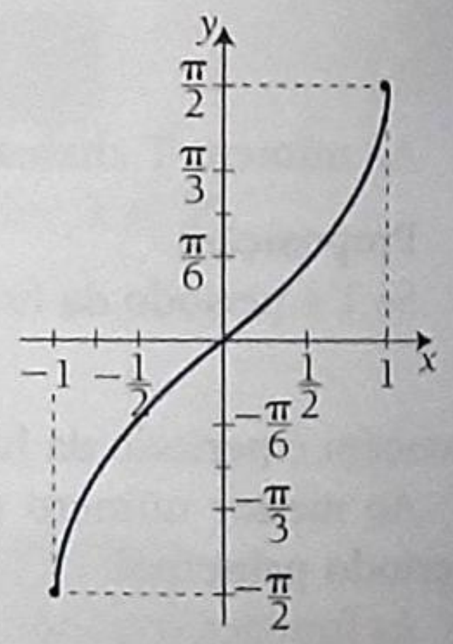
A $f(x) = \text{sen } x$ é injectiva se $D'_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ então, neste caso, ela terá inversa. Logo

$$f: \left[-1, 1\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \smile f(x) = \text{arc sen } x$$

Cujo gráfico será:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$f(x) =$ $= \text{arc sen } x$
$f^{-1}(x) =$ $= \text{sen } x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	x

Da análise do gráfico verificamos que:



1. $D_f = [-1, 1]$
2. $D'_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3. Monótona crescente
4. f é injectiva e não sobrejectiva.
5. f é ímpar.
6. Assimptotas: não tem.
7. Zero de função: $x = 0$

$f(x) = \text{sen } x$

$f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$

$f(x) = \cos x$

$f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$

Propriedades:
1. sen (arc sen x) = x
2. cos (arc cos x) = x
3. tg (arc tg x) = x
4. cotg (arc cotg x) = x
5. arc sen(sen x) = x
6. arc cos(cos x) = x
7. arc tg(tg x) = x
8. arc cotg(cotg x) = x

- **$f(x)$ = arc cos x**

A $f(x) = \cos x$ é injectiva se $D'_f = [0, \pi]$ então, neste caso, ela terá inversa.

Logo

$$f: [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$x \smile f(x) = \text{arc cos } x$$

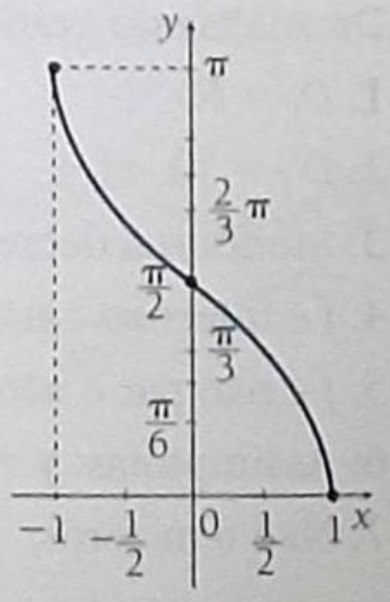
Cujo gráfico será:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$f(x) =$ $= \text{arc cos } x$
$f^{-1}(x) =$ $= \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	x

Scanned by TapScanner

Da análise do gráfico verificamos que:

1. $D_f = [-1, 1]$
2. $D'_f = [0, \pi]$
3. Monótona decrescente
4. f é injectiva e não sobrejectiva.
5. f é não par e não ímpar.
6. Assimptota: não tem.
7. Zero da função: $x = 1$.



- **$f(x) = \text{arc tg } x$**

A $f(x) = \text{tg } x$ é injectiva se $D'_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ então, neste caso, ela terá inversa. Logo

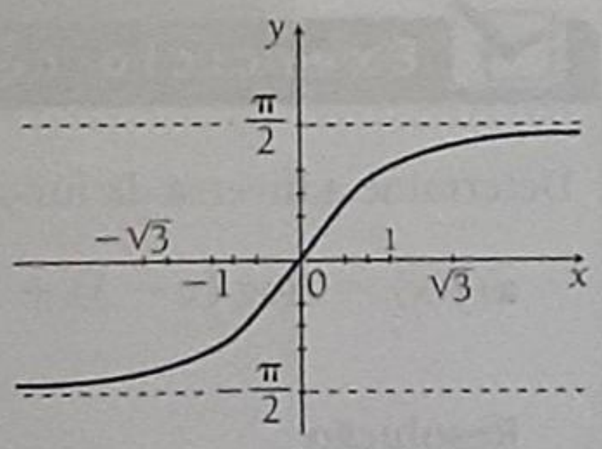
$$f: \mathbb{R} \to]0, 2]$$
$$x \smile f(x) = \text{arc tg } x$$

Cujo gráfico será

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$f(x) = \text{arc tg } x$
$f^{-1}(x) = \text{tg } x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	x

Da análise do gráfico verificamos que:

1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $D'_f = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
3. A função é ímpar.
4. A função é injectiva.
5. Assimptotas: $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$
6. Zero da função: $x = 0$.



- **$f(x) = \text{arc cotg } x$**

A $f(x) = \text{cotg } x$ é injectiva se $D'_f =]0, \pi[$ então, neste caso, ela será inversa. Logo

$$f: \mathbb{R} \to]0, \pi[$$
$$x \smile f(x) = \text{arc cotg } x$$

Cujo gráfico será:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$f(x) = \text{arc cotg } x$
$f^{-1}(x) = \text{cotg } x$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	x

41

Construa os gráficos das funções:

a) $g(x) = \text{arc cos } x$

b) $h(x) = \text{arc tg } x$

c) $k(x) = \text{arc cotg } x$

42

Determine o domínio, o contradomínio e estude a paridade, a injectividade e a ocorrência de assimptotas das funções seguintes:

a) $g(x) = \text{arc cos } x$

b) $k(x) = \text{arc cotg } x$

43

Determine:

a) arc sen 0

b) arc cos 0

c) arc tg (−1)

d) $\cos\left(\text{arc sen } \frac{1}{2}\right)$

e) sen (arc tg 1)

f) $\text{arc cos}\left[\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

g) $\text{sen}\left(\text{arc sen } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

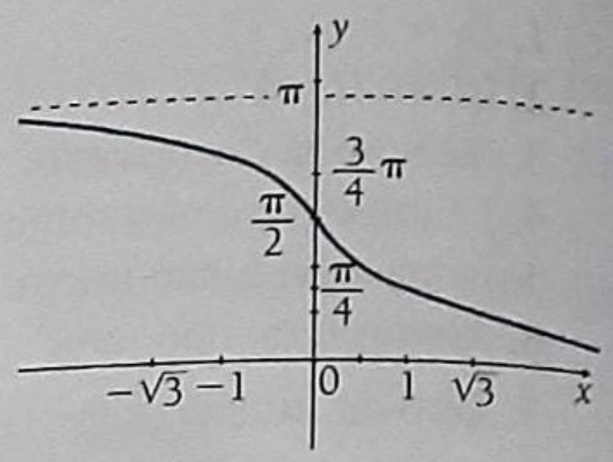
h) $\cos\left(\text{arc cos } \frac{1}{2}\right)$

i) $\text{arc tg}\left(\text{tg } \frac{\pi}{3}\right)$

j) cotg (arc cotg 2 006)

Scanned by TapScanner

Da análise do gráfico verificamos que:



1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $D'_f =]0, \pi[$
3. Monótona decrescente
4. f é injectiva e não sobrejectiva.
5. f é não par e não ímpar.
6. Assimptotas: $y = 0$ e $y = \pi$.
7. Não tem zeros.

Função inversa (revisão)

Através de vários exemplos, iremos recordar o que foi dado nos anos anteriores.

Seja f uma função injectiva sobre o seu domínio D_f. Então, existe uma função f^{-1}, **inversa** de f, também injectiva sobre o seu domínio $D_{f^{-1}}$, com as propriedades seguintes:

O **domínio** da função inversa é o contradomínio da função:

$$D_{f^{-1}} = D'_f$$

O **contradomínio** da função inversa é o domínio da função:

$$D'_{f^{-1}} = D_f$$

44

Dada a função

$$f(x) = \frac{3}{2 - x} + 1$$

a) Mostre que o ponto A(4, 1) pertence ao gráfico da função inversa de f.

b) Determine o contradomínio de f.

45

Determine $f^{-1}(x)$ se:

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = ax + b \qquad a \neq 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x + 4} - 2$

d) $f(x) = 2^x - 2$

e) $f(x) = 2^{x-4}$

f) $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

g) $f(x) = 2 \log x$

Exercício resolvido

Determine a inversa da função seguinte:

a) $f(x) = 2\log(x - 3) + 2$ b) $f(x) = \frac{2}{x - 1} + 3$

Resolução

a) $f(x) = 2\log(x - 3) + 2$

$y = 2\log(x - 3) + 2$

$\frac{y - 2}{2} = \log(x - 3) \Leftrightarrow x - 3 = 10^{\frac{y-2}{2}} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{y-2}{2}} + 3$

$\Leftrightarrow y = 10^{\frac{x-2}{2}} + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{\frac{x-2}{2}} + 3$

b) $f(x) = \frac{2}{x - 1} + 3$

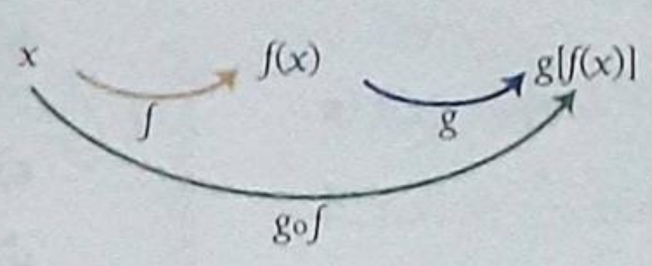
$y = \frac{2}{x - 1} + 3 \Leftrightarrow y - 3 = \frac{2}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{y - 3} = \frac{x - 1}{2}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{2}{y - 3} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x - 3} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{x - 3} + 1$

Scanned by TapScanner

Composição de funções

Dadas duas funções reais de variável real f e g, de domínios D_f e D_g, respectivamente, chama-se função composta de g com f e representa-se por $g \circ f$ à função assim definida:



$$g \circ f: D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g[f(x)]$$

onde

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

A função $g \circ f$ lê-se «g após f» ou «f seguido de g».

A função composta $g \circ f$ faz corresponder a um objecto x uma imagem $f(x)$ como objecto para a função g.

A composição de funções não é comutativa mas é associativa.

Diz-se que f e g são **permutáveis** se:

$$g \circ f = f \circ g$$

Exercício resolvido

Sejam $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 1$. Determine:

a) $(f \circ g)(3)$ b) $(g \circ f)(3)$

c) $(f \circ g)(-4)$ d) $(g \circ f)(4)$

e) $(f \circ g)(x)$ f) $(g \circ f)(x)$

Resolução

a) $(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f(4) = 8$

b) $(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(6) = 7$

c) $(f \circ g)(-4) = f[g(-4)] = f(-3) = -6$

d) $(g \circ f)(4) = g[g(4)] = g(5) = 6$

e) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$

f) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 2x + 1$

A função $f \circ g$ lê-se «f após g» ou g seguido de f.

46

Dadas as funções:

$f = \{(0, 4), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$

$g = \{(0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 4)\}$

determine:

a) $(f \circ f)(0)$

b) $(g \circ f)(0)$

c) $(f \circ f)(2)$

d) $(g \circ f)(1)$

47

Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$,

determine:

a) $(f \circ f)(5)$

b) $(g \circ f)(5)$

c) $(f \circ f)(-3)$

d) $(g \circ f)(-3)$

e) $D_{f \circ g}$

f) $D_{g \circ f}$

48

Na figura está representado o gráfico de f. Determine:

a) $f(-2)$

b) $f(3)$

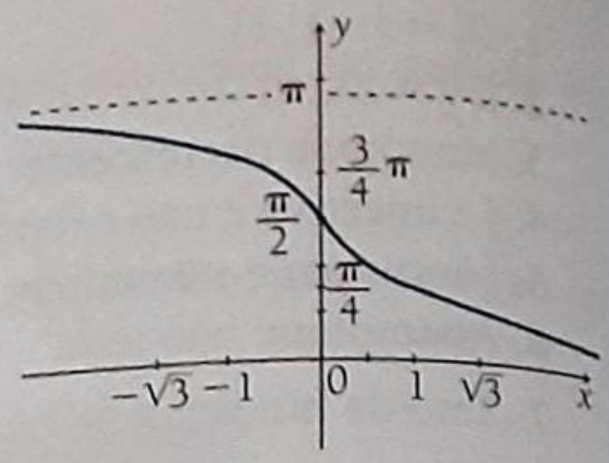
c) $(f \circ f)(-2)$

d) $(f \circ f)(3)$

e) $(f \circ f)(0)$

Scanned by TapScanner

Da análise do gráfico verificamos que:



1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $D'_f =]0, \pi[$
3. Monótona decrescente
4. f é injectiva e não sobrejectiva.
5. f é não par e não ímpar.
6. Assimptotas: $y = 0$ e $y = \pi$.
7. Não tem zeros.

Função inversa (revisão)

Através de vários exemplos, iremos recordar o que foi dado nos anos anteriores.

Seja f uma função injectiva sobre o seu domínio D_f. Então, existe uma função f^{-1}, **inversa** de f, também injectiva sobre o seu domínio $D_{f^{-1}}$, com as propriedades seguintes:

O **domínio** da função inversa é o contradomínio da função:

$$D_{f^{-1}} = D'_f$$

O **contradomínio** da função inversa é o domínio da função:

$$D'_{f^{-1}} = D_f$$

44

Dada a função

$$f(x) = \frac{3}{2 - x} + 1$$

a) Mostre que o ponto A(4, 1) pertence ao gráfico da função inversa de f.

b) Determine o contradomínio de f.

45

Determine $f^{-1}(x)$ se:

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = ax + b \qquad a \neq 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x + 4} - 2$

d) $f(x) = 2^x - 2$

e) $f(x) = 2^{x-4}$

f) $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

g) $f(x) = 2 \log x$

Exercício resolvido

Determine a inversa da função seguinte:

a) $f(x) = 2\log(x - 3) + 2$ b) $f(x) = \frac{2}{x - 1} + 3$

Resolução

a) $f(x) = 2\log(x - 3) + 2$

$y = 2\log(x - 3) + 2$

$\frac{y - 2}{2} = \log(x - 3) \Leftrightarrow x - 3 = 10^{\frac{y-2}{2}} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{y-2}{2}} + 3$

$\Leftrightarrow y = 10^{\frac{x-2}{2}} + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 10^{\frac{x-2}{2}} + 3$

b) $f(x) = \frac{2}{x - 1} + 3$

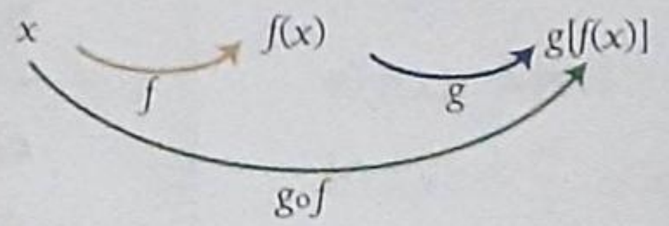
$y = \frac{2}{x - 1} + 3 \Leftrightarrow y - 3 = \frac{2}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{y - 3} = \frac{x - 1}{2}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{2}{y - 3} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x - 3} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{x - 3} + 1$

Scanned by TapScanner

Composição de funções

Dadas duas funções reais de variável real f e g, de domínios D_f e D_g, respectivamente, chama-se função composta de g com f e representa-se por $g \circ f$ à função assim definida:



$$g \circ f: D_{g \circ f} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g[f(x)]$$

onde

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

A função $g \circ f$ lê-se «g após f» ou «f seguido de g».

A função composta $g \circ f$ faz corresponder a um objecto x uma imagem $f(x)$ como objecto para a função g.

A composição de funções não é comutativa mas é associativa.

Diz-se que f e g são **permutáveis** se:

$$g \circ f = f \circ g$$

Exercício resolvido

Sejam $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 1$. Determine:

a) $(f \circ g)(3)$ b) $(g \circ f)(3)$

c) $(f \circ g)(-4)$ d) $(g \circ f)(4)$

e) $(f \circ g)(x)$ f) $(g \circ f)(x)$

Resolução

a) $(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f(4) = 8$

b) $(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(6) = 7$

c) $(f \circ g)(-4) = f[g(-4)] = f(-3) = -6$

d) $(g \circ f)(4) = g[g(4)] = g(5) = 6$

e) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$

f) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 2x + 1$

A função $f \circ g$ lê-se «f após g» ou g seguido de f.

46

Dadas as funções:

$f = \{(0, 4), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$

$g = \{(0, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 4)\}$

determine:

a) $(f \circ f)(0)$

b) $(g \circ f)(0)$

c) $(f \circ f)(2)$

d) $(g \circ f)(1)$

47

Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$,

determine:

a) $(f \circ f)(5)$

b) $(g \circ f)(5)$

c) $(f \circ f)(-3)$

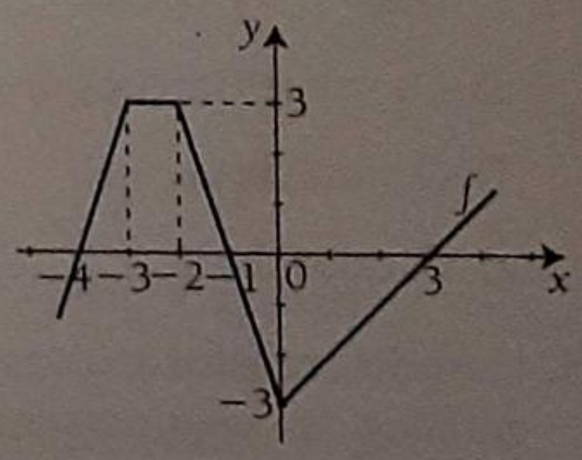
d) $(g \circ f)(-3)$

e) $D_{f \circ g}$

f) $D_{g \circ f}$

48

Na figura está representado o gráfico de f. Determine:



a) $f(-2)$

b) $f(3)$

c) $(f \circ f)(-2)$

d) $(f \circ f)(3)$

e) $(f \circ f)(0)$

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

1. Construa os gráficos das seguintes funções do 1.º grau, indicando em cada caso a sua monotonia.

   a) $y = ax$, se $a = 1; 2; \frac{1}{2}; -1; -2$

   b) $y = x + b$, se $b = -2; 0; 3$

   c) $y = 2x - 4$

   d) $y = -\frac{1}{2}x - 1$

2. Determine, para cada função do exercício anterior, o ângulo que o seu gráfico forma com o sentido positivo do eixo dos xx.

3. Determine os valores de a e b da função $f(x) = ax + b$, se o gráfico de f:

   a) Forma um ângulo de 45° com o sentido positivo do eixo dos xx e passa por $(0, 6)$.

   b) Forma um ângulo de $-30°$ com o sentido positivo do eixo dos xx e passa por $(0, -3)$.

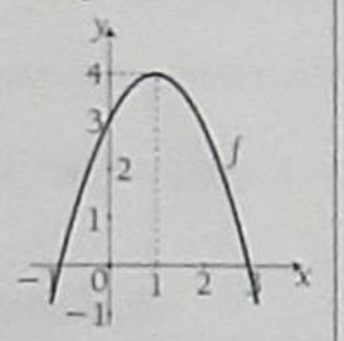
   c) Forma um ângulo de 60° com o sentido positivo do eixo dos xx e passa por $(1, -5)$.

   d) Passa por $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

   e) Passa por $(2, -5)$ e $(-3, -2)$.

   f) Passa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

4. Pela leitura do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine:



   a) Os valores de monotonia.

   b) Os zeros da função.

   c) O contradomínio da função.

   d) A equação do eixo de simetria.

   e) Os valores inteiros de x para os quais $f(x) > 0$.

   f) O sinal de a.

   g) O valor de c.

5. Usando transformações lineares, construa os gráficos das seguintes funções:

   a) $f(x) = 2^{x+3}$

   b) $g(x) = -2^x + 4$

   c) $h(x) = 2^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

   d) Determine o contradomínio de cada uma das funções anteriores.

6. Represente os gráficos das seguintes funções:

   a) $f(x) = \log_2(-x) + 3$

   b) $g(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x - 3)$

   c) $h(x) = 2\log_2(2x - 4)$

   d) Determine o domínio e a equação da assimptota vertical para cada uma dessas funções.

7. Construa os gráficos das seguintes funções:

   a) $g(x) = 2\text{sen}\,\frac{1}{2}x$

   b) $h(x) = 3\cos 2x + 2$

   c) $k(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$

   d) Determine o contradomínio, a paridade e o período de cada uma dessas funções.

8. Seja $f(x) = A\,\text{sen}\,x + B$. Determine A e B se:

   a) $D'_f = [-3, 3]$ b) $D'_f = [2, 4]$

   c) $D'_f = [4, 8]$ d) $D'_f = [0, 4]$

   e) $D'_f = [-5, 1]$ f) $D'_f = [-1, +989]$

9. Duma função f sabendo que $D_f = [-2, 3[$ e $D'_f = [-1, 4[$.
   Determine D_g e D'_g se:

   a) $g(x) = f(x + 3)$ b) $g(x) = -2f(x)$

   c) $g(x) = f(x) + 7$ d) $g(x) = f(3x)$

   e) $g(x) = f(x + 4) + 4$ f) $g(x) = 3f(x) - 3$

10. Diga se os gráficos das seguintes funções têm uma assimptota horizontal e/ou vertical e determine as equações dessas assimptotas se:

    a) $f(x) = \log_2(x - 5)$

    b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 7$

    c) $h(x) = 2\log_2(3x + 4) + 5$

    d) $k(x) = -3 - 2^{4x-5} + 6$

    e) $\ell(x) = \frac{1}{x - 3} + 2$

    f) $m(x) = \frac{-2}{2x - 3} + 1$

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

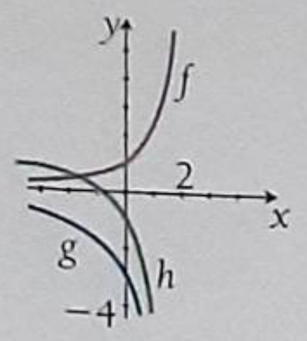
11. A figura mostra os gráficos de:

$f(x) = 2^x$

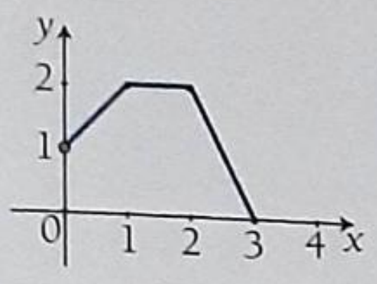
$g(x) = p \cdot f(x)$

$h(x) = p \cdot f(x) + q$

Determine p e q?



12. Dada uma parte do gráfico da função.



Complete-o, sabendo que f é:

a) Par. b) Ímpar.

13. Determine $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ se:

a) $f(x) = 3x$ e $g(x) = x - 3$

b) $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 2$

c) $f(x) = x^3$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x + 1$

14. Analise a paridade da função $f + g$ se:

a) f é par e g é par.

b) f é par e g é ímpar.

c) f é ímpar e g é par.

d) f é ímpar e g é ímpar.

15. a) Analise, graficamente, a paridade da função $f(x) = \text{arc cos } x$.

b) Determine o valor de k, sabendo que $g(x) = \text{arc cos } x + k$ é uma função ímpar.

16. Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 1$

b) $g(x) = \left| \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|} - 1 \right|$

17. a) Construa os gráficos das funções:

$f(x) = |\text{sen } x|$ e $g(x) = \text{sen } |x|$

b) Estude a paridade e a periodicidade de f e g.

18. Determine a função f^{-1}, inversa de f, e verifique depois a resposta calculando $(f \circ f^{-1})(x)$ e $(f^{-1} \circ f)(x)$.

a) $f(x) = 4x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{x}, x \neq 0$

c) $f(x) = \dfrac{5x + 4}{2x - 3}, x \neq \dfrac{3}{2}$

19. Sejam $f(x) = 2\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ e

$g(x) = \text{arc sen } \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Determine:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(\pi)$

20. Sabendo que o domínio e o contradomínio de $f(x) = \text{arc tg } x$ são, respectivamente, $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, determine o domínio e o contradomínio de:

$g(x) = 2\text{arc tg}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

21. Sabendo que $f(x) = \text{arc cos } x$ tem $D_f = [-1, 1]$ e $D'_f = [0, \pi]$, determine o domínio e o contradomínio de:

$h(x) = 2\text{arc cos}(2x + 1)$

22. Seja dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ \log_2(x - 1), & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Construa os gráficos de:

a) $y = f(x)$ b) $y = |f(x)|$

c) $y = f(|x|)$ d) $y = |f(|x|)|$

23. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

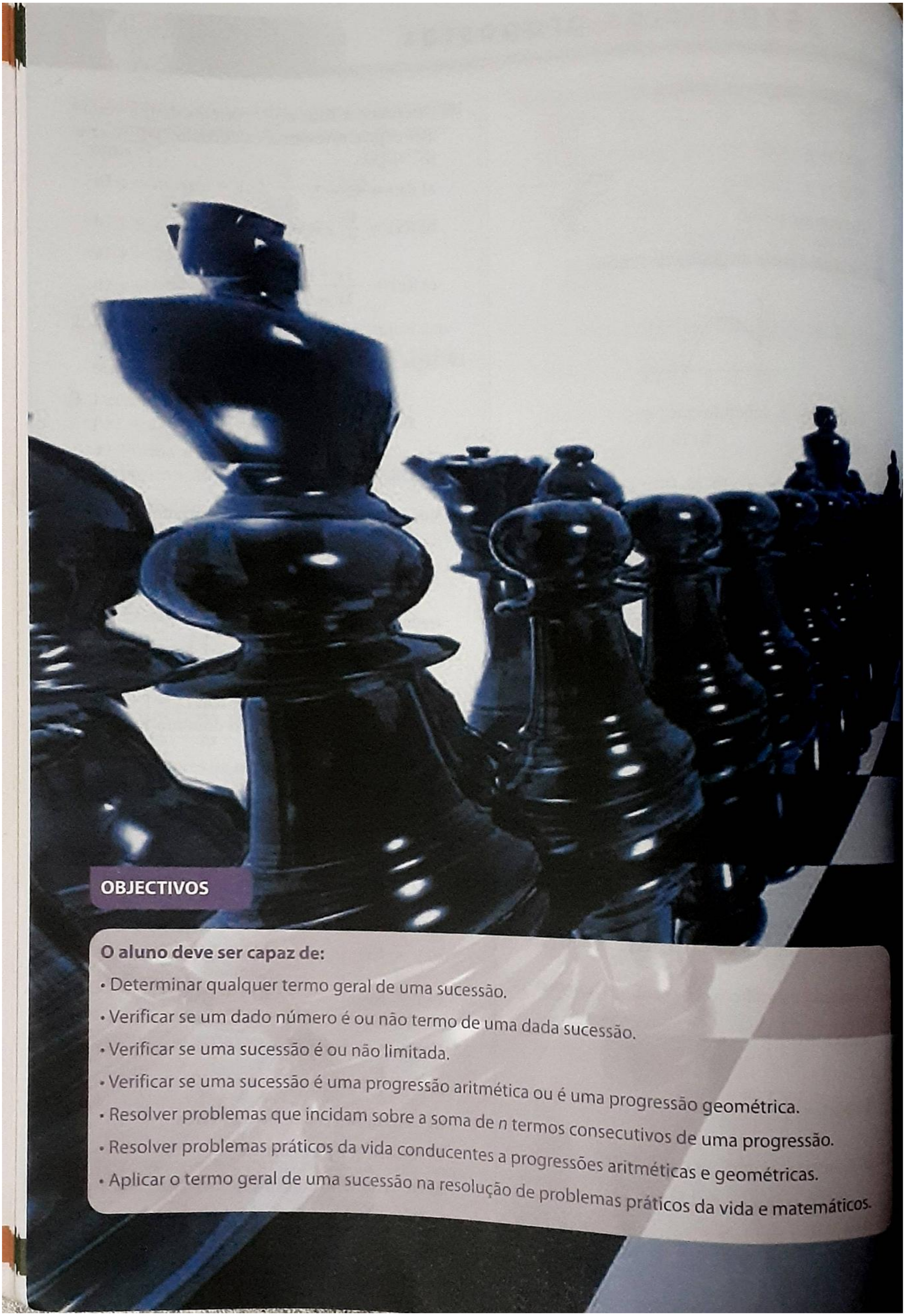
$f(x) = \dfrac{1}{2} - x$

a) Determine o domínio e os zeros.

b) Mostre que f é injectiva.

c) Determine a função f^{-1} e mostre que f é sobrejectiva.

Scanned by TapScanner



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Determinar qualquer termo geral de uma sucessão.
- Verificar se um dado número é ou não termo de uma dada sucessão.
- Verificar se uma sucessão é ou não limitada.
- Verificar se uma sucessão é uma progressão aritmética ou é uma progressão geométrica.
- Resolver problemas que incidam sobre a soma de *n* termos consecutivos de uma progressão.
- Resolver problemas práticos da vida conducentes a progressões aritméticas e geométricas.
- Aplicar o termo geral de uma sucessão na resolução de problemas práticos da vida e matemáticos.

Scanned by TapScanner

Funções reais de variável natural

UNIDADE 4

CONTEÚDOS

Sucessões numéricas

- Noção de sucessão
- Termo geral de uma sucessão
- Limite de uma sucessão. Cálculo de limites e operações com limites
- Indeterminações
- Limites notáveis
- Sucessão infinitamente grande e infinitamente pequena
- Progressão aritmética e progressão geométrica: fórmula do termo geral e soma de *n* termos de uma progressão
- Progressão infinita
- Aplicações
- Limites de sucessões: definição e cálculo de limites

Págs. 66 a 93

Scanned by TapScanner

Sucessões

Chama-se sucessão a toda a função real de variável natural que se traduz simbolicamente por:

$$a_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \smile a_n$$

Os pontos, nesta aplicação, pertencem ao conjunto dos números naturais e as imagens são números reais. Portanto, esta é uma aplicação «especial» que nos permite apresentar apenas a sequência de imagens pois como o domínio é $\mathbb{N}$, este é o único conjunto ordinário.

Uma vez que a variável toma valores naturais, é representada geralmente por n e não por x.

Seja a aplicação $u_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to n \in \mathbb{N} \\ \to y \in \mathbb{R} \end{matrix}$

onde o domínio $= \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$

e o contradomínio $= \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$

Neste caso podemos definir a sucessão (aplicação) da seguinte forma apenas:

$$u_n = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$$

Como o conjunto $\mathbb{N}$ é ordinário, podemos concluir que:

- O primeiro número ímpar é 1.
- O segundo número ímpar é 3.
- O terceiro número ímpar é 5.

Assim, sucessivamente.

1

Considere as sucessões definidas por:

$a_n = \dfrac{2n+1}{n}$

$v_n = \cos\dfrac{n\pi}{4} - \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}$

a) Calcule os cinco primeiros termos.

b) Represente-os graficamente.

Representação gráfica duma sucessão

Como vimos na definição, uma sucessão é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, então, graficamente será uma sequência de pontos isolados.

Seja a sucessão u_n: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \smile u_n = n + 1$$

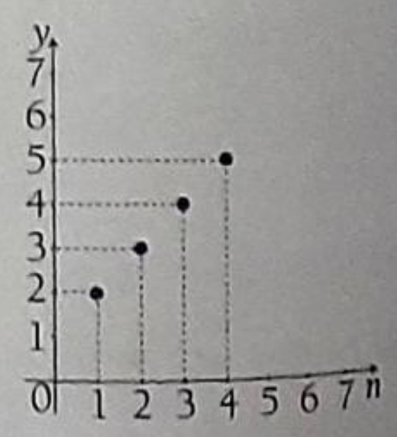
Nesta sequência, e na forma de representar, a função tem uma nova terminologia.

$u_n = n + 1 \to$ termo geral

$n \to$ ordem do termo

$(u_n) \to$ sucessão

$\{u_n\} \to$ contradomínio da sucessão



Assim, na sucessão $u_n = n + 1$ temos:

$u_1 = 1 + 1 = 2 \to$ o primeiro termo da sucessão é 2.

$u_2 = 2 + 1 = 3 \to$ o segundo termo da sucessão é 3 ou ainda o termo de ordem 2 na sucessão $u_n = n + 1$ é 3.

Como existe uma ordem natural pela qual são apresentados os objectos, estes designam-se por ordens e as suas respectivas imagens por termos da sucessão.

Dado o termo geral de uma sucessão, é possível calcular qualquer termo dessa sucessão.

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

Considere a sucessão $u_n = \frac{2n+1}{3n}$. Calcule o valor do:

a) Terceiro, quinto e trigésimo termos.

b) O pê-ésimo termo $\Rightarrow a_p$.

c) Enésimo primeiro termo $\Rightarrow a_{n+1}$.

Resolução

a) $a_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 \cdot 3} = \frac{7}{9}$

$a_5 = \frac{2 \cdot 5 + 1}{3 \cdot 5} = \frac{11}{15}$

$a_{30} = \frac{2 \cdot 30 + 1}{3 \cdot 30} = \frac{60 + 1}{90} = \frac{61}{90}$

b) $a_p = \frac{2p + 1}{3 \cdot p} = \frac{2p + 1}{3p}$

c) $a_{n+1} = \frac{2(n+1) + 1}{3(n+1)} = \frac{2n + 2 + 1}{3n + 3} = \frac{2n + 3}{3n + 3}$

Dados os primeiros termos de uma sucessão é possível determinar o termo de ordem n e chama-se **termo geral da sucessão**.

O termo geral define a expressão **analítica na variável da sucessão**.

Exercícios resolvidos

1. Determine a expressão do termo geral das sucessões seguintes:

a) $2, 4, 6, 8, \ldots, a_n$

b) $1, 3, 5, 7, \ldots, a_n$

c) $3, 8, 13, 18, 23, \ldots, a_n$

d) $-2, 5, -8, 11, \ldots, a_n$

Resolução

a) Representa a sucessão dos números pares. Então, cada termo obtém-se multiplicando a ordem do termo respectivo por 2. A expressão do termo geral é $a_n = 2n$.

b) Representa a sucessão dos números ímpares a partir dê 1. Então cada termo será o anterior ao número par. A expressão do termo geral é $a_n = 2n - 1$.

c) É necessário encontrar a relação que existe entre os termos consecutivos, isto é, a operação que gere sucessivamente os termos.

Como nem todas as sucessões têm a mesma característica vamos estudar como determinar o termo geral. ➡

2

Seja w_n a sucessão cujo termo geral é $w_n = \frac{n + (-1)^n}{1 + n}$.

Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $\exists\, n \in \mathbb{N}: w_n = \frac{24}{26}$

b) $0 \leq w_n \leq 1: \forall\, n \in \mathbb{N}$

3

Dada a sucessão (u_n) de termo geral:

$$u_n = \frac{n + 7}{n + 1}$$

a) Determine os cinco primeiros termos da sucessão.

b) Averigúe se $-\frac{1}{3}$ é termo da sucessão.

c) Determine a ordem depois da qual:

$u_n < \frac{6}{5}$

Scanned by TapScanner

4

Seja (u_n) uma sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1} & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n+1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a) Determine os seis primeiros termos da sucessão.

b) Averigue se $\frac{12}{11}$ é termo da sucessão.

c) Para n par, determine:

$$u_{n+1} - u_n$$

5

Determine o termo geral das sucessões seguintes:

a) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{11}, \ldots$

c) $3, 15, 63, 255, \ldots$

6

Considere a sucessão (v_n) definida por:

$v_1 = 1; \quad v_2 = \frac{1}{2}; \quad v_3 = \frac{1}{3}$

a) Determine os seis primeiros termos:

b) Verifique se o número $\frac{1}{5}$ é termo da sucessão.

c) Determine o termo geral da sucessão.

$a_1 = 3 = 3 + 0 \qquad = 3 + 5 \cdot 0 \;) + 5$

$a_2 = 8 = 3 + 5 \qquad = 3 + 5 \cdot 1 \;) + 5$

$a_3 = 13 = 3 + 5 + 5 \qquad = 3 + 5 \cdot 2 \;) + 5$

$a_4 = 18 = 3 + 5 + 5 + 5 = 3 + 5 \cdot 3$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$a_n = \ldots = \qquad = 3 + 5(n-1) = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$

d) $a_1 = |-2| = 2 = 2 \qquad = 2 + 3 \cdot 0$ Verificação

$a_2 = |5| = 5 = 2 + 3 \qquad = 2 + 3 \cdot 1 \qquad a_1 = 5 \cdot 1 - 2 = 3$

$a_3 = |-8| = 8 = 2 + 3 + 3 \qquad = 2 + 3 \cdot 2 \qquad a_2 = 5 \cdot 2 - 2 = 8$

$a_4 = |11| = 11 = 2 + 3 + 3 + 3 = 2 + 3 \cdot 3 \qquad a_3 = 5 \cdot 3 - 2 = 13$

$a_n = |a_n| = 2 + 3(n+1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

$a_n = (-1)^n (3n - 1)$ (porque o a_1 é negativo.)

Em seguida o aluno poderá fazer a verificação para confirmar os termos da sucessão.

2. Escreva os cinco primeiros termos da sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \begin{cases} 2n - 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Resolução

O primeiro termo é a imagem de 1 que é ímpar e, portanto, $u_1 = 2 \times 1 = 2$.
Já u_2 é a imagem de 2, que é par, e, por isso, $u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$.
De modo idêntico, será:

$u_3 = 2 \times 3 = 6$, $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$ e $u_5 = 2 \times 5 = 10$

E, por exemplo, $u_{200} = 399$ e $u_{401} = 802$.

3. Escreva os sete primeiros termos da sucessão (a_n) definida por:

$$a_n = \begin{cases} 5 - n & \text{se } n \leq 5 \\ n - 5 & \text{se } n \geq 6 \end{cases}$$

Resolução

$a_1 = 5 - 1 = 4$, $a_2 = 5 - 2 = 3$, $a_3 = 5 - 3 = 2$, $a_4 = 5 - 4 = 1$

$a_5 = 5 - 5 = 0$, $a_6 = 6 - 5 = 1$ e $a_7 = 7 - 5 = 2$.

E, por exemplo, $a_{20} = 20 - 5 = 15$.

Scanned by TapScanner

Sucessão monótona

Diz-se que uma sucessão é **monótona** se for sempre crescente ou sempre decrescente.

1. A sucessão de termo geral a_n é **crescente** se:

$$a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2. A sucessão de termo geral a_n é **decrescente** se:

$$a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercícios resolvidos

1. Dê um exemplo de uma sucessão crescente.

Resolução

$(2, 5, 8, 11 \ldots a_n)$ é uma sucessão crescente, pois qualquer termo posterior é sempre superior ao anterior, isto é,

$2 < 5 < 8 < 11 \ldots$ ou $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \ldots < a_{n-1} < a_n$

2. Prove que a sucessão $a_n = \dfrac{n+1}{2n+4}$ é crescente.

Resolução

Temos que provar que: $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{2(n+1)+4} - \frac{n+1}{2n+4} = \frac{n+2}{2n+6} - \frac{n+1}{2n+4} =$$

$$= \frac{(n+2)(2n+4) - (n+1)(2n+6)}{(2n+6)(2n+4)} =$$

$$= \frac{2}{(2n+6)(2n+4)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Dê um exemplo de uma sucessão decrescente.

Resolução

$(11, 8, 5, 2 \ldots a_n)$ é uma sucessão decrescente, qualquer termo posterior é menor que o seu anterior, isto é, $11 > 8 > 5 > 2 \ldots$, ou seja, $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{n-1} > a_n$

4. Diga se a sucessão de termo geral, $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$, é monótona.

Resolução

Temos que provar que: $a_{n+1} - a_n < 0$ ou $a_{n+1} - a_n > 0$

Assim teremos:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão é monótona decrescente porque a fracção é negativa, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7

Estude quanto à monotonia as sucessões de termo geral:

a) $u_n = 3n + (-1)^n$

b) $v_n = \dfrac{-n+3}{n}$

8

Mostre que a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

é decrescente.

9

Seja (u_n) uma sucessão de termo geral $u_n = 1 + v_n$.

O que pode dizer acerca da monotonia de (u_n), sabendo que:

a) (v_n) é crescente.

b) (v_n) é decrescente.

Scanned by TapScanner

10

Use as conclusões de 9 para classificar quanto à monotonia as sucessões definidas por:

a) $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

b) $v_n = 3 + n$

11

Averigue se são ou não monótonas as sucessões seguintes:

a) $x_n = -\frac{2}{n^2} + 5$

b) $y_n = \sqrt{5n + 1}$

c) $z_n = 6(-1)^n + n$

12

Mostre que são limitadas as sucessões de termo geral (u_n) definidas por:

a) $u_n = \frac{2n}{n + 2}$

b) $u_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$

c) $u_n = \cos n$

Sucessão limitada

Uma sucessão diz-se **limitada** quando o conjunto dos seus termos tem minorante e majorante, ou seja, quando é minorada e majorada.

Um número real m é **minorante** do conjunto dos termos de sucessão (a_n) se:

$$a_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$$

Um número real m é **majorante** do conjunto dos termos de sucessão (a_n) se:

$$a_n \leq m, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se uma sucessão não é majorada e/ou não é minorada diz-se que não é **limitada**.

O estudo da monotonia de uma sucessão poderá facilitar a classificação de uma sucessão em limitada ou não limitada, mas as situações são muitas e as sucessões podem não ser monótonas e ser limitadas tal como podem ser monótonas e não ser limitadas.

Toda a sucessão crescente é **minorada** e toda a sucessão decrescente é **majorada**.

Exercício resolvido

Estude quanto à limitação as sucessões definidas por:

a) $a_n = 2n + 1$ b) $b_n = (-1)^n \cdot n$ c) $c_n = \frac{n^2 - 5}{3n^2}$

Resolução

a) Cada termo da sucessão (a_n) é a soma do dobro da respectiva ordem com um. Não é possível encontrar um valor que seja superior ou igual a todos os termos da sucessão. O conjunto dos termos da sucessão (a_n) é minorado, por exemplo, $a_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo a sucessão não é limitada.

b) A sucessão (b_n) é igual a n, se n é par e é igual a $a - n$, se n é ímpar. Para os termos de ordem par, a sucessão não é majorada e para os termos de ordem ímpar, a sucessão não é minorada, logo (b_n) não é limitada.

c) O termo geral da sucessão pode ser escrito como:

$$c_n = \frac{n^2}{3n^2} - \frac{5}{3n^2} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3n^2}$$

Quanto maior for a ordem do termo, menor será o valor da expressão $\frac{5}{3n^2}$, isto é, menor será o valor real subtraído a $\frac{1}{3}$.

Assim, a sucessão é crescente. Sendo cada termo superior ao anterior, o primeiro termo da sucessão é o maior minorante da mesma:

$$c_1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$$

Scanned by TapScanner

Todos os valores reais do intervalo $\left]-\infty, -\frac{4}{3}\right]$ minoram o conjunto dos termos da sucessão, isto é,

$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \geq -\frac{4}{3}$

Mas a sucessão também é majorada já que nenhum termo é superior ou igual a $\frac{1}{3}$.

Então, $-\frac{4}{3} \leq c_n < \frac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo (c_n) é uma sucessão limitada.

Limite duma sucessão

Infinitamente grande positivo

Consideremos a sucessão dos múltiplos de 3, $a_n = 3n$, em que alguns termos são:

$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$$

Existirá algum múltiplo de 3 maior que todos os outros? Não. Pois por maior que seja o múltiplo de 3 que imaginemos ainda existe outro maior do que ele e todos os múltiplos de 3 são também maiores do que o número que imaginámos.

Dizemos que a sucessão dos múltiplos de 3 é um **infinitamente grande positivo** ou que tende para mais infinito e escreve-se:

$$\lim (3n) = +\infty \quad \text{ou} \quad 3n \to +\infty$$

que se lê: limite de $3n$ é $+\infty$ ou $3n$ tende para $+\infty$.

A sucessão (a_n) é um **infinitamente grande positivo** se, e só se, qualquer que seja o número real A, é possível determinar uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que A.

Exercício resolvido

Determine a ordem a partir da qual os termos da sucessão $a_n = 3n$ são maiores do que 300.

Resolução

$3n > 300 \Leftrightarrow n > 100$

A partir do termo de ordem 101, todos os termos da sucessão são maiores do que 300.

Infinitamente grande negativo

Dada a sucessão, $b_n = -(3n)$, em que alguns dos seus termos são:

$$-3, -6, -9, -12, -15, \ldots$$

Se multiplicarmos por -1 os termos da sucessão (b_n) obtemos a sucessão dos múltiplos de 3 ou $a_n = 3n$ que já sabemos tende para $+\infty$. Dizemos

13

Justifique que as sucessões seguintes são infinitamente grandes positivos:

a) $r_n = 5n^2 + 2$

b) $s_n = 4 + \sqrt{n+1}$

c) $y_n = 9n^2$

14

Com base nos gráficos das sucessões:

$s_n = 5^n$ e $d_n = -5^{n+3}$

investigue o limite de (d_n).

15

Mostre que a sucessão (d_n) de termo geral $d_n = 3 - 2^n$ é um infinitamente grande negativo.

Scanned by TapScanner

que a sucessão (b_n) tende para $-\infty$ ou que é um **infinitamente grande negativo** e escreve-se:

$$\lim(-3n) = -\infty \quad \text{ou} \quad -3n \to -\infty$$

A sucessão (a_n) é um infinitamente grande negativo se, e só se, a sucessão $(-a_n)$ é um infinitamente grande positivo.

As sucessões:

$u_n = n$

$v_n = \sqrt{n}$

$w_n = n^2$

$z_n = 2^n$

são infinitamente grandes em módulo.

Infinitamente grande em módulo

Consideremos a sucessão: $c_n = (-1)^n 3n$.

Alguns termos são: $-3, +6, -9, +12, -15, \ldots$

Em módulo os termos da sucessão são os termos da sucessão dos múltiplos de 3, que já sabemos tende para $+\infty$. Dizemos, então, que a sucessão (c_n) tende para infinito ou que é um **infinitamente grande em módulo** e escreve-se:

$$\lim |(-1)^n \cdot 3n| = +\infty \quad \text{ou} \quad (-1)^n \cdot 3n \to \infty$$

A sucessão (a_n) é um infinitamente grande em módulo se, e só se, a sucessão $(|a_n|)$ é um infinitamente grande positivo.

16

Dada a sucessão:

$$e_n = (-2)^n \cdot (n+1)$$

a) Determine os cinco primeiros termos de (e_n).

b) Obtenha o gráfico da sucessão.

c) Prove que se trata de um infinitamente grande em módulo.

Infinitamente pequeno ou infinitésimo

Dadas as sucessões e alguns dos seus termos:

$u_n = \frac{1}{n}$; $\quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$

$v_n = -\frac{1}{n}$; $\quad -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \ldots$

$w_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; $\quad -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \ldots$

Verificamos que em qualquer dos casos os termos das sucessões se aproximam de zero sem nunca assumir esse valor. Dizemos, então, que as sucessões tendem para zero ou que convergem para zero ou que têm por limite zero ou ainda que são **infinitésimos** e escreve-se:

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ ou } \frac{1}{n} \to 0$$

$$\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ ou } -\frac{1}{n} \to 0$$

$$\lim\left(-1\right)^n \frac{1}{n} = 0 \text{ ou } \left(-1\right)^n \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

A sucessão (a_n) é um infinitamente pequeno ou infinitésimo se, e só se, para qualquer que seja δ é possível encontrar uma ordem a partir da qual todos os termos são em módulo menores que δ.

17

Das sucessões:

$a_n = \frac{1}{n}$; $b_n = n$; $c_n = (-1)^n$

$d_n = n^2$; $e_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$;

$f_n = \frac{3\,000}{n}$; $g_n = 2n$;

$h_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$; $i_n = n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$.

Diga quais delas são:

a) Infinitamente grandes.

b) Infinitamente pequenas.

18

Averigue se a sucessão (a_n) é um infinitamente pequeno:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n < 6 \\ 3, & n \geq 0 \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

Exemplos

1. $a_n = n$ é infinitamente grande $\Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$ é infinitamente pequeno.
2. $a_n = \frac{4\,000}{n^2}$ é infinitamente pequeno $\Rightarrow a_n = \frac{n^2}{4\,000}$ é infinitamente grande.

Sucessão convergente

Uma sucessão é convergente quando existe um número real a que é o seu limite.

Uma sucessão de termo geral (a_n) é convergente para a, com $a \in \mathbb{R}$, se e só se, $a_n - a$ é infinitésimo.

Diz-se também que a é o limite da sucessão a_n e escreve-se:

$$a_n \to a \text{ ou } \lim a_n = a$$

Uma sucessão que não é convergente é divergente.

Exercícios resolvidos

Recorrendo à definição, prove que $a_n = \frac{2n}{n+1}$ converge para 2.

Resolução

$$a_n - 2 = \frac{2n}{n+1} - 2 = \frac{2n - 2n - 2}{n+1} = \frac{-2}{n+1}$$

Como $\left|\frac{-2}{n+1}\right| < \frac{2}{n}$ é um infinitésimo, podemos dizer que $(a_n - 2)$ é um infinitésimo, ou seja, que (a_n) tende para 2 ou que tem por limite 2, ou que (a_n) converge para 2.

Destacamos ainda que:

- Uma sucessão (a_n) é convergente para a se, e só se, $a_n - a$ é um infinitésimo, ou seja,

Se $\forall\, \delta > 0$, existe uma ordem depois da qual $|a_n - a| < \delta$

Esta condição é equivalente a

$$-\delta < a_n - a < \delta \Leftrightarrow a - \delta < a_n < a + \delta$$

que significa que a_n é valor aproximado de a com erro inferior a δ. Também se escreve: $a_n \in \mathcal{V}_\delta(a)$.

$\mathcal{V}_\delta(a)$ lê-se «vizinhança de centro a e raio δ» e representa o intervalo aberto $]a - \delta, a + \delta[$.

19

Mostre que $\frac{n^2 + n}{n^3} \to 0$.

20

Confirme que tende para zero a sucessão de termo geral:

$$i_n = \frac{4(-1)^{2n+1}}{n^2 + 1}$$

As sucessões:

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = \frac{1}{n^2}$

$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad d_n = \frac{1}{2^n}$

são infinitésimos de referência.

Da definição de sucessão convergente resulta imediatamente que todo o infinitésimo é convergente para zero.

Os infinitamente grandes são sucessões divergentes.

21

Diga em cada um dos casos se a sucessão é convergente ou divergente.

a) $a_n = 2^n$

b) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $d_n = (-1)^n$

d) $e_n = \frac{(-1)^n}{n}$

e) $f_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$

22

Recorrendo à definição prove que:

a) $\frac{n^2}{n^2 + 2} \to 1$

b) $\frac{4n + 2}{6n + 1} \to \frac{2}{3}$

c) $\frac{4 - 2n}{n + 1} \to -2$

Scanned by TapScanner

23

Recorrendo à definição prove que:

a) $u_n = \frac{2n+1}{n}$

não converge para 1.

b) $u_n = \frac{3n}{9n+1}$

não converge para $\frac{1}{2}$.

24

A sucessão:

$$u_n = \frac{2n+1}{3n+3}$$

converge para $\frac{2}{3}$. Determine a menor ordem a partir da qual os termos de u_n são valores aproximados de $\frac{2}{3}$ com erro inferior a 10^{-4}.

25

Determine $\lim a^n$ se:

a) $a = 4$

b) $a = -5$

c) $a = -\frac{2}{3}$

d) $a = \sqrt{3}$

e) $a = 0{,}99$

f) $a = -1{,}003$

26

Calcule os limites das sucessões seguintes:

a) $a_n = \frac{2n}{3}$

b) $b_n = \frac{n+1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} k = k$ (k = constante)

Exercício resolvido

A sucessão definida por $a_n = \frac{2n+3}{n}$ converge para 2.

Determine a menor ordem a partir da qual os termos da sucessão são valores aproximados de 2 com erro inferior a uma milésima.

Resolução

a_n é valor aproximado de 2 com erro inferior a uma milésima se:

$|a_n - 2| < 0{,}001$

$$|a_n - 2| < 0{,}001 \Leftrightarrow \left|\frac{2n+3}{n} - 2\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2n+3-2n}{n}\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{n}\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow \frac{3}{n} < 0{,}001 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3}{0{,}001} \Leftrightarrow n > 3\,000$$

Os termos de ordem superior a 3 000 são valores aproximados de 2 com erro inferior a 0,001.

Cálculo do limite de sucessões

Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões convergentes e $\lim (a_n) = a$ e $\lim (b_n) = b$. Então, verificam-se as seguintes propriedades:

- $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$
- $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b$
- $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$
- $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ $(b_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0)$
- $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \pm\infty$ (se $a \neq 0$ e $b = 0$)
- $\lim a_n{}^{b_n} = \lim a_n{}^{\lim b_n} = a^b$ (a e b não podem ser simultaneamente nulos)
- $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n} = \sqrt[k]{a}$ (se k é par, $a \geq 0$)

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Dadas as sucessões: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Aplique as propriedades anteriores e indique:

a) $\lim (a_n - b_n)$ b) $\lim (a_n \cdot b_n)$ c) $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

d) $\lim \sqrt{a_n + b_n}$ e) $\lim \sqrt[3]{b_n}$ f) $\lim \left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

Resolução

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$; $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$

a) $\lim (a_n - b_n) = 1 - 0 = 1$

b) $\lim (a_n \cdot b_n) = 1 \cdot 0 = 0$

c) $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{1}{0} = +\infty$ (a sucessão é divergente)

d) $\lim \sqrt{a_n + b_n} = \sqrt{1 + 0} = 1$

e) $\lim \sqrt[3]{b_n} = \sqrt[3]{0} = 0$

f) $\lim \left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{0}{1} = 0$

Se as sucessões são **divergentes**, teremos:

- Se $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = +\infty$, então
  $\lim (a_n + b_n) = +\infty$, simbolicamente, $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$.
- Se $\lim a_n = -\infty$ e $\lim b_n = -\infty$, então
  $\lim (a_n - b_n) = -\infty$, simbolicamente, $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$.
- Se $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = -\infty$, então
  $\lim (a_n \cdot b_n) = -\infty$, simbolicamente, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.
- Se $\lim a_n = a$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\lim b_n = \pm\infty$, então
  $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, simbolicamente, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Se $0 < a < 1$, então $\begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$
- Se $a > 1$, então $\begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = 0 \end{cases}$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
- $(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

27

Investigue o limite de cada uma das sucessões:

a) $a_n = \frac{6n + 1}{-3n}$

b) $b_n = 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

28

Verifique se são verdadeiras ou falsas as igualdades seguintes:

a) $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

b) $\lim (n^2 - 2 \cdot 10^{100}) = 0$

c) $\lim \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{7n}}} = 0$

d) $\lim \left(\frac{1}{n^3} \cdot 7n\right) = 0$

Scanned by TapScanner

29

Mostre que:

a) $\lim \dfrac{-4n + 4}{(n + 1)^2} = 0$

b) $\lim (-4n^3 + 500) = -\infty$

c) $\lim [(-4)^n \cdot \sqrt{n + 2}] = \infty$

d) $\lim \dfrac{(0{,}3)^n}{4} = 0$

Exercícios resolvidos

1. Se $a_n \to 3$; $b_n \to \dfrac{1}{3}$; $c_n \to -\infty$; $d_n \to +\infty$ e $e_n \to 0$ sendo (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) sucessões de termos positivos. Qual é o limite das sucessões?

a) $(a_n \cdot c_n)$ b) $(d_n \cdot c_n)$ c) $\left(\dfrac{e_n}{a_n}\right)$ d) $\left(\dfrac{a_n}{e_n}\right)$ e) $(b_n)^{d_n}$

Resolução

a) $a_n \cdot c_n \to -\infty$ b) $d_n \cdot c_n \to -\infty$ c) $\dfrac{e_n}{a_n} \to 0$ d) $\dfrac{a_n}{e_n} \to +\infty$

e) $(b_n)^{d_n} = 0$

2. Calcule:

a) $\lim (2n + 1)$ b) $\lim \dfrac{3}{n + 4}$ c) $\lim \dfrac{-5}{n}$

Resolução

a) $\lim (2n + 1) = \lim 2n + \lim 1 = 2 \cdot (+\infty) + 1 = +\infty + 1 = +\infty$

b) $\lim \dfrac{3}{n + 4} = \dfrac{\lim 3}{\lim (n + 4)} = \dfrac{3}{+\infty + 4} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

c) $\lim \dfrac{-5}{n} = -5 \cdot \lim \dfrac{1}{n} = -5 \cdot \lim \dfrac{1}{+\infty} = -5 \cdot 0 = 0$

Indeterminações

Das operações com sucessões diferentes podem resultar várias indeterminações como:

$$\infty - \infty;\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty^0;\ 0 \cdot \infty;\ 1^\infty$$

Das operações com sucessões convergentes podem resultar indeterminações como:

$$\frac{0}{0} \text{ ou } 0^0$$

Quando efectuando alguns cálculos se determina o limite diz-se que se levantou a indeterminação.

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Levanta-se esta indeterminação, normalmente, colocando em evidência no numerador e no denominador os termos de maior potência.

As indeterminações $\frac{0}{0}$ e $0 \cdot \infty$ transformam-se muitas vezes, depois de efectuados alguns cálculos na indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

1. Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim \dfrac{2n+3}{4n-7}$ b) $\lim \dfrac{2n^3}{n^2+1}$ c) $\lim \dfrac{5n^2+1}{1+n^3}$

d) $\lim \dfrac{n+\sqrt{n}}{2n}$ e) $\lim \dfrac{3^n+1}{2^n-5}$

Resolução

a) $\lim \dfrac{2n+3}{4n-7} = \lim \dfrac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(4-\frac{7}{n}\right)} = \lim \dfrac{2n}{4n} \cdot 1 = \lim \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim \dfrac{2n^3}{n^2+1} = \lim \dfrac{2n^3}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \dfrac{2n^3}{n^2} = \lim (2n) = +\infty$

c) $\lim \dfrac{5n^2+1}{1+n^3} = \lim \dfrac{5n^2\left(1+\frac{1}{5n^2}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^3}+1\right)} = \lim \dfrac{5n^2}{n^3} = \lim \dfrac{5}{n} = 0$

d) $\lim \dfrac{n+\sqrt{n}}{2n} = \lim \dfrac{n\left(1+\sqrt{\frac{n}{n^2}}\right)}{2n} = \dfrac{n\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{2n} =$

$= \lim \dfrac{n}{2n} \cdot 1 = \lim \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim \dfrac{3^n+1}{2^n-5} = \lim \dfrac{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{2^n\left(1-\frac{5}{2^n}\right)} = \lim \dfrac{3^n}{2^n} = \lim \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \infty$

2. Calcule $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-7n}}{2n+5}$.

Resolução

$$\lim \frac{\sqrt{n^2-7n}}{2n+5} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(1-\frac{7n}{n^2}\right)}}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)} = \lim \frac{|n|\sqrt{1-\frac{7}{n}}}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)} =$$

Como $n > 0$, $|n| = n$

$$= \lim \frac{n\sqrt{1-\frac{7}{n}}}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{1-\frac{7}{n}}}{2+\frac{5}{n}} = \frac{\sqrt{1-0}}{2+0} = \frac{1}{2}$$

30

Determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se:

a) $a_n = \dfrac{3}{n}$

b) $a_n = \dfrac{3-n}{n+2}$

c) $a_n = \dfrac{7-3n}{n}$

d) $a_n = \dfrac{4n-3}{5-3n}$

e) $a_n = \dfrac{3}{n^2+1}$

f) $a_n = \dfrac{n^2+1}{3}$

g) $a_n = \dfrac{n^2-11}{3n-5n^2+10}$

h) $a_n = \dfrac{7n-6}{6n^2+5n}$

i) $a_n = \dfrac{2n^3}{-n^2+6}$

Scanned by TapScanner

31

Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$ se:

a) $a_n = \dfrac{5n^2 + 3}{3n^2 - 4}$

b) $a_n = \dfrac{2 - 3n + 4n^2}{5n^2 - 6 + 7}$

c) $a_n = \dfrac{n^5}{-n^3 + 10}$

d) $a_n = \dfrac{1\,000n}{1 + n^2}$

e) $a_n = \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{n + 2}{n - 1}$

f) $a_n = \dfrac{3 \cdot 5^{2n} - 2}{4 \cdot 25^n + 5}$

g) $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{8n - 5}{n + 10}}$

h) $a_n = \dfrac{3 \cdot 2^{n+2} + 2^n}{2^{n+2} + 2^n}$

i) $a_n = \dfrac{(3n - 5)^2 (n + 2)^3}{(n^2 + 25)(3n^3 - 5)}$

j) $a_n = \dfrac{(n - 10)^{85} (n - 105)^{25}}{(2 - n^{15})^4 (n^3 + 11)}$

32

Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $\lim \dfrac{-3n + n^2}{n^2} = -3$

b) $\lim \left(\sqrt{\dfrac{n + 2}{n}} - 1\right) = +\infty$

c) $\lim \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2^n}{3^n + 1} - 1\right) = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim \dfrac{4n^3 - 5n + n^4}{-7n^4} = \dfrac{4}{7}$

Dum modo geral dados dois polinómios de graus, respectivamente, p e q, tem-se:

$$\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_0}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_0} = \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q}$$

- $\lim \dfrac{a_0 n^p}{b_0 n^q} = \dfrac{a_0}{b_0}$ se $p = q$
- $\lim \dfrac{a_0 n^p}{b_0 n^q} = \infty$ se $p > q$
- $\lim \dfrac{a_0 n^p}{b_0 n^q} = 0$ se $p < q$

Indeterminação $\infty - \infty$

Dependendo do tipo de sucessões envolvidas utilizam-se normalmente dois métodos para levantar a indeterminação.

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim (3^n - 4^n)$ b) $\lim (-n^2 + n)$ c) $\lim \left(\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n}\right)$

Resolução

a) $\lim (3^n - 4^n) = \infty - \infty$. Levanta-se a indeterminação colocando a maior potência em evidência.

$$\lim (3^n - 4^n) = \lim (-4^n + 3^n) = \lim \left[-4^n \left(1 - \frac{3^n}{4^n}\right)\right] =$$

$$= \lim \left[-4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right] = \lim (-4^n) \cdot 1 = -\infty$$

b) $\lim (-n^2 + n) = -\infty + \infty$

$$\lim (-n^2 + n) = \lim \left[-n^2 \left(1 - \frac{n}{n^2}\right)\right] = \lim \left[-n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim [(-n^2) \cdot 1] = -\infty$$

c) $\lim \left(\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n}\right) = \infty - \infty$

Neste caso levanta-se a indeterminação multiplicando pelo conjugado ambos os termos da fracção.

$$\lim \frac{\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n}}{1} =$$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n}\right)}{\left(\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n}\right)}$$

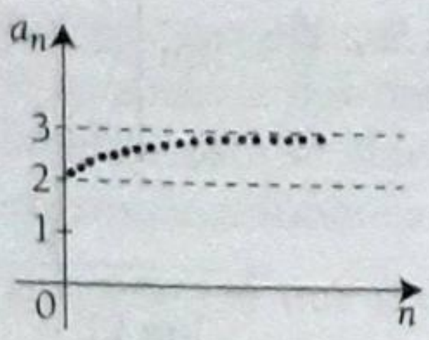
$$= \lim \frac{\cancel{2n} + 1 - \cancel{2n}}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{2n + 1} + \sqrt{2n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Scanned by TapScanner

Número de Neper e o limite notável

Dada a sucessão (a_n) definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, verifica-se que a sucessão é monótona crescente e que o seu crescimento é cada vez mais lento e aproxima-se de um certo valor. Verifica-se também que ela é limitada pois os seus termos estão no intervalo [2, 3]. Sendo monótona e limitada, ela é convergente. O limite da sucessão é um número irracional e representa-se pela letra e e chama-se **constante de Euler** ou **número de Neper**.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$



$e = 2{,}7182811828...$

Prova-se que:

- $\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, se $a_n \to +\infty$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+a} = e$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^{n+a} = e$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn} = e^k$
- $\lim \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n = e^{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$

Exemplos

1. $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = e^3$

2. $\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2}$

3. $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim \left[\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n\right]^2 = (e^3)^2 = e^6$

   $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim \left(1 + \frac{6}{2n}\right)^{2n} = e^6$ (outra resolução)

4. $\lim \left(1 + \frac{5}{2n}\right)^n = \lim \left[\left(1 + \frac{5}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = (e^5)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{5}{2}}$

5. $\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$

6. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e \cdot 1 = e$

Scanned by TapScanner

33

Calcule:

a) $\lim\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n}$

b) $\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2n}$

c) $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n}$

d) $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

e) $\lim\left(1-\frac{5}{2n}\right)^{n}$

f) $\lim\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n}$

7. $\lim\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}=$

$=\lim\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}=$

$=e\cdot 1=e$

8. $\lim\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{n}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$

9. $\lim\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}=\lim\left[\frac{n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right]^{n}=\lim\left[\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right]^{n}=$

$=\frac{1}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e^{2}}$

10. $\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n\sqrt{n}}{n}}=$

$=\lim\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{\sqrt{n}}{n}}=$

$=\lim\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^{\sqrt{\frac{n}{n^{2}}}}=$

$=\lim\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^{\lim\sqrt{\frac{1}{n}}}=$

$=(e^{2})^{0}=1$

11. $\lim\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}=$

$=\lim\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}=$

$=1\cdot e=e$

Scanned by TapScanner

Progressão aritmética

Considere as seguintes sucessões:

$(2, 4, 6, 8, 10 \ldots a_n)$ e $(3, 6, 9, 12, 15 \ldots b_n)$

A primeira é uma sequência de números pares, isto é, a diferença entre o termo seguinte e o anterior é 2, ou seja, para se obter o termo seguinte adiciona-se a mesma unidade, neste caso 2 (dois).

A segunda sequência também tem as mesmas características, isto é, a diferença entre os termos consecutivos é 3 (três).

Como se verifica, são duas sucessões «especiais» em que a determinação dos seus termos obedece a uma ordem estipulada por um valor constante que é adicionado sempre ao termo anterior para se obter o seguinte. A este tipo de sucessão dá-se o nome de **progressão aritmética**.

Uma **progressão aritmética** é uma sucessão em que a diferença (d) entre dois termos consecutivos é constante. A d chama-se **razão** da progressão aritmética.

$$a_{n+1} - a_n = d, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ ou } a_{n+1} = a_n + d$$

Da definição de progressão aritmética resulta então que:

- Se $d > 0$ a progressão é **monótona crescente**.
- Se $d < 0$ a progressão é **monótona decrescente**.
- Se $d = 0$ a progressão é **constante**.

34

Indica as que são progressões aritméticas:

a) (1, 3, 5, 7...)

b) (2, 4, 6, 8...)

c) (3, 7, 11, 15...)

d) (3, 3, 3, 3...)

e) (5, 3, 1, −1...)

f) ($\sqrt{1}$ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$...)

35

Duma progressão aritmética (a_n) sabe-se que $a_1 = 5$ e $a_2 = 9$.

Determine d e a_3.

Termo geral duma progressão aritmética

Sejam a_1; a_2; a_3; ...; a_n os termos de uma progressão aritmética.
Assim:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \ldots\ldots\ldots\ldots + d}_{(n-1) \text{ parcelas}}$

Seguindo a mesma lei de formação podemos determinar o termo geral ou o termo de ordem n:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

1. Determine os termos a_5, a_{20} da progressão aritmética cujo primeiro termo é 2 e a razão é $d = 3$.

Resolução

Dados

$a_1 = 2$

$d = 3$

$a_5 = ?$

$a_{20} = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_5 = 2 + (5-1)3 \Leftrightarrow a_5 = 2 + 12 \Leftrightarrow a_5 = 14$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{20} = 2 + (20-1)3 \Leftrightarrow a_{20} = 2 + 57 \Leftrightarrow a_{20} = 59$

2. Determine o décimo quinto termo da progressão aritmética se $a_5 = 35$ e $a_{21} = -25$.

Resolução

Dados

$a_5 = 35$

$a_{21} = -25$

$a_{15} = ?$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{cases} 35 = a_1 + (5-1)d \\ -25 = a_1 + (21-1)d \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 35 \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 35 - 4d \\ a_1 + 20d = -25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 35 - 4d + 20d = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 16d = -60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ d = -\frac{60}{16} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ d = -\frac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 35 - 4 \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) \\ d = -\frac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 35 + 15 = 50 \\ d = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

Logo

$a_{15} = a_1 + (15-1)d \Leftrightarrow a_{15} = 50 + \overset{7}{\cancel{14}} \cdot \left(-\frac{15}{\cancel{4}_{2}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_{15} = 50 - \frac{7 \cdot 15}{2} \Leftrightarrow a_{15} = \frac{100 - 105}{2} = -\frac{5}{2}$

36

Determine o décimo quarto termo a_{14} e o termo geral das progressões aritméticas seguintes:

a) $a_n = (5; 9; 13; 17...)$

b) $a_n = (7; 4; 1; -2...)$

37

Verifique se (u_n) é uma progressão aritmética:

a) $u_n = 5 - 7n$

b) $u_n = n^2 + 1$

c) $u_n = \frac{4}{n}$

d) $u_n = \frac{4}{3}n - 1$

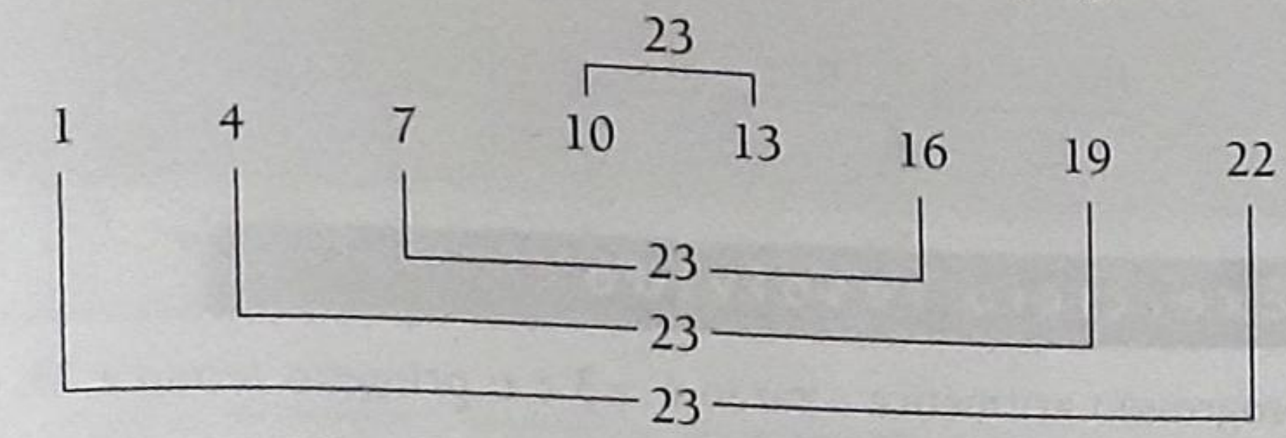
38

Determine a diferença d e o primeiro termo a_1 duma progressão aritmética, sabendo que o seu nono termo é 2 e o seu décimo terceiro termo é -10.

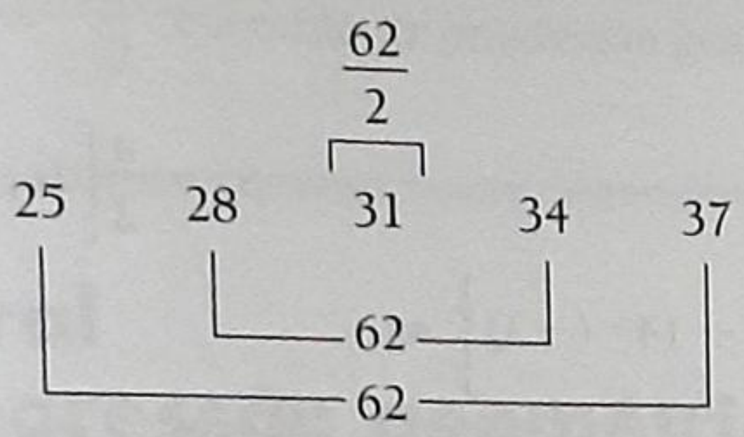
Scanned by TapScanner

Soma dos *n* primeiros termos consecutivos duma progressão aritmética

Consideremos os oito primeiros termos de uma progressão aritmética:



Analisemos o que sucede se o número dos termos for ímpar:



Calculando pelo processo anterior, teremos:

$$S = (25 + 37) \cdot \frac{4}{2} + 31 = (25 + 37) \cdot 2 + (25 + 37) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= (25 + 37) \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) = (25 + 37) \cdot \frac{5}{2}$$

Tomando n termos consecutivos de uma progressão aritmética, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é constante e igual à soma dos extremos. Se houver termo médio, esse será igual à semi-soma dos extremos.

Logo, quer n seja par ou ímpar, a soma dos n termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}$$

em que a_1 e a_n são o primeiro termo e o último termo a somar.

Exercício resolvido

Determine a soma dos 12 primeiros termos da progressão aritmética (4, 8, 12, 16, ...).

Resolução

Dados

$d = 4$

$a_1 = 4$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$\Leftrightarrow a_{12} = 4 + 11 \cdot 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_{12} = 4 + 44 = 48$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{12} = \frac{4 + 48}{2} \cdot 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{12} = \frac{52}{2} \cdot 12 = 312$

39

Considere (u_n) uma progressão aritmética de razão d, sendo u_1 o primeiro termo e S_n a soma dos primeiros termos da sucessão.

a) Se $u_1 = 3$ e $d = 4$, calcule u_7, u_{15} e S_{10}.

b) Se $u_5 = 6$ e $d = -2$, calcule u_1, u_{10} e S_5.

c) Se $u_4 = 16$ e $u_9 = 34$, calcule u_1 e d.

d) Se $d = 3$, e $u_5 = 17$, calcule u_1.

e) Se $u_4 + u_5 + u_6 = 63$ e $u_{10} + u_{12} = 102$, calcule d e u_1.

40

Numa progressão aritmética, tem-se $u_2 = 24$ e $u_6 = 384$.

a) Determine o primeiro termo e a razão.

b) Calcule a soma dos 10 primeiros termos.

Scanned by TapScanner

41

Seja a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \end{cases}$$

a) Calcule os quatro primeiros termos de (u_n).

b) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética?

c) Estude quanto à monotonia a sucessão (u_n).

d) Se a soma dos primeiros termos de (u_n) é -93, quantos termos se somaram?

42

Quantos números pares há entre 200 e 20 000?

Por outro lado, a fórmula da soma pode ser escrita da seguinte forma: sabemos que o termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)d$ e a soma é $s_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$. Assim,

$$S_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

Exercício resolvido

Numa progressão aritmética a razão é -3 e o primeiro termo é 23. Calcule a soma dos 15 primeiros termos.

Resolução

Dados
$d = -3$
$a_1 = 23$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2 \cdot 23 + 14 \cdot (-3)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(46 - 42) \Leftrightarrow S_{15} = \frac{15}{2} \cdot 4^2 = 30$$

Progressão geométrica

Observe as seguintes sucessões:

(4, 16, 64...) e (48, −24, 12, −6...)

Facilmente notamos que se trata duma sucessão não aritmética, pois a diferença entre os termos consecutivos não é constante.

Mas se em vez de adicionarmos os termos anteriores multiplicarmos pela mesma constante, notamos que se trata também de sucessões «especiais», onde o quociente entre os termos consecutivos é constante.

Às sequências com estas características dá-se o nome de **progressão geométrica** e o quociente de razão da progressão geométrica.

Uma progressão geométrica é uma sucessão em que a razão (q) entre dois termos consecutivos é constante.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall n \in \mathbb{N}\ (a_n \neq 0) \text{ ou } a_{n+1} = a_n \cdot q$$

A monotonia da progressão depende pois dos sinais do primeiro termo e da razão, podendo verificar-se os seguintes casos:

- Se $q > 1$ e $\begin{cases} a_1 > 0 \text{ a progressão geométrica é } \textbf{monótona crescente.} \\ a_1 < 0 \text{ a progressão geométrica é } \textbf{monótona decrescente.} \end{cases}$
- Se $q = 1$ a progressão geométrica é **constante.**
- Se $0 < q < 1$ e $\begin{cases} a_1 > 0 \text{ a progressão geométrica é } \textbf{monótona decrescente.} \\ a_1 < 0 \text{ a progressão geométrica é } \textbf{monótona crescente.} \end{cases}$
- Se $q < 0$ a progressão geométrica é não monótona (**oscilante**).

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Calcule a razão das sucessões seguintes:

a) 4, 16, 64, ...

b) 48, −24, 12, −6, ...

Resolução

a) $\frac{64}{16} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow q = 4$ é a razão da progressão geométrica.

b) $\frac{-6}{12} = \frac{12}{-24} = \frac{-24}{48} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow q = -\frac{1}{2}$ é a razão da progressão geométrica.

Termo geral duma progressão geométrica

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ os termos duma progressão geométrica. Assim:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \cdot q = a_1 \cdot q^4$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

onde (a_n) é o termo geral da progressão geométrica.

Exercícios resolvidos

1. Se numa progressão geométrica $a_1 = 1$ e $q = 3$, calcule a_4.

Resolução

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\quad a_4 = 1 \cdot 3^{4-1} \Leftrightarrow a_4 = 1 \cdot 3^3 \Leftrightarrow a_4 = 27$

2. Determine o quinto termo duma progressão geométrica em que o primeiro termo é 2 e a razão é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_5 = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{5-1} \Leftrightarrow a_5 = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \Leftrightarrow a_5 = 2 \cdot \left(+\frac{\sqrt{16}}{16}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_5 = 2 \cdot \left(\frac{4}{16}\right) \Leftrightarrow a_5 = \frac{1}{2}$

43

Verifique se as sucessões são progressões geométricas e calcule a razão.

a) (3, 8, 15...)

b) (−18, 6, −2...)

c) $(1, 1-a, 1-2a+a^2)$

d) a, b, ab $(b \neq 0)$

44

Determine o décimo termo das seguintes progressões geométricas:

a) (16, −8, 4...)

b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\ldots\right)$

45

As medidas expressas em graus dos ângulos internos de um quadrilátero constituem termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão 2. Qual é a medida de cada ângulo do quadrilátero?

Scanned by TapScanner

46

Determine o termo geral das seguintes sucessões:

a) (3; −6; 12; −24; −48...)

b) (3; 2; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{16}{27}$...)

c) (5; 11; 17; 23; 29...)

d) (5; −11; 17; −23; 29...)

e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{2}{9}; \frac{2\sqrt{2}}{13}; \frac{4}{17} \ldots\right)$

f) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{8}; -\frac{5}{16}; \frac{7}{32}; -\frac{9}{64} \ldots\right)$

47

Seja (b_n) uma progressão geométrica de razão r, tal que $a_2 = r^3$ e $a_7 = 256$.

Determine:

a) A razão e o primeiro termo desta sucessão.

b) A soma dos vinte primeiros termos.

Podemos obter outra fórmula para o termo geral duma progressão geométrica.

Sejam a_n e a_m os termos duma progressão geométrica de ordem n e m $(n > m)$ de razão q.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, a_n$$

Assim,

$$\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_m = a_1 \cdot q^{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_m} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{a_1 \cdot q^{m-1}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-1-m+1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercício resolvido

Numa progressão geométrica o nono termo é 512 e o quarto termo é 16. Determine a razão e o termo de ordem um.

Resolução

Dados

$a_9 = 512$ $\quad a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

$a_4 = 16$

$q = ?$

$a_1 = ?$

$$a_9 = a_4 \cdot q^{9-4} \Leftrightarrow a_9 = a_4 \cdot q^5 \Leftrightarrow q^5 = \frac{a_9}{a_4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^5 = \frac{512}{16} \Leftrightarrow q^5 = 32 \Leftrightarrow q = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow q = 2$$

Então: $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$$16 = a_1 \cdot (2)^3 \Leftrightarrow a_1 = \frac{16}{8} \Leftrightarrow a_1 = 2$$

Soma dos *n* primeiros termos consecutivos duma progressão geométrica

Dum modo geral, se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os n primeiros termos duma progressão geométrica de razão q,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$q \cdot S_n = \underbrace{q\,a_1}_{a_2} + \underbrace{q\,a_2}_{a_3} + \underbrace{q\,a_3}_{a_4} + \ldots + \underbrace{q\,a_n}_{a_{n+1}}$$

$$q\,S_n - S_n = q\,a_n - a_1 \quad \text{mas} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n(q-1) = q \cdot a_1 q^{n-1} - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1$$

Scanned by TapScanner

A **soma dos n termos** de uma progressão geométrica de a_1 como primeiro termo e q como razão é:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exercício resolvido

Calcule a soma dos quatro primeiros termos de uma progressão geométrica se $a_1 = -2$ e $q = -3$.

Resolução

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_4 = -2 \cdot \frac{1 - (-3)^4}{1 + 3} \Leftrightarrow S_4 = -2 \cdot \frac{1 - 81}{4}$$

$$\Leftrightarrow S_4 = \frac{160}{4} = 40$$

Soma dos termos duma progressão geométrica infinita

Dada a progressão geométrica (a_n), consideremos a_1, o primeiro termo, e q, a razão da progressão:

$$\lim \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \lim S_n$$

Se a sucessão (S_n) for **convergente**, então o seu limite é a soma de todos os termos da progressão geométrica (a_n),

$$\lim \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} \qquad q^n \to 0 \text{ porque } |q| < 1$$

Se $|q| < 1$, (S_n) é convergente e a soma de todos os termos da progressão geométrica (a_n) é:

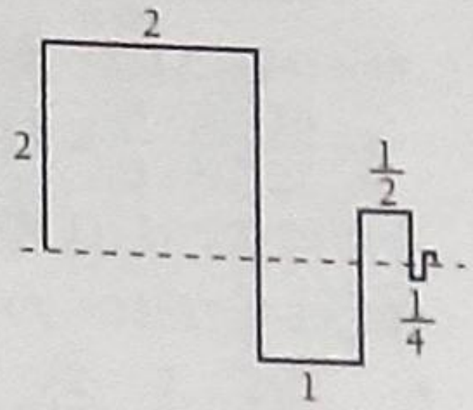
$$S_n = \lim S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

A sucessão S_n **não é convergente** se $|q| \geq 1$.

Scanned by TapScanner

48

Observe a figura:



e calcule a soma de «todas» as áreas dos quadrados entre a linha a cheio e a tracejada.

49

Escreva na forma de fracção a dízima infinita 3,(12).

Exercícios resolvidos

1. Calcule a seguinte soma:

$0,2 + 0,02 + 0,002 + \ldots$

Resolução

Trata-se da soma duma progressão geométrica em que $a_1 = 0,2$ e $q = 0,1$

$$S_n = \lim S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{0,2}{1 - 0,1} \Leftrightarrow S_n = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} \Leftrightarrow S_n = \frac{2}{9}$$

2. Escreva na forma de fracção a dízima infinita e periódica 2, (7).

Resolução

Repare que $2,777\ldots = 2 + 0,7 + 0,07 + 0,007 + \ldots$

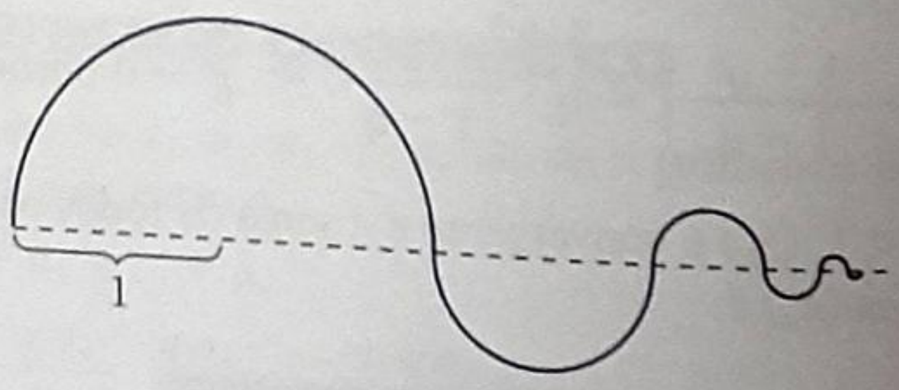
A soma $0,7 + 0,07 + 0,007 + \ldots$ é a soma dos termos da progressão geométrica de primeiro termo 0,7 e razão 0,1.

$$S_n = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \Leftrightarrow S_n = \frac{7}{9}$$

Então

$$2,(7) = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$$

3. A serpente da figura é formada por semicircunferências alternadamente acima e abaixo da linha tracejada. O meio de cada arco é metade do anterior. Supondo que o raio da primeira circunferência é 1, calcule a área da região compreendida entre os arcos da serpente e a linha tracejada.



Resolução

As medidas das áreas estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ e a medida de área do primeiro semicírculo é $\frac{\pi}{2}$, então:

$$S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{4}} \Leftrightarrow S_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow S_n = \frac{2\pi}{3}$$

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

1. Determine os três primeiros termos de cada uma das sucessões definidas por:

a) $u_n = 3n - 5$

b) $u_n = 2 + n^3$

c) $a_n = (-2)^{n+1} - (-2)^n$

d) $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{\sqrt{n}}$

e) $\int_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

2. Verifique se $\dfrac{1}{2}$ é termo das sucessões seguintes:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n + 1}$ b) $b_n = \dfrac{3n - 1}{n + 2}$

c) $c_n = \cos n\pi$ d) $d_n = \dfrac{n - 1}{n}$

3. Estude a monotonia das seguintes sucessões de termos gerais:

a) $a_n = 1 - 3n$ b) $b_n = n^2 - 13n + 45$

c) $c_n = \dfrac{n}{n + 3}$ d) $c_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{n}$

e) $l_n = 3 - n^2$ f) $\int_n = \dfrac{1 - 2n}{2}$

g) $g_n = \dfrac{n^2 + 1}{n}$

4. Dê exemplo duma sucessão que:

a) Seja crescente e convergente para 0.

b) Seja um infinitamente grande em módulo.

c) Seja decrescente e convergente para -3.

d) Seja não monótona e tenha limite igual a 0.

e) Tenha uma subsucessão a tender para 0 e outra subsucessão infinitamente grande negativa.

5. Verifique se as sucessões seguintes são ou não limitadas:

a) $a_n = \dfrac{1 - n}{5n}$ b) $b_n = \dfrac{2n + 7}{n + 2}$.

c) $c_n = [(-1)^n + 1]n$ d) $d_n = 1 + \dfrac{n^2 + 1}{n}$

6. Considere a sucessão:

$$a_n = \frac{2n + 5}{n + 2}$$

a) Determine a_5.

b) Verifique se o número real $\dfrac{6}{5}$ é ou não termo da sucessão e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

c) Verifique se a sucessão é monótona.

7. Calcule o lim a_n se existe:

a) $a_n = \dfrac{1 - 2n^2}{n^2 + 2n}$

b) $a_n = \dfrac{n + 5}{2n^3}$

c) $a_n = \dfrac{n^2 + 10n - 1}{5n + 3}$

d) $a_n = \dfrac{2n + \sqrt{n}}{3n + 1}$

e) $a_n = \dfrac{1 - \sqrt{2}\, n^2}{n^2 + 5}$

f) $a_n = \sqrt{n + 2} - \sqrt{n - 1}$

g) $a_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{4^{n+1}}$

8. Dada a sucessão definida por: $a_n = \dfrac{17 - 2n}{3}$.

a) Calcule o termo de ordem 20 e investigue se os números 0 e -5 são, ou não, termos da sucessão.

b) Mostre que (a_n) é uma progressão aritmética decrescente.

c) Calcule a soma dos 20 primeiros termos da sucessão.

9. Para cada uma das progressões aritméticas indicam-se os cinco primeiros termos, determine expressões dos respectivos termos gerais:

a) 0, 6, 12, 18, 24, ...

b) 1, 5, 9, 13, 17, ...

c) 1, -5, -11, -17, -23, ...

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

10. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6^n}{3^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 6 \cdot 5^{n-1} - 1}{4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n}{(n+1)\sqrt{n^2+1}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2+3}{n+1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{1+n^2}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8^n}{2^{n+1} + 3^{n+2}}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} [(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})]$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n-2}{5n+3}\right)^{3n}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^{-n}}{2^{-n}}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{8^2}{n}\right)^{n}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n}$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{n+2}$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{3n}\right)^{n+2}$

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{4}}$

11. Numa progressão aritmética, tem-se $u_3 = 90$ e $u_6 = 2\,430$. Determine:

a) u_1 e a razão. b) u_{10}

12. Num estudo feito num laboratório, verificou-se que uma dada cultura de bactérias aumentava 10% por hora. Sabendo que se iniciou a cultura com 150 bactérias:

a) Quantas bactérias existem ao fim de três horas?

b) Ao fim de quanto tempo o número de bactérias triplica?

13. A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 0,3 e $u_2 = 0{,}9$.

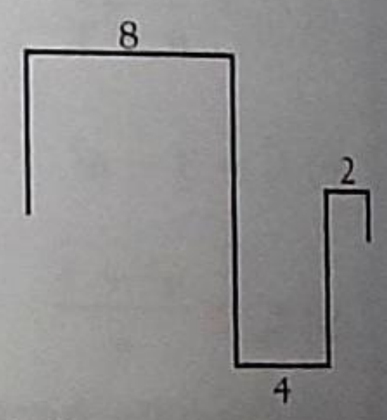
a) Escreva o termo geral da progressão.

b) Determine o termo de ordem 20.

c) Calcule a soma dos 20 primeiros termos.

14. Calcule a soma das primeiras 10 potências de 2 de expoente natural.

15. Considere a «serpente quadrada» representada na figura. O primeiro «arco» tem 8 cm de lado, o segundo 4 cm, o terceiro 2 cm, e assim sucessivamente.



a) Indique o termo geral da sucessão dos comprimentos dos «arcos» da serpente.

b) Calcule o comprimento da serpente constituída por 10 «arcos».

c) Calcule o comprimento da serpente, supondo que tem infinitos «arcos».

16. Considere a sucessão de termo geral:

$$a_n = 2 \cdot 4^{1-n}$$

a) Prove que (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

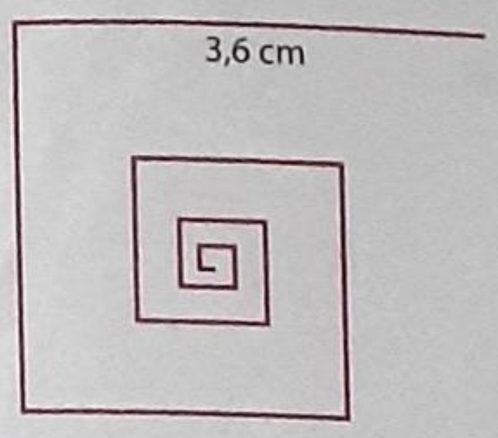
b) Calcule a soma dos cinco primeiros termos da sucessão dada.

c) Calcule a soma de todos os termos da sucessão (a_n).

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

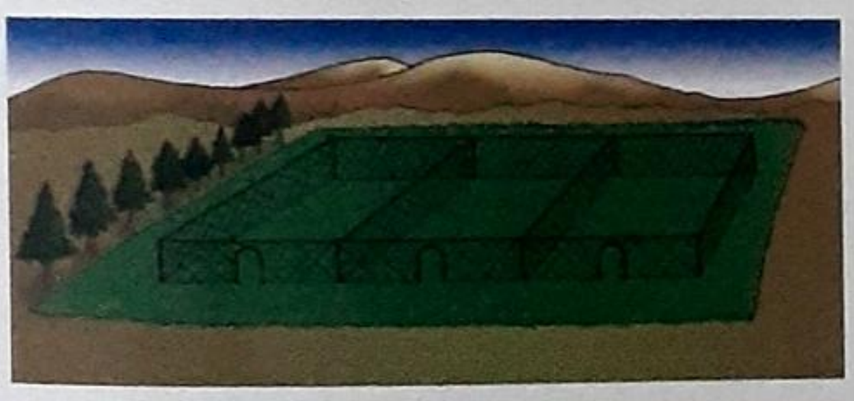
17. Na espiral da figura o primeiro segmento mede 3,6 cm e cada um dos seguintes mede $\frac{4}{5}$ do anterior.



a) Determine o comprimento da espiral que está desenhada.

b) Se continuássemos indefinidamente a espiral, será que o seu comprimento seria infinito? Mostre que não, indicando o comprimento total.

18. O Manuel pretende fazer um canil para três cães de forma rectangular, com 800 m^2 de área. Será vedado com rede e dividido, também com rede, em três partes iguais, como se mostra na figura.
Determine as dimensões do canil de modo a que o gasto em rede seja mínimo.



Escolha múltipla

19. A sucessão de termo geral $u_n = \frac{2-5n}{3}$ é:

A. Convergente
B. Não monótona
C. Limitada
D. Simétrica de um infinitamente grande positivo

20. A sucessão de termo geral $v_n = 3^{-2n}$:

A. É uma progressão geométrica de razão 3.
B. É uma sucessão não monótona.
C. É uma progressão geométrica de razão 1/9.
D. Não é uma sucessão limitada.

21. Uma sucessão convergente é sempre:

A. Monótona.
B. Limitada.
C. Inversa de um infinitamente grande.
D. Um infinitésimo.

22. A sucessão

$$n \smile u_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \text{ é:}$$

A. Monótona
B. Convergente
C. Divergente
D. Progressão geométrica

23. Uma sucessão monótona é sempre:

A. Convergente
B. Limitada
C. Um infinitamente grande
D. Positiva ou negativa a partir de certa ordem

24. A soma de duas sucessões divergentes:

A. É sempre uma sucessão divergente.
B. É sempre convergente.
C. Pode ser convergente.
D. Não é uma sucessão.

25. A sucessão de termo geral:

$$u_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

A. Não é monótona.
B. Não é convergente.
C. É um infinitamente grande em módulo.
D. Não é limitada.

26. Se a sucessão u_n é tal que
$u_n - u_{n+1} > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, então:

A. u_n é uma progressão aritmética.
B. u_n não é uma progressão geométrica.
C. u_n é decrescente.
D. u_n é um infinitamente grande positivo.

Scanned by TapScanner

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Explicar a noção de limite de uma função.
- Aplicar as propriedades dos limites de funções para o cálculo de limites.
- Identificar as formas indeterminadas de limites de funções.
- Levantar as indeterminações de funções.
- Calcular limites laterais.
- Calcular limites notáveis.
- Definir uma função contínua num ponto e num intervalo.
- Identificar uma função contínua dado o seu gráfico.
- Determinar se uma função é contínua, dada a sua expressão analítica.

Scanned by TapScanner

Limites e continuidade de funções

UNIDADE 5

CONTEÚDOS

Limites e continuidade de funções

- Limites de uma função
- Definição de limite de uma função num ponto
- Função infinitamente pequena e infinitamente grande
- Operações com limites
- Propriedades dos limites de funções
- Limites notáveis
- Cálculo de limites
- Indeterminações

Continuidade de funções

- Definição
- Funções contínuas
- Limites laterais
- Propriedades e operações sobre funções contínuas
- Limites infinitos

Págs. 94 a 121

Scanned by TapScanner

Limites e continuidade de funções

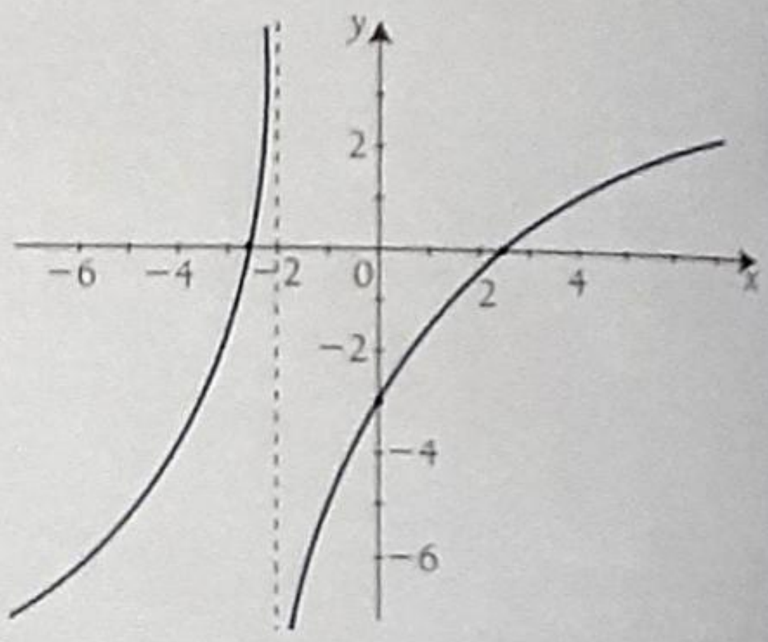
Noção de limite

O objectivo do nosso estudo é, dada a função $y = f(x)$, saber se controlando a variável independente x se pode saber o que acontece à variável dependente (y).

Assim, se a variável independente se aproxima cada vez mais de um valor a, será possível descobrir se existe e, se assim for, qual será o valor para o qual se aproxima a variável dependente.

Considera-se a função real de variável real, f, sendo $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 2}$, a tabela de valores será:

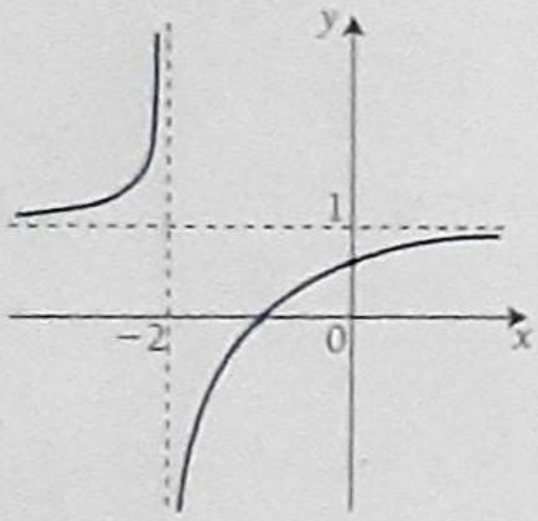
x	y
−0,03	−3,045
−0,02	−3,03
0	−3
0,02	−2,97
0,03	−2,955
−2,3	2,3667
−2,2	5,8
−2,1	15,9
−2	Erro
−1,9	−23,9



1

Seja f o gráfico representado e definido pela expressão:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$$



Complete:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ____

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ____

$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ ____

$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ ____

A tabela e o gráfico sugerem que à medida que x se aproxima de 0, y aproxima-se de -3.

Diz-se que:

- O limite de $f(x)$ quando se tende para zero é -3 e escreve-se:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -3$$

- Quando x se aproxima de -2 o limite de $f(x)$ não existe e escreve-se:

$$\lim_{x \to -2} f(x) \text{ não existe}$$

Assim, o limite de uma função num ponto pode existir ou não.

O valor do limite pode obter-se por uma simples substituição da variável independente.

No caso anterior:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 6}{x + 2} = \frac{0^2 - 6}{0 + 2} = -3$$

Scanned by TapScanner

Em muitos casos, o cálculo do limite duma função num ponto pode obter-se por concretização da variável independente.

Exercício resolvido

Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} x^3$ b) $\lim_{x\to 0} (x^2 - 1)$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+5}{x+1}$

Resolução

a) $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$

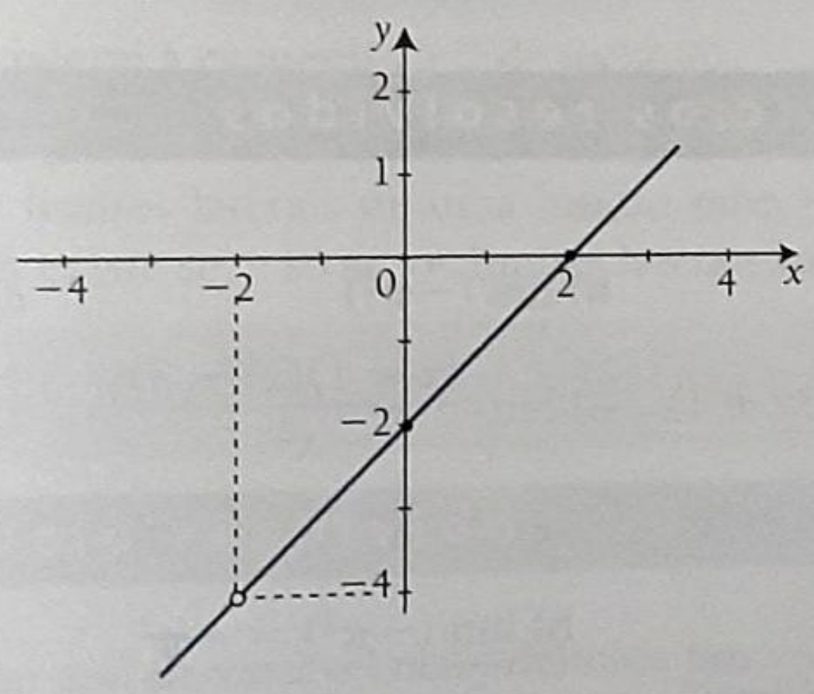
b) $\lim_{x\to 0} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+5}{x+1} = \frac{0^2+1}{0+1} = 5$

Considere-se agora a função real de variável real:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \quad ; \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$$

Graficamente, a função será:



Pela leitura do gráfico tem-se: $\lim_{x\to -2} f(x) = -4$.

O valor -4 não pode ser obtido por concretização da variável x na função $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ pois obtém-se o valor $\frac{0}{0}$, que não é um número real. Este exemplo sugere duas notas importantes:

- O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a não depende do valor de $f(a)$. O limite, se existir, é apenas dependente dos valores de f quando $x \neq a$ e x se aproxima de a.
- Para calcular o limite duma função num ponto, é importante conhecer as técnicas de cálculo de limites, pois nem sempre a simples substituição da variável independente resolve o problema.

2

Determine:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x+3}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+3}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{5}{x-1}$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4}$

f) $\lim_{x\to-3} \frac{1}{(x+3)^2}$

Scanned by TapScanner

Propriedades dos limites

Se f é a função constante, $f(x) = k$, então para qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$$

Se f é a função identidade, $f(x) = x$, então para qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = a$$

Se L_1 e L_2 são dois números reais e $\lim_{x \to a} g(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então:

- $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} f(x) = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_2}{L_1}$, com $L_1 \neq 0$
- $\lim_{x \to a} [(f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = L_2^n$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_2}$, $L_2 \geq 0$ se n é par.

Exercícios resolvidos

Calcule:

a) $\lim_{x \to 2} 7$ b) $\lim_{x \to -3} (-\pi^2)$ c) $\lim_{h \to 0} (-3h + 5)$

d) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 1)$ e) $\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 3)}{x^2}$ f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x + 5}{x - 3}}$

Resolução

a) $\lim_{x \to 2} 7 = 7$ b) $\lim_{x \to -3} (-\pi^2) = -\pi^2$

c) $\lim_{h \to 0} (-3h + 5) = 5$

d) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to 1} (x^2) + \lim_{x \to 1} (-3x) + \lim_{x \to 1} 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 3)}{x^2} = \frac{\lim_{x \to 1} (x - 1)(x^2 - 3)}{\lim_{x \to 1} x^2} =$

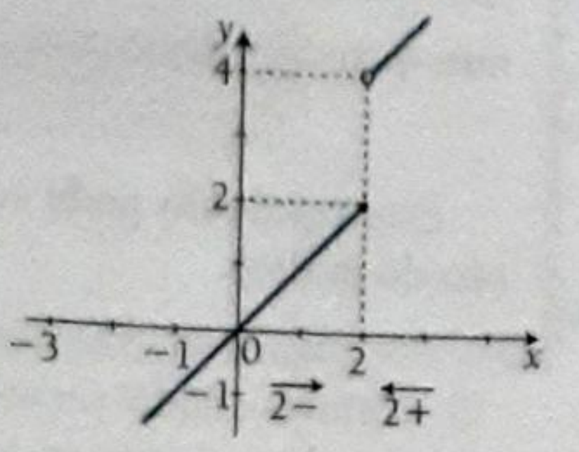
$$= \frac{\lim_{x \to 1} (x - 1) \cdot \lim_{x \to 1} (x^2 - 3)}{\lim_{x \to 1} x^2} = \frac{0 \cdot (-2)}{1} = 0$$

f) $\lim_{x \to 4} \sqrt{\frac{x + 5}{x - 3}} = \lim_{x \to 4} \sqrt{\frac{x + 5}{x - 3}} = \sqrt{\frac{4 + 5}{4 - 3}} = 3$

Scanned by TapScanner

Limites laterais

Seja $f(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \leq 2 \\ x+2 & , \text{ se } x > 2 \end{cases}$



Observando o gráfico concluímos que à medida que x se aproxima de 2 a função $f(x)$ não se aproxima duma constante única.

Diz-se que **não existe limite de** $f(x)$ quando x tende para 2 e escreve-se:

$$\text{Não existe } \lim_{x \to 2} f(x) \quad \text{ou} \quad \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

Quando x se aproxima de 2 **pela direita**, $f(x)$ aproxima-se de 4.
Escreve-se:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

(Lê-se: o limite lateral à direita de 2 de $f(x)$ é 4).

Quando x se aproxima de 2 **pela esquerda**, $f(x)$ aproxima-se de 2.
Escreve-se:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

(Lê-se: o limite lateral à esquerda de 2 de $f(x)$ é 2).

Aos limites referidos chamam-se **limites laterais**.

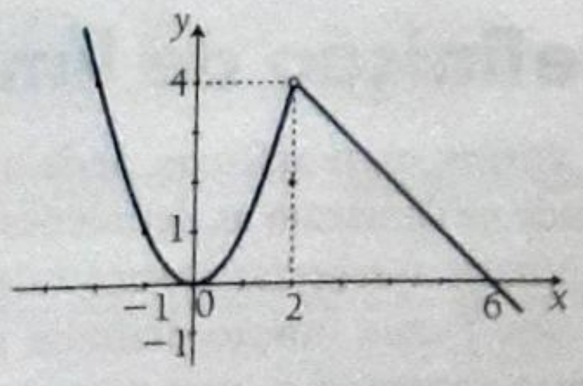
Se existirem os limites laterais de uma função num ponto, o **limite da função** nesse ponto existe se, e só se, os limites laterais **forem iguais**.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

Exercício resolvido

Considere a função real de variável real f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x < 2 \\ -x + 6, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$



Existirá $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$

Resolução

Calculam-se os limites laterais:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2) = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x + 6) = -2 + 6 = 4$$

3

Determine os limites laterais de $f(x)$ se $x \to a^+$ e $x \to a^-$:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 3x - 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ para $a = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq -3 \\ 2x + 1, & \text{se } x > -3 \end{cases}$ para $a = -3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2 + 2}, & \text{se } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 2, & \text{se } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ para $a = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} -3, & \text{se } x < -1 \\ \dfrac{3x - 3}{\lvert x - 1 \rvert}, & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ para $a_1 = -1$

4

Em quais das alíneas do exercício anterior existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

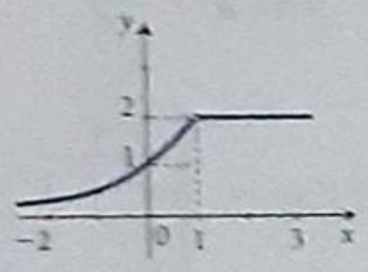
Scanned by TapScanner

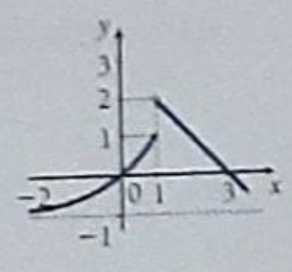
Como o limite lateral $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ é igual ao $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, então o limite de $f(x)$ existe e o valor deste limite é igual ao valor comum dos limites laterais, quando x tende para 2, ou seja,

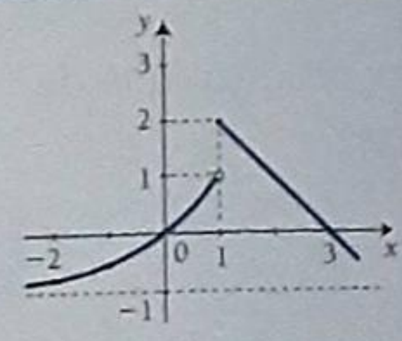
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

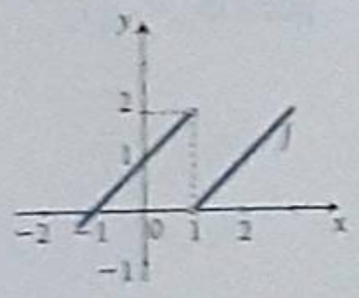
Este resultado pode ser confirmado geometricamente pela observação do gráfico.

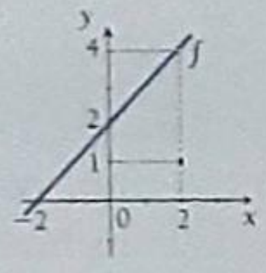
O exemplo dado recorda-nos que o limite de uma função quando a variável independente se aproxima de um ponto não depende do valor da função nesse ponto.

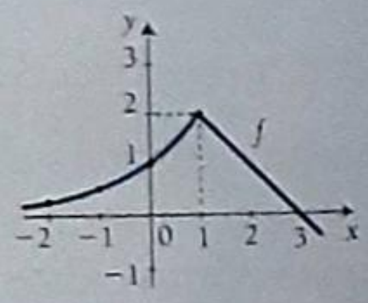
<table>
<tr>
<td> 

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$
• $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
• A função não está definida no ponto $x = 1$</td>
<td> 

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2; \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$
• Não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$
• $f(1) = 1$</td>
<td> 

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2; \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$
• Não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$
• $f(1) = 2$</td>
</tr>
<tr>
<td> 

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0; \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$
• Não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$
• A função não está definida para $x = 1$</td>
<td> 

• $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$
• $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$
• $f(2) = 1$</td>
<td> 

• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$
• $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
• $f(1) = 2$</td>
</tr>
</table>

Definição de limite

Vários matemáticos dedicaram-se ao estudo do conceito de limite, donde se destacam as definições do alemão Heine e do francês Cauchy.

Vamos apresentar apenas a definição de Cauchy, por ser a mais utilizada.

Seja f uma função definida para todo o x em pelo menos um intervalo aberto contendo a, com a possível excepção de que f pode não estar definida em a.

Escreve-se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Se dado qualquer $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um $\delta > 0$, de modo que:

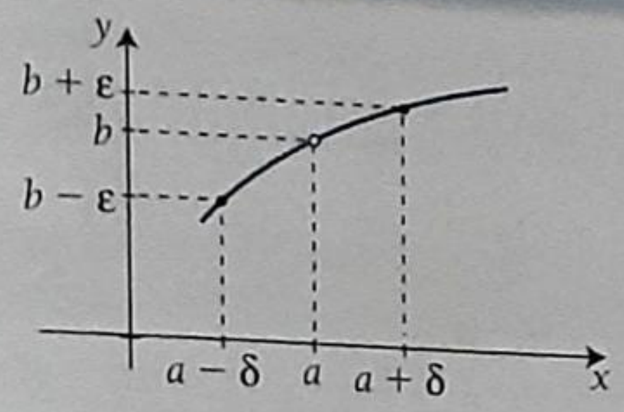
$$|x - a| < \delta, \text{ então } |f(x) - b| < \varepsilon$$

Scanned by TapScanner

Simbolicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

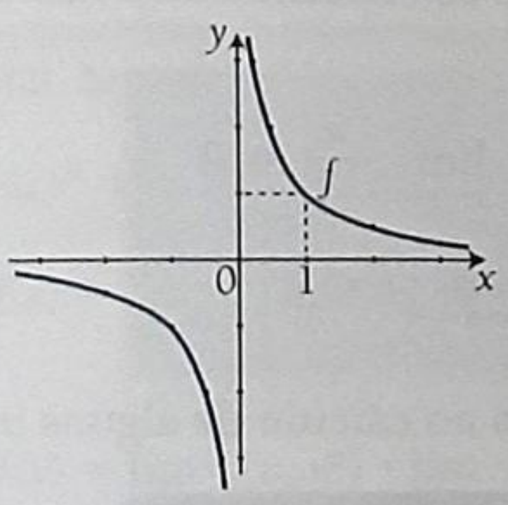
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

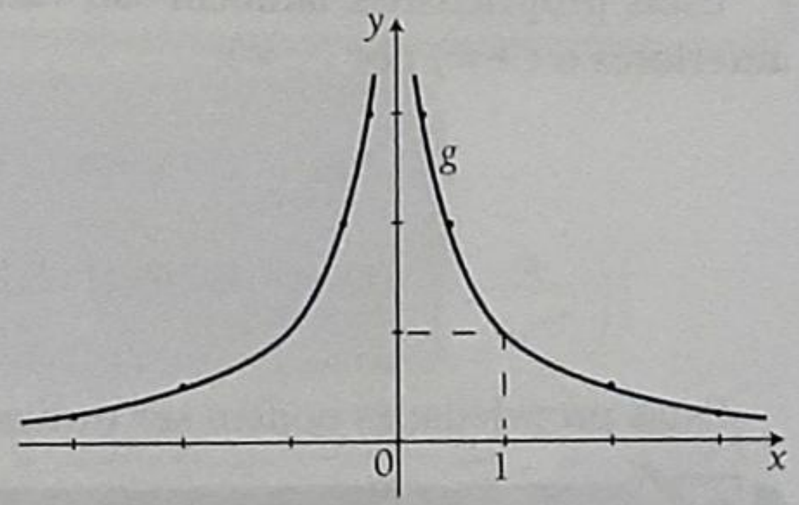


Limites infinitos

Consideremos as funções reais de variável real:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$





Quando o limite de uma função num ponto $a \in \mathbb{R}$ é um número real, o limite **existe**, é o que acontece quando $x \to 1$ para as funções f e g.

Quando o limite de uma função num ponto $a \in \mathbb{R}$ não é um número real, o limite **não existe**, é o que acontece quando $x \to 0$ para as funções f e g.

No entanto, usa-se a seguinte escrita:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty;\ \lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty;\ \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

De acordo com a definição, nenhum destes limites existe porque ∞ não é um número real.

De igual modo deve-se interpretar o estudo dos limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ ou ainda $x \to \infty$.

Por simplificação de linguagem e de escrita, usam-se para os limites infinitos as mesmas notações e leituras como se eles de facto existissem.

O conhecimento da existência ou não de limite de uma função quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$ pode ser formalizado aplicando as propriedades dos limites que a seguir se apresentam.

Scanned by TapScanner

Propriedades

Supondo que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ existem, e sendo a uma constante real, tem-se:

1. $\lim_{x\to+\infty} a = a$
2. $\lim_{x\to+\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} g(x)$
3. $\lim_{x\to+\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x)$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)}$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{f(x)} = 0$, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty (\text{ou } -\infty)$
6. $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$, se $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Estas propriedades também são válidas se substituirmos nas expressões anteriores o $(+\infty)$ por $(-\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^h = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^h} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Estas propriedades podem ser utilizadas no cálculo de alguns limites.

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 3}{3x^3 + 1}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 3}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3}{x}$

Resolução

Como os limites do numerador e do denominador não existem quando $x \to +\infty$, não é permitido aplicar a propriedade 4. Colocando em evidência, no numerador e no denominador, a maior potência de x pode aplicar-se a propriedade $\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^h} = 0$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 3}{3x^3 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(3 + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{0}{3} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = 3$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Scanned by TapScanner

Indeterminações

Indeterminação $\infty - \infty$

Normalmente, a indeterminação $\infty - \infty$ surge no cálculo do limite de uma função polinomial ou de uma função irracional.

A estratégia para levantar a indeterminação depende do caso em estudo.

- A expressão algébrica da função é uma função polinomial.

Exercício resolvido

Calcule: $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 2x + 7) = [\infty - \infty]$

Resolução

Colocando em evidência a maior potência de x, vem:

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x \to +\infty} \left[3x^2\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{7}{3x^2}\right)\right] =$$

$$= 3(+\infty)^2 \cdot (1 - 0 + 0) = +\infty$$

Em geral, temos:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)\right]$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (a_n x^n) \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}_{1}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (a_n x^n)$$

Uma função polinomial admite, quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$ ou ainda quando $x \to \infty$, o mesmo limite que o seu monómio de maior grau.

- A expressão algébrica da função é uma função irracional.

Para levantar esta indeterminação, usa-se a estratégia de multiplicar e dividir a expressão pelo binómio conjugado.

Exercício resolvido

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = [\infty - \infty]$

Resolução

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{+\infty} = 0$$

5

Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x^2 + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^3 - x^2 + \frac{1}{2}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^5 + x^4 + 2)$

6

Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2x} - \sqrt{2x+3})$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 6} - x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 6} + x)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 5})$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 5})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x - 6})$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x - 6})$

Scanned by TapScanner

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Esta indeterminação resulta do cálculo do limite quando $x \to \infty$ de uma função racional.

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \frac{b_{m-2}}{b_m x^2} + \ldots + \frac{b_0}{b_m x^m}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

O valor do limite vai depender do grau do polinómio do numerador ser igual, superior ou inferior ao grau do polinómio do denominador.

- O grau do polinómio do numerador é igual ao grau do polinómio do denominador.

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 3x}{5x^3 + 3x^2 + 1}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x + 3x^2}{7 + x - 4x^2}$

Resolução

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 3x}{5x^3 + 3x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{5x^3} = \frac{2}{5}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x + 3x^2}{7 + x - 4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-4x^2} = -\frac{3}{4}$

7

Calcule:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5 - 2x + 7x^2}{2x^2 + 6x - 8}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 2x^3 + 3x - 4x^2}{4 - 2x + 3x^2 - 4x^3}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,006x}{x^2 - 3x}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(4x + 2)^2 (5x - 2)^3}{x^5 + 72}$

Então:

O limite da função racional quando $x \to \infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

- O grau do polinómio do numerador é menor do que o grau do polinómio do denominador.

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{1 - 4x + x^3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 4x^2}{x^3 - 1}$

Resolução

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{1 - 4x + x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 4x^2}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$

Então:

O limite da função racional quando $x \to \infty$ é zero.

- O grau do polinómio do numerador é maior do que o grau do polinómio do denominador.

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Resolução

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

Então:

O limite da função racional quando $x \to \infty$ é infinito.

Em geral:

O limite duma função racional quando $x \to \infty$ é o quociente dos coeficientes dos monómios de maior grau.

8

Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|2x|}{x - 7}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2x|}{-x - 7}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x| + 2x}{3x + 4}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x| + 2x}{3x + 4}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{2x - 5}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{2x - 5}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + \sqrt{x^2 - 4x}}{2x - 7}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \sqrt{x^2 - 4x}}{2x - 7}$

Scanned by TapScanner

9

Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15}$

c) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2+5x-12}{3x^2+8x-16}$

d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^3+4x^2-7x-3}{x^3+2x^2-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+5x-5}{3-3x}$

10

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{3x^2+x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^4-3x^3+4x^2}{5x^2-6x^3+7x^5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x}{x^3-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-a)^3}{x^3-a^3}$

11

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x+6}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+7}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x-1}+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{9-x}-2}$

Indeterminação $\frac{0}{0}$

Se depois de efectuarmos os cálculos possíveis obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ é porque a fracção não é irredutível.

O valor para o qual x está a tender é raiz do numerador e do denominador.

Normalmente, consegue-se levantar a indeterminação, simplificando a fracção, multiplicando em cima e em baixo pelo conjugado ou pondo em evidência a menor potência de x.

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{1-x}$ b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-4x}{x^2-x}$

Resolução

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{1-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{-1} = -2$

b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{1}{(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-4x}{x^2-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x^2-4)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-4}{x-1} = \dfrac{0-4}{0-1} = 4$

Limites de expressões com exponenciais e logaritmos

Tem-se:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{e^p} = +\infty,\ p \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x-1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{3x}}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{t+3}-e^3}{t}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)^3}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\ln(5+x)}{4+x}$ e) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\ln(x+6)}{x+5}$

Scanned by TapScanner

Resolução

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{3x}}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^x(e^{2x}-1)}{2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}(-e^x) \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = -1 \cdot 1 = -1$

b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{t+3} - e^3}{t} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^3(e^t-1)}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} e^3 \cdot \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = e^3 \cdot 1 = e^3$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)^3}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\ln(x+1)}{2x} = \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\ln(5+x)}{4+x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Mudança de variável
$4 + x = y$; logo
$5 + x = y + 1$
$x \to -4 \Rightarrow y \to 0$

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(y+1)}{y} = 1$

e) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\ln(x+6)}{x+5} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Mudança de variável
$5 + x = y$
$6 + x = y + 1$
$x \to -5 \Rightarrow y \to 0$

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(y+1)}{y} = 1$

12

Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+1)(e^{\frac{t}{x}} - 1)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x + x^2}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x\,e^x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{\ln(x-2)}$

f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(h+2) - \ln 2}{h}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} 2x \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(3x)}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(3x+1)}$

Limites notáveis

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Já sabe que a função de variável real $x \smile \operatorname{sen} x$ é contínua em $\mathbb{R}$ (em particular, em $x = 0$), pelo que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 .$$

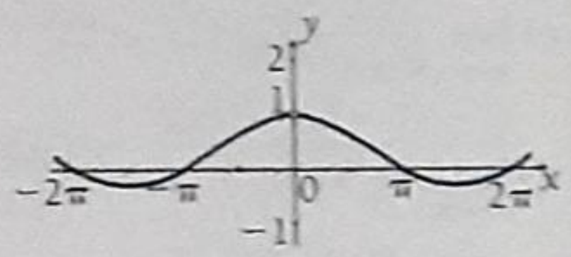
Então, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ conduz-nos a uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Vamos averiguar que valores toma a expressão $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ nas vizinhanças do ponto $x = 0$.

Comecemos por reconhecer que $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$,

isto é, que $x \smile \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ é uma função par.

Scanned by TapScanner



Por isso, basta estudar o limite à direita de $x = 0$.

x	$\frac{\text{sen } x}{x}$
0,30	0,98507
0,25	0,98962
0,20	0,99335
0,15	0,99625
0,10	0,99833
0,05	0,99958
0,02	0,99993
0,01	0,99998

Usando uma calculadora, verificamos que os valores de $\frac{\text{sen } x}{x}$ se aproximam de 1 quando x se aproxima de zero. Observamos intuitivamente que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, e o gráfico obtido na calculadora, confirma este resultado.

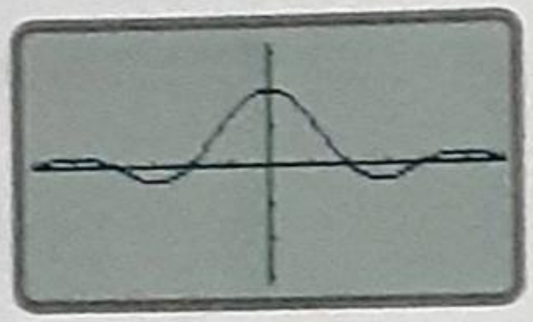
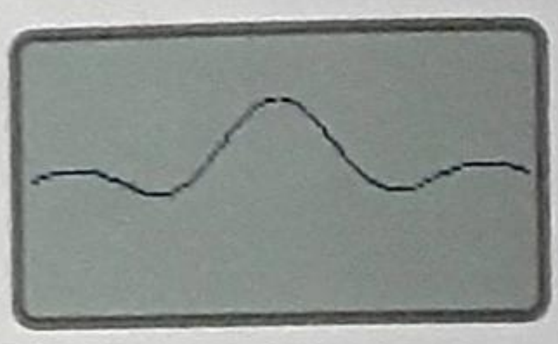


Gráfico de $y = \frac{\text{sen } x}{x}$ na janela TRIG.



Retirando os eixos vê-se o «buraco» em (0, 1).

Atenção:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$

pois $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ e, se $x > 0$, tem-se: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{x}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, também $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$.

Não confunda com a situação de indeterminação $\frac{0}{0}$ a que se refere o limite notável.

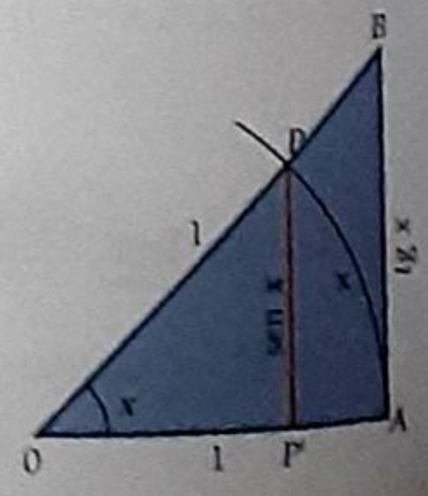
Vamos verificar por via geométrica.

Consideremos o ângulo ao centro $\measuredangle AOP$ (positivo e menor que um ângulo recto) numa circunferência de raio 1; $\overline{OA} = \overline{OP} = 1$.

Como o raio é 1, a um ângulo de x rad corresponde um arco com x unidades de comprimento.

Por outro lado $\overline{PP'} = \text{sen } x$, $\overline{AB} = \text{tg } x$ e, da observação da figura, conclui-se que:

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$



Scanned by TapScanner

Dividindo por sen x, vem $1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$.

A função $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$, fica enquadrada entre 1 e $\frac{1}{\cos x}$, mas $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

então concluiu-se que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$ e também $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Estes limites fazem parte dos chamados **limites notáveis** referidos no programa e permitem calcular outros limites em situações de indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Corolário

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Demonstração

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{e}{x} \operatorname{sen}(2x)$

Resolução

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 1 \cdot 0 = 0$

Scanned by TapScanner

13

Calcule os limites seguintes das funções trigonométricas:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x+1}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x}{\operatorname{sen} 3x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x}{2x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{x+9}-3}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 4x}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} 2x}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} 5x}{x^3}$

(1993 – Época Especial) CSH.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 1 \cdot 0 = 0$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \right) =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \cdot 1 = 1$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{e}{x} \operatorname{sen}(2x) = \left[\frac{0}{0}\right] = 2e \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} =$

$= 2e \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 2e \cdot 1 = 2e$

2. Calcule, mas comece por verificar que se trata de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$

b) $\lim_{t\to+\infty} \left(t \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right)$

Resolução

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x} = \lim_{3x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \times \frac{3}{2} \right) = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{t\to+\infty} \left(t \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right) = \lim_{\frac{1}{t}\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 1$

Scanned by TapScanner

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Demonstra-se que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Na expressão $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ troquemos a variável x por $\frac{1}{y}$, então se $x\to\infty$ implica $y\to 0$ portanto pode-se reescrever o limite notável de outro modo:

$$\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}} = e$$

Exercício resolvido

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^{2x}$ b) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$

Resolução

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = [1^\infty] =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right]^2 = (e^3)^2 = e^6$$

b) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}} = [1^\infty]$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(-x)\right]^{-\frac{1}{x}}\right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

O $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ou $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$ é mais um exemplo de indeterminação do tipo 1^∞.

Para levantar esta indeterminação, geralmente, utiliza-se a seguinte fórmula:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

14

Calcule os limites seguintes:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+5}$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)^{2x}$

15

Calcule:

a) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{k-x}{k}\right)^{-\frac{k}{x}}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x}$

e) $\lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

f) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

(1983, 2.ª época)

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

Resolução

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$; $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ e $g(x)=x$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$; $\lim x=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x}{x+1}\right)}=e^{-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x-1)\cdot\frac{1}{x}}=$

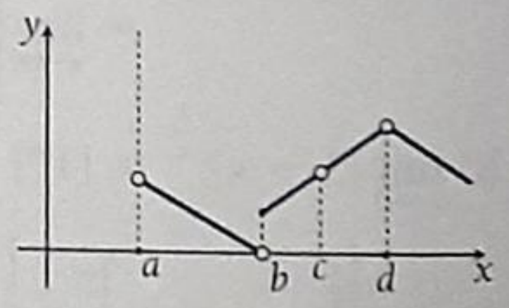
$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}=e^1=e$

Funções contínuas

Seja f a função representada graficamente:

Nota-se que:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe.
- $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ não existe.
- A função não está definida em $x=c$.
- $\lim\limits_{x\to d} f(x)\neq f(d)$.



A função f é **descontínua** em cada um dos pontos a, b, c e d e **contínua** em todos os outros pontos do domínio.

O conceito de limite duma função num ponto permite-nos, então, enunciar a seguinte definição de continuidade.

Diz-se que uma função f é **contínua** num ponto a ($a\in D_f$) se e só se:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe} \quad ; \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Exercício resolvido

Estude a continuidade da função f no ponto $x=0$ se:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x}} & \text{, se } x>0\\ x^2+x & \text{, se } x\leq 0\end{cases}$$

Scanned by TapScanner

Resolução

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = 0$$

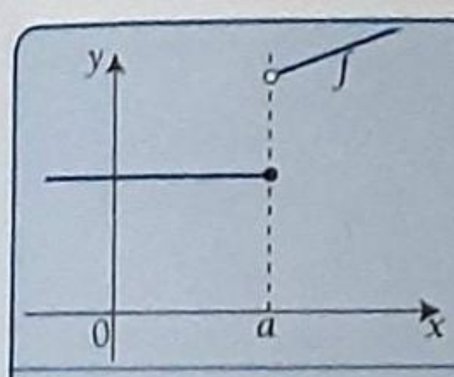
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0; f(0) = 0$$

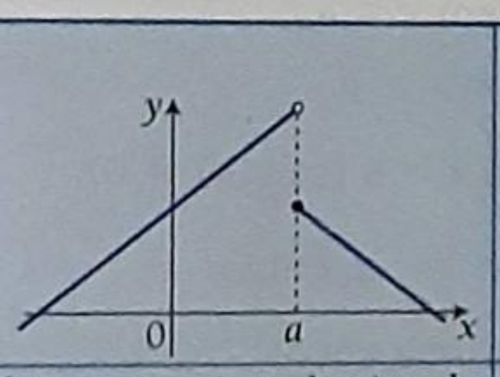
Como $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ então f é contínua em $x = 0$.

Se uma função não é contínua num ponto do seu domínio, então é **descontínua nesse ponto.**

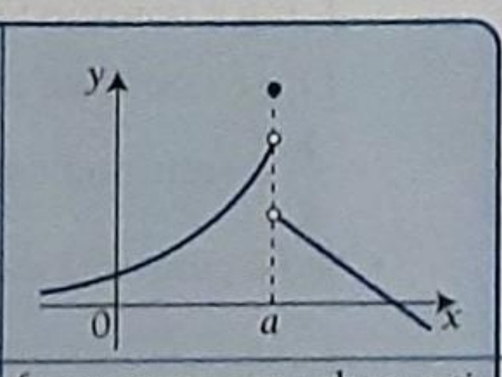
Uma função pode não ser contínua num ponto $a \in D_f$, mas ser **contínua à esquerda** ou **à direita de** a.



f é contínua à esquerda de a.
$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$



f é contínua à direita de a.
$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

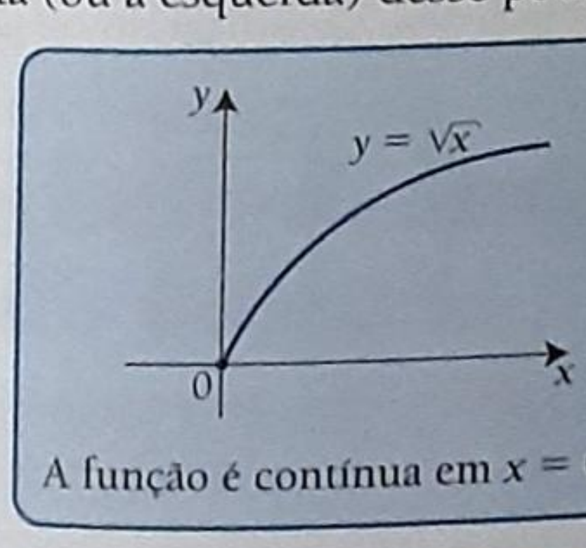


f apresenta uma descontinuidade bilateral em a.

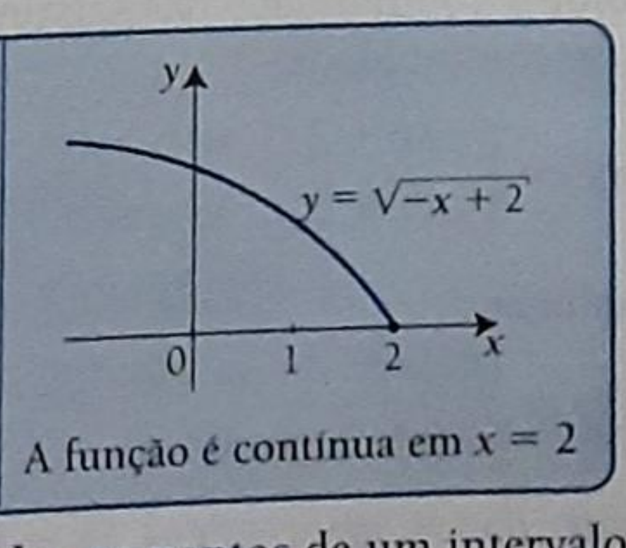
Uma função é **contínua num ponto** $a \in D_f$ se é contínua à esquerda e à direita de a, ou seja, se os limites laterais são iguais ao valor da função no ponto a.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Uma função pode ser apenas **contínua à esquerda** (ou **à direita**) de um ponto e ser contínua nesse ponto. Isso acontece se a função não está definida à direita (ou à esquerda) desse ponto.



A função é contínua em $x = 0$



A função é contínua em $x = 2$

Se uma função é **contínua em todos os pontos** de um intervalo aberto $]a, b[$, é contínua nesse intervalo.

Uma função é **contínua num intervalo fechado** $[a, b]$ se é contínua em $]a, b[$, à direita de a e à esquerda de b.

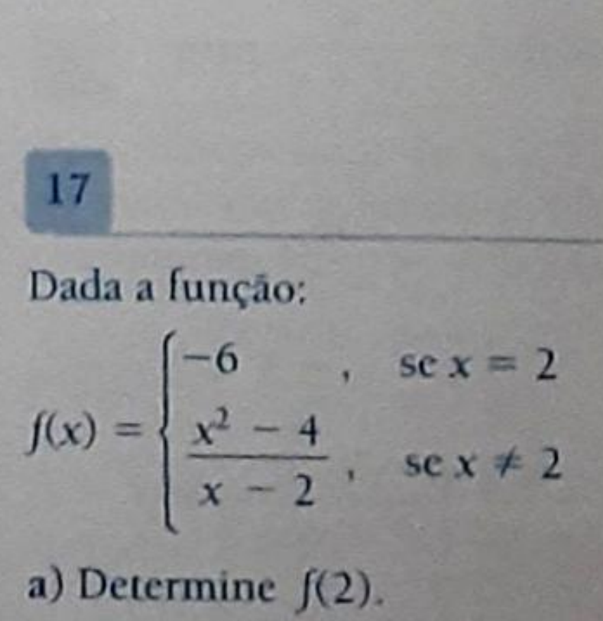
Se uma função é **contínua em todos os pontos do seu domínio** dizemos, simplesmente, que a função é contínua.

16

Estude a continuidade lateral de cada uma das funções reais de variável real, nos pontos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x > -1 \\ -\frac{x}{3}, & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$ para $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x > 2 \\ 0, & \text{se } x = 2 \\ -\frac{x}{2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$ para $x = 2$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$

$\lim_{x\to a} f(x) = b = f(a)$

17

Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} -6, & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \end{cases}$$

a) Determine $f(2)$.

b) Calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$.

c) A função f é contínua? Justifique.

Scanned by TapScanner

18

Analise, graficamente, a continuidade das funções seguintes, classificando os pontos de descontinuidade:

a) $f(x) = x - |x|$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{2x}$

c) $h(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{se } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 3^{-x}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{se } x > 2 \\ x^2, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

e) $l(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & \text{se } x \neq -2 \\ 0, & \text{se } x = -2 \end{cases}$

f) $m(x) = \begin{cases} \log_2 |x|, & \text{se } x \geq -2 \\ 3, & \text{se } x < -2 \end{cases}$

19

Analise, analiticamente, a continuidade das funções seguintes no ponto de abcissa $x = a$ e classifique os pontos de descontinuidade:

a) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + x}$, para

$x_1 = 0; \quad x_2 = -1$

b) $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 3x}$, para

$x_1 = 0; \quad x_2 = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

para $x_1 = 3; \quad x_2 = -2$

d) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + 1}, & \text{se } x > 2 \\ 1, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

para $x = 2$

Classificação dos pontos de descontinuidade

A função f tem uma descontinuidade eliminável em $x = a$ se existe o $\lim f(x)$ mas o $\lim f(x)$ é diferente de $f(a)$ (ou a função não está definida no ponto a).

A função f tem uma descontinuidade não eliminável no ponto a se os limites laterais são diferentes ou se pelo menos um dos limites laterais é infinito ou não existe.

Propriedades das funções contínuas

- A função constante $f(x) = C$ é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função identidade $f(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$.
- Se f e g são funções contínuas em $x = a$, então:

  $f + g$ é contínua em $x = a$.

  $f \cdot g$ é contínua em $x = a$.

  $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $x = a$ (se $g(a) \neq 0$).
- Se f é contínua em $x = a$, então:

  f^n $(n \in \mathbb{N})$ é contínua em a.

  $\sqrt[n]{f}$ é contínua em a ($n \in \mathbb{N}$ e $f(a) \geq 0$ n é par).
- Se f é contínua em $x = a$ e g é contínua em $f(a)$, então a função $g \circ f$ é contínua em a.
- A função exponencial é contínua.
- A função logarítmica é contínua em todos os pontos do domínio.
- As funções trigonométricas são contínuas.
- A função polinominal é contínua.
- A função racional é contínua em todos os pontos do domínio.

Exercícios resolvidos

1. Estude a continuidade das seguintes funções, classificando os pontos de descontinuidade:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & \text{se } x > 0 \\ x^2 + 2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

Resolução

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & \text{se } x > 0 \\ x^2 + 2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x + 2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2) = 2$

$f(0) = 2$

Então f é contínua pois $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Scanned by TapScanner

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$

$f(2) = 3$

A função é descontínua no ponto $x = 2$ porque $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$.

$x = 2$ é ponto de descontinuidade eliminável.

2. Determine k de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$, sendo:

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{se } x = -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{se } x \neq -3 \end{cases}$$

Resolução

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{se } x = -3 \\ \dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{se } x \neq -3 \end{cases}$$

Para que a função seja contínua num ponto: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

O ponto de descontinuidade é $x = -3$.

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3)$

$\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{x^2-9}{x+3}\right) = k$

$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = k$

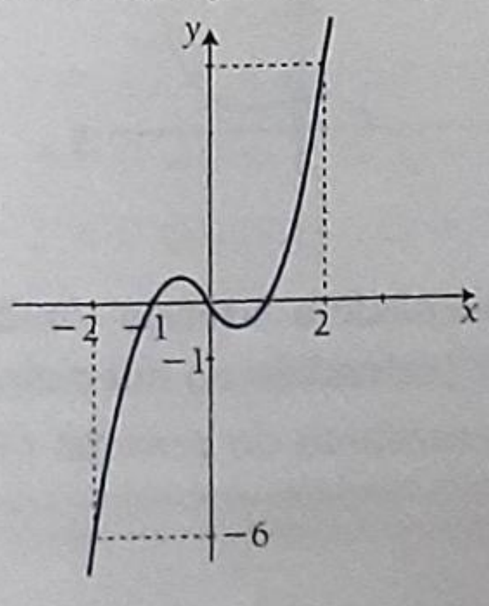
$-6 = k$

Se $k = -6$ a função $f(x)$ é contínua em -3.

Teorema de Bolzano ou de Bolzano - Cauchy

Observe o gráfico da função f definida por:

$f(x) = x^3 - x$



$f(-2) = -6$ e $f(2) = 6$

e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \in \mathbb{R}^- \\ \cos x, & \text{se } x \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^- \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{se } x \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$

20

Indique os pontos de descontinuidade das funções seguintes, classificado-os.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2+5}$

b) $f(x) = \begin{cases} x-5, & \text{se } x > 2 \\ 7, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \leq 4 \\ 3x-3, & \text{se } x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x}{x-4}, & \text{se } x \neq 4 \\ \log_2 x, & \text{se } x = 4 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-6}{x+2}, & \text{se } x \in \mathbb{R}_0^- \\ -3, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

21

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$, de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x < 2 \\ a, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x < a \\ x+3, & \text{se } x \geq a \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}, & \text{se } x \neq 2 \\ a, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

Scanned by TapScanner

Quando o x varia entre -2 e 2, $f(x)$ varia entre -6 e 6, ou seja, toma qualquer valor compreendido entre $f(-2)$ e $f(2)$.

A função f é uma função polinomial, logo é uma função contínua. Ao passar de -6 a 6, f passa por todos os valores intermédios.

Podemos enunciar o seguinte teorema:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Se k é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

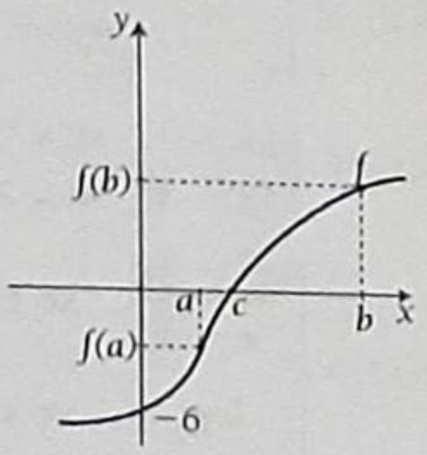
Mais intuitivamente:

Uma função contínua num intervalo não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

Exemplo

Seja $f(x) = 1 - 2x^3 + x^5$. A função f é contínua em $\mathbb{R}$ porque é uma função polinomial; logo é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

Como $f(-1) = 2$ e $f(1) = 0$ e $0 < \frac{1}{2} < 2$, o Teorema de Bolzano garante que a equação $f(x) = \frac{1}{2}$ tem solução no intervalo $]-1, 1[$.



Corolário do Teorema de Bolzano

Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a) \times f(b) < 0$, então a função f tem, pelo menos, um zero em $]a, b[$, ou seja:, $\exists\, c \in]a, b[: f(c) = 0$

Exercícios resolvidos

1. Provar que a equação $x^3 - x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]-2, -1[$.

Resolução

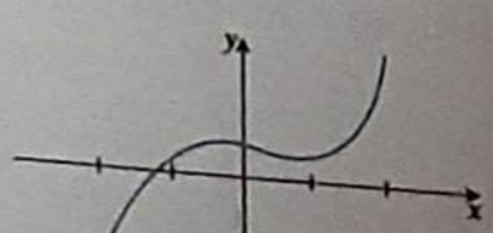
Calculemos $f(-2)$ e $f(-1)$:

$$f(-2) = -8 + 2 + 1 = -5 < 0$$
$$f(-1) = -1 + 1 + 1 = 1 > 0$$

donde, $f(-2) \cdot f(-1) < 0$ significa que f tem pelo menos uma raiz nesse intervalo. Aplicação do corolário do Teorema de Bolzano.

2. Esboçar o gráfico de $f(x) = x^3 - x + 1$ com uma calculadora gráfica, e determinar, com aproximação às centésimas, o zero pertencente ao intervalo referido em 1.

Resolução



x: mín. = −3
máx. = 3
esc. = 1
y: mín. = −5
máx. = 5
esc. = 1

Com as ferramentas da calculadora fazendo «andar» o cursor por cima do gráfico chegará ao valor pretendido no intervalo $]-2, -1[$.

O valor aproximado às centésimas do zero de f é $-1{,}32$.

22

Sendo $f(x) = -x^4 + 4$:

a) Verifique que f é uma função par.

b) Esboce o gráfico de f.

c) Determine $f(1)$ e $f(2)$. Que pode concluir relativamente à existência de zeros em $]1, 2[$?

d) Sabendo que f tem apenas dois zeros, determine-os com aproximação às décimas (utilize a calculadora).

Scanned by TapScanner

3. Considere uma função f contínua em $]2, 5[$ e tal que $f(2) = -1$ e $f(5) = 4$. O que pode dizer acerca do valor lógico das afirmações seguintes?

a) $\exists\, c \in]2, 5[: f(c) = 0$ b) $\exists\, c \in]2, 5[: f(c) = 3$ c) $\exists\, c \in]2, 5[: f(c) = 6$

Resolução

As afirmações das alíneas **a)** e **b)** são verdadeiras. Por aplicação do Teorema de Bolzano (ou o seu corolário na alínea **a)**) e atendendo a que $-1 < 0 < 4$ e $-1 < 3 < 4$, ou seja, 0 e 3 estão entre $f(2)$ e $f(5)$, podemos concluir que as equações $f(x) = 0$ e $f(x) = 3$ têm solução em $]2, 5[$. Quanto à alínea **c)**, nada podemos afirmar acerca do valor lógico da afirmação. Observe as representações gráficas seguintes, ambas compatíveis com as condições do enunciado.

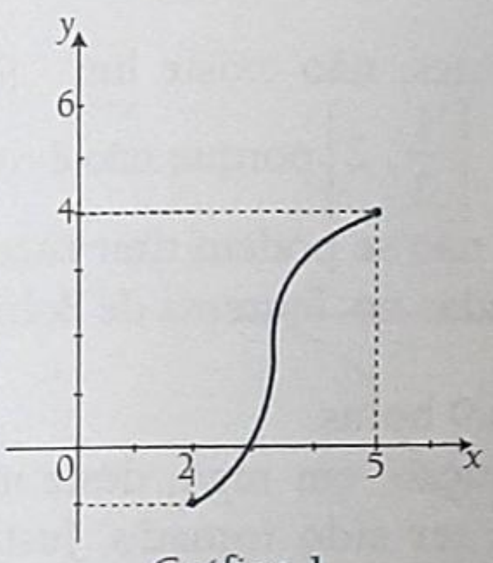


Gráfico 1

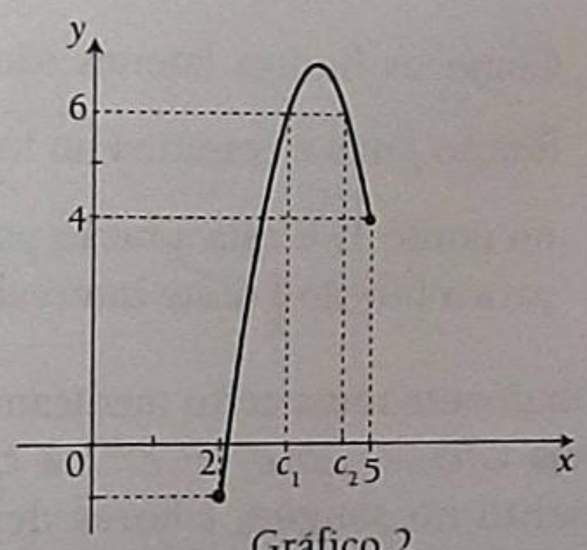


Gráfico 2

No caso da função do gráfico 1, a afirmação é falsa: a equação $f(c) = 6$ não tem solução em $]2, 5[$. Já em relação à função representada no gráfico 2 a afirmação é verdadeira:

$f(c_1) = 6$ e $f(c_2) = 6$ e c_1 e c_2 pertencem ao intervalo $]2, 5[$.

4. Seja f a função definida em $[0, 3]$ por $f(x) = \begin{cases} 2^x - 4 \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x \text{ se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

a) Verifique que $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ e $f(2) > 0$.

b) Mostre, por via analítica, que a função f não tem zeros.

c) Explique por que não se pode aplicar o Teorema de Bolzano à função f no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Resolução

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} - 4 = \sqrt{2} - 4 \approx -2{,}6 < 0$ e $f(2) = \log_2 2 = 1 > 0$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 4 = 0 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (\log_2 x = 0 \wedge 1 < x \leq 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (x = 1 \wedge 1 < x \leq 3) \Leftrightarrow x \in \varnothing$

A disjunção das duas condições é uma condição impossível pois ambas as condições são impossíveis: $2 \notin [0, 1]$ e $1 \notin]1, 3]$.

Então f não tem zeros.

23

Seja $f(x) = -x^3 - x + 4$.

Determine o conjunto dos valores de k para os quais o teorema de Bolzano permite concluir que a equação $f(x) = k$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, 2[$.

24

Use o teorema de Bolzano para provar que $f(x) = \ln x + x$ tem pelo menos um zero no intervalo $]\frac{1}{e}, 1[$

25

Se f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2, & \text{se } x < 1 \\ 2, & \text{se } x - 1 \\ bx + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determine valores para a e b de modo que o teorema de Bolzano se possa aplicar à função f no intervalo $[1, 3]$ mas não no intervalo $[0, 1]$.

Scanned by TapScanner

*Repare que dizer que f é contínua em [0, 1] apenas garante, no ponto 1, a continuidade à esquerda.

c) Que o Teorema de Bolzano não se pode aplicar é evidente pois, de contrário, o facto de $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(2) < 0$ permitia concluir a existência de pelo menos um zero de f no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ o que, como vimos, não acontece.
A única condição necessária para aplicar o Teorema de Bolzano a uma função definida num intervalo fechado é que a função seja contínua nesse intervalo. É então essa a condição que não se verifica para f e só pode falhar no ponto 1 porque a função é contínua em [0, 1]* e em]1, 3] pois nesses intervalos é definida por funções contínuas.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2^x - 4) = 2^1 - 4 = -2 \text{ e } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log_2 x = 0$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ e a função f não é contínua no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ porque não é contínua no ponto 1. É esta a razão pela qual não se podem tirar conclusões para a função f neste intervalo baseadas no Teorema de Bolzano.

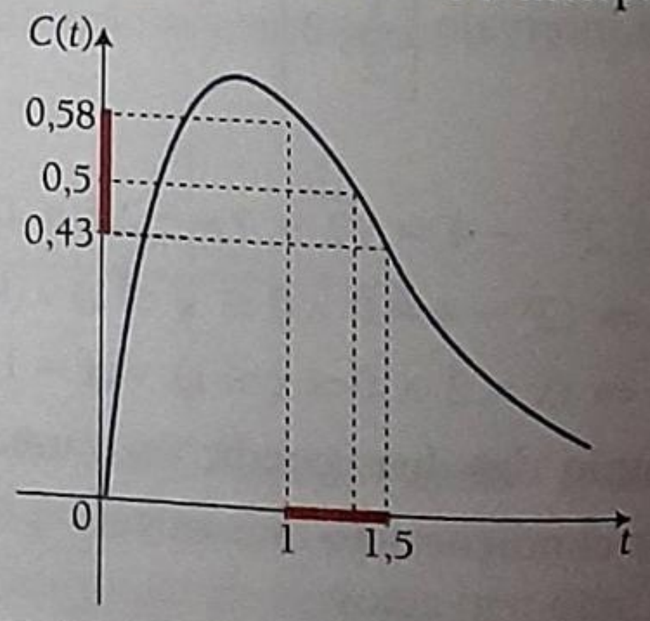
26

A velocidade de um foguetão, desde o arranque até se esgotar o combustível, pode ser dada em km por segundo por $v(t) = -3\ln(1 - 0{,}005t) - 0{,}01t$. A variável t designa o tempo em segundos após o arranque. Mostre que o foguetão atingiu a velocidade de 600 m/s entre o minuto e o minuto e meio depois do arranque.

5. Um doente toma certo medicamento às 9 horas.
Seja $C(t) = 2{,}5(e^{-t} - e^{-2t})$ a concentração, em mg/l, deste medicamento no sangue, t horas depois de ter sido tomado. Justifique, usando o Teorema de Bolzano, que existe um instante, entre as dez e as dez e meia, em que a concentração do medicamento no sangue é 0,5 mg/l.

Resolução

As concentrações às dez horas e às dez e meia são, respectivamente, $C(1)$ e $C(1{,}5)$. A função $C(t)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, é contínua em [1; 1,5] e tem-se:
$C(1) = 2{,}5(e^{-1} - e^{-2}) \approx 0{,}58$ e $C(1{,}5) = 2{,}5(e^{-1{,}5} - e^{-3}) \approx 0{,}43$.
Como 0,5 está entre 0,58 e 0,43, ou seja, $C(1{,}5) < 0{,}5 < C(1)$, o Teorema de Bolzano garante que $\exists\, t \in]1; 1{,}5[: C(t) = 0{,}5$.
Então está provado que existe um instante entre as dez e meia em que a concentração de medicamento no sangue é 0,5 mg/l.
Observe a representação da função C em $\mathbb{R}^+$ e a interpretação gráfica da solução encontrada.



Scanned by TapScanner

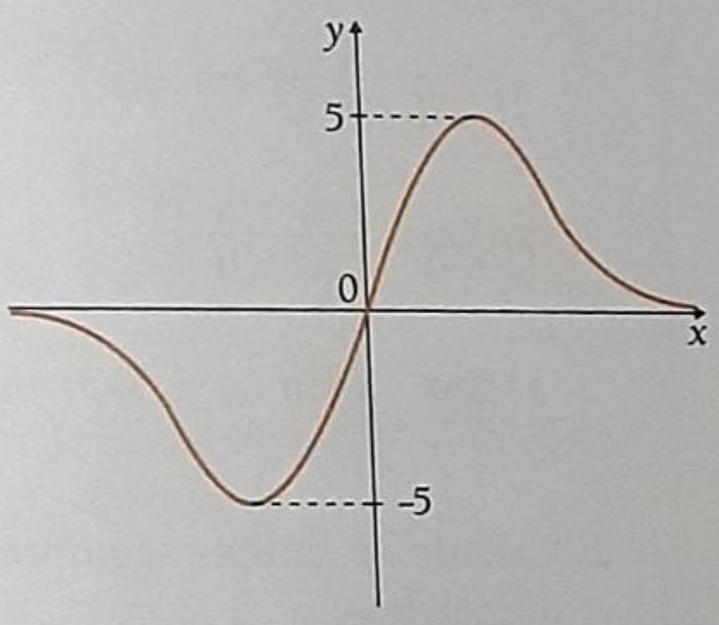
6. De uma função f de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que:
   - É contínua.
   - É ímpar.
   - 5 é o valor máximo.

   Justifique que o contradomínio de f é $[-5, 5]$.

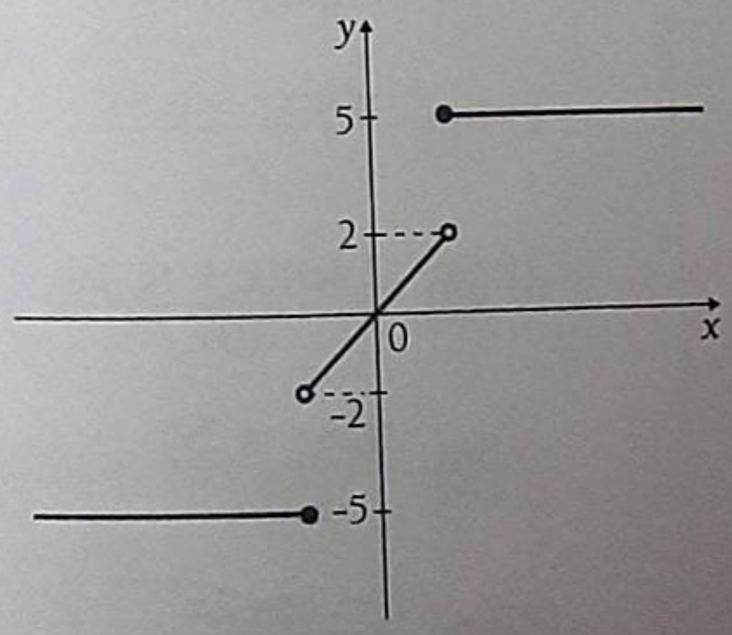
Resolução

Como f é ímpar, concluímos que -5 é o valor mínimo de f e, uma vez que f é contínua, o Teorema de Bolzano garante que a função toma todos os valores entre -5 e 5. Portanto, $D'_f = [-5, 5]$.

Uma função f nas condições do enunciado pode ser a que a seguir se representa graficamente:



Repare que, não se exigindo a continuidade de f, o contradomínio já não tem que ser $[-5, 5]$, como se exemplifica no gráfico em baixo em que o contradomínio da função é $]-2, 2[\cup \{-5, 5\}$.



27

O volume de uma esfera é dado em função do raio por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Use o Teorema de Bolzano para mostrar que 1,25 cm é um valor aproximado do raio de uma esfera de volume 8,25 cm³ com erro inferior a 0,01.

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

1. Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+7x^2-5})$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+7x^2-5})$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3-x+14}{4x^3+5x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6-6x^2}{3x^5-5x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{46\,000x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^{70}(2x+3)^{30}}{(4x-2)^{15}(5-x)^{85}}$

h) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$

i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x^2-3x+2}{x^3-1}$

j) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$

k) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$

l) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^6-1}{1-x^4}$

m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-7x+2}$

n) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x^2}{2x^3-3}$

o) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)^{15}\cdot(x-3)^{15}}{(2x-1)^7\cdot(x-6)^{15}}$

p) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+a)^3-a^3}{x}$

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-3x}$

s) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+6}$

t) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

u) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{x}}$

v) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-x\right)^{\frac{2}{x}}$

w) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\operatorname{sen}x\right)^{\frac{1}{x}}$

x) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{sen}2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}5x}}$

y) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$

z) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\,[\ln(x+5)-\ln(x+3)]$

(1983 – 1.ª Época)

2. Calcule os limites seguintes das funções trigonométricas:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\operatorname{sen}5x}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{tg}2x}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}4x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\operatorname{sen}x+\operatorname{tg}3x}{10x}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}{\operatorname{sen}^2x}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{2x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}5x}$

h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}$

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

3. Analise, analiticamente, a continuidade das funções seguintes no ponto indicado e classifique os pontos de descontinuidade:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-5x^2+6}$, $x_1 = 2; x_2 = 3$

b) $f(x) = \dfrac{x^4-x}{x^2-x}$, $x_1 = 0; x_2 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} -5, & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^3+x-2}, & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$ $x_1 = 1;\ x_2 = -2$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2-x, & \text{se } x \leq -2 \\ x+3, & \text{se } x > -2 \end{cases}$ $x = -2$

e) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{\text{sen } x}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $x = 0$

4. Indique os pontos de descontinuidade das funções seguintes e classifique-os.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-7, & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x+3}{x^2-5x-6}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

5. Estude a continuídade da seguinte função:

$$f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$$

6. Mostre que a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

é descontínua para $x = 0$.

7. Dada a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, \text{ se } x \leq 1 \\ -x+a, \text{ se } 1 < x < 3 \\ \log_2(x-1), \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

a) Construa o gráfico de f para $a = 2$.

b) Determine o valor gráfico de a para que f seja contínua.

c) Justifique que f não é contínua em $x = 3$.

(2.ª Época – 1988)

8. Dadas as funções reais de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x > 2 \\ 2x-1, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

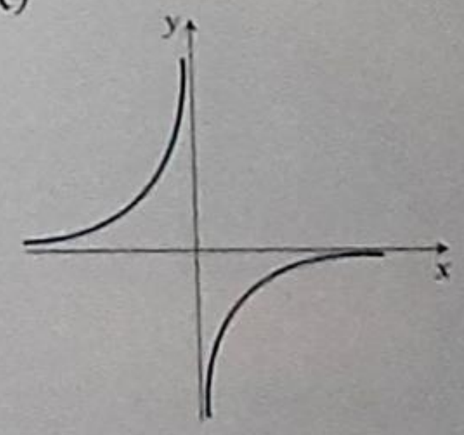
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x+1}{2x-1}, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

estude a continuidade de $f(x)$ e $g(x)$.

9. A figura em baixo mostra o gráfico de f.

a) Calcule:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$



b) Para que valores de x a função é contínua?

c) Indique o contradomínio de f.

d) Estude a paridade de f.

(1.ª Época – 2002)

10. Dadas as funções reais de variável real:

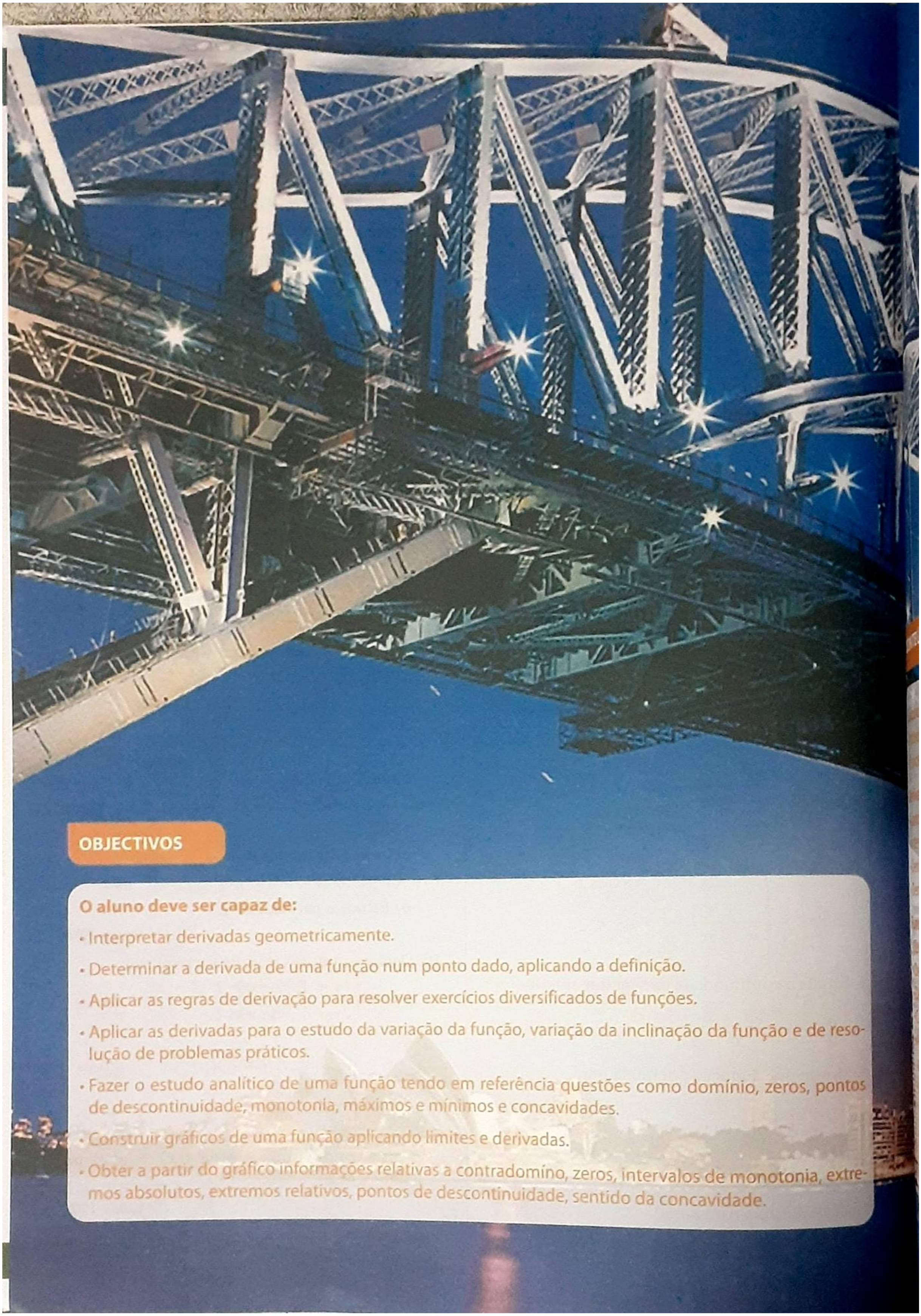
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x > 2 \\ 2x-1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x+1}{2x-1}, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

estude a continuidade de $f(x) + g(x)$ no ponto $x = 2$.

(2.ª Época – 1988)

Scanned by TapScanner

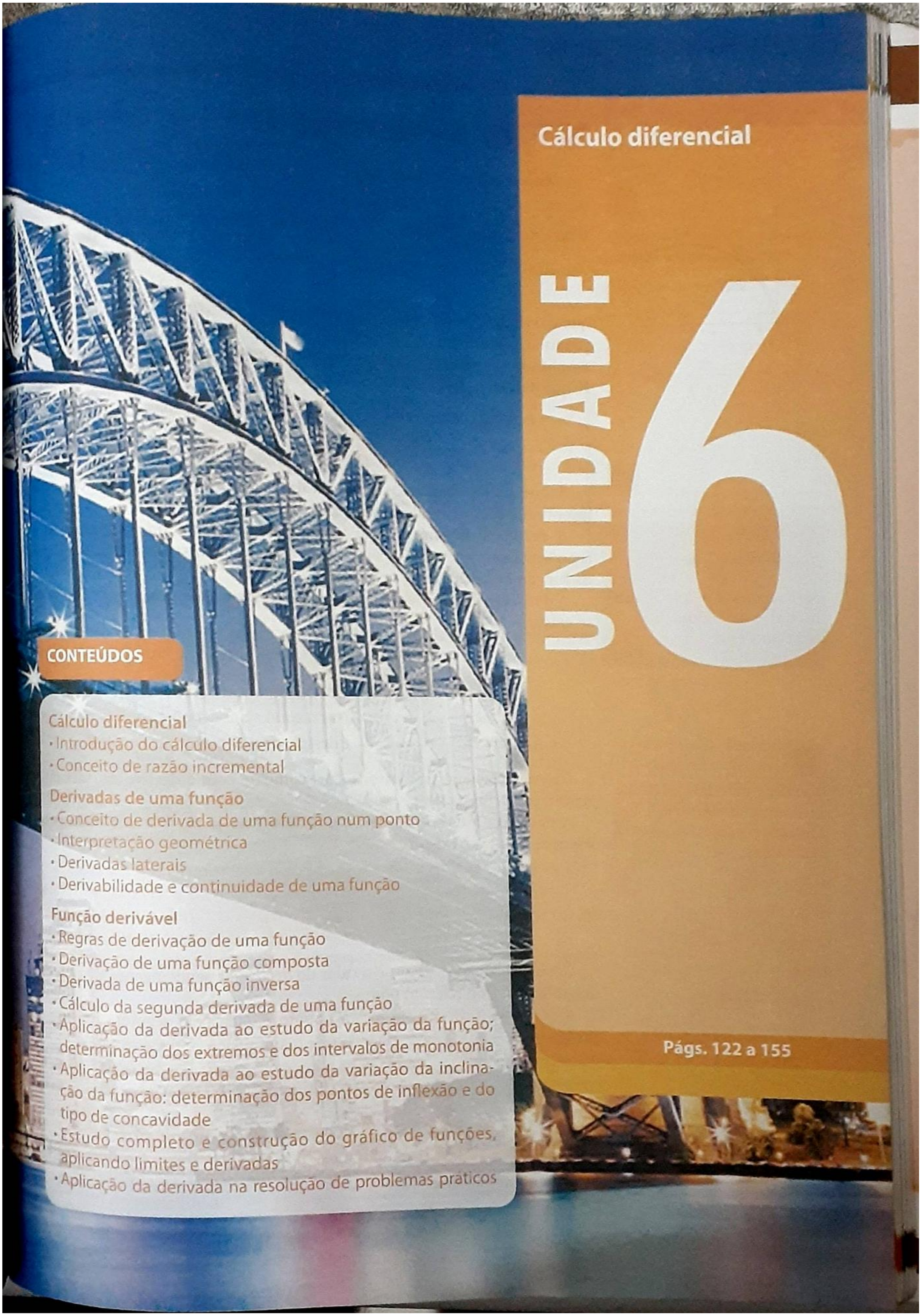


OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

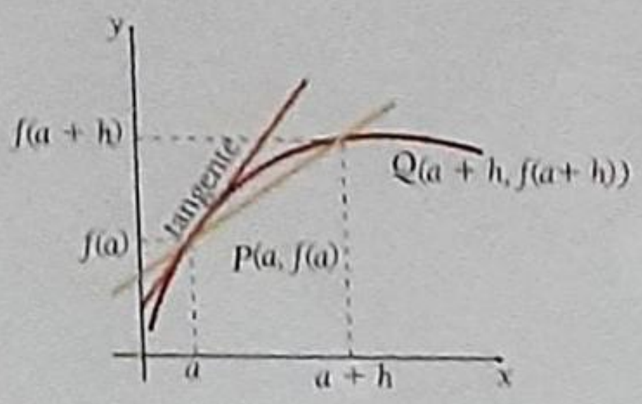
- Interpretar derivadas geometricamente.
- Determinar a derivada de uma função num ponto dado, aplicando a definição.
- Aplicar as regras de derivação para resolver exercícios diversificados de funções.
- Aplicar as derivadas para o estudo da variação da função, variação da inclinação da função e de resolução de problemas práticos.
- Fazer o estudo analítico de uma função tendo em referência questões como domínio, zeros, pontos de descontinuidade, monotonia, máximos e mínimos e concavidades.
- Construir gráficos de uma função aplicando limites e derivadas.
- Obter a partir do gráfico informações relativas a contradomíno, zeros, intervalos de monotonia, extremos absolutos, extremos relativos, pontos de descontinuidade, sentido da concavidade.

Scanned by TapScanner



Scanned by TapScanner

Noção de derivada



Consideremos uma função f e o seu gráfico e tomemos os pontos

$$P(a,\ f(a)) \text{ e } Q((a+h),\ f(a+h))$$

a taxa da variação média de f no intervalo $[a, a+h]$ é dada por:

$$T.v.m._{[a,\,a+h]} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

que é o declive da recta secante ao gráfico nos pontos P e Q. Se movermos o ponto Q sobre a curva, aproximando-o do ponto P, obtemos intervalos de amplitude cada vez menor, e o declive da recta tangente à curva no ponto P, que é dado por:

$$t_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A este limite chamamos derivada de f no ponto $P\ (a, f(a))$ e é o mais importante limite do cálculo diferencial.

A derivada de uma função f num ponto $x = a$ é um número real e representa-se por $f'(a)$ e é coincidente com a taxa instantânea de variação da função nesse ponto.

$f'(x)$ ou $(df)_{x=a}$ ou $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$

Se fizermos $a + h = x$, vem $h = x - a$, como $h \to 0$, também $x \to a$.

A derivada de uma função f no ponto $x = a$ é dada pelo seguinte limite, se existir:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- A razão $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ é designada por razão incremental.

1

Usando a definição derivada determine as derivadas nos pontos $x = a$, $x = 2$ e $x = -3$ das funções:

a) $f(x) = 2x^2$

b) $g(x) = x^3$

c) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 6$

d) $i(x) = \sqrt{x}$

e) $j(x) = \frac{x-2}{x}$

Geometricamente, a derivada $f'(a)$ coincide com o declive da recta tangente à curva no ponto $x = a$.

A derivada à esquerda de uma função f no ponto $x = a$ é dada pelo seguinte limite, se existir:

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Geometricamente, $f'(a^-)$ é o valor do declive da semitangente à esquerda do gráfico de f no referido ponto.

A derivada à direita no mesmo ponto é dada pelo seguinte limite, se existir:

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Geometricamente, $f'(a^+)$ é o valor do declive da semitangente à direita do gráfico f no ponto $x = a$.

Scanned by TapScanner

Equação da recta tangente a uma curva num ponto $x = a$

Uma vez que a derivada de uma função f num ponto $x = a$ coincide com o declive da recta tangente à curva no ponto $(a, f(a))$, vejamos como determinar a equação da recta tangente à curva nesse ponto.

Basta substituir na fórmula $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ os valores dados, ou seja,

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

Exercício resolvido

Determine a equação de recta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $x = 1$.

Resolução

$f'(x) = 2x \;;\; f'(1) = 2 \;;\; f(1) = 1$

$y - 1 = 2\,(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

2

Escreva a equação da recta tangente das seguintes funções:

a) $g(x) = x^2 + 1$ para $x = 2$

b) $h(x) = (x + 1)^2$ para $x = 1$

c) $f(x) = x^2 - 4x$ para $x = 4$

d) $i(x) = \dfrac{8x}{x^2 + 1}$ para $x = 0$

3

Determine o declive da recta tangente ao gráfico da função:

$$f(x) = -3x^2 + 2x$$

no ponto $x = 2$.

Função derivada

Comecemos por considerar o movimento dum automóvel, num certo intervalo de tempo, traduzido pela expressão:

$$d(t) = t^2 + 2t$$

Calculemos a derivada de função no ponto $t = a$:

$$d'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{d(a + h) - d(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2a + h + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h + 2) = 2a + 2$$

Uma vez que calculámos a derivada de $d(t)$ num ponto $t = a$ com $a \in \mathbb{R}$ podemos escrever: $d'(t) = 2t + 2$ sendo $d'(t)$ a função derivada de $d(t)$.

Qual será a derivada da função para $t = 1$? Substituindo a por 1 na expressão obtida, vem $d'(1) = 4$.

Neste caso, esta nova função é chamada velocidade, e também se pode denotar por:

$$v(t) = 2t + 2$$

Se fizermos $t = 2$, o valor obtido será 6 m/s que representa a derivada de $d(t)$ no instante $t = 2$. Fisicamente, este valor é a velocidade instantânea do automóvel no instante $t = 2$, isto é, o valor que o velocímetro do automóvel apresenta.

Dada uma função f é possível obter uma nova função f' a que se chama função derivada de f.

O domínio da função derivada f' é o conjunto dos pontos onde a função f tem derivada finita.

4

Dada a função:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x}$$

a) Determine a abcissa do ponto do gráfico de f, cuja recta tangente tem um coeficiente angular igual a 1.

b) Determine a ordenada desse ponto.

Scanned by TapScanner

Derivadas sucessivas

Se pretendermos determinar a aceleração do automóvel, referido anteriormente, no instante $t = 3$, precisamos de calcular a derivada da função velocidade nesse instante. Comecemos por calcular a expressão da derivada de v em qualquer instante t.

$$v'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(t+h) + 2 - 2t - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2t + 2h + 2 - 2t - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Constatamos que, neste caso, a derivada da velocidade (aceleração) é constante em qualquer instante.

A aceleração é a derivada da função velocidade e a velocidade é a derivada da função espaço, pelo que a função aceleração é a segunda derivada da função espaço.

É, pois, possível definir derivadas de várias ordens, isto é, uma função f', derivada de f, será também derivável, denominando-se segunda derivada de f e representando-se por f''.

Analogamente, podem-se definir f''', f^{IV}, ...

Exemplo

Usando a definição de derivada verificamos que para $f(x) = x^2$:
- A primeira derivada de f é $f'(x) = 2x$.
- A segunda derivada é $f''(x) = 2$; a terceira derivada é $f'''(x) = 0$, ...

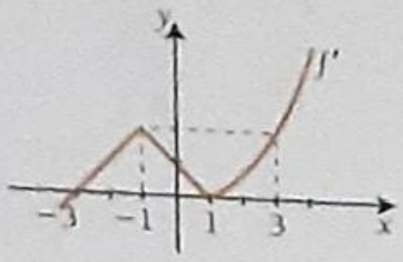
5

Calcule a primeira e a segunda derivadas da função:

$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

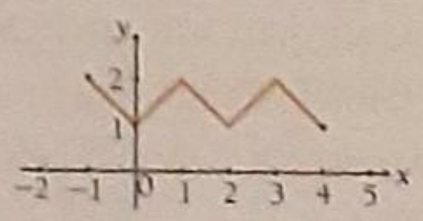
6

Dado o gráfico de f'



a) Complete com um dos símbolos $>$, $<$ ou $=$.
- $f'(1)$ ___ 0
- $f'(3)$ ___ 0
- $f'(0)$ ___ 0

b) Indique um ponto onde a derivada existe.



Derivadas laterais

Consideremos uma função f definida graficamente em $[-1, 4]$.
f é derivável em $x = 0$? E em $x = 1$? E em $x = 2$?
f será derivável em $x = 0$ se existirem e forem iguais os limites laterais:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{e}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Por observação do gráfico, verificamos que $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$, o que significa que os limites laterais no ponto zero são diferentes, donde se conclui que f não é derivável em $x = 0$, apesar de ser contínua nesse ponto.

Analogamente, conclui-se que f não é derivável nos pontos $x = 1$ e $x = 2$.

Seja f uma função real e a um ponto do domínio de f.

Chama-se derivada lateral à direita de a e representa-se por $f'(a^+)$:

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(x)}{x}$$

Scanned by TapScanner

Chama-se **derivada lateral à esquerda** de a e representa-se por $f'(a^-)$:

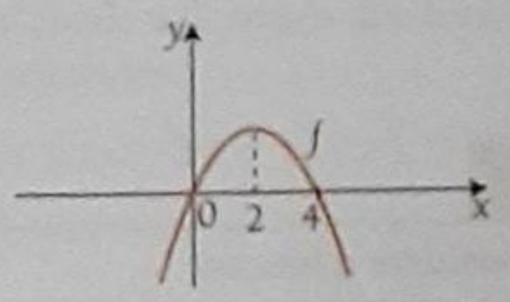
$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(a)}{h}$$

Se existirem e forem iguais as derivadas laterais no ponto a, então existe a derivada de função no ponto a e é igual ao valor comum das derivadas laterais.

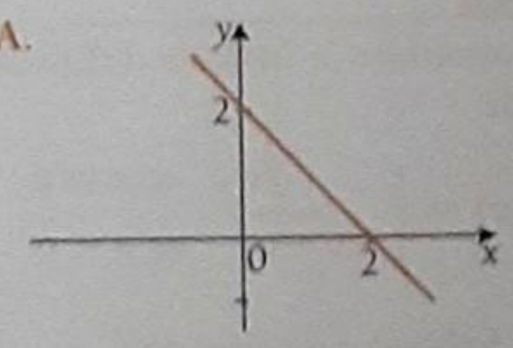
$$f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$$

7

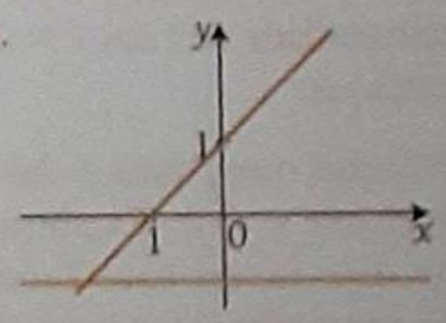
A cada uma das funções representadas faça corresponder o gráfico da sua função derivada:



A.

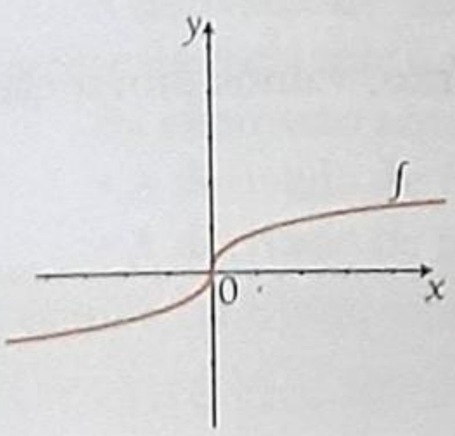


B.

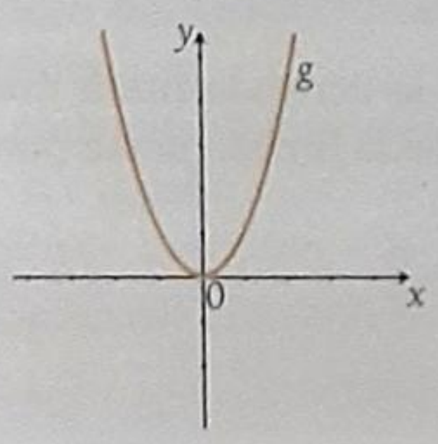


Derivabilidade e continuidade

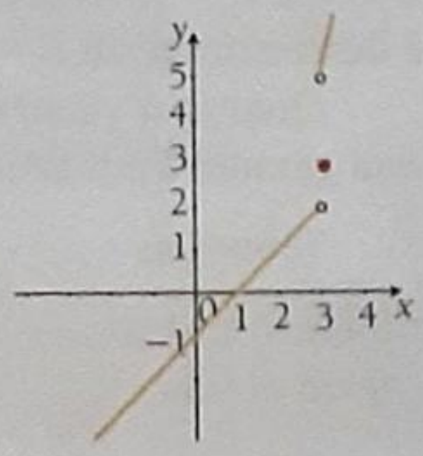
Observe os seguintes gráficos:



$f(x) = \sqrt[3]{x}$



$g(x) = x^2$



$$m(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 3 \\ 3 & \text{se } x = 3 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Calculemos $f'(0)$, $g'(1)$ e $m'(3)$:

- $f'(0)$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} =$$

$$\lim_{h \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{h^2}} = \sqrt[3]{\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^2}} = +\infty$$

Analogamente, conclui-se que $f'(0^-) = +\infty$.
Donde,

$$f'(0) = +\infty$$

- $g'(1)$

$$g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

A função g admite derivada finita em $x = 1$.

- $m'(3)$

$$m'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{m(3 + h) - m(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(3 + h) - 1 - 3}{h} \Leftrightarrow$$

Verifique que g admite derivada para qualquer $a \in D_g$.

Scanned by TapScanner

$$m'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{6+2h-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2+2h}{h} = +\infty$$

$$m'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{m(3+h)-m(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3+h-1-3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h-1}{h} = +\infty$$

A função m admite derivada infinita em $x = 3$.

Como acabámos de verificar, o valor da derivada de uma função, num ponto $x = a$, pode ser finito ou infinito. Quando o valor da derivada num ponto é finito, dizemos que a **função é derivável nesse ponto.**

No caso das funções com derivada infinita, constatámos que estas podem ser contínuas ou descontínuas: f e m têm derivadas infinitas em $x = 0$ e $x = 3$, respectivamente, e f é contínua nesse ponto enquanto que m é descontínua em $x = 3$.

Quanto à existência de derivada finita num ponto, vamos provar que esta garante a continuidade da função nesse ponto.

Teorema:

Toda a função que admite derivada finita num dado ponto é contínua nesse ponto.

Demonstração:

Suponhamos que a função f tem derivada finita para $x = a$.

A igualdade $f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$ é verdadeira para $\forall\, x \neq a$.

Aplicando limites a ambos os membros, vem:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0$$

Como $f'(a)$ é finita, tem-se:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = 0 \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

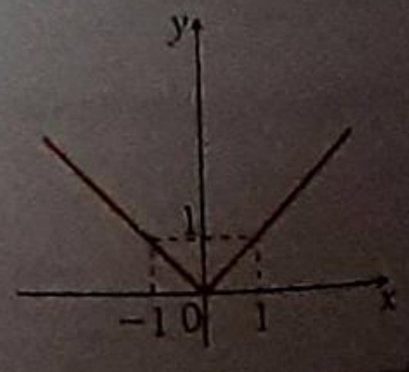
o que é equivalente a dizer que f é contínua em $x = a$.

Vejamos que o recíproco do teorema anterior pode não ser verdadeiro, isto é, uma função pode ser contínua num ponto e não ter derivada nesse ponto.

Exemplo

Consideremos $f(x) = |x|$ e o respectivo gráfico.

Esta função é contínua em $x = 0$ e nesse ponto não tem derivada, já que $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$.



8

Considere a função:

$$g(x) = x^2 - 1$$

a) g admite derivada em $x = 0$? Justifique.

b) O que pode concluir sobre a continuidade de g em $x = 0$?

9

Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f.

b) O que pode concluir sobre a continuidade de f em $x = 0$? Justifique.

c) Verifique que f não é derivável em $x = 0$. Explique por que razão este facto não contradiz o teorema da continuidade e derivabilidade.

10

Considere

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \leq 1 \\ 3x+1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Averigúe se existe $f'(1)$.

b) Defina a função $f'(x)$.

Scanned by TapScanner

Regras de derivação

Derivada da função afim

Para $f(x) = mx + b$ determinemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(mx + mh + b) - (mx + b)}{h} = m$$

Donde:

> $f(x) = mx + b$ então $f'(x) = m$

A derivada de uma função do tipo $f(x) = mx + b$ é igual a m que é o declive da recta que a representa.

Da expressão anterior, podemos tirar as seguintes conclusões:

- A derivada de $f(x) = x$ é igual a 1: $(x)' = 1$.
- A derivada de uma função constante é igual a 0: $(b)' = 0$.

11

Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x$

c) $f(x) = ax\ (a \neq 0)$

d) $f(x) = \frac{3x - 2}{4}$

e) $f(x) = x^2 - 3x$

f) $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$

Derivada da soma e da diferença de duas funções

Consideremos duas funções, f e g, que admitem derivada finita num ponto a, então $f + g$ é derivável em a e $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Demonstração

$$[f(a) + g(a)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

Se, em vez de duas, se tratar de três ou mais funções, o processo de cálculo da derivada é análogo.

A derivada da soma de duas ou mais funções num ponto de derivada finita é sempre igual à soma das derivadas das funções nesse ponto.

> $(f + g)'(x) = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Scanned by TapScanner

De modo idêntico:

A derivada da diferença de duas ou mais funções num ponto de derivada finita é sempre igual à diferença das derivadas das funções nesse ponto.

$$(f - g)'(x) = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

Exemplos

Para $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 5x$

1. $(f + g)'(x) = (2x + 3)' + (5x)' = 2 + 5 = 7$
2. $(f - g)'(x) = (2x + 3)' - (5x)' = 2 - 5 = -3$

Derivada do produto de funções

Consideremos duas funções, f e g, que admitem derivada finita num ponto a, então $f \cdot g$ é derivável em a.

$$[f(a) \cdot g(a)]' = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$$

Demonstração

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h}$$

Somando e subtraindo $f(a) \cdot g(a+h)$, vem:

$$(f \cdot g)'(a) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h) - f(a)] \cdot g(a+h) + f(a) \cdot [g(a+h) - g(a)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot g(a+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \cdot f(a)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(a+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} f(a)$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$$

A derivada do produto de duas ou mais funções num ponto de derivada finita é dada por:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$$

Exemplos

Para $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + 2$

$(f \cdot g)'(x) = (x + 1)' \cdot (x^2 + 2) + (x^2 + 2)' \cdot (x + 1) =$

$= 1(x^2 + 2) + 2x\,(x + 1) = x^2 + 2 + 2x^2 + 2x = 3x^2 + 2x + 2$

Scanned by TapScanner

Derivada do produto duma constante por uma função

Sendo k uma constante e f uma função que admite derivada finita num ponto, então o produto de k por f também admite derivada.

Aplicando a regra do produto, obtemos:

$$[k \cdot f(x)]' = k' \cdot g(x) + k \cdot f'(x) = k \cdot f'(x)$$

A derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função:

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

Exemplos

1. $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3(2x) = 6x$
2. $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2}(2x) = x$

Derivada duma potência de expoente natural

Considerando uma função f que admite derivada finita num ponto a, então a potência de expoente natural também admite derivada nesse ponto.

Comecemos por determinar a derivada de $[f(x)]^3$.

Ora, $[f(x)]^3 = f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)$, logo, para calcular a sua derivada, aplicamos a regra do produto:

$$\begin{aligned}([f(x)]^3)' &= [f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)]' \\ &= f'(x) \cdot [f(x)]^2 + f'(x) \cdot [f(x)]^2 + f'(x) \cdot [f(x)]^2 \\ &= 3 \cdot f'(x) \cdot [f(x)]^2\end{aligned}$$

Donde:

$$([f(x)]^n)' = n \cdot [f(x)]' \cdot [f(x)]^{n-1}$$

A derivada duma potência de expoente natural de uma função é sempre igual ao produto do expoente por uma potência com o expoente subtraído de uma unidade, a multiplicar pela derivada da base:

$$([f(x)]^n)' = n \cdot f'(x) \cdot [f(x)]^{n-1}$$

Em particular,

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}[(x-2)^3]' &= 3 \cdot (x-2)' \cdot (x-2)^2 \\ &= 3 \cdot 1 \cdot (x-2)^2 = 3(x-2)^2\end{aligned}$$

12

Calcule, aplicando as regras da derivação, a derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

b) $g(x) = x(8x + 1)$

c) $h(x) = (x^2 - 1)^2$

d) $i(x) = (5x + 1)(x^2 - 4x)$

Scanned by TapScanner

Derivada dum quociente

Consideremos duas funções, f e g, que admitem derivada finita num ponto a e $g(a) \neq 0$. A função $\frac{f(a)}{g(a)}$ também admite derivada finita no ponto a.

Demonstração

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(a)\,f(a+h) - f(a)\,g(a+h)}{h\,g(a+h)\,g(a)} =$$

Adicionando e subtraindo $g(a)\,f(a)$,

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(a)\,f(a+h) - g(a)\,f(a) + g(a)\,f(a) - f(a)\,g(a+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} g(a)\,\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a)\,\frac{g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$= \frac{f'(a)\,g(a) - g'(a)\,f(a)}{[g(a)]^2}$$

A derivada de um quociente de duas funções num ponto de derivada finita é dada por:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

13

Calcule, aplicando as regras da derivação, a derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = \frac{x^4 - 2}{10}$

b) $g(x) = \frac{3x - 2}{x}$

c) $h(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}$.

d) $i(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3}$

Exemplo

$$\left(\frac{x+1}{x-3}\right)' = \frac{(x+1)'(x-3) - (x+1)(x-3)'}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{(1+0)(x-3) - (x+1)(1-0)}{(x-3)^2} = \frac{\cancel{x} - 3 - \cancel{x} - 1}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-4}{(x-3)^2}$$

Derivada duma potência de expoente racional

Consideremos uma função f definida por $f(x) = 2x^{-2}$.

A expressão $f(x)$ pode ser escrita na forma de $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

Para calcular a derivada de f, aplicamos a regra do quociente. Donde vem:

$$f'(x) = \frac{2' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot 2}{(x^2)^2} = \frac{0 - 2x \cdot 2}{x^4} = \frac{-4x}{x^4} = -\frac{4}{x^3} = -4x^{-3}$$

Scanned by TapScanner

Reparemos que esta derivada poderia ter sido obtida a partir de uma regra análoga à da potência de expoente natural, estendida à potência de expoente inteiro.

Consideremos uma outra função g definida por: $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$.
Reparemos que $g(x)$ também pode ser escrita como: $g(x) = \sqrt{x}$.
Podemos calcular a sua derivada recorrendo à definição:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

O cálculo deste limite conduz-nos a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Multiplicando e dividindo pelo conjugado do numerador, vem:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

Estendendo a regra da potência de expoente natural à potência de expoente fraccionário, vem:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

A derivada duma potência de expoente racional não nulo duma função é sempre igual ao produto do expoente por essa potência com o expoente subtraído duma unidade, a multiplicar pela derivada da base:

$$([f(x)]^p)' = p \cdot f'(x) \cdot [f(x)]^{p-1}, \text{ com } p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Exemplos

1. $(\sqrt[3]{x+1})' = \left[\left(x+1\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 1 = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

2. $(\sqrt{x^2-3})' = \left[\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

14

Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Derivada da função composta

Consideremos duas funções, f e g, que admitem derivada finita num ponto a. A função $(f \circ g)(x)$ também admite derivada finita no ponto a.

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h}$$

Scanned by TapScanner

Vamos multiplicar e dividir por $g(a+h) - g(a)$.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(a+h)] - f[g(a)]}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(a+h)] - f[g(a)]}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'[g(a)] \cdot g'(a)$$

A derivada de uma composição de funções $f$og é igual ao produto da derivada de f no ponto $g(x)$ pela derivada de g no ponto x:

$$(f\text{o}g)'(x) = g'[f(x)] \cdot g'(x)$$

15

Considere as funções:

$f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^3$

a) Calcule $h(x) = (g\text{o}f)(x)$.

b) Calcule $h'(1)$.

Exemplos

$$[(2x+1)^2]' = 2(2x+1)^{2-1} \cdot (2x+1)' = 2(2x+1) \cdot 2 =$$
$$= 4(2x+1) = 8x + 4$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Derivada da função exponencial

Derivada da função exponencial de base e.

Comecemos por calcular a derivada da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$.

Por definição, vem:

16

Calcule a derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = e^{4x}$

b) $g(x) = 2^x$

c) $h(x) = 2x\,e^{4x}$

d) $i(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

Sendo $g(x)$ uma função, vem:

$[e^{g(x)}]' = e^{g(x)}$ ou $(e^u)' = u' \cdot e^u$ com $u = g(x)$

A derivada da função exponencial de base e é dada por:

$$(e^x)' = e^x$$

A função exponencial é a única função cuja expressão da derivada coincide com a própria função.

Sendo $u = g(x)$ uma função, tem-se:

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

Derivada da função exponencial de base $a > 1$

Calculemos agora a derivada duma função exponencial de base $a > 1$.

Seja $g(x) = a^x$, por definição de logaritmo, sabemos que:

$$a = e^{\ln a} \text{ donde } a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

Aplicando a regra da derivada da exponencial de base e, vem:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (e^{x \ln a})' \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

Sendo $f(x)$ uma função, vem:

$$(a^{f(x)})' = \ln a \cdot f'(x) \cdot a^{f(x)} \text{ ou } (a^u)' = \ln a \cdot u' \cdot a^u \text{ com } u = f(x)$$

A derivada duma função exponencial de base $a > 1$ é dada por:

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^u$$

Scanned by TapScanner

Sendo $u = f(x)$ uma função, tem-se:

$$(a^u)' = \ln a \cdot u' \cdot a^u$$

Exemplos

1. $[x^2 e^{-x}]' = (x^2)' e^{-x} + x^2 \ (e^{-x})' = 2x e^{-x} + (-1) e^{-x} x^2 = e^{-x}(2x - x^2)$
2. $(3^{2x})' = 2 \cdot \ln 3 \cdot 3^{2x} = 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$

17

Calcule as derivadas das funções seguintes:

a) $f(x) = 10^{2x-3}$

b) $g(x) = 2^{\sqrt{x+1}}$

c) $h(x) = \frac{3^x}{x}$

d) $i(x) = 5^{x^2}$

Derivada da função logaritmo

Derivada da função logaritmo de base e

Consideremos a função definida por $g(x) = \ln x$.

Calculemos utilizando a definição de derivada de g.

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Sendo $f(x)$ uma função, vem:

$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ou $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ com $u = f(x)$

A derivada da função logaritmo de base e é dada por:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Sendo $u = f(x)$ uma função, tem-se:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Derivada da função logaritmo de base $a > 1$

Seja $f(x) = \log_a x$,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

Sendo $f(x)$ uma função vem:

$[\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$ ou $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ com $u = f(x)$ uma função.

Scanned by TapScanner

A derivada da função logaritmo de base $a > 1$ é dada por:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Sendo $f(x) = u$ uma função, tem-se:

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

Exemplos

1. $(\ln 2x)' = \frac{(2x)'}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

2. $(\log x^2)' = \frac{(x^2)'}{x^2 \ln 10} = \frac{2x}{x^2 \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$

18

Calcule a derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = \ln(x - 1)$

b) $g(x) = \ln \sqrt{x}$

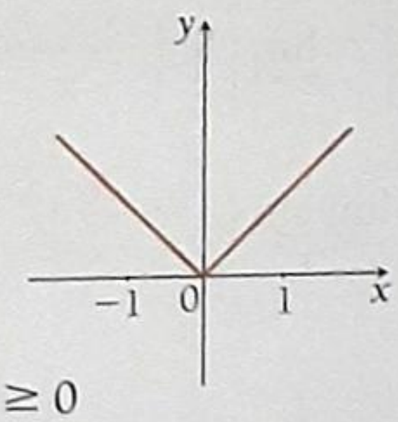
c) $h(x) = \log(x + 3)$

d) $i(x) = \frac{\ln x}{x}$

e) $m(x) = \log_2(x^2 - 1)$

Derivada da função módulo

Seja:



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Para $x \geq 0$, $f(x) = x$ donde $f'(x) = 1$.

Para $x < 0$, $f(x) = -x$ donde $f'(x) = -1$.

Averiguemos a existência de derivada para $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}, \; h \neq 0$$

Para determinar este limite, teremos que calcular:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h}, \text{ isto é,}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} -\frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} -1 = -1$$

Como estes limites são diferentes, concluímos que não existe limite para $x = 0$, ou seja, não existe derivada neste ponto.

Diz-se que a função $f(x) = |x|$ não é derivável no ponto $(0, 0)$.

Graficamente, verificamos que se trata de um ponto anguloso, não sendo possível traçar uma recta tangente no ponto.

19

Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $m(x) = |x - 7|$

b) $n(x) = |3x + 6|$

c) $p(x) = |4 - 5x|$

20

Estude a derivabilidade de $g(x) = |x - 2|$, para $x = 2$.

Scanned by TapScanner

Derivada da função seno

Vamos obter a função derivada da função $f(x) = \text{sen } x$ aplicando a definição de derivada no ponto x:

$$(\text{sen } x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } (x + h) - \text{sen } x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \text{sen } h \cos x - \text{sen } x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x (\cos h - 1) + \text{sen } h \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h \cos x}{h} =$$

$$= \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h} =$$

$$= \text{sen } x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$\text{sen } (x + h) =$
$= \text{sen } x \cos h + \text{sen } h \cos x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

Assim, podemos afirmar que a função derivada da função seno é a função co-seno:

$$(\text{sen } x)' = \cos x$$

Sendo $u(x)$ uma qualquer função real de variável real, derivável, o resultado anterior pode ser generalizado, aplicando o teorema de derivada da função composta:

$$[\text{sen } u(x)]' = u'(x) \cdot \cos u(x)$$

21

Calcule a derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = 2\text{sen } x$

b) $g(x) = \text{sen } 3x$

c) $h(x) = \frac{1}{\text{sen } 2x}$

d) $m(x) = \ln (\text{sen } x)$

Exemplos

1. $(\text{sen } 2x)' = \cos 2x \, (2x)' = 2\cos 2x$
2. $[\text{sen}^2 (5x + 1)]' = 2 \cos (5x + 1) \cdot (5x + 1)' = 10\cos (5x + 1)$

Derivada da função co-seno

Para determinar a derivada da função $f(x) = \cos x$, em vez de irmos pela definição, basta considerar:

$$(\cos x)' = \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1\text{sen } x =$$

$$= -\text{sen } x$$

Podemos, então, afirmar que a função derivada da função co-seno é o simétrico da função seno:

$$(\cos x)' = -\text{sen } x$$

Scanned by TapScanner

22

Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = \cos 2x$

b) $g(x) = \dfrac{2}{\cos 3x}$

c) $h(x) = \ln(\cos x)$

d) $i(x) = \cos(x^2 - 1)$

Este resultado pode também ser generalizado, considerando uma qualquer função real de variável real $u(x)$, derivável:

$$[\cos u(x)]' = -u'(x) \cdot \operatorname{sen} u(x)$$

Exemplos

1. $(\cos 5x)' = -\operatorname{sen} 5x\,(5x)' = -5 \operatorname{sen}(5x)$
2. $\cos^2(3x - 1) = -2\operatorname{sen}(3x - 1)(3x - 1)' = -6\operatorname{sen}(3x - 1)$

Derivada da função tangente

Para determinar a derivada da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ faremos $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
Aplicando a definição, teremos:

23

Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = \operatorname{tg} 5x$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x^2}$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'\cos x - (\cos x)'\operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

ou seja,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \;;\; (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Exemplos

1. $[\operatorname{tg}(3x)]' = \dfrac{(3x)'}{\cos^2(3x)} = \dfrac{3}{\cos^2(3x)}$

2. $\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = \dfrac{0 - 1\,\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{-1}{\cos^2 x \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

Derivada da função co-tangente

Para determinar a derivada da função $f(x) = \operatorname{cotg} x$ faremos $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.
Aplicando a definição teremos:

$$\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(\cos x)'\operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x)'\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

Scanned by TapScanner

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

ou seja,

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \; ; \; (\operatorname{cotg} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

24

Calcule a derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = \operatorname{cotg} 3x$

b) $g(x) = \dfrac{2}{\operatorname{cotg} 2x}$

Derivada da função inversa

Para a função $y = f(x)$, a função inversa será $x = g(y)$. Pela definição,

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}} = \frac{1}{g'(x)}$$

ou seja,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(x)}$$

Exemplo

$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$ então $f'(x) = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Derivada das funções trigonométricas inversas

Derivada de $y = \text{arc sen } x$

Atendendo a que a função inversa do sen x é o arc sen x e aplicando a derivação da função inversa, vem:

$$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \; ; \; (\text{arc sen } u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Derivada de $y = \text{arc cos } x$

Seguindo o mesmo raciocínio $y = \text{arc cos } x$ resulta da inversa de $x = \cos y$.

$$(\text{arc cos } x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\text{arc cos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \; ; \; (\text{arc cos } u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Scanned by TapScanner

Derivada de $y = \text{arc tg } x$

A função $y = \text{arc tg } x$ é a inversa de $x = \text{tg } y$. Então,

$$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{(\text{tg } y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad ; \quad \text{arc tg } u = \frac{u'}{1 + u^2}$$

25

Calcule as derivadas seguintes:

a) $f'(x) = \text{arc sen } 2x$

b) $f'(x) = \text{arc cos } 2x$

c) $f'(x) = \text{arc tg } \frac{1}{x}$

d) $f'(x) = \text{arc cotg } 2x$

Derivada de $y = \text{arc cotg } x$

Do mesmo modo,

$$(\text{arc cotg } x)' = \frac{1}{(\text{cotg } y)'} = -\frac{1}{\frac{1}{\text{sen}^2 y}} = -\frac{1}{1 + \text{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\text{arc cotg } x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \quad ; \quad (\text{arc cotg } u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}$$

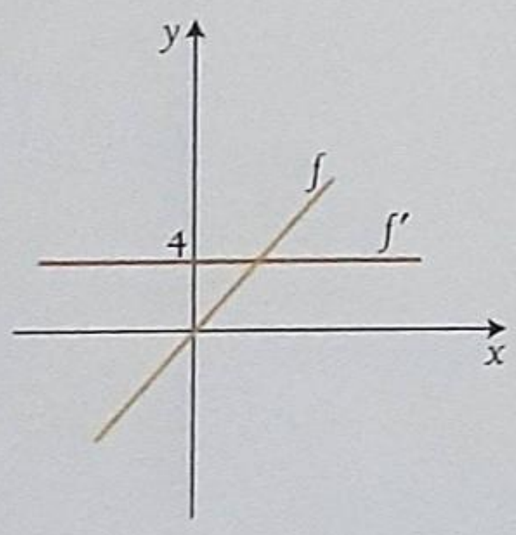
Exemplos

1. $(2 \text{ arc sen } x)' = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

2. $(\text{arc cos } 3x)' = -\frac{(3x)'}{\sqrt{1 - (3x)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

3. $(2 \text{ arc cotg } x)' = \frac{-2}{1 + x^2}$

Monotonia e extremos relativos duma função



Consideremos as seguintes funções definidas por:

• $f(x) = 4x$ • $g(x) = x^2 - 6x$ • $h(x) = x^3$ • $i(x) = \frac{1}{x}$ • $j(x) = -x^2 + 1$

Após determinarmos as funções derivadas, analisaremos a monotonia e a existência dos extremos.

• $f(x) = 4x$ então $f'(x) = 4$

Verificamos que a função f' é sempre positiva e por observação do gráfico a função f é crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos.

• $g(x) = x^2 - 6x$ então $g'(x) = 2x - 6$

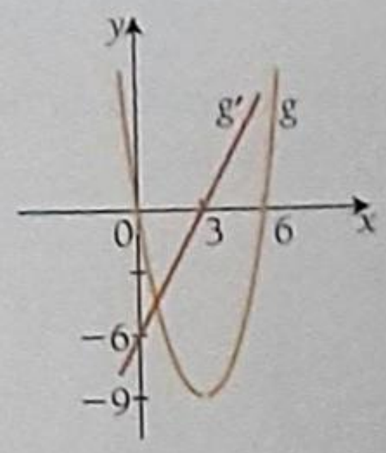
Estudemos g' quanto ao sinal:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Sinal de g'		$-$	0	$+$	

Scanned by TapScanner

e comparemo-lo com a tabela da monotonia da função g:

x	$-\infty$		3	$+\infty$
Monotonia de g		↘	−9	↗



Verificamos que de:

$]-\infty, 3[$ g' é negativa e a função g é decrescente.

$]3, +\infty[$ g' é positiva e a função g é crescente.

A função g apresenta um mínimo relativo para $x = 3$ e a função g' tem um zero para $x = 3$, mudando de sinal à direita e à esquerda de 3.

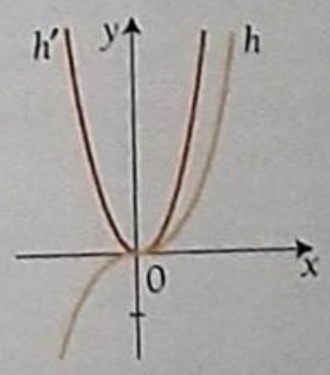
- $h(x) = x^3$ então $h'(x) = 3x^2$

↘ Decrescente

↗ Crescente

Estudemos h' quanto ao sinal:

x	$-\infty$		0	$+\infty$
Sinal de h'		+	0	+



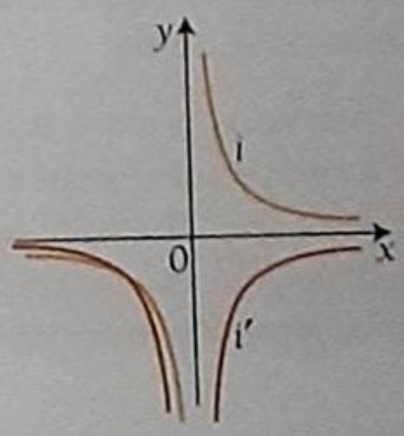
A função h' é positiva em $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e a função h é crescente em $\mathbb{R}$.

A função h' tem um zero para $x = 0$, mas não muda de sinal à direita e à esquerda desse valor. A função h não tem extremos relativos.

- $i(x) = \frac{1}{x}$ então $i'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Observando os respectivos gráficos, verifica-se que a função i' é negativa em $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ e a função i é decrescente em $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

A função i' não tem zeros e a função i não tem extremos.



Mostra-se que:

Se uma função é contínua num intervalo I do seu domínio, com derivada positiva em todos os pontos de I, então é crescente nesse intervalo.
Se uma função é contínua num intervalo I do seu domínio, com derivada negativa em todos os pontos de I, então é decrescente nesse intervalo.

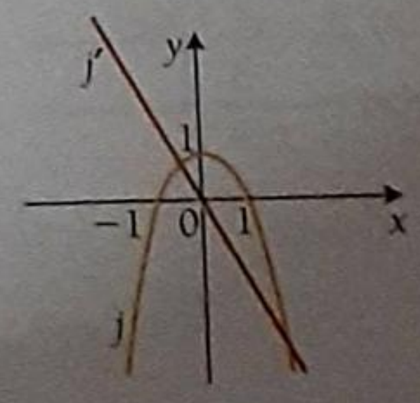
Em relação aos extremos relativos:

Se uma função f, contínua num intervalo I do seu domínio, tem derivada nula para $x = a$, $a \in I$, e f' passa nesse ponto de negativa a positiva, a função f tem para $x = a$ um mínimo relativo.

- $j(x) = -x^2 + 1$ então $j'(x) = -2x$

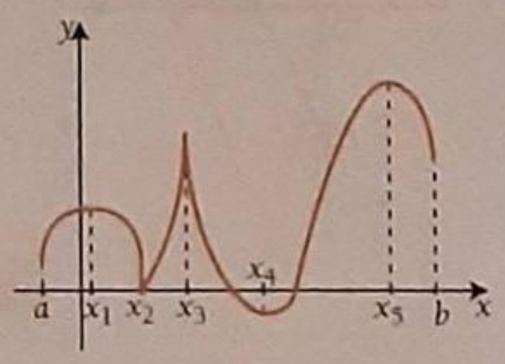
Se observarmos os gráficos representados ao lado, podemos construir a seguinte tabela que relaciona as duas funções:

x	$-\infty$		0	$+\infty$
Sinal de j'		+	0	−
Monotonia de j		↗	0	↘



Scanned by TapScanner

- Observe o gráfico da função f em $[a, b]$:



$f(a)$, $f(x_2)$, $f(x_4)$ e $f(b)$ são mínimos relativos de f. O menor deles é $f(x_4)$, que se chama **mínimo absoluto**.

$f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(x_5)$ são máximos relativos de f. O maior deles é $f(x_5)$, que se chama **máximo absoluto**.

Note que em x_2 e x_3 não há derivada.

- Uma função que tem derivada em todos os pontos do intervalo só pode ter extremos relativos, nesse intervalo, nos pontos onde a derivada se anula.

- Os intervalos onde a função é sempre crescente ou decrescente, chamam-se **intervalos de monotonia**.

Ou seja, para $x = 0$, a função j' anula-se e a função j tem um **máximo relativo**.

Mostra-se que:

> Se uma função f, contínua num intervalo I do seu domínio, tem **derivada nula** para $x = a$, $a \in I$, e a f' passa nesse ponto de **positiva** a **negativa**, a função f tem para $x = a$ **um máximo relativo**.

No caso da função $y = |x|$, já verificámos que a função não tem derivada para $x = 0$, no entanto, a função apresenta um **mínimo relativo**, pois: no ponto em que **não existe derivada**, mas existam derivadas à esquerda e à direita desse ponto, se estas passarem de **negativa a positiva**, existe um **mínimo relativo** e se estas passarem de **positiva a negativa**, existe um **máximo relativo**.

Exercício resolvido

Considere a função, real de variável real, definida por: $g(x) = 2x^3 - x^2 - 4x$.

a) Indique os intervalos de monotonia e os extremos de g, caso existam.

b) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

Resolução

a) $g'(x) = (2x^3 - x^2 - 4x)' = 6x^2 - 2x - 4$

Calculemos os zeros da função derivada, aplicando a fórmula resolvente.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = 1$$

Seguidamente, construamos a tabela de monotonia:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Sinal de g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Monotonia de g		↗	máx.	↘	mín.	↗	

A função g é crescente em $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ e decrescente em $\left]-\frac{2}{3}, 1\right[$.

Como nos pontos em que a derivada é nula a função g' muda de sinal, a função g tem extremos relativos: para $x = -\frac{2}{3}$ tem um máximo e para $x = 1$ tem um mínimo.

Máximo: $g\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{44}{27}$

Mínimo: $g(1) = 2(1)^3 - (1)^2 - 4(1) = -3$

b) $y - g(0) = g'(0)\,(x - 0)$ $\quad g(0) = 0$ $\quad g'(0) = -4$ $\quad x = 0$

$y - 0 = -4(x - 0) \Leftrightarrow y = -4x$

26

Determine os intervalos de monotonia e os extremos relativos, caso existam, das seguintes funções:

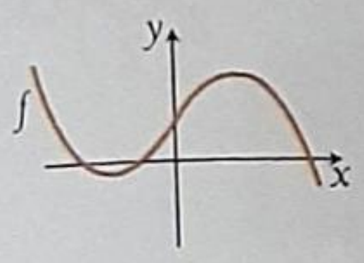
a) $f(x) = -x^2 + 6x$

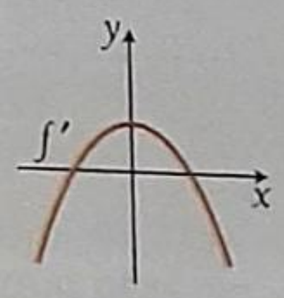
b) $g(x) = \frac{3}{x + 1}$

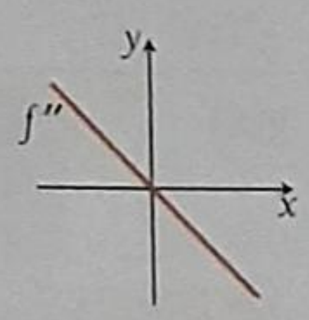
Scanned by TapScanner

Concavidade e pontos de inflexão duma função

Observe os gráficos de f, f' e f'' sendo $f(x) = x^3 + 4x + 2$.







No intervalo $]-\infty, 0[$, a **concavidade** do gráfico de f **está voltada para cima**. Neste intervalo, à medida que x cresce, o declive da tangente à curva, $f'(x)$, passa de negativo a zero e em seguida toma valores positivos.

Podemos afirmar que, no intervalo $]-\infty, 0[$, f' é crescente e f'' é positiva.

No intervalo $]0, +\infty[$, a **concavidade está virada para baixo**. Neste intervalo, f' passa de positiva a zero e em seguida toma valores negativos, f' é decrescente e f'' é negativa.

Para $x = 0$, a concavidade do gráfico de f muda de sentido.

A segunda derivada é positiva em $]-\infty, 0[$, é negativa em $]0, +\infty[$, e anula-se em 0, donde $(0, f(0))$ é um ponto de inflexão.

Se $f''(x)$ é **positiva**, a concavidade do gráfico de f está voltada para cima.
Se $f''(x)$ é **negativa**, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo.

Aos pontos do gráfico da função onde se dá a mudança no sentido da concavidade, e que correspondem aos zeros de $f''(x)$, chamam-se **pontos de inflexão**.

Exercícios resolvidos

Calcule a primeira derivada, estude o sinal da segunda derivada e investigue a existência de pontos de inflexão das funções seguintes:

a) $g(x) = -4x^4 + 4x^3$

b) $h(x) = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

Resolução

a) $g'(x) = -16x^3 + 12x^2$

$g''(x) = -48x^2 + 24x$

Zeros de g'':

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -24x\,(2x - 1) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{1}{2}$

27

Calcule a segunda derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$

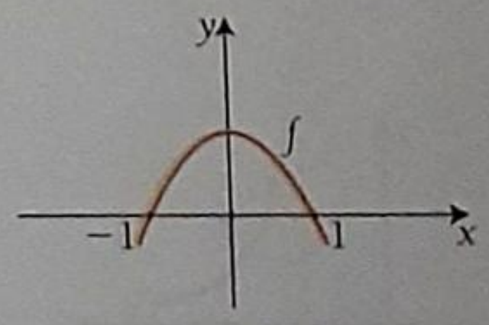
b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c) $h(x) = \dfrac{4x - 2}{3x + 4}$

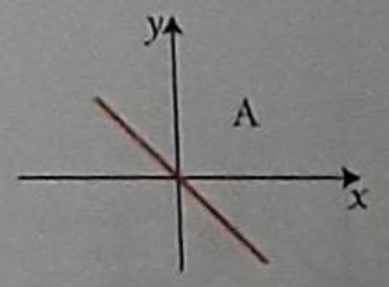
d) $i(x) = \dfrac{6x}{7 - x}$

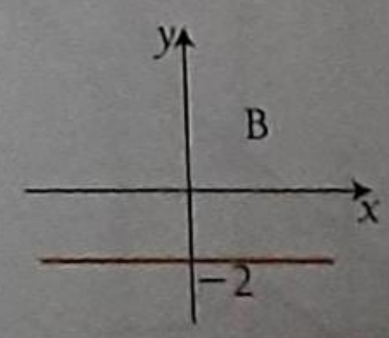
28

Considere o gráfico de f:



Indique nos gráficos seguintes a f' e a f''.





Scanned by TapScanner

⌣ representa a concavidade voltada para cima.
⌢ representa a concavidade voltada para baixo.

29

Analise o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão nas funções definidas por:

a) $f(x) = 6 - x - x^2$

b) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

c) $h(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

ND – não está definida.

Seguidamente, construamos a tabela para análise da concavidade e pontos de inflexão.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		⌢	PI	⌣	PI	⌢

$g(0) = 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Os pontos $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ são pontos de inflexão.

b) $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$

$h'(x) = \dfrac{18x}{(9 - x^2)^2}$ $\qquad$ $h''(x) = \dfrac{54(x^2 + 3)}{(9 - x^2)^3}$

Zeros h'': não tem zeros.

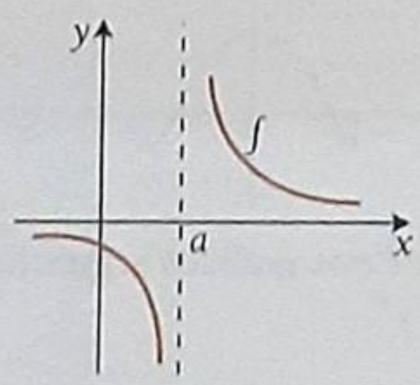
Na tabela, colocamos os valores de x que não pertencem ao domínio.

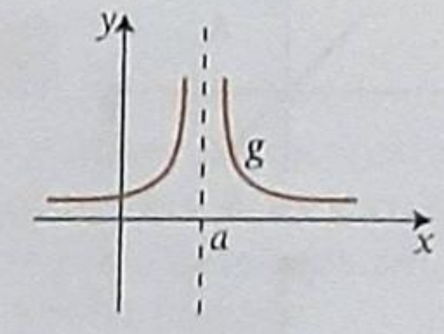
x	$-\infty$		-3		3	$+\infty$
$h''(x)$		$-$	ND	$+$	ND	$-$
$h(x)$		⌢	ND	⌣	ND	⌢

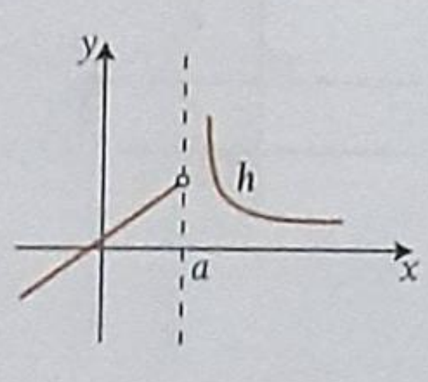
Embora ocorra mudança de sinal da segunda derivada em -3 e 3, estes valores não a anulam, pelo que não existem pontos de inflexão para esta função.

Assimptotas

Iremos estudar regras para encontrar as equações das assimptotas verticais e horizontais do gráfico das funções definidas por expressões analíticas.







Assimptota vertical

A recta de equação $x = a$ é **assimptota vertical** do gráfico duma função f se e só se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty)$$

Sabemos que nas funções homógrafas em cada zero do denominador há uma assimptota vertical desde que o numerador não se anule simultaneamente.

Se pretendemos encontrar as assimptotas verticais devemos:

1.º Determinar os pontos a tais que a é ponto de acumulação (ou seja, na vizinhança de a tem que existir pelo menos um elemento do D_f que não seja a) do domínio de f e $a \notin D_f$ ou f não é contínua em a.

2.º Calcular $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e/ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

Graficamente: (ver ao lado)

A recta $x = a$ é a assimptota vertical nos gráficos das funções f, g e h.

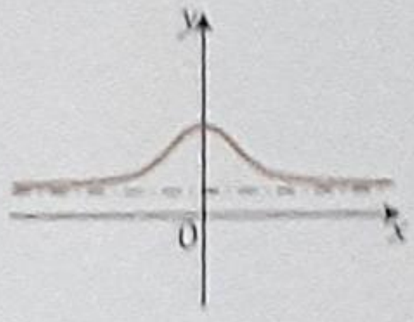
Scanned by TapScanner

Assimptota horizontal

A existência de **assimptotas horizontais** prende-se com o comportamento da função quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

A recta de equação $y = b$ é assimptota horizontal do gráfico duma função f se e só se:

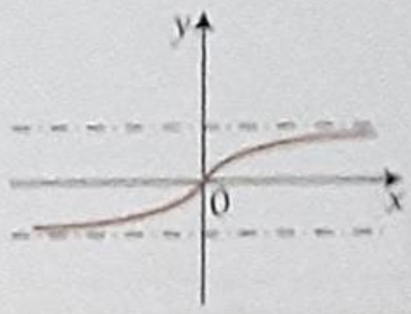
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



Uma assimptota horizontal

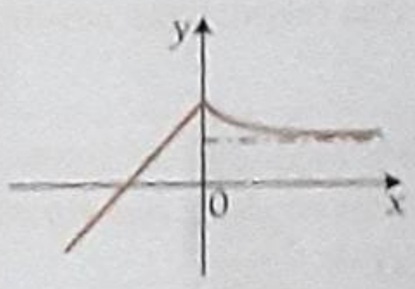
O **gráfico** duma função tem, no máximo, **duas assimptotas horizontais**: uma que acompanha o gráfico quando $x \to +\infty$ e outra quando $x \to -\infty$.

Se o **domínio** da função f é um **intervalo limitado** então o gráfico de f **não tem assimptotas horizontais** pois nem sequer é possível calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.



Duas assimptotas horizontais

Graficamente: (ver ao lado)



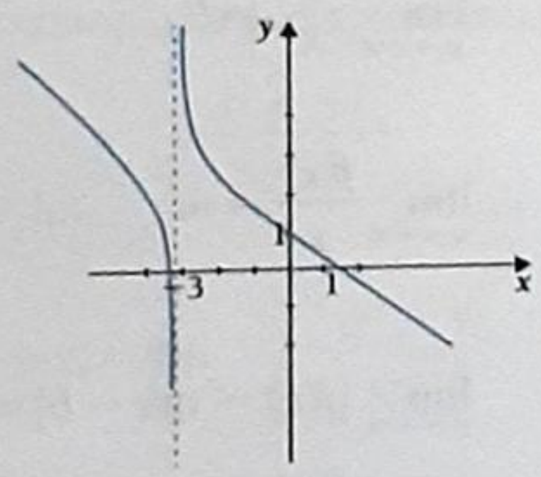
Uma assimptota horizontal (só para $+\infty$)

Assimptotas não verticais

Consideremos agora a função g, definida por:

$$g(x) = \frac{-x^2 - 2x + 5}{x + 3}$$

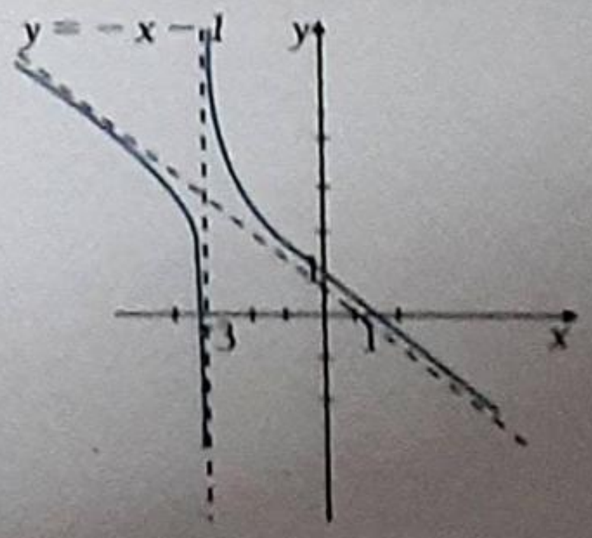
cujo gráfico é:



Verifique que $x = -3$ é a assimptota vertical ao gráfico de g.

Investiguemos a existência de outras assimptotas a este gráfico.

Podemos obter as assimptotas oblíquas ao gráfico de uma função, empregando o algoritmo da divisão.



Donde,

$g(x) = -x + 1 + \frac{2}{x + 3}$, em que $(-x + 1)$ é a parte inteira de $g(x)$.

Ora, $\frac{2}{x + 3} \to 0$, quando $x \to +\infty$; logo $y = -x + 1$ será a equação da **assimptota oblíqua** ao gráfico de g.

Scanned by TapScanner

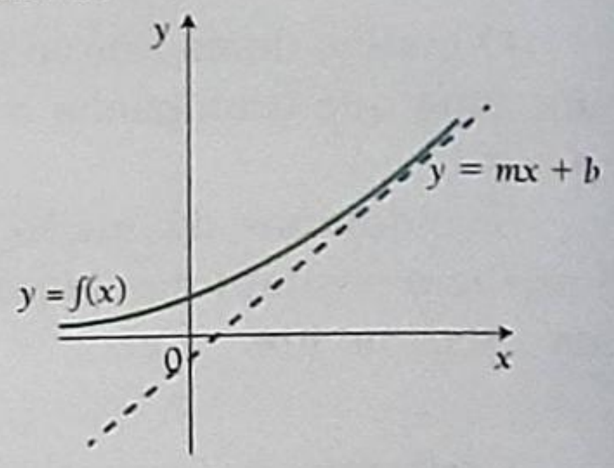
Vejamos outro processo para determinar as assimptotas não verticais de funções racionais ou de outro tipo.

Seja $y = mx + b$ a equação da assimptota não vertical ao gráfico de uma função f.

Determinemos o declive, m, e a ordenada na origem, b.

Repare que, quando $x \to +\infty$, a distância entre as ordenadas dos pontos da função e as ordenadas dos pontos da recta com a mesma abcissa tende para 0.

Observando a figura ao lado, podemos escrever:



$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

Donde:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx - b}{x} = 0$$

ou seja,

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right] = 0$$

como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$$

vem,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

vamos calcular b:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

donde,

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

Podemos dizer que:

O gráfico f admite uma **assimptota oblíqua** de equação $y = mx + b$.

sendo

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

ou

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx]$$

Se $m = 0$, obtemos $y = b$ que é a equação de uma **assimptota horizontal** ao gráfico de f.

30

Esboce os gráficos das funções seguintes e determine as equações das respectivas assimptotas:

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 5x + 6}$

Faça um estudo análogo quando $x \to -\infty$ e verifique que se obtém os mesmos valores para m e b.

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

1. Seja a função f definida por:

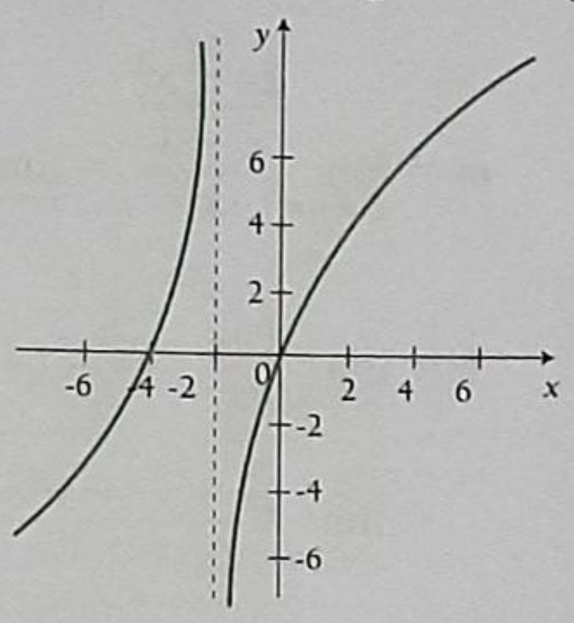
$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 2}$$

a) Esboce o gráfico de f.

b) Determine analítica e graficamente as assimptotas ao gráfico de f.

Resolução

a)



b) Por observação do gráfico, parece ser possível afirmar que este apresenta duas assimptotas, uma vertical e outra oblíqua. Verifiquemos que assim é:

- $x = -2$ é uma assimptota vertical ao gráfico de f porque:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 4x}{x + 2} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 4x}{x + 2} = +\infty \quad \text{e}$$

- Determinemos a equação da assimptota oblíqua:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 4x}{x + 2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 4x}{x + 2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 4x}{x + 2} - \frac{x^2 + 2x}{x + 2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x + 2} = 2$$

Donde, $y = x + 2$ é a equação da assimptota oblíqua ao gráfico de f.

2. Estude as assimptotas da função seguinte:

$$y = \frac{2x - x^2}{x - 1}$$

Resolução

$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \neq 0\}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

→

31

Determine as equações das assimptotas aos gráficos de f e g:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$

b) $g(x) = \frac{-x^2}{x - 2}$

Scanned by TapScanner

$x = 1$ é uma assimptota vertical porque:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x - x^2}{x - 1} = +\infty \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x - x^2}{x - 1} = +\infty$$

- Assimptota não vertical

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \; b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x - x^2}{x - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x^2}{x^2 - x} = -1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x - x^2}{x - 1} - (-x)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x - x^2}{x - 1} + x)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x^2 + x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x - 1} = 1$$

Donde, $y = -x + 1$ é a equação da assimptota não vertical (oblíqua).

Estudo da função

Para estudar uma função real de variável real, normalmente procede-se à análise de:

- Domínio
- Continuidade
- Assimptotas
- Paridade
- Monotonia e extremos
- Concavidade e pontos de inflexão

Este estudo conduz-nos ao esboço do gráfico da função.

Exercícios resolvidos

1. Estudo das funções definidas por:

a) $f(x) = \frac{-1}{2x + 1}$ b) $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ c) $f(x) = x\,e^x$

Resolução

a) $f(x) = \frac{-1}{2x + 1}$

- Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \neq 0\}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
- Continuidade: a função é contínua em todo o seu domínio.

Scanned by TapScanner

- Assimptotas: $x = -\frac{1}{2}$ e $y = 0$
- Paridade: a função não é par nem ímpar.

  $f(-x) \neq f(x), \forall x \in D_f$, pelo que f não é par.

  $f(-x) \neq -f(x), \forall x \in D_f$, pelo que f não é ímpar.
- Monotonia e extremos: $f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$

  $f'(x)$ nunca se anula.

Tabela de análise da monotonia:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	ND	+	
$f(x)$		↗	ND	↗	

- A função f é crescente em $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$
- A função f não tem extremos relativos.
- Concavidade e pontos de inflexão: $f''(x) = \frac{-4}{(2x+1)^3}$

Construamos uma tabela para análise da concavidade e pontos de inflexão:

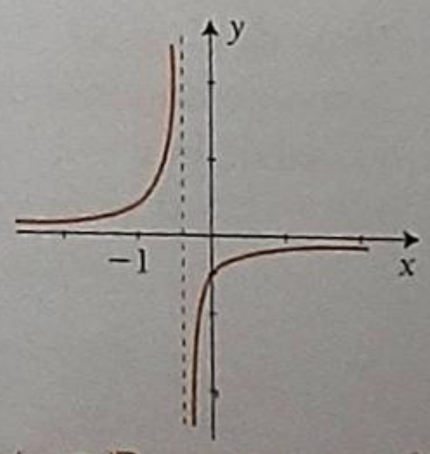
- A segunda derivada:

Positiva em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ e

Negativa em $]-\frac{1}{2}, +\infty[$;

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	ND	−	
$f(x)$		⌣	ND	⌢	

não se anula, pelo que não existem pontos de inflexão da função.
Utilizamos os valores obtidos para esboçar o gráfico de f.



b) $g(x) = \frac{x}{\ln x}$

Domínio: $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge \ln x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq e^0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq 1\} =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

- A função é contínua no seu domínio pois é o quociente de funções contínuas.
- A função não é par nem ímpar.
- Assimptotas verticais: atendendo à continuidade da função no seu domínio, temos apenas que estudar o comportamento de g quando x tende para 0 e para 1 que são os pontos de acumulação do domínio que não lhe pertencem.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

A recta de equação $x = 0$ não é assimptota vertical do gráfico de g. ➡

Faça o estudo das funções seguintes:

a) $h(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$

c) $r(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}$

d) $p(x) = \frac{4x - 8}{(x-1)^2}$

e) $u(x) = \log (1 - x)^2$

Facultativo

$y = mx + b$

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$

Scanned by TapScanner

33

A concentração, em mg por cm^3, de um medicamento no sangue de uma pessoa é dada por:

$$c(t) = \frac{0{,}18\,t}{t^2 + 3t + 25}$$

Determine o período t, em horas, no qual a concentração é mais intensa.

34

Uma companhia de aviação não permite que se transportem pacotes de forma cilíndrica em que a soma da altura com o perímetro da base ultrapasse 162 cm. Quais deverão ser as medidas da altura e do raio da base, para que o pacote que tenha o maior volume seja aceite pela companhia?

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

A recta de equação $x = 1$ é assimptota vertical do gráfico de g.

- Assimptotas não verticais: a representação gráfica não é muito esclarecedora, embora sugira a existência duma assimptota oblíqua com um declive positivo e pequeno.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Se existir uma assimptota não vertical, será uma recta horizontal pois $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, ou seja, $m = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ (limite notável).

Então, o gráfico de g não tem assimptotas não verticais.
Quando $x \to +\infty$ também $g(x) \to +\infty$ mas não se «encosta» a qualquer recta.

- $g(x)$ não é par nem ímpar.
- Monotonia e extremos:

$$g'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{x' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x}{(\ln x)^2} = \frac{1 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

- Zeros de g': $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x = e$
  Como no domínio de g se tem $(\ln x)^2$ sempre positivo, o sinal de g' é o sinal de $\ln x - 1$, sendo:
  $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

x	0		1		e	$+\infty$
Sinal de g'	ND	−	ND	−	0	+
Variação de g	ND	↘	ND	↘	mín.	↗

$g(e)$ é mínimo não absoluto já que, como vimos anteriormente, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$.

$g(e) = \frac{e}{\ln e} = e$ é mínimo relativo e o contradomínio de g é $D'_g =]-\infty, 0[\cup [e, +\infty[$, pois já concluímos que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$ e também $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Scanned by TapScanner

• Concavidades: a observação do gráfico em]0, 1[não deixa dúvidas de que o gráfico tem a concavidade virada para baixo.
Será que em]1, +∞[a concavidade do gráfico está sempre virada para cima?

$$g''(x) = \left[\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\right]' = \frac{(\ln x - 1)'(\ln x)^2 - [(\ln x)^2]'(\ln x - 1)}{(\ln x)^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2 - 2\ln x\,(\ln x)'(\ln x - 1)}{(\ln x)^4} =$$

$$= \frac{\frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2\ln x\,(\ln x - 1)}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{-(\ln x)^2 + 2\ln x}{x\,(\ln x)^4}$$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -(\ln x)^2 + 2\ln x = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow \ln x\,(-\ln x + 2) = 0 \wedge x \in D_g$

$(\ln x = 0 \vee \ln x = 2) \wedge x \in D_g \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = e^2) \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x = e^2$

Como x e $(\ln x)^4$ são positivos no domínio, o sinal de g'' só depende do sinal de $-(\ln x)^2 + 2\ln x$.

Fazendo $\ln x = t$, podemos estudar o sinal de $-t^2 + 2t$.

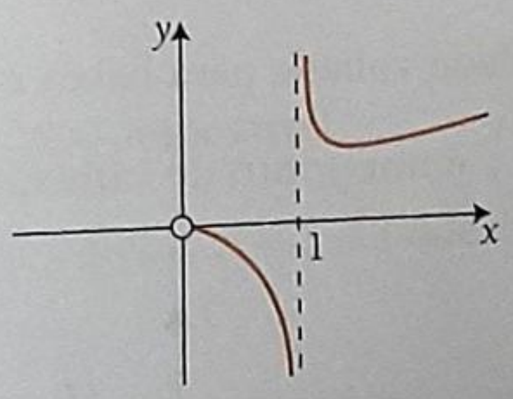
$-t^2 + 2t > 0 \Leftrightarrow t \in]0, 2[$.

Então $-(\ln x)^2 + 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x \in]0, 2[\wedge x \in D_g \Leftrightarrow x \in]1, e^2[$.

x	0		1		e^2	$+\infty$
Sinal de g''	ND	−	ND	+	0	−
Concavidade de g	ND	⌒	ND	⌣	PI	⌒

Ponto de inflexão em $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$.

Então o gráfico de g será:



c) $f(x) = x\,e^x$

• Domínio: $D_f = \mathbb{R}$.

• Continuidade: a função é contínua em $\mathbb{R}$

• Assimptotas:

Verticais: não tem.

Não verticais:

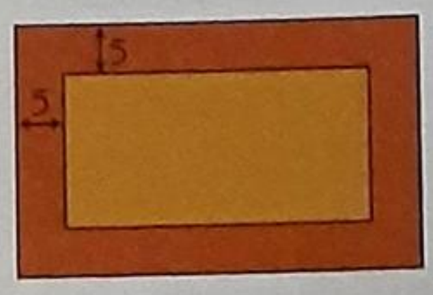
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\,e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

35

Calcule dois números cuja soma é 25 e tais que o dobro do primeiro mais o triplo do quadrado do segundo seja mínimo.

36



Pretende-se fazer um cartaz que tem de obedecer às seguintes condições:

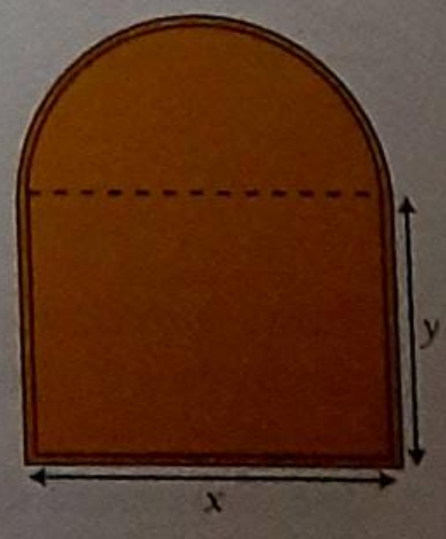
A ilustração tem de ocupar 900 cm².

As margens deverão ter 5 cm.

Calcule as dimensões do cartaz de modo a que a quantidade de papel utilizado seja mínima.

37

Pretende-se construir uma janela de perímetro igual a 8 metros. A janela é formada por um rectângulo e um semicírculo, conforme representa a figura.



Indique as dimensões da janela de forma a que a área seja máxima.

Scanned by TapScanner

Donde, $y = b$ é uma assimptota horizontal.
Vamos determinar o valor de b.

$$b = \lim_{x \to -\infty} (x\,e^x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{-x}{e^{-x}} = 0$$

Logo, $y = 0$ é uma assimptota horizontal.

- Paridade: a função não é par nem ímpar.
  $f(-x) = -x\,e^{-x}$ $\qquad -f(x) = -x\,e^x$
  Donde, $f(-x) \neq -f(x)$, logo, f não é ímpar.
  $f(-x) \neq f(x)$, logo f não é par.
- Monotonia e extremos:
  $f'(x) = e^x + x\,e^x$
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + x\,e^x = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow e^x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0		$+$	
$f(x)$		↘	mín.	↗	

$f(-1) = -\frac{1}{e}$ é mínimo relativo.

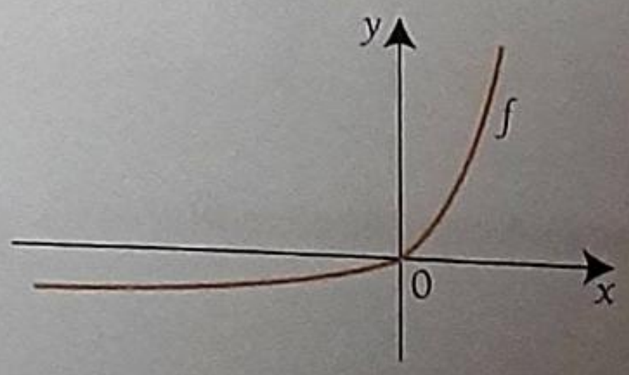
$\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ é um ponto mínimo.

- f é decrescente em $]-\infty, -1[$ e crescente em $]-1, +\infty[$.
- Concavidade e pontos de inflexão:
  $f''(x) = e^x + e^x + x\,e^x = 2\,e^x + x\,e^x$
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x + x\,e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(2 + x) = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = -2$

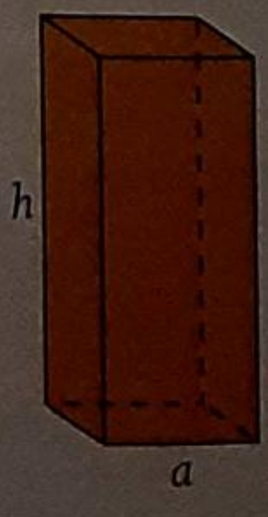
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		⌒	PI	⌣	

- De $]-\infty, -2[$ a função tem a concavidade voltada para baixo e em $]-2, +\infty[$ a concavidade está voltada para cima, logo $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ é um ponto de inflexão.

Esbocemos o gráfico da função f.



2. Numa empresa de distribuição de leite, os pacotes são de base quadrada e a altura adicionada com o perímetro da base é igual a 60 cm.
   Que dimensões deverá ter cada pacote de modo que o seu volume seja máximo?



Scanned by TapScanner

Resolução

Designemos por a o lado da base do pacote e por h a sua altura.

Então, vem: $h + 4a = 60 \Leftrightarrow h = 60 - 4a$

O volume do pacote em função de a é:

$V(a) = a^2(60 - 4a) = 60a^2 - 4a^3$

$V'(a) = 120a - 12a^2$

Zeros de $V'(a)$:

$V'(a) = 0 \Leftrightarrow 120a - 12a^2 = 0 \Leftrightarrow a(120 - 12a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 10$

Construamos a tabela da variação:

x	0		10	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	máx.	↘

O volume é máximo quando $a = 10$. Logo, a altura é $h = 60 - 40 = 20$. Pelo que as dimensões de cada pacote são 10 cm 10 cm, e 20 cm.

3. Dadas as seguintes funções: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e $g(x) = x^3 - 1$.

a) Estude a variação e determine os extremos da função f.

b) Esboce o gráfico de $|f(x)|$.

c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$.

(2.ª Época – 1998)

Resolução

a) $f'(x) = \dfrac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

Pontos críticos:

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-2}{(x-1)^2} = 0$ impossível

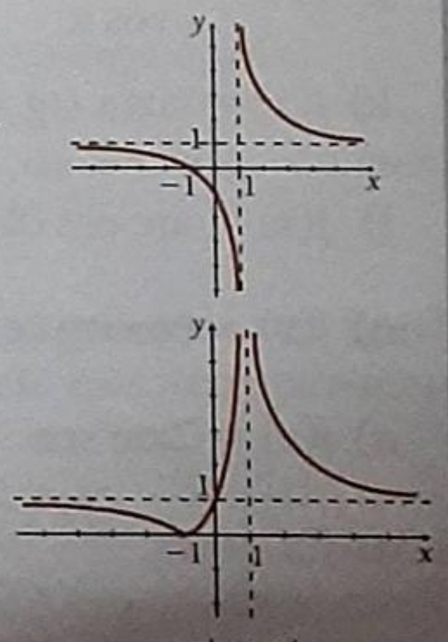
O único ponto crítico é o ponto $x = -1$ onde a derivada não existe.

x		1	
$f'(x)$	−	∄	−
$f(x)$	↘	∄	↘

f não tem extremos.

b) Com ajuda das alíneas anteriores podemos construir o gráfico da função $y = f(x)$.

A partir do gráfico $y = f(x)$ podemos facilmente encontrar o gráfico da função $y = |f(x)|$.



$y = |f(x)|$

c) $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$ equação da recta da tangente

$y_0 = f(x_0) = f(0) = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, então $f'(0) = -2$ ou

$y - y_0 = f'(x)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (-1) = -2(x - 0) \Leftrightarrow y + 1 = -2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2x - 1$ equação da recta da tangente

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

1. Considere a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2x^2+1} & , \quad x < 2 \\ 1 & , \quad x = 2 \\ 5 - x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f.

b) Calcule:

- $f'(1)$, por definição.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2. Determine a derivada das funções seguintes:

a) $f(x) = x^4 - \dfrac{x^2}{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{5}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^2$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

e) $f(x) = \log_2 (2x - 1)$

f) $f(x) = x^2 \log_2 x$

g) $f(x) = \ln (2x^2 + 3x + 5)$

h) $f(x) = \operatorname{sen} (4x - 1)$

i) $f(x) = x \operatorname{sen} x^2$

j) $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$

k) $f(x) = \cos x \, (\operatorname{tg} x - 1)$

l) $f(x) = \operatorname{arc\,cos} (2x)$

m) $f(x) = 3\operatorname{arc\,tg} (x - 1)$

n) $f(x) = 2\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x^2 - 1}$

o) $f(x) = e^{2x+1}$

p) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

q) $f(x) = 2\, e^{-x^2} + 2^x$

3. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & , \quad x \geq 1 \\ 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = |1 - x|$$

Caracterize cada uma das funções:

a) $f + g$

b) f'

c) g'

d) $(f + g)'$

4. Considere a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & , \quad x \leq 2 \\ \dfrac{3x}{x-1} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Justifique:

a) g é contínua em $x = 2$.

b) g não tem derivada no ponto $x = 2$, mas $g(2)$ é um extremo relativo da função.

5. Dadas as funções $f(x) = 2x + 3$ e

$g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

a) Indique o domínio g.

b) Calcule os zeros de $g(x)$.

c) Determine as equações das assimptotas do gráfico de g, caso existam.

d) Faça o estudo da variação da função e determine os extremos de g caso existam.

e) Esboce o gráfico de g.

f) A função f é injectiva? Justifique a sua resposta.

(2.ª Época – 2001)

6. Sendo $f(x) = e^3$ então $f'(x)$ pode ser definida por:

A. $3e^2$ B. $3e^3$ C. 1 D. 0

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

7. Considere a função $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ e $g(x) = a^x$.

a) Determine $(f \circ g)(0)$.

b) Determine a função inversa de g, caso exista.

c) Indique o domínio de f.

d) Determine os zeros da função de f.

e) Determine os intervalos de variação e os extremos de f.

f) Esboce o gráfico de f.

g) Estude a paridade de f, justificando a resposta.

Adaptado (1.ª Época – 2002)

8. Dada a função $f(x) = 2x^3 - 6x$.

a) Determine os zeros.

b) Estude a variação da função e indique os extremos.

c) Esboce o gráfico de f.

(1.ª Época – 2003)

9. Considere a função $f(x) = x^2(x + 2)$.

a) Indique o domínio de f.

b) Determine os zeros da função.

c) Estude a variação e indique os extremos.

d) Esboce o gráfico de f.

(2.ª Época – 2003)

10. Dadas as seguintes funções: $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$ e $g(x) = \frac{2x + 1}{x}$.

a) Determine o domínio de f e de g.

b) Determine $(f \circ g)(-1)$.

c) Determine a(s) equação(ões) da(s) assimptota(s) do gráfico de f.

d) Determine os intervalos de variação da função f.

e) Esboce o gráfico de f.

f) Estude a injectividade de f.

Adaptado (1.ª Chamada – 1998)

11. Dadas as seguintes funções:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ e $g(x) = e^x + 1$

a) Indique o domínio de g.

b) Determine a expressão analítica da função inversa de g.

c) Determine a expressão analítica da função inversa de $(g \circ f)(1)$.

d) Determine os zeros da função f.

e) Faça o estudo da variação e determine o(s) extremo(s) da função f.

f) Esboce o gráfico de f.

Adaptado (2.ª Chamada – 1998)

12. A altura y (em metros) de uma flecha lançada por um arqueiro, em função do tempo x (em segundos), pode ser definida pela seguinte expressão:

$$y = -0{,}1x^2 + 2{,}4x + 1{,}7$$

a) Qual é a altura máxima atingida pela flecha?

b) Em que instante esta atinge o solo?

c) Qual é a velocidade da flecha no momento em que atinge o solo?

13. Averigue, entre os rectângulos de área igual a 49 dm^2, qual é aquele que tem perímetro mínimo?

14. Se existe $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$ então é necessariamente igual a:

A. 0 B. $f(1)$ C. $f'(1)$ D. $f''(1)$

Scanned by TapScanner

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Definir primitiva de uma função.
- Estabelecer as propriedades da primitiva da soma e do produto por constante.
- Calcular e identificar primitivas imediatas.
- Identificar casos adequados à utilização de primitivação por partes.
- Calcular primitivas por partes.

Scanned by TapScanner

Primitiva de uma função

UNIDADE 7

Pág. 156 a 171

CONTEÚDOS

Função primitiva

- Primitiva e integral indefinido (de tabela): definição e propriedades
- Técnicas de primitivação: primitivas imediatas e primitivação por partes

Scanned by TapScanner

UNIDADE 7

Primitiva

No capítulo anterior, estudámos o problema seguinte: dada uma função $f(x)$, achar a sua derivada, ou seja, $f'(x)$. No presente capítulo estudaremos o problema inverso, ou seja, sendo dada uma função derivada $f'(x)$, determinar uma função $F(x)$, que se designa **primitivação.**

A noção de **primitiva** aparece associada à de derivada de uma função como se pode verificar a partir da sua definição:

Sejam f e F funções definidas no intervalo $[a, b]$; F é diferenciável em todos os pontos de $[a, b]$ e se para todo o $x \in [a, b]$ se tem:

$$F'(x) = f(x)$$

diz-se que a função f é primitivável em $[a, b]$ e que F é uma **primitiva** de f em $[a, b]$.

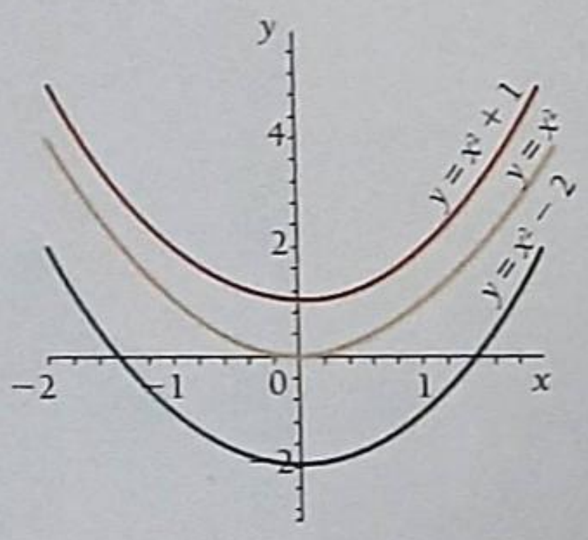
Representamos a primitiva de f por

$$P f(x) = P F'(x) = f(x) \text{ ou } P F(x) = P F'(x) = f(x) + C$$

Observemos que a primitiva de uma função não é única. De facto, se $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$, então também o é ($C \in \mathbb{R}$).

$$F(x) + C$$

A última expressão é a **expressão geral das primitivas de** f.



Por exemplo, $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$ são primitivas da função $f(x) = 2x$. Isto significa que quando calculamos a primitiva de uma função obtemos **uma família de funções**, cujos elementos diferem entre si por uma constante. Geometricamente, diferem entre si apenas de uma **translação vertical.**

Integral indefinido

Consideremos de novo as funções $y = f(x)$ ∨ $y = f(x) + C$, o diferencial de qualquer das funções representa-se por dy tal que $dy = f'(x)\,dx$.

A operação inversa da diferenciação chama-se **integração** que se indica pelo símbolo $\int$.

Na prática a primitivação e a integração processam-se de forma análoga.

Dadas as funções, $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + C$, o diferencial de qualquer das funções é: $dy = 2x\,dy$. Em geral $dy = f'(x)\,dx$. Logo,

$$\int dy = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

Conhecidas as regras de derivação, podemos desde já estabelecer as **propriedades para a integração**:

1. $\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ 2. $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, $k \in \mathbb{R}$

Scanned by TapScanner

Primitivas imediatas

Para resolver este grupo de exercícios, o método a utilizar é transformar a função a primitivar, evidentemente sem a alterar, numa função do tipo das existentes na tabela de primitivas elementares e de seguida primitivá-la imediatamente recorrendo à dita tabela. Em geral, nesta fase inicial, além da tabela, vamos usar o seguinte resultado:

Regra da derivada da função composta: $\frac{d}{dx}[F(u(x))] = F'(u(x))u'(x)$

Tabela de primitivas elementares

$\int$	$P\int = F$
$c,\ c \in \mathbb{R}$	cx
$x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$-\operatorname{tg} x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$\operatorname{cotg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} x$

Potência

$$P[x^\alpha] = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ ;\ P[u^\alpha] = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) $\frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{3}{x^3}$ b) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x}$

Resolução:

a) $P\left(\frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{3}{x^3}\right) = \frac{1}{3}Px^4 - 2Px^2 - 3Px^{-3} = \frac{x^5}{15} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^{-2}$

b) $P\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x} = P\left(\sqrt{\frac{x}{x^2}} - 2\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}\right) = Px^{\frac{1}{2}} - 2Px^{-2/3} = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$

1

Determine as funções primitivas das funções seguintes:

a) x

b) $2x$

c) x^5

d) 3

e) $\frac{1}{x^2}$

f) $\cos x$

g) $\operatorname{sen} x$

h) $\cos 2x$

i) e^x

j) 5^x

k) $\frac{1}{1+x^2}$

l) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

2

Determine as primitivas das funções seguintes:

a) $-5x^2 + 4x + 3$

b) $-x(x-1)(x+2)$

c) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}$

d) $\sqrt{x} + x\sqrt{x} - \sqrt{x+1}$

e) $\operatorname{sen} 3x \cos 5x$

f) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[5]{x}$

Scanned by TapScanner

Exponencial

$$P\,[e^x] = e^x;\quad P\,[e^u u'] = e^u$$

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) $x^3 e^{x^4}$ **b)** $e^{\text{sen } 2x} \cos 2x$ **c)** $\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

Resolução

a) $P\,(x^3 e^{x^4}) = \dfrac{1}{4} P\,4x^3 e^{x^4} \underset{[u = x^4]}{=} \dfrac{1}{4} P\,u' e^u = \dfrac{1}{4} e^u = \dfrac{1}{4} e^{x^4}$

b) $P\,(e^{\text{sen } 2x} \cos 2x) = \dfrac{1}{2} P\,2\cos 2x e^{\text{sen } 2x} \underset{[u = \text{sen } 2x]}{=} \dfrac{1}{2} P\,u' e^u = \dfrac{1}{2} e^u = \dfrac{1}{2} e^{\text{sen } 2x}$

c) $P\dfrac{e^{1/x}}{x^2} = -P\left(-\dfrac{1}{x^2} e^{1/x}\right) \underset{[u = 1/x]}{=} P\,u' e^u = -e^u = -e^{1/x}$

Logaritmo

$$P\left[\frac{1}{x}\right] = \log|x|;\quad P\left[\frac{u'}{u}\right] = \log|u|$$

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) $\dfrac{e^x}{1 + 4e^x}$ **b)** $\dfrac{1}{x \log x}$

Resolução

a) $P\dfrac{e^x}{1 + 4e^x} = \dfrac{1}{4} P\dfrac{4e^x}{1 + 4e^x} \underset{[u = 1 + 4e^x]}{=} \dfrac{1}{4} P\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1}{4} \log|u| = \dfrac{1}{4} \log|1 + 4e^x|$

b) $P\dfrac{1}{x \log x} = P\dfrac{1/x}{\log x} \underset{[u = \log x]}{=} P\dfrac{u'}{u} = \log|u| = \log|\log x|$

3

Calcule uma primitiva das funções seguintes:

a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ **b)** $\dfrac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x}$

c) $\dfrac{x^2}{1+x^6}$

Arc tg /Arc sen

$$P\left[\frac{1}{1 + x^2}\right] = \text{arc tg } x \quad ; \quad P\left[\frac{u'}{1 + u^2}\right] = \text{arc tg } x$$

$$P\left[\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right] = \text{arc sen } x \quad ; \quad P\left[\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}\right] = \text{arc sen } x$$

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ b) $\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$ c) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

Resolução

a) $P\frac{x}{\sqrt{1-x^4}} = P\frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \underset{[u=x^2]}{=} \frac{1}{2}P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\text{arc sen } u = \frac{1}{2}\text{arc sen } x^2$

b) $P\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} = P\frac{e^{2x}}{1+(e^{2x})^2} = \frac{1}{2}P\frac{2e^{2x}}{1+(e^{2x})^2} \underset{[u=e^{2x}]}{=} \frac{1}{2}P\frac{u'}{1+u^2} = \frac{1}{2}\text{arc tg } u = \frac{1}{2}\text{arc tg } e^{2x}$

c) $P\frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \underset{[u=e^x]}{=} P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc sen } u = \text{arc sen } e^x$

Primitivas por partes

Nesta secção abordaremos uma técnica de primitivação que é consequência directa da regra de derivação do produto. Já sabemos que se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções então a derivada do produto é dada por:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Desta propriedade conclui-se, imediatamente, que

$$\int fg = P(f'g + fg')$$

Então, podemos considerar as equivalências:

$$\int fg = P(f'g + fg') \Leftrightarrow \int fg = P(f'g) + P(fg') \Leftrightarrow P(f'g) = \int fg - P(fg')$$

A última igualdade é a fórmula da **primitivação por partes:**

$$P(f'g) = \int fg - P(fg')$$

$$P\,uv' = uv - P\,u'v$$

Esta técnica é utilizada sempre que a função a primitivar seja o produto de duas funções, f e g, em que f deverá ser fácil de primitivar e g fácil de derivar.

Polinómio/Exponencial

Neste caso sabemos primitivar/derivar quer o polinómio, quer a exponencial. Devemos observar que a **exponencial**, após se **primitivar/derivar, fica na «mesma»**. Ao passo que o polinómio não. Devemos escolher o **polinómio** como **função a derivar**, uma vez que **«diminui um grau»** por cada derivação «que sofre».

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) $(x-3)\,e^{x/2}$ **b)** $(2x^2+1)e^{3x}$ **c)** $x^3\,e^x$

Resolução

a) $P\,(x-3)e^{x/2}$ seja: $u = x-3$; $u' = 1$

$v' = e^{x/2}$; $v = 2e^{x/2}$

então:

$$P\,(x-3)e^{x/2} = 2\,(x-3)e^{x/2} - 2\,P\,e^{x/2} = 2(x-3)e^{x/2} - 4\,P\,\frac{1}{2}\,e^{x/2} = 2(x-3)e^{x/2} - 4\,e^{x/2}$$

b) $P\,(2x^2+1)e^{3x}$ seja: $u = 2x^2+1$; $u' = 4x$

$v' = e^{3x}$; $v = \frac{1}{3}\,e^{3x}$

então:

$$P\,(2x^2+1)e^{3x} = \frac{2x^2+1}{3}\,e^{3x} - \frac{4}{3}\,P\,xe^{3x}$$

seja agora: $u = x$; $u' = 1$;

$v' = e^{3x}$; $v = \frac{1}{3}\,e^{3x}$

então:

$$P\,(2x^2+1)\,e^{3x} = \frac{2x^2+1}{3}\,e^{3x} - \frac{4}{3}\left[\frac{x}{3}\,e^{3x} - \frac{1}{3}\,Pe^{3x}\right] = \frac{2x^2+1}{3}\,e^{3x} - \frac{4}{9}\,xe^{3x} + \frac{4}{27}\,e^{3x}$$

c) $P\,x^3\,e^x =$ seja: $u = x^3$; $u' = 3x^2$

$v' = e^x$; $v = e^x$

então:

$P\,x^3\,e^x = x^3\,e^x - 3\,P\,x^2\,e^x$ de novo se: $u = x^2$; $u' = 2x$

$v' = e^x$; $v = e^x$

fica: $P\,x^3\,e^x = x^3\,e^x - 3\,[x^2\,e^x - 2\,P\,xe^x] = x^3\,e^x - 3\,x^2\,e^x + 6\,P\,xe^x$

e se: $u = x$; $u' = 1$

$v' = e^x$; $v = e^x$

obtém-se finalmente: $P\,x^3\,e^x = x^3\,e^x - 3x^2\,e^x + 6\,[xe^x - P\,e^x] = x^3\,e^x - 3x^2\,e^x + 6xe^x - 6e^x$

4

Calcule uma primitiva das funções seguintes:

a) $x^7\,e^{x^4}$

b) $x^2\,\text{sen}\,x$

Polinómio/sen ou cos

Neste caso sabemos primitivar/derivar quer o polinómio, quer o sen/cos. Devemos observar que o **sen/cos**, após se **primitivar/derivar**, fica na **«mesma»**. Ao passo que o polinómio não.

Devemos escolher o **polinómio como função a derivar**, uma vez que **«diminui um grau»** por cada derivação que sofre.

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) $(2x - 1)\operatorname{sen} 2x$ b) $\frac{x+2}{3}\cos 5x$

Resolução

a) $P\,(2x - 1)\operatorname{sen} 2x$ seja: $u = 2x - 1$; $u' = 2$

$v' = \operatorname{sen} 2x$; $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$P\,(2x - 1)\operatorname{sen} 2x = -\frac{2x-1}{2}\cos 2x + P\cos 2x = -\frac{2x-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

b) $P\,\frac{x+2}{3}\cos 5x$ seja: $u = \frac{x+2}{3}$; $u' = \frac{1}{3}$

$v' = \cos 5x$; $v = \frac{1}{5}\cos 5x$

$$P\,\frac{x+2}{3}\cos 5x = \frac{x+2}{15}\operatorname{sen} 5x - \frac{1}{15}P\operatorname{sen} 5x = \frac{x+2}{15}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{75}\cos 5x$$

(Exponencial ou sen ou cos)/sen ou cos

Neste caso sabemos primitivar/derivar quer o exponencial, quer o sen/cos. Devemos observar que o **sen/cos**, após se **primitivar/derivar**, **fica na «mesma»**. Tal como a exponencial. A escolha é arbitrária e a primitiva é «recursiva». No entanto, a **segunda** escolha deve ser **igual**, escolher **o polinómio como função a derivar**, uma vez que **«diminui um grau»** por cada derivação «que sofre».

5

Calcule uma primitiva das funções seguintes:

a) $e^{2x}\operatorname{sen} 3x$

b) $\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva da seguinte função: $\operatorname{sen} 2x \cos 3x$

Resolução

$P \operatorname{sen} 2x \cos 3x$ seja: $u = \operatorname{sen} 2x$; $u' = 2\cos 2x$

$v' = \cos 3x$; $v = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$

$$P \operatorname{sen} 2x \cos 3x = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{3}P\cos 2x \operatorname{sen} 3x$$

seja: $u = \cos 2x$; $u' = -2\operatorname{sen} 2x$

$v' = \operatorname{sen} 3x$; $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$P \operatorname{sen} 2x \cos 3x = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos 2x \cos 3x - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 2x \cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}\cos 2x \cos 3x + \frac{4}{9}\operatorname{sen} 2x \cos 3x$$

ou seja:

$$\frac{5}{9}P \operatorname{sen} 2x \cos 3x = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}\cos 2x \cos 3x$$

Scanned by TapScanner

$$P \operatorname{sen} 2x \cos 3x = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9} \cos 2x \cos 3x\right)$$

$$P \operatorname{sen} 2x \cos 3x = \frac{9}{15} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{5} \cos 2x \cos 3x = \frac{3}{5} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{5} \cos 2x \cos 3x$$

Logaritmo

Neste caso temos apenas **«uma função»** em que a função a primitivar é a unidade, isto é, $v' = 1$, pois a derivada de uma constante é nula.

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) $\log x$ **b)** $\log^2 x$

Resolução

a) $P[\log x]$ seja: $u = \log x$; $u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1$; $v = x$

$$P[\log x] = x \log x - P\left[x \frac{1}{x}\right] = x \log x - P[1] = x(\log x - 1)$$

b) $P[\log^2 x]$ seja: $u = \log^2 x$; $u' = 2 \frac{1}{x} \log x$

$v' = 1$; $v = x$

$$P \log^2 x = x \log^2 x - 2P \log x$$

seja: $u = \log x$; $u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1$; $v = x$

$$P \log^2 x = x \log^2 x - 2[x \log x - P\,1] = x \log^2 x - 2x \log x + 2x$$

Scanned by TapScanner

Trigonométricas

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva da seguinte função:

$\operatorname{tg}^2 x \sec x$

Resolução

$$P \operatorname{tg}^2 x \sec x = P \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \sec x = P \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sec x = P \frac{\sec x}{\cos^2 x} - P \sec x = P \sec^3 x - P \sec x$$

A segunda primitiva é imediata $P \sec x = \log |\sec x + \operatorname{tg} x|$, a primeira primitiva-se por partes:

$$u = \sec x \quad ; \qquad u' = \operatorname{tg} x \sec x$$
$$v' = \sec^2 x \quad ; \qquad v = \operatorname{tg} x$$

$$P \operatorname{tg}^2 x \sec x = \sec x \operatorname{tg} x - P \operatorname{tg}^2 x \sec x - \log |\sec x + \operatorname{tg} x| =$$
$$= \sec x \operatorname{tg} x - P \operatorname{tg}^2 x \sec x - \log |\sec x + \operatorname{tg} x|$$

$$2 P \operatorname{tg}^2 x \sec x = \sec x \operatorname{tg} x - \log |\sec x + \operatorname{tg} x|$$

$$P \operatorname{tg}^2 x \sec x = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \log |\sec x + \operatorname{tg} x|$$

Trigonométricas inversas

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva da seguinte função:

$\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3}$

Resolução

$$P \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} \qquad \text{seja: } u = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} \; ; \; u' = \frac{1/3}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}}$$
$$v' = 1 \; ; \qquad v = x$$

$$P \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} = x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} - P \frac{x/3}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} =$$
$$= x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} - P \frac{x}{3} \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-1/2} =$$
$$= x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + \frac{3}{2} P \frac{2x}{9} \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-1/2} =$$

6

Calcule uma primitiva das funções seguintes:

a) $\operatorname{tg}^3 2x \operatorname{sen}^3 2x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

Scanned by TapScanner

$$= x \text{ arc sen } \frac{x}{3} + \frac{3}{2} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{1/2}}{1/2} =$$

$$= x \text{ arc sen } \frac{x}{3} + 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

7

Outras situações

Determine as primitivas seguintes:

a) arc tg $3x$

b) $\sqrt{a^2 - x^2}$

Exercício resolvido

Calcule uma primitiva da seguinte função:

$$\sqrt{1 - x^2}$$

Resolução

$$P\sqrt{1 - x^2} = P\frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = P\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - P\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \text{arc sen } x - P\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

seja: $u = x\,; \quad u' = 1$

$$v' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1}{2}\left(-2x\right)\left(1 - x^2\right)^{-1/2}\,;$$

$$v = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$P\sqrt{1 - x^2} = \text{arc sen } x - \left[-x\,(1 - x^2)^{1/2} + P\sqrt{1 - x^2}\right] =$$

$$= \text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2} - P\sqrt{1 - x^2}$$

portanto: $2\,P\sqrt{1 - x^2} = \text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P\sqrt{1 - x^2} = \frac{\text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2}}{2}$$

Tabela de integrais

A integração é um processo análogo à primitivação, mas a notação de integral indefinido tem algumas vantagens sobre a notação de primitivação, por isso, usaremos as duas notações.

Da definição resulta que a operação de determinação do integral indefinido, denominada integração, é inversa à operação de derivação. Portanto para as fórmulas básicas da tabela das derivadas escritas na forma $F'(x) = f(x)$ deduziremos as fórmulas correspondentes de integração escritas na forma:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ x \in I,\ C \in \mathbb{R}$$

obtendo uma tabela de integrais.

Scanned by TapScanner

Tabela de integrais

1. $\int 0\, du = C$
2. $\int u^\alpha\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$
3. $\int 1\, du = u + C$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
5. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int e^u\, du = e^u + C$
7. $\int \ln u\, dx = u \ln u - u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
11. $\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
12. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C$
13. $\int \operatorname{cotg} u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
14. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{u}{a} + C$
15. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C = -\operatorname{arc\,cos}\frac{u}{a} + C$
17. $\int\left(-\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}\right) = -\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C = \operatorname{arc\,cos}\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k}} = \ln\left|u \pm \sqrt{u^2 \pm k}\right| + C$

Nesta tabela u pode ser considerado como uma variável ou uma função. Caso $u(x)$ seja uma função temos: $du = u'(x)\,dx$.

8

Calcule os integrais seguintes:

a) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\int (2x^2 - 5x + 3)\, dx$

d) $\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$

e) $\int \frac{dx}{2x-3}$

f) $\int \frac{x^2\, x}{1-2x^3}$

g) $\int e^{3x}\, dx$

h) $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$

i) $\int \operatorname{sen}(2x+1)\, dx$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

k) $\int \frac{dx}{9+x^2}$

l) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

Scanned by TapScanner

Exemplos

1. $\int x(3-4x^2)^2\,dx = -\frac{1}{8}\int -8x\,(3-4x^2)^2\,dx = -\frac{1}{8}\frac{(3-4x^2)^3}{3} + C$

2. $\int 5xe^{-x^2}\,dx = \frac{5}{-2}\int -2x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{5}{2}\,e^{-x^2} + C$

3. $\int \ln(x)\,x\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f}\,\underbrace{\frac{g'}{x}}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g}\,dx = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx =$

$$= \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

ou seja:

$$\int \ln(x)\,x\,dx = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

4. $\int \text{arc tg}\,x\,dx$

Denotando $u = \text{arc tg}\,x$, $dv = dx$ temos $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Por conseguinte,

$$\int \text{arc tg}\,x\,dx = x\,\text{arc tg}\,x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\,\text{arc tg}\,x - \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x\,\text{arc tg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\,\text{arc tg}\,x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

5. $\int e^x \cos x\,dx$

Denotando $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$ temos $du = e^x\,dx$, $v = \text{sen}\,x$. Por conseguinte,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \text{sen}\,x - \int \text{sen}\,x\,e^x\,dx$$

Aplicamos mais uma vez o método de integração por partes ao último integral:
$u = e^x$, $dv = \text{sen}\,x\,dx$, então $du = e^x\,dx$, $v = -\cos x$

Por conseguinte:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \text{sen}\,x - \left(e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,e^x\,dx\right) = e^x \text{sen}\,x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

Designando $I = \int e^x \cos x\,dx$ temos $I = e^x \text{sen}\,x + e^x \cos x - I$.

Daqui vem $I = \frac{e^x \text{sen}\,x + e^x \cos x}{2} + C$

6. $\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}|\ln(2x-1|| + C$

Scanned by TapScanner

7. $\int \frac{x^3 + x - 2\sqrt{x} - 3}{x^2}\, dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 2x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{x^2}\right) dx =$

$= \int x\, dx + \int \frac{dx}{x} - 2\int x^{-\frac{3}{2}}\, dx - 3\int x^{-2}\, dx =$

$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| - 2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + C$

8. $\int \cos(4x)\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) + C$

9. $\int 2te^{t^2+1}\, dx = \int e^{t^2+1}\, d(t^2 + 1) = e^{t^2+1} + C$

Nota: Quando determinamos v a partir do seu diferencial dv, podemos tomar uma constante arbitrária, visto que ela não figura no resultado final. Portanto é preferível escolher a constante igual a zero ($C = 0$).

A **integração por partes** emprega-se frequentemente no cálculo de integrais das seguintes classes de funções:

- Função logarítmica, funções trigonométricas.
- Produto de um polinómio por uma função das classes de funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas.
- Produto de uma função exponencial com outras funções.

9

Calcule os integrais seguintes:

a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

b) $\int x e^x\, dx$

c) $\int x\sqrt{1 + x}\, dx$

d) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

e) $\int x^3 e^{2x}\, dx$

f) $\int e^x \cos x\, dx$

Exercícios resolvidos

1. Calcule as seguintes integrais, utilizando a técnica de integração por partes.

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ b) $\int \operatorname{arsen} x\, dx$ c) $\int (2x + 1)\operatorname{sen} x\, dx$ d) $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$

Resolução

a) Façamos $u = x$ e $dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$; logo $du = dx$ e $v = 2\sqrt{x+1}$, e assim,

$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du =$

$= 2x\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1}\, dx = 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + C$ ➡

Scanned by TapScanner

b) Façamos $u = \text{arcsen } x$ e $dv = dx$, logo $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ e $v = x$, e assim,

$\int \text{arcsen } x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\,\text{arcsen}x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, fazendo agora $t = 1 - x^2$, temos que

$dt = -2x$, e assim, $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{u}}\,du = u^{\frac{1}{2}} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Portanto,

$\int \text{arcsen } x\,dx = x\,\text{arcsen } x + \sqrt{1-x^2} + C$

c) Façamos $u = 2x + 1$ e $dv = \text{sen } x\,dx$, logo $du = 2\,dx$ e $v = -\cos x$, e assim,

$\int (2x+1)\,\text{sen } x\,dx = -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x\,dx = 2(\text{sen } x - x\cos x) - \cos x + C$

d) segue imediatamente do item e que $\int x\,\text{sen } x\,dx = \text{sen } x - x\cos x + C$

Façamos então $u = x^3$ e $dv = \text{sen } x\,dx$, logo $du = 3x^2\,dx$ e $v = -\cos x$. Portanto,

$\int x^3\,\text{sen } x\,dx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,dx$ (1)

Analisando o integral $\int x^2\cos x\,dx$, observamos que podemos calculá-lo também por partes, fazendo agora $u = x^2$ e $dv = \cos x\,dx$, logo $du = 2x\,dx$ e $v = -\text{sen } x$, e assim,

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\,\text{sen } x - 2\int x\,\text{sen } x\,dx$ e pela observação acima, concluímos que

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\,\text{sen } x - 2(\text{sen } x - x\cos x)$ (2)

Substituindo (2) em (1), obtemos

$\int x^3\,\text{sen } x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\,\text{sen } x + 6x\cos - 6\,\text{sen } x + C.$

2. Determine o integral indefinido das seguintes funções:

a) $\int (x) = 7x^{\frac{5}{2}} + 4$ **b)** $g(t) = \dfrac{t^5}{2} - \dfrac{2}{t^{-3}} + 3t$

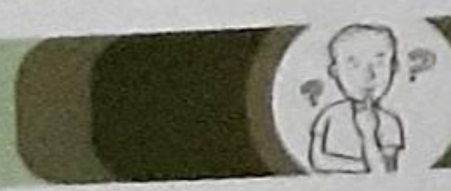
Resolução

a) $\int \left(7x^{\frac{5}{2}} + 4\right) dx = 2x^{\frac{7}{2}} + 4x + C$

b) $\int \left(\dfrac{t^5}{2} - \dfrac{2}{t^{-3}} + 3t\right) dt = \dfrac{1}{12}\,t^6 - t^4 + \dfrac{3}{2}\,t^2 + C$

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos



1. Primitive as seguintes funções:

a) $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $\frac{e^{6x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

c) $\frac{x}{1+x^2}$

d) $\sqrt{2x} + \sqrt{x/2}$

e) $3\text{sen}\, x + 2x^2$

f) xe^{-x2}

g) $x\sqrt{1+x^2}$

2. Primitive as seguintes funções:

a) $e^{2\text{sen}\, x} \cos x$

b) $\text{tg}\, x$

c) $\frac{1}{x^2+2}$

d) $\text{sen}^3\, x\, \cos^3 x$

e) $\frac{e^x}{4+e^{2x}}$

f) $\frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$

3. Calcule as primitivas seguintes:

a) $\frac{x^2-2x+5}{e^x}$

b) $x \,\text{sen}\, x \cos x$

c) $\frac{\log x}{x^3}$

d) $\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

e) $\log (x + \sqrt{1+x^2})$

f) $\frac{x}{\text{sen}^2 x}$

g) $\text{sen}\, (\log x)$

h) $\frac{\log^2 x}{x^2}$

i) $\text{arc sen}^2 x$

4. Calcule os integrais indefinidos utilizando as propriedades básicas e as fórmulas da tabela de integrais.

a) $\int (6x^2 + 8x + 3)\, dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$

c) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2+7}$

e) $\int \frac{dx}{x^2-10}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

g) $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$

h) $\int tg^2\, x\, dx$

i) $\int 3^x e^x\, dx$

j) $\int \frac{2x+3}{2x+1}\, dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x}\, dx$

l) $\int \frac{\text{arc tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2}\, dx$

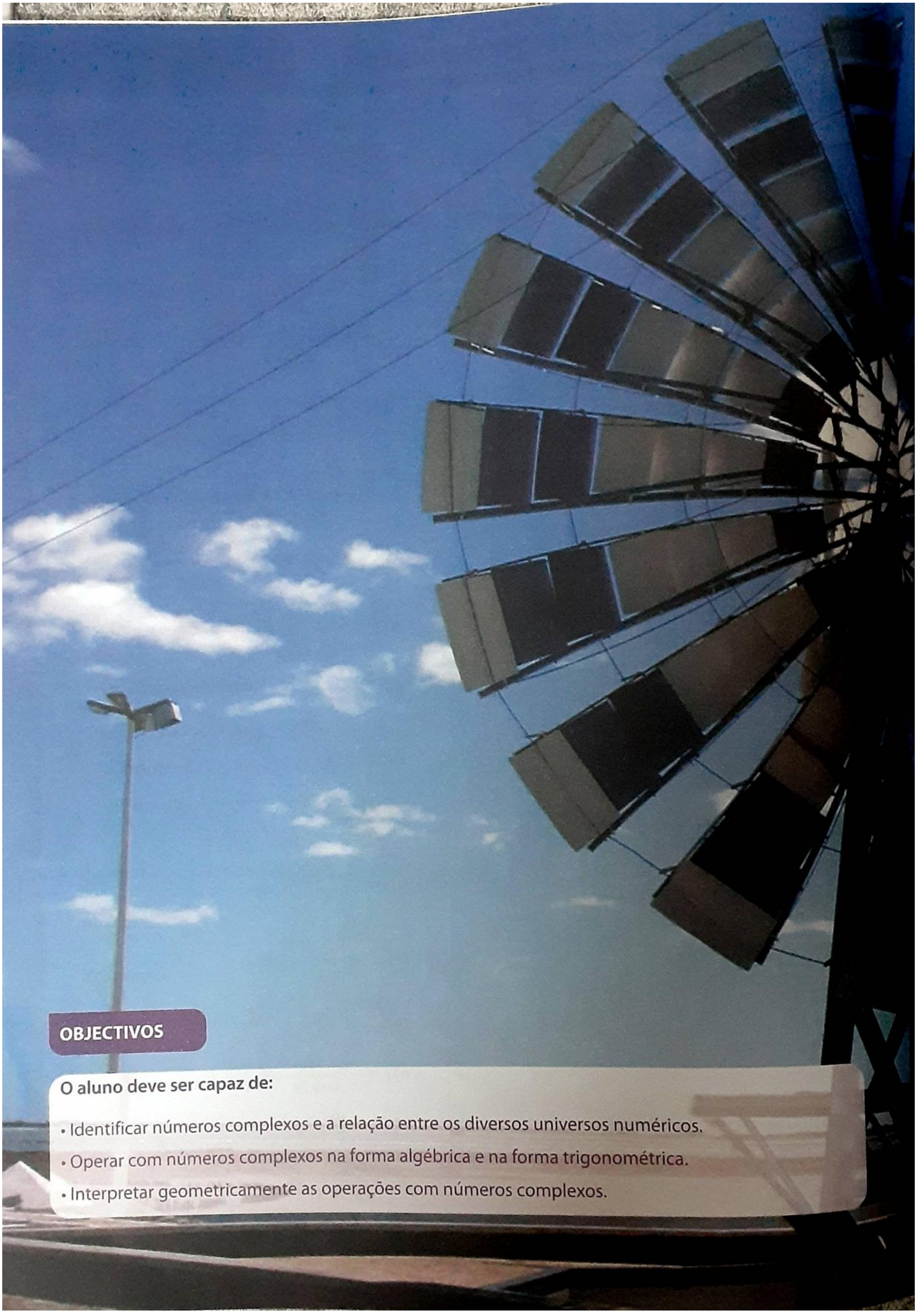
m) $\int x\, 7^{x^2}\, dx$

n) $\int \frac{\text{sen}\, 3x}{3 + \cos 3x}\, dx$

o) $\int \frac{dx}{\text{sen}\, x \cos x}$

p) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

Scanned by TapScanner



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar números complexos e a relação entre os diversos universos numéricos.
- Operar com números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica.
- Interpretar geometricamente as operações com números complexos.

Scanned by TapScanner

Números complexos

UNIDADE 8

CONTEÚDOS

- Apontamento histórico
- O conjunto dos números complexos
- Módulo de um número complexo. Propriedades
- Representação geométrica de números complexos
- Forma trigonométrica dos números complexos

Págs. 172 a 197

Scanned by TapScanner

UNIDADE 8

Introdução

Os **números naturais** surgiram da necessidade do Homem relacionar objectos a quantidades, os elementos que pertencem a esse conjunto são:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$

O **zero** surgiu posteriormente com a finalidade de expressar algo nulo no preenchimento posicional.

O **conjunto dos números naturais** surgiu simplesmente com o propósito da contagem, no comércio a sua utilização esbarrava nas situações em que era preciso expressar prejuízos. Os matemáticos da época, no intuito de resolver tal situação, criaram o **conjunto dos números inteiros**, simbolizado pela letra **Z**.

$$\mathbb{Z} = \{... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... \}$$

Operações comerciais representando lucros ou prejuízos podiam ser calculadas, por exemplo,

$$20 - 25 = -5 \text{ (prejuízo)}$$
$$-10 + 30 = 20 \text{ (lucro)}$$
$$-100 + 70 = -30 \text{ (prejuízo)}$$

Com a evolução dos cálculos, o conjunto dos números inteiros não satisfazia algumas operações, assim foi estipulado um novo conjunto numérico: o **conjunto dos números racionais**. Esse conjunto consiste na união entre o conjunto dos números naturais com os números inteiros mais os numerais que podem ser escritos na forma de fracção ou números decimais.

$$\mathbb{Q} = \{ ...; -5; ...; -4{,}7; ...; -2; ...; -1; ...; 0; ...; 2{,}65; ...; 4; ... \}$$

Alguns números decimais não podem ser escritos na forma de fracção, dessa forma não pertencem ao conjunto dos racionais, eles formam o **conjunto dos números irracionais**. Este conjunto possui números importantes para a Matemática como o número π ($\sim$3,14) e o número de ouro ($\sim$1,6).

A união dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais formam o **conjunto dos números reais**.

A criação do conjunto dos números reais deu-se ao longo de todo o processo de evolução da Matemática, atendendo às necessidades da sociedade. Na busca por novas descobertas, os matemáticos esbarraram numa situação oriunda da resolução de uma equação do 2.º grau. Vamos resolver a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$ aplicando a fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Scanned by TapScanner

Ao desenvolvermos a fórmula resolvente deparamos-nos com a raiz quadrada de um número negativo, sendo impossível a resolução dentro do conjunto dos números reais, pois não existe um número negativo que elevado ao quadrado tenha como resultado outro número negativo. A resolução destas raízes só foi possível com a criação e adequação dos **números complexos**, por Leonhard Euler. Os números complexos são representados pela letra $\mathbb{C}$ e mais conhecidos como o número da letra i, sendo designada nesse conjunto a seguinte fundamentação: $i^2 = -1$.

Esses estudos levaram os matemáticos ao cálculo das raízes de números negativos, pois com a utilização do termo $i^2 = -1$, também conhecido como **número imaginário**, é possível extrair a raiz quadrada de números negativos. Observe o processo:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \cdot 16} = \sqrt{-1 \cdot 4^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4^2}$$

Temos:

$\sqrt{-1} = i$

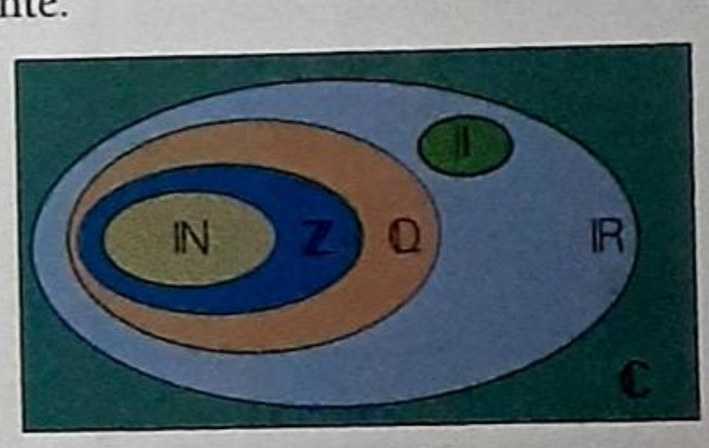
$\sqrt{4^2} = 4$

Então:

$\sqrt{-16} = 4i$

Os números complexos constituem o maior conjunto numérico existente.

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{I}$: conjunto dos números irracionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos



Forma algébrica de um número complexo

O conjunto $\mathbb{C}$ e a sua representação gráfica correspondem a uma ampliação do conjunto dos números reais, por inclusão da unidade da imaginária i e através de extensão, a este novo conjunto, de propriedades de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$.

Assim, todos os elementos do conjunto dos números reais e i:

$$\mathbb{C} = \{z: z = a + bi \wedge i^2 = -1, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Esta forma de representação dos números complexos designa-se por forma algébrica:

$$z = a + bi \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Onde a é a **parte real** ($a = \text{Re}(z)$), b o **coeficiente da parte imaginária** ($b = \text{Im}(z)$) e i é a **unidade imaginária**.

$z = 5 + 2i$
$\text{Re}(z) = 5$
$\text{Im}(z) = 2$

Scanned by TapScanner

Exemplos

Números complexos:

$3 + 2i;\ -i;\ \frac{1}{2} + \sqrt{2}\,i;\ -2 - i;\ 7 + \frac{i}{3};\ \sqrt{3}\,i$

Se $b = 0$, z seria igual a zero, isto é, seria um número real. Costuma-se designar os números complexos por z, $z_1, z_2 \ldots \omega_1, \omega_1, \omega_2 \ldots$
Sempre que escrevermos o número complexo na forma algébrica, as letras a, b, c, d, etc., representam números reais.

Casos particulares

- Se $b = 0$ e $a \neq 0$

$$z = a + 0i \Leftrightarrow z = a$$

Assim, z é um **número real**. O que está de acordo com o facto de $\mathbb{R} \in \mathbb{C}$.

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$

$$z = 0 + bi \Leftrightarrow z = bi$$

Neste caso, z não tem parte real, isto é, trata-se de um **imaginário puro**.

Exercícios resolvidos

1. Identifique a parte real e a parte imaginária dos números complexos seguintes:

a) $z = -3 + 5i$ b) $z = \frac{1}{2} - 20i$ c) $z = -4 + \sqrt{2}\,i$

d) $z = 7$ e) $z = \frac{4}{5}\,i$ f) $z = i - 2$

Resolução

a) $\mathrm{Re}(z) = -3$; $\mathrm{Im}(z) = 5$

b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = -20$

c) $\mathrm{Re}(z) = -4$; $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{2}$

d) $\mathrm{Re}(z) = 7$; $\mathrm{Im}(z) = 0$

e) $\mathrm{Re}(z) = 0$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{4}{5}$

f) $\mathrm{Re}(z) = -2$; $\mathrm{Im}(z) = 1$

2. Determine o valor de k para que $z = (k - 6) + bi$ seja:

a) Número real b) Imaginário puro

Resolução

a) Para que o complexo seja um número real devemos fazer: $a \neq 0$ e $b = 0$, logo $k - 6 \neq 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow k \neq 6 \wedge b = 0$.

b) Para que o complexo seja um imaginário puro: $a = 0$ e $b \neq 0$, logo $k - 6 = 0 \wedge b \neq 0 \Leftrightarrow k = 6 \wedge b \neq 0$.

1

Indique, para cada um dos complexos seguintes, a parte real e a parte imaginária.

a) $z = \frac{1}{2}i$

b) $\omega = i - 4$

c) $t = 8$

d) $u = (\sqrt{2} + 1)\,i$

Scanned by TapScanner

Igualdade entre números complexos

Dois números complexos na forma algébrica:

$$z = a + bi \text{ e } \omega = c + di$$

são iguais se e só se forem iguais os coeficientes das partes reais e das partes imaginárias:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Operações com números complexos na forma algébrica

Adição

A soma de dois números complexos z e ω é um outro número complexo, cuja parte real é a soma das partes reais de z e ω e cuja parte imaginária se obtém adicionando as partes imaginárias de z e ω:

$$z + \omega = a + bi + c + di = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

Portanto,

$$z + \omega = (a + c) + (b + d)i \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Exercício resolvido

Dados dois complexos $z_1 = 6 + 5i$ e $z_2 = 2 + i$, calcule a sua soma.

Resolução

$$z_1 + z_2 = (6 + 5i) + (2 + i) = 6 + 2 + 5i + i = 8 + 6i$$

Subtracção

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $\omega = c + di$, ao subtrairmos teremos:

$$z - \omega = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = a - c + bi - di$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

Portanto,

$$z - \omega = (a - c) + (b - d)i \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

2

Determine os valores de k e s para os quais:

a) $s + 3ki = 2 + 5i$

b) $k + 2i = i^2 + s^2i$

3

Dados os complexos:

$z_1 = 2 + 2i$

$z_2 = 5i$

$z_3 = 4$

$z_4 = 3 + i$

Determine:

a) $z_1 + z_3$

b) $z_2 + z_3 + z_1$

Scanned by TapScanner

4

Dados os complexos:

$z_1 = -3 + 2i$

$z_2 = 3i$

$z_3 = 6$

$z_4 = 5 - i$

Determine:

a) $z_3 - z_1$

b) $z_4 + z_1 - z_2$

Exercício resolvido

Dados dois números complexos $z_1 = 4 + 5i$ e $z_2 = -1 + 3i$.

Calcule a sua subtracção.

Resolução

$$z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (-1 + 3i) = 4 + 5i + 1 - 3i$$
$$= 4 + 1 + (5 - 3)i = 5 + 2i$$

Multiplicação

Multiplicação de um número real por um complexo

O produto de um número real por um número complexo é um número complexo cujas partes real e imaginária são multiplicadas por esse número real.

Sendo

$z = a + bi$ e $a, b, k \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$kz = k(a + bi) = ka + (kb)i$$

As propriedades da adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ são válidas em $\mathbb{C}$ – propriedade comutativa, associativa, distributiva, etc.

Multiplicação de um complexo pela unidade imaginária

Determinando o produto de um número complexo $z = a + bi$ por i, obtém-se

$$i\,z = i\,(a + bi) = ia + bi^2 = ia - b = -b + ai$$
$$(i^2 = -1)$$

Multiplicação de dois números complexos

Calculando o produto de dois números, $z = a + bi$ e $\omega = c + di$, tem-se

$$z \cdot \omega = (a + bi) \cdot (c + di) =$$
$$= ac + adi + bci + bdi^2 =$$
$$= ac + adi + bci - bd =$$
$$(i^2 = -1)$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ou seja,

$$z \cdot \omega = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Scanned by TapScanner

Exercício resolvido

Efectue as multiplicações seguintes:

a) $3\,(2 - 5i)$ b) $i\,(10 + \frac{5}{2}i)$

c) $z_1 = 5 + i$ e $z_2 = 2 - i$

Resolução

a) $3\,(2 - 5i) = 6 - 15i$

b) $i\,(10 - \frac{5}{2}\,i) = 10i - \frac{5}{2}\,i^2 = 10i + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} + 10i$

c) $(5 + i)\,(2 - i) = 5 \cdot 2 - 5i + 2i - i^2 = 10 - 3i + 1 = 11 - 3i$

5

Dados os complexos:

$z_1 = 2 + 3i$

$\omega = 4 + i$

Determine:

a) $z_3 + \omega$

b) $\omega - z$

c) $z \times \omega$

Potenciação

A unidade imaginária i foi definida como um número cujo quadrado é igual a -1.

Potências de i:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^2 \cdot i^3 = (-1) \cdot (-i) = i$

$i^6 = i^2 \cdot i^4 = (-1) \cdot 1 = -1$

$i^7 = i^2 \cdot i^5 = (-1) \cdot i = -i$

6

Efectue as multiplicações seguintes:

a) $(2 + i)\,(-i + 1)$

b) $-5i\,(4 + i)$

c) $\left(\frac{1}{2} - i\right)(i - 2)$

Percebe-se que os valores das potências de i **se repetem no ciclo** $1, i, -1, -i$ de **quatro em quatro a partir do expoente zero**. Portanto, para se calcular qualquer potência inteira de i, basta elevá-la ao resto da divisão do expoente por 4. Assim, podemos resumir:

$i^n = i^r$, onde $r = 0, 1, 2, 3$ (r é o resto de divisão de n por 4)

7

Calcule:

a) $(2i)^5$

b) $(-i)^{23}$

c) $[(-i + 2) - (2 - 2i)]^{100}$

Exemplos

1. $i^{82} = i^2 = -1$

$$\begin{array}{r|l} 82 & 4 \\ \hline 02 & 20 \end{array}$$

$82 = 4 \times 20 + 2$

2. $i^{2001} = i^1 = i$

$$\begin{array}{r|l} 2001 & 4 \\ \hline 001 & 500 \end{array}$$

$2001 = 4 \times 500 + 1$

Scanned by TapScanner

Até agora estudámos a potenciação de imaginários puros, mas é claro que pode ser também efectuada a potenciação de qualquer número complexo.

Calculemos o quadrado do complexo $z = a + bi$:

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Re}\,(z^2)}) + \underbrace{2abi}_{\text{Im}\,(z^2)}$$

A aplicação dos casos notáveis da multiplicação torna fácil o cálculo das potências de números complexos se o expoente não for muito elevado.

Caso isso aconteça é possível calcular as potências de expoente natural de um número complexo utilizando o desenvolvimento do binómio de Newton:

$$(a + b)^n = {}^nC_0\, a^n b^0 + {}^nC_1\, a^{n-1} b + \ldots + {}^nC_{n-1}\, a\, b^{n-1} + {}^nC_n\, a^0 b^n$$

8

Efectue:

a) $(4 - i)^3$

b) $(i + 1)^4$

Exemplos

1. $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

2. $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

3. $(1 + i)^{12} = \left[(1 + i)^2\right]^6 = (2i)^6 = 2^6 \cdot i^6 = 64 \cdot (i^2)^3 = 64 \cdot (-1)^3 = -64$

4. $(1 - i)^{200} = \left[(1 - i)^2\right]^{100} = (-2i)^{100} = (-2)^{100} \cdot i^{100} =$
$= 2^{100} \cdot (i^2)^{50} = 2^{100} \cdot (-1)^{50} = 2^{100} \cdot 1 = 2^{100}$

5. $(2 - i)^6 = {}^6C_0 \times 2^6 \times (-i)^0 + {}^6C_1 \times 2^5 \times (-i)^1 + {}^6C_2 \times 2^4 \times (-i)^2 + {}^6C_3 \times 2^3 \times (-i)^3 +$
$+ {}^6C_4 \times 2^2 \times (-i)^4 + {}^6C_5 \times 2^1 \times (-i)^5 + {}^6C_6 \times 2^0 \times (-i)^6 =$
$= 2^6 + 6 \times 32 \times (-i) + 15 \times 16 \times (-i) + 20 \times 8 \times (-i) + 15 \times 4 \times 1 + 6 \times 2 \times i +$
$+ 1 \times 1 \times (-1) = 64 - 192i - 240 - 160i + 60 + 12i - 1 = -117 - 340i$

Divisão

9

Determine o conjugado de:

a) $3 - 4i$

b) $3i$

c) $\frac{-5 + i}{3}$

Antes de estudarmos a regra da divisão, abordaremos a noção de **conjugado** de um número complexo bastante utilizada quando se trabalha com números complexos.

Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se **conjugado** de z e representa-se por $\overline{z}$, a um outro número complexo que possui a mesma parte real de z e a parte imaginária é o simétrico de $a + bi$.

$\overline{z} = a - bi$ sendo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

Scanned by TapScanner

Exemplos

1. $z = 3 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 5i$
2. $z = 2 - \sqrt{2}\,i \Rightarrow \bar{z} = 3 + \sqrt{2}\,i$

10

Sendo $z = \sqrt{3} + 2i$, calcule:

a) $z + \bar{z}$

b) $z \times \bar{z}$

Agora estamos em condições de aprender a regra para **dividir os números complexos** na forma algébrica.

Para dividir um número complexo ω por outro $z \neq 0$, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

$$\frac{\omega}{z} = \frac{c + di}{a + bi} \times \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{(c + di) \times (a - bi)}{(a + bi) \times (a - bi)} = \frac{ca - cbi + dai - bdi^2}{a^2 - b^2 i^2}$$

$$= \frac{(ca + bd) + (ad - cb)i}{a^2 + b^2}$$

Portanto, o quociente de dois números complexos $\omega = c + di$ e $z = a + bi$ é dado por:

$$\frac{\omega}{z} = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - cb}{a^2 + b^2}\,i,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Exemplo

$$\frac{3 + 2i}{4 + 2i} = \frac{(3 + 2i)(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{12 - 6i + 8i - 4i^2}{4^2 - (2i)^2} = \frac{12 + 2i + 4}{16 + 4} = \frac{16 + 2i}{20} = \frac{4}{5} + \frac{1}{10}\,i$$

Inverso de um número complexo

11

Determine o inverso dos complexos seguintes:

a) $\frac{1}{2 + 3i}$

b) $\frac{1}{5 - 2i}$

O inverso de um número é a troca do numerador pelo denominador e vice-versa, desde que essa fracção ou número seja diferente de zero. Num número complexo acontece da mesma forma. Dado um número complexo qualquer não nulo $z = a + bi$, o seu inverso será representado por z^{-1}.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \times \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2 i^2} =$$

$$= \frac{a - bi}{a^2 - b^2(-1)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Portanto,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Scanned by TapScanner

Como $a = \text{Re}\, z$, $b = \text{Im}\, z$ e $a^2 + b^2 = |z|^2$, podemos escrever:

$$z^{-1} = \frac{\text{Re}\, z}{|z|^2} - \frac{\text{Im}\, z}{|z|^2}\, i$$

Exercício resolvido

Calcule o inverso do número complexo, $z = 1 - 4i$.

Resolução

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-4i} \times \frac{1+4i}{1+4i} = \frac{1+4i}{1^2 - 16i^2} = \frac{1+4i}{1-16\times(-1)} = \frac{1+4i}{1+16} = \frac{1+4i}{17} = \frac{1}{17} + \frac{4}{17}\, i$$

Quando multiplicamos um número complexo pelo seu inverso o resultado será sempre igual a 1, $z \times z^{-1} = 1$. Observe a multiplicação do complexo $z = 1 - 4i$ pelo seu inverso:

$$(1-4i)\left(\frac{1+4i}{17}\right) = \frac{1^2 - 4^2 i^2}{17} = \frac{1-16i^2}{17} = \frac{1-16(-1)}{17} =$$
$$= \frac{1+16}{17} = \frac{17}{17} = 1$$

Raízes em $\mathbb{C}$ de equações quadráticas de coeficientes reais

12

Determine $z \in \mathbb{C}$, de modo que $z^2 - 2z - 3 = 0$ seja um número real.

Quando se estudou a resolução de equações quadráticas de coeficientes reais, isto é, a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, verificou-se que as suas raízes, quando existem, são dadas pela expressão.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Assim:

- Se $b^2 - 4ac > 0$, existem duas soluções reais e diferentes para a equação.
- Se $b^2 - 4ac = 0$, há apenas uma solução.
- Se $b^2 - 4ac < 0$, não há soluções reais.

13

Calcule:

a) $x^2 + 3 = 0$

b) $x^2 + 5x + 7 = 0$

A criação do conjunto $\mathbb{C}$ leva, naturalmente, a pensar na determinação das raízes das equações quadráticas não só em $\mathbb{R}$ mas em $\mathbb{C}$. Nestas condições, o caso $b^2 - 4ac < 0$ deixa de constituir um caso de impossibilidade de solução de equações, para surgirem duas raízes em $\mathbb{C}$, dadas ainda pela expressão (1), que são manifestamente os complexos conjugados.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Scanned by TapScanner

Exemplos

1. $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = +2i \vee x = -2i$

2. $x^2 - 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = -9$
$\Leftrightarrow x - 2 = 3i \vee x - 2 = -3i$
$\Leftrightarrow x = 2 + 3i \vee x = 2 - 3i$

Aplicando simplesmente a fórmula resolvente, tem-se:

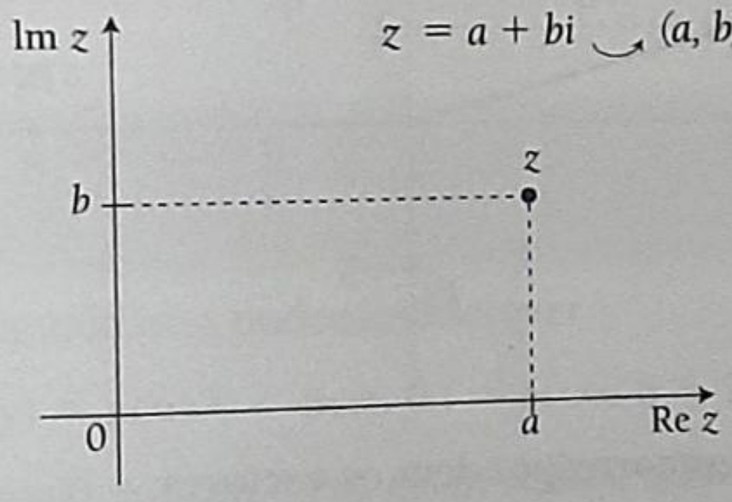
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm 3i$$

Representação geométrica dos números complexos

A cada número complexo $z = a + bi$ está associado um par de números reais (a, b) e, consequentemente, a esse número complexo corresponde um ponto num referencial de dois eixos ortogonais.

Relativamente ao ponto de coordenadas (a, b) diz-se que é o **afixo** do complexo $z = a + bi$.

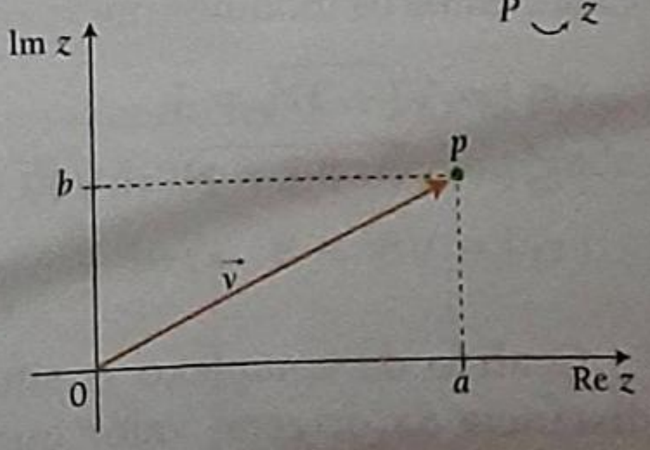
Sendo a primeira coordenada do ponto a parte real de z e a segunda coordenada o coeficiente da parte imaginária, dá-se o nome de **eixo real** ao eixo das abcissas e o nome de **eixo imaginário** ao eixo das ordenadas. A este referencial é habitual chamar-se **diagrama (ou plano) de Argand**.



Se a parte real de z for nula, o ponto $(0, b)$ situa-se no **eixo imaginário** – trata-se de um imaginário puro.

No caso da representação de um complexo cuja parte imaginária é nula, ou seja, de um número real, o ponto $(a, 0)$ situa-se naturalmente no **eixo real**.

Um número complexo $z = a + bi$ (com a e b reais), para além de poder ser representado no diagrama de Argand por um ponto P (a, b), pode também ser representado por um vector do plano, de coordenadas (a, b): $\vec{v} - (a, b)$



P é o afixo de z

14

Marque os afixos dos complexos no diagrama de Argand:

$2 + 3i$ ◡ P

$-5i$ ◡ Q

$-\frac{1}{3}$ ◡ R

$i + 4$ ◡ S

Scanned by TapScanner

O vector $\vec{OP} = (a, b)$ representa, portanto, o complexo $z = a + bi$. Tratando-se de um vector é possível calcular a sua norma:

$$\| \vec{OP} \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a qual não é mais do que a distância do ponto P à origem do referencial. Esse valor designa-se por **módulo do complexo** z e representa-se por $| z |$ ou ρ.

$$| z | = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Caso o complexo em causa seja um número real ou um imaginário puro, o seu módulo corresponde respectivamente ao valor absoluto da parte real ou da parte imaginária. De facto, sendo

$$z = a + 0i \text{ tem-se } |z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

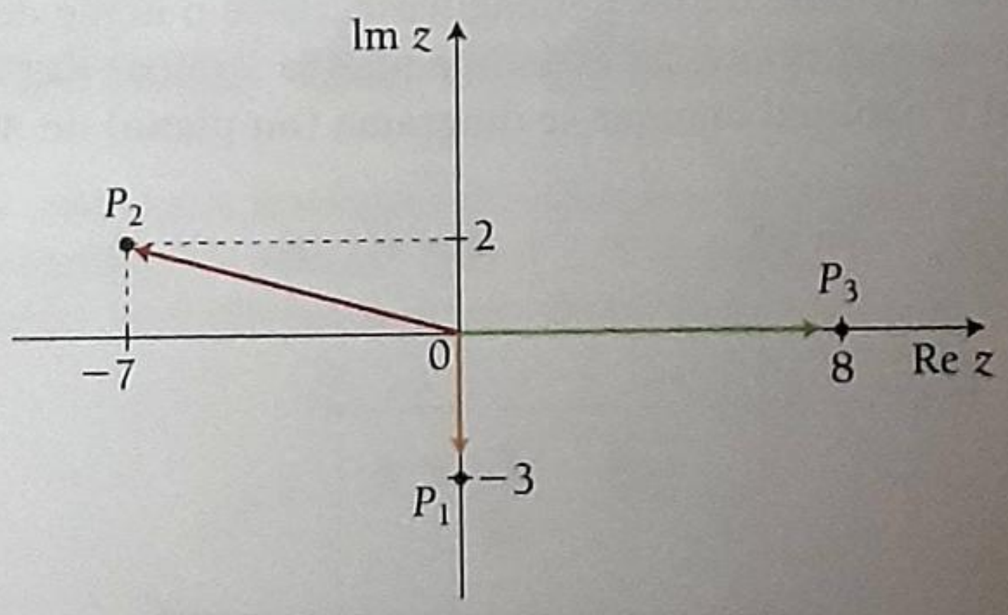
e sendo

$$z = 0 + bi \text{ tem-se } |z| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$$

15

Determine o módulo de cada um dos complexos indicados:
a) $z_1 = 3i - 8$
b) $z_2 = 4i$
c) $z_3 = 2$

Considerando os complexos $z_1 = -3i$, $z_2 = 2i - 7$ e $z_3 = 8$ vamos representá-los no plano de Argand:



A estes complexos correspondem os vectores:

$$\vec{OP}_1 = (0, -3), \vec{OP}_2 = (-7, 2) \text{ e } \vec{OP}_3 = (8, 0).$$

Calculemos os módulos dos complexos:

$$| z_1 | = \sqrt{(-3)^2} = 3$$
$$| z_2 | = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$$
$$| z_3 | = \sqrt{8^2} = 8$$

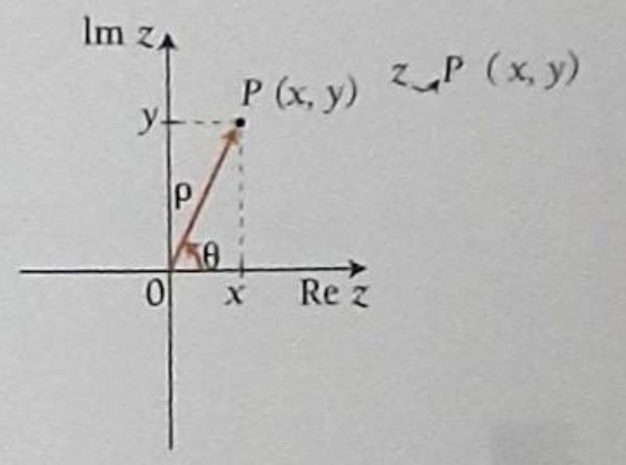
O **afixo** do complexo z_1 situa-se no eixo imaginário a 3 unidades de distância da origem, valor que coincide com o do módulo. O mesmo acontece com o complexo z_3 cujo afixo se situa no eixo real a 8 unidades da origem.

Scanned by TapScanner

Forma trigonométrica de um número complexo

Argumento de um número complexo

Retomemos a representação geométrica de um número complexo $z = x + yi$.



O ângulo θ representado é o menor ângulo positivo cujo lado origem é o semieixo real positivo e cujo lado extremidade é a semi-recta OP. Diz-se que θ é o **argumento positivo mínimo** do complexo z ($0 \leq \theta < 2\pi$).

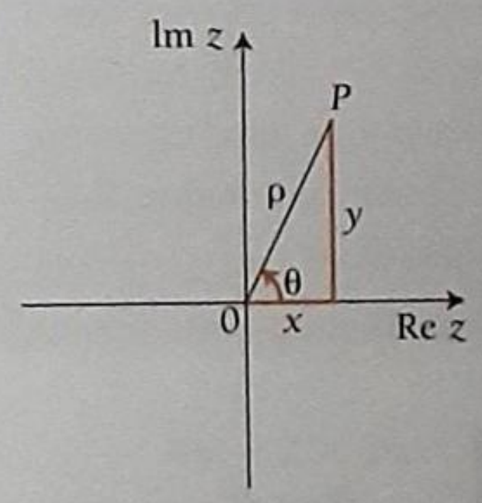
Qualquer número complexo $z \neq 0$ tem infinitos argumentos, todos eles podendo ser escritos como $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Escreve-se

$$\arg z = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

A localização do ponto P no plano de Argand é dada pela distância do ponto à origem e pelo ângulo θ. Aliás, é possível relacionar a parte real e a parte imaginária de z com o módulo e o argumento deste complexo.

Já foi visto que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Tendo em conta a figura ao lado pode concluir-se que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} \text{ e } \cos\theta = \frac{x}{\rho}$$

O que é equivalente a

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{com } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Com base nestas igualdades podemos escrever

$$z = x + yi = \rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta\, i = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

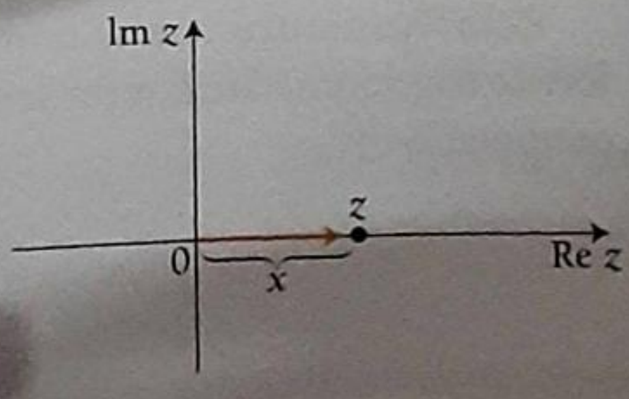
Escreve-se habitualmente $i \operatorname{sen}\theta$ e não $\operatorname{sen}\theta\, i$.

É usual abreviar $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ por $\operatorname{cis}\theta$. Assim, a **forma trigonométrica de um número complexo** é:

$$z = \rho\operatorname{cis}\theta = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

$$\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = \operatorname{cis}\theta$$

Foi anteriormente referido que o afixo de um número real $z = x$ ($x \in \mathbb{R}$) se situa no eixo real. Assim sendo, o argumento de z é um ângulo de amplitude zero ou π.



Analisemos as duas situações:

- $z = x$ com $a \in \mathbb{R}$

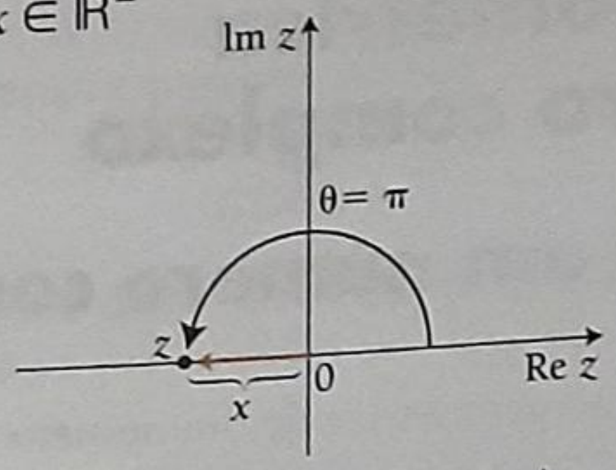
  $\rho = |z| = |x + 0i| = |x| = |x| \in \mathbb{R}^+$

  donde $z = x \operatorname{cis} 0$

Scanned by TapScanner

$|x| \in \mathbb{R}^+$

- $z = x$ com $x \in \mathbb{R}^-$



$$\rho = |z| = |x + 0i| = |x| = -x \in \mathbb{R}^+$$

donde

$$z = -x \operatorname{cis} \pi$$

16

Escreva os complexos na forma algébrica:

a) $2\operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$

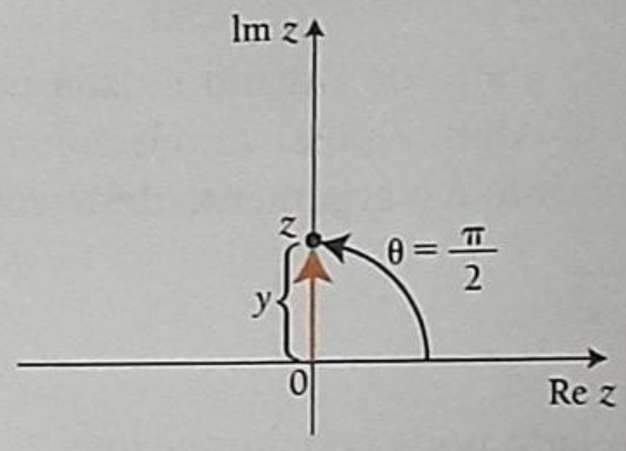
b) $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

No caso em que $x = 0$ e $y = 0$ trata-se de um número real, a que corresponde o ponto $(0, 0)$. É habitual afirmar que este elemento de $\mathbb{C}$ tem argumento indeterminado.

No caso de z ser um imaginário puro, o afixo situa-se no eixo imaginário pelo que o argumento positivo mínimo θ será um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

Consideremos dois casos distintos:

- $z = yi$ com $y \in \mathbb{R}^+$

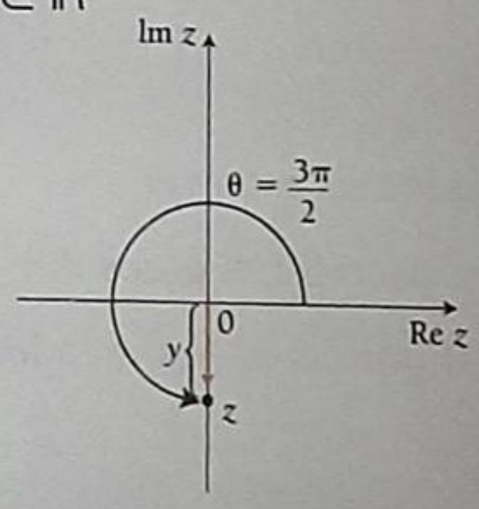


$$\rho = |z| = |0 + yi| = |y| = y \in \mathbb{R}^+$$

donde

$$z = y \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$$

- $z = yi$ com $y \in \mathbb{R}^-$



17

Escreva os complexos na forma trigonométrica:

a) -3

b) $4i$

c) $-\frac{1}{2}i$

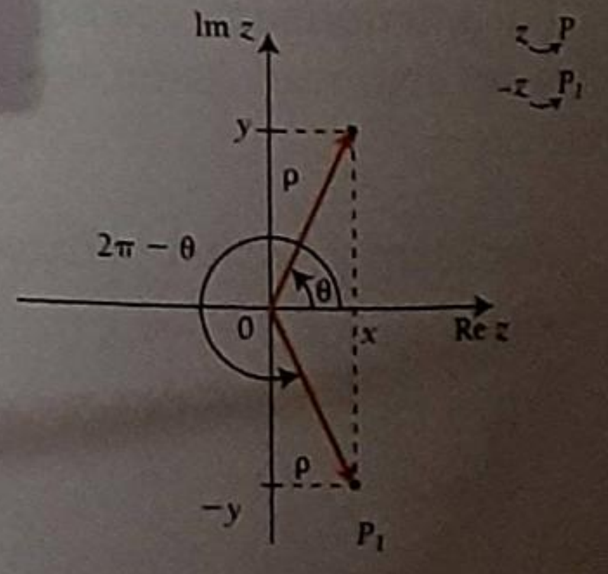
$$\rho = |z| = |0 + yi| = |b| = -y \in \mathbb{R}^+$$

donde

$$z = -y \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$$

Poder-se-ia afirmar que o argumento de z era $-\theta$. No entanto, não seria o argumento positivo mínimo.

Relativamente a um complexo z na forma trigonométrica, representemos o seu conjugado $\bar{z}$:



Scanned by TapScanner

Como já tinha sido referido, o complexo z e o seu conjugado $\bar{z}$ têm o mesmo módulo.

Quanto aos argumentos positivos mínimos, embora sejam distintos, é possível estabelecer uma relação entre eles:

$$\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$$

ou seja, sendo: $z = \rho\text{cis}\,\theta$ tem-se:

$$\bar{z} = \rho\text{cis}\,(2\pi - \theta)$$

Igualdade entre números complexos

Para que dois complexos, z e w, escritos na forma trigonométrica sejam iguais é necessário que tenham o mesmo módulo e o mesmo argumento positivo mínimo, isto é,

$$z = w \Leftrightarrow |z| = |w| \wedge \arg z = \arg w + 2k\pi,\ \forall z, w \in \mathbb{C}\ (k \in \mathbb{Z})$$

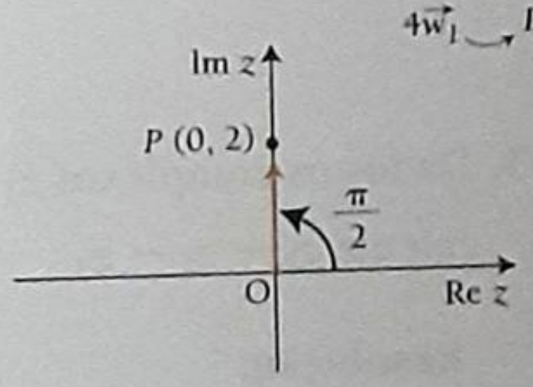
Exercícios resolvidos

1. Mostremos que, sendo $w_1 = -\frac{1}{2}\,i$ e $w_2 = 2\text{cis}\ \frac{9\pi}{2}$, é válida a igualdade $4\,\bar{w_1} = w_2$.

Resolução

Comecemos por escrever o primeiro membro da igualdade na forma trigonométrica:

$$4\bar{w}_1 = 4\left(\overline{-\frac{1}{2}\,i}\right) = 4 \times \frac{1}{2}\,i = 2i = 2\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$$



A igualdade $4\bar{w}_1 = w_2$ é válida visto que os módulos de $4\bar{w}_1$ e w_2 são iguais e os argumentos, respectivamente, $\frac{9\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, diferem de 4π, ou seja, estão verificadas as condições necessárias para garantir a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica.

$$4\pi = 2 \times 2\pi \quad (k = 2)$$

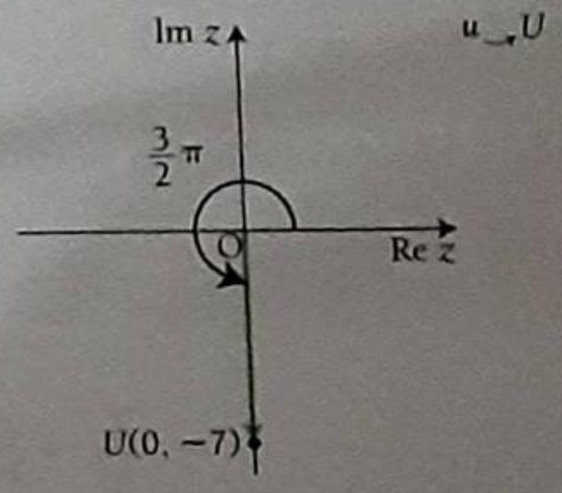
2. Determinemos o módulo e o argumento dos complexos $u = -7i$ e $v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, escrevendo-os seguidamente na forma trigonométrica.

Resolução

No caso de $u = -7i$ tratando-se de um imaginário puro em que o coeficiente da parte imaginária é negativo, o afixo situa-se no semieixo imaginário negativo. Consequentemente, a distância a que se encontra da origem é igual *a* $|\text{Im}\ u| = |-7| = 7$.

O argumento θ de u é $\frac{3\pi}{2}$ visto este ser o menor ângulo positivo formado pelo semieixo real positivo e pelo segmento $[OU]$. (ver fig. ao lado).

Podemos então escrever que $u = 7\ \text{cis}\ \frac{3\pi}{2}$.



Scanned by TapScanner

No caso de v é necessário determinar primeiro o seu módulo:

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(1)\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$
$$\text{com } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

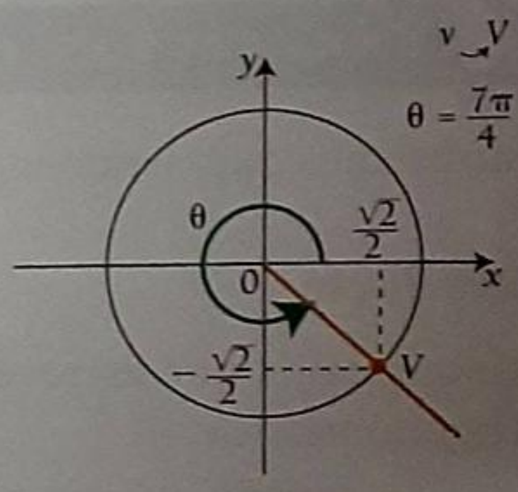
Assim, atendendo à expressão (1):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ -\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

O menor ângulo positivo que verifica as duas condições é $\frac{7\pi}{4}$, ou seja, é este o argumento positivo mínimo de v.
Consequentemente,

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$$



3. Dados os complexos $z_1 = 3\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$, $z_2 = -5i$ e $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ calcule $z_2 + z_1 - \bar{z}_3$.

Resolução:

Vamos escrever $\bar{z}_1$ e z_3 na forma algébrica:

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Importante:
Para adicionar números complexos, estes devem estar representados na forma algébrica.

$$\bar{z}_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{cis}\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6}i = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

Estes resultados permitem calcular

$$z_2 + z_1 - \bar{z}_3 = -5i + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \left(-5 + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\right)i =$$

$$= \frac{7}{6} + \left(-\frac{16}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i = \frac{7}{6} + \frac{9\sqrt{3} - 32}{6}i$$

Scanned by TapScanner

Operações com complexos na forma trigonométrica

Adição e subtracção de complexos

Consideremos quaisquer dois números complexos, z e ω (diferentes de zero), escritos na forma trigonométrica e calculemos a sua soma:

$$z = \rho \text{cis}\,\theta \qquad \omega = \rho' \text{cis}\,\theta'$$

$$z + \omega = \rho \text{cis}\,\theta + \rho' \text{cis}\,\theta'$$

Não existindo qualquer relação numérica entre ρ e ρ' nem entre θ e θ', a adição entre os dois complexos **não pode ser expressa de nenhuma forma** mais abreviada.

O mesmo se passaria no caso da subtracção. Assim, não tem qualquer utilidade adicionar ou subtrair números complexos na forma trigonométrica, tanto mais que é relativamente simples fazê-lo quando se encontram na forma algébrica. Aliás, é sempre possível, dado um número complexo na forma trigonométrica, escrevê-lo na forma algébrica.

18

Efectue:

a) $(2 + 2i) + 3\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{1}{2}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4}\,i$

Multiplicação de complexos

Para determinar o produto de dois números complexos na forma trigonométrica, $z = \rho \text{cis}\,\theta$ e $\omega = \rho' \text{cis}\,\theta'$, vai ser necessário recorrer às fórmulas trigonométricas da adição.

$$z \times \omega = (\rho \text{cis}\,\theta) \times (\rho' \text{cis}\,\theta') = \rho \times \rho' \times \text{cis}\,\theta \times \text{cis}\,\theta'$$

Atendendo a que $\text{cis}\,\theta = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ e $\text{cis}\,\theta' = \cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta'$

Obtém-se

$$\begin{aligned}
&\text{cis}\,\theta \times \text{cis}\,\theta' = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \times (\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta') = \\
&= \cos\theta \times \cos\theta' + \cos\theta \times i \operatorname{sen}\theta' + i \operatorname{sen}\theta \times \cos\theta' + i^2 \operatorname{sen}\theta' \times \operatorname{sen}\theta' = \\
&= \cos\theta \times \cos\theta' - \operatorname{sen}\theta \times \operatorname{sen}\theta' + i(\cos\theta \times \operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta \times \cos\theta') = \\
&= \cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta') = \text{cis}\,(\theta + \theta')
\end{aligned}$$

Relembre que:

$\operatorname{sen}(a + b) =$

$= \operatorname{sen} a \times \cos b + \cos a \times \operatorname{sen} b$

$\cos(a + b) =$

$= \cos a \times \cos b - \operatorname{sen} a \times \operatorname{sen} b$

Assim, o produto de dois números complexos na forma trigonométrica é dado por:

$$z \times \omega = (\rho \text{cis}\,\theta) \times (\rho' \text{cis}\,\theta') = (\rho \times \rho') \times \text{cis}\,(\theta + \theta')$$

Scanned by TapScanner

Dado que ρ e ρ' são reais positivos, $\rho \times \rho'$ é também um real positivo. Refira-se também que $\theta + \theta'$ pode eventualmente não ser o argumento positivo mínimo do complexo $z \times \omega$. Nesse caso, se o resultado da multiplicação for apresentado na forma trigonométrica, o valor de $\theta + \theta'$ pode ser substituído por outro, correspondente à amplitude de um ângulo com a mesma origem e extremidade de $\theta + \theta'$ mas pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$.

A multiplicação de dois números complexos pode ainda ser escrita como

$$z \times \omega = |z| \times |\omega| \times \text{cis}\,(\arg z + \arg \omega)$$

Exemplo

No caso de $z = 2\text{cis}\ \frac{\pi}{3}$ e $\omega = \frac{1}{4}\ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, tem-se

$$z \times \omega = 2 \times \frac{1}{4}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{9\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{cis}\ \frac{11\pi}{6}$$

Potenciação de complexos

A expressão que permite calcular a potência de um número complexo, escrito na forma trigonométrica, surge como consequência directa da fórmula da multiplicação. De facto, calcular a potência de expoente n do complexo $z = \rho\text{cis}\ \theta$ é equivalente a multiplicar esse complexo por si próprio n vezes:

$$z^n = \underbrace{(\rho\text{cis}\ \theta)^n = (\rho\text{cis}\ \theta) \times (\rho\text{cis}\ \theta) \times \ldots \times (\rho\text{cis}\ \theta)}_{n \text{ vezes}}$$

19

Sendo

$z = 2\text{cis}\ \frac{\pi}{6}$ e $\omega = \text{cis}\ \frac{5\pi}{3}$

Calcule:

a) $z \times \omega$

b) z^3

Generalizando a um produto de n factores a fórmula da multiplicação, tem-se:

$$z^n = \underbrace{(\rho \times \rho \times \ldots \times \rho)}_{n \text{ vezes}}\ \text{cis}\ \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{n \text{ vezes}} = \rho^n\text{cis}\,(n\theta) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Se $n = 0$,

$$(\rho\text{cis}\ \theta)^0 = \rho^0\text{cis}\,(0 \times \theta) = 1\text{cis}\ 0 = 1$$

A fórmula é generalizável ao caso de expoentes inteiros negativos, já que:

$$(\rho\text{cis}\ \theta)^{-n} = \frac{1}{\rho\text{cis}\ \theta^n}$$

Assim, obtém-se a fórmula de Moivre da potenciação:

$$z^n = (\rho\text{cis}\ \theta)^n = \rho^n\text{cis}\,(n\theta),\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Scanned by TapScanner

Exemplo

Sendo $z = 2\text{cis}\ \frac{\pi}{3}$,

$z^6 = 2^6\text{cis}\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 64\text{cis}\ 2\pi = 64\text{cis}\ 0$

Divisão de complexos

Quando foi estudada a divisão de números complexos na forma algébrica utilizou-se $\frac{z}{\omega} = z \times \frac{1}{\omega}$.

De forma análoga, tem-se que:

$$\frac{z}{\omega} = \frac{\rho\text{cis}\ \theta}{\rho'\text{cis}\ \theta'} = (\rho\text{cis}\ \theta) \times \frac{1}{\rho'\text{cis}\ \theta'} = (\rho\text{cis}\ \theta) \times (\rho'\text{cis}\ \theta')^{-1}$$

$$= (\rho\text{cis}\ \theta) \times [\rho'^{-1}\text{cis}\ (-\theta')] = (\rho' \times \rho'^{-1})\text{cis}\ [\theta + (-\theta')]$$

$$= \frac{\rho}{\rho'}\text{cis}\ (-\theta')$$

Concluindo, o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica é dado por

$$\frac{z}{\omega} = \frac{\rho\text{cis}\ \theta}{\rho'\text{cis}\ \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\text{cis}\ (\theta - \theta'),\ \omega \neq 0$$

Repare que o argumento positivo mínimo de $\frac{z}{\omega}$ se pode obter adicionando ou subtraindo a θ, $-\theta'$ um múltiplo de 2π.

Analogamente ao que foi afirmado no caso da multiplicação, é também possível escrever:

$$\frac{z}{\omega} = \frac{|z|}{|\omega|}\text{cis}\ (\arg z - \arg \omega),\ \omega \neq 0$$

Exemplo

Considerando $z = 2\text{cis}\ \frac{\pi}{3}$ e $\omega = \frac{1}{4}\text{cis}\ \frac{3\pi}{2}$ tem-se:

$$\frac{z}{\omega} = \frac{2}{\frac{1}{4}}\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{2}\right) = 8\text{cis}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 8\text{cis}\ \frac{5\pi}{6}$$

20

Calcule $\frac{z}{\omega}$ sendo:

a) $z = \text{cis}\ \pi$ e $\omega = \text{cis}\ \frac{\pi}{6}$

b) $z = 7\text{cis}\ \frac{\pi}{5}$ e $\omega = 14\text{cis}\ \frac{3}{2}\pi$

Um complexo $z = \rho\text{cis}\ \theta$ com ρ e θ variáveis reais desconhecidas, denomina-se variável complexa. Na forma algébrica seria: $z = x + yi$.

Radiciação de complexos

Através da fórmula de Moivre da potenciação é possível resolver uma condição do tipo $z^n = \omega$, ou seja, é possível determinar os números complexos $z = \rho\text{cis}\ \theta$ que verificam esta igualdade.

Sendo $\omega = \rho_1\ \text{cis}\ \theta_1$ um complexo dado, em que ρ_1 e θ_1 são constantes, tem-se:

$$\rho^n\ \text{cis}\ (n\theta) = \rho_1\ \text{cis}\ \theta_1$$

Scanned by TapScanner

Donde:

$$\rho^n = \rho_1 \wedge \text{cis}\,(n\theta) = \text{cis}\,\theta_1$$

o que equivale a afirmar que

$$\rho = \sqrt[n]{\rho_1} \wedge n\theta = \theta_1 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$$

ou seja,

$$\rho = \sqrt[n]{\rho_1} \wedge \theta = \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\ (k \in \mathbb{Z})$$

Assim, podemos afirmar que as raízes de índice n de ω são dadas por:

$$z_k = \sqrt[n]{|\omega|}\ \text{cis}\left(\frac{\arg\omega + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo a k valores inteiros, obter-se-ão as várias raízes de índice n do complexo.

Analisemos a situação através de dois casos concretos:

$$z^3 = 27\text{cis}\,\pi \quad \text{e} \quad z^4 = 2\text{cis}\,\frac{3\pi}{5}$$

Exemplos

1. Determinação das raízes cúbicas de $27\text{cis}\,\pi$:

$$z_k = \sqrt[3]{27}\ \text{cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

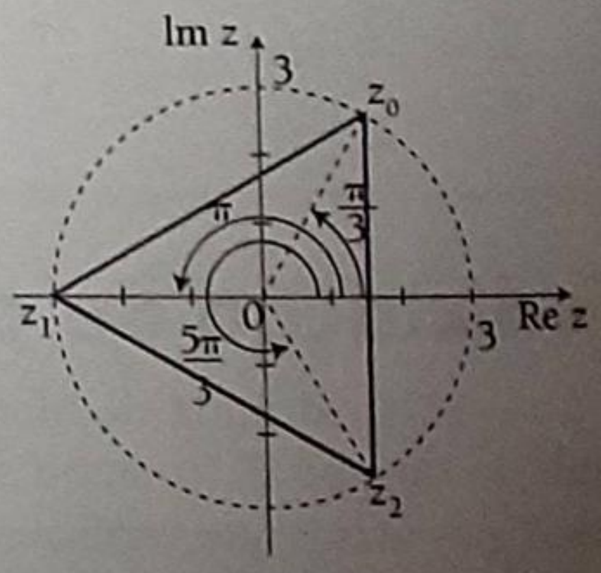
Sendo:

- $k = 0$ $\quad z_0 = 3\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$
- $k = 1$ $\quad z_1 = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 3\text{cis}\,\pi$
- $k = 2$ $\quad z_2 = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = 3\text{cis}\,\frac{5\pi}{3}$
- $k = 3$ $\quad z_3 = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 3\text{cis}\,\frac{7\pi}{3} = 3\text{cis}\,\frac{\pi}{3} = z_0$
- $k = 4$ $\quad z_4 = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3}\right) = 3\text{cis}\,3\pi = 3\text{cis}\,\pi = z_1$

Os valores de z parecem repetir-se a partir de $k = 3$.

Se a k tivessem sido atribuídos valores inteiros negativos, obter-se-iam ainda as mesmas raízes.

Vamos representar geometricamente os afixos correspondentes aos três complexos distintos obtidos como raízes cúbicas de $27\text{cis}\,\pi$.



O triângulo cujos vértices são os afixos de z_0, z_1 e z_2 é equilátero.

$\frac{\pi}{3}$ é o argumento positivo mínimo de $3\text{cis}\,\frac{7\pi}{3}$ e π é o argumento positivo mínimo de $3\text{cis}\,3\pi$.

21

Obtenha as soluções da equação:

$$z^3 = 27\text{cis}\,\pi$$

para $k = 5$, $k = 6$, $k = -1$, $k = -2$ e $k = -3$. Analise a situação.

Scanned by TapScanner

2. Determinação das raízes quartas de $2\text{cis}\,\frac{3\pi}{5}$:

$$z_k = \sqrt[4]{2}\ \text{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{5} + 2k\pi}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

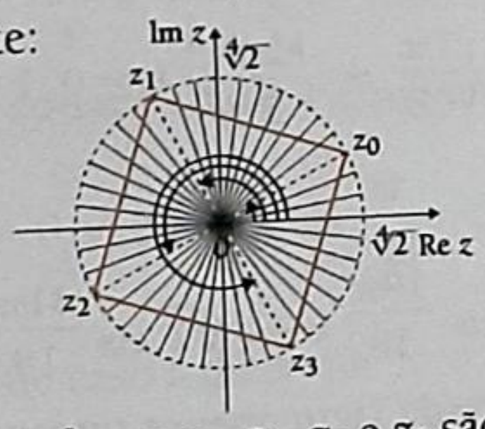
ou seja,

$$z_k = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

dando a k diferentes valores, tem-se:

- $k = 0$ $\quad z_0 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{20}$
- $k = 1$ $\quad z_1 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2}\ \text{cis}\,\frac{13}{20}\,\pi$
- $k = 2$ $\quad z_2 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{20} + \pi\right) = \sqrt[4]{2}\ \text{cis}\,\frac{23}{20}\,\pi$
- $k = 3$ $\quad z_3 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{20} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2}\ \text{cis}\,\frac{33}{20}\,\pi$
- $k = 4$ $\quad z_4 = \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{20} + 2\pi\right) = \sqrt[4]{2}\ \frac{3\pi}{20} = z_0$

Geometricamente:



Os afixos dos complexos z_0, z_1, z_2 e z_3 são vértices de um quadrado.

Analisando os dois exemplos encontram-se algumas analogias entre eles. Embora não sejam demonstrados, esses resultados podem ser generalizados para as n raízes de índice n de um qualquer número complexo na forma trigonométrica:

- Existem apenas n raízes distintas de índice n de um complexo, pelo que basta atribuir a k valores inteiros desde zero até $n - 1$. Com $k = n$, encontramos a mesma raiz de índice n que foi obtida com $k = 0$.
- As n raízes de z têm módulo igual a $\sqrt[n]{\rho}$.
- Os afixos correspondentes a essas n raízes são vértices de um polígono regular com n lados.
- A diferença entre os argumentos de duas raízes consecutivas é igual a $\frac{2\pi}{n}$, ou seja, os afixos das raízes dividem a circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$ em n partes iguais.

Generalizando, a **fórmula de Moivre da radiciação** dá-nos as n raízes de índice n de um complexo na forma trigonométrica:

$$z^n = \rho\text{cis}\,\theta \Leftrightarrow z_k = \sqrt[n]{\rho}\ \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1\ (n \in \mathbb{N})$$

22

Calcule:

a) As raízes quadradas de $8\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$.

b) As raízes de índice 6 de cis $\frac{\pi}{4}$.

Scanned by TapScanner

Exercícios resolvidos

1. Resolve, em $\mathbb{C}$, cada uma das equações seguintes:

a) $z^4 + i\,z + \sqrt{3}\,z = 0$ b) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

c) $z^3 - 2i\,z = 0$ d) $z^4 = (1 + 2i)^4$

e) $z^3 = (1 + 2i)^3$

Resolução

Em todas as equações está posta de parte a hipótese de substituir z por $x + yi$ dadas as dificuldades que encontraríamos nos cálculos.

a) $z^4 + i\,z + \sqrt{3}\,z = 0 \Leftrightarrow z\,(z^3 + i + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 = -\sqrt{3} - i$

A equação tem como soluções o zero e as raízes cúbicas de $-\sqrt{3} - i$. Escrevendo $-\sqrt{3} - i$ na forma trigonométrica, podemos usar a fórmula de De Moivre para determinar as suas raízes de índice 3.

Para determinar as suas raízes de índice 3, fazemos:

$$\sqrt[3]{-\sqrt{3} - i} = \sqrt[3]{2\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\,\frac{\frac{7\pi}{6} + k2\pi}{3} = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}\right),\ k = 0, 1 \text{ e } 2$$

Temos então que a equação dada é equivalente a:

$$z = 0 \vee z = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{18} \vee z = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\,\frac{19\pi}{18} \vee z = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\,\frac{31\pi}{18}$$

b) Trata-se de uma equação do 4.º grau que se diz biquadrada (tem apenas termos de grau 4, 2 e 0).

Substituindo z^2 por ω, obtemos a equação do 2.º grau $\omega^2 + 2\omega + 4 = 0$. Por aplicação da fórmula resolvente para equações do 2.º grau, chegamos a

$$\omega = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{-2 \pm \sqrt{12}\,i}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\,i}{2} \Leftrightarrow \omega = -1 - \sqrt{3}\,i \vee w\omega = -1 - \sqrt{3}\,i.$$

Como $w = z^2$, tem-se $z^2 = -1 + \sqrt{3}\,i \vee z^2 = -1 - \sqrt{3}\,i$. Para resolver estas equações escrevemos $-1 + \sqrt{3}\,i$ e $-1 - \sqrt{3}\,i$ na forma trigonométrica e aplicamos a fórmula de De Moivre.

$$-1 + \sqrt{3}\,i = 2\text{cis}\,\frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad -1 - \sqrt{3}\,i = 2\text{cis}\left(+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Então, $\sqrt{-1 + \sqrt{3}\,i} = \sqrt{2\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{2} = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right),\ k = 0, 1$

$$\sqrt{-1 - \sqrt{3}\,i} = \sqrt{2\text{cis}\left(+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\text{cis}\,\frac{-\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{2} = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\right),\ k = 0, 1$$

Scanned by TapScanner

A equação dada é equivalente a:

$z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3} \vee z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{3} \vee z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \vee z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3}$.

Repare que, neste caso, as soluções não são as raízes quartas de um número e, portanto, as suas imagens geométricas não são os vértices de um quadrado.

c) Na resolução da equação $z^3 - \sqrt{2}\,i\,\bar{z} = 0$ temos que percorrer o caminho que utilizámos para chegar à fórmula de De Moivre.

É imediato que $z = 0$ é uma solução; procuremos agora as soluções não nulas na forma trigonométrica.

Seja $z = \rho\,\mathrm{cis}\,\theta$ com $\rho > 0$; então $\bar{z} = \rho\,\mathrm{cis}\,(-\theta)$

$z^3 - \sqrt{2}i\,\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z^3 = \sqrt{2}i\,\bar{z} \Leftrightarrow (\rho\,\mathrm{cis}\,\theta)^3 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{2} \cdot \rho\,\mathrm{cis}\,(-\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^3\,\mathrm{cis}\,(3\theta) = \sqrt{2}\rho\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Leftrightarrow \rho^3 = \sqrt{2}\rho \wedge 3\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2 = \sqrt{2} \wedge 4\theta = \frac{\pi}{2} = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{\sqrt{2}} \wedge \theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Então, $z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$ e os valores distintos de z podem ser obtidos atribuindo a k os valores 0, 1, 2 e 3. A equação dada é equivalente a:

$$z = 0 \vee z = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{8} \vee z = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{8} \vee z = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{9\pi}{8} \vee z = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{13\pi}{8}$$

d) Há tendência neste caso a dizer que $z = 1 + 2i$ e … «ponto final», o que não está certo.

É um facto que uma solução é $1 + 2i$, mas não é a única. As soluções da equação são as raízes de índice 4 de $(1 + 2i)^4$, o que quer dizer que a equação tem quatro soluções.

As raízes não podem ser calculadas directamente pela fórmula de De Moivre, porque não conseguimos escrever $(1 + 2i)^4$ na forma trigonométrica. Mas sabemos que uma raiz é $1 + 2i$ e que as imagens geométricas das quatro raízes são vértices de um quadrado com centro na origem.
Ou seja, podemos obter as outras raízes multiplicando $1 + 2i$ por i, por i^2 e por i^3.

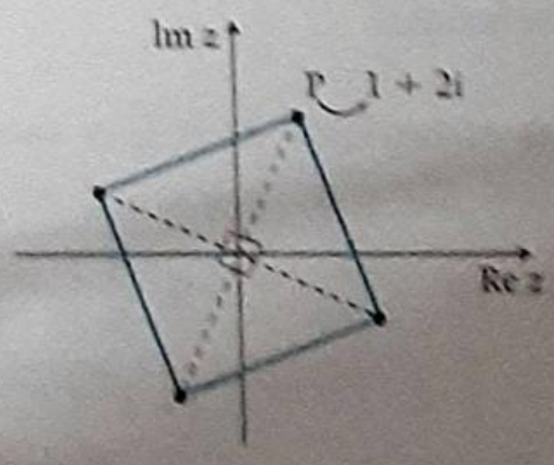
As soluções da equação são então:

$1 + 2i$

$(1 + 2i) \cdot i = -2 + i$

$(1 + 2i) \cdot i^2 = -1 - 2i$

$(1 + 2i) \cdot i^3 = (1 + 2i) \cdot (-i) = 2 - i$



Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

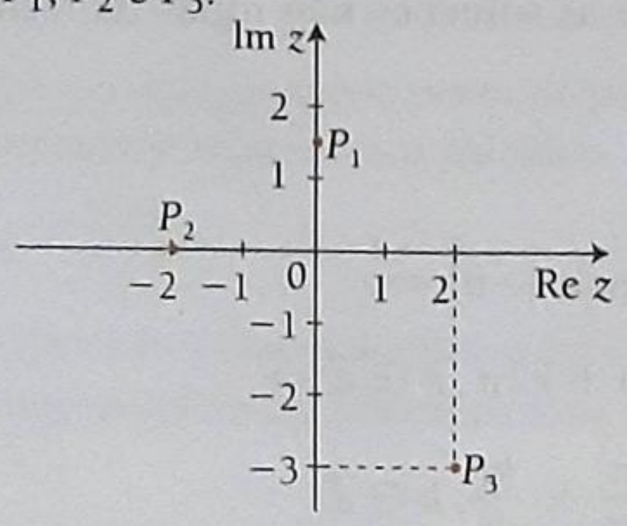
1. Represente, no plano de Argand, os afixos dos complexos:

$z_1 = -1 - i$ $\qquad$ $z_2 = -\frac{1}{2}i$

$z_3 = \frac{7}{3}i + \sqrt{5}$ $\qquad$ $z_4 = \bar{z}_1$

$z_5 = -3z_2$

2. Apresente, na forma algébrica, os complexos de afixos P_1, P_2 e P_3.



3. Considere uma família de números complexos

$z_k = (\sqrt{2}k - 1) + \left(\frac{k^2}{5} - 1\right)i,\ k \in \mathbb{Z}$

Determine o(s) valor(es) do parâmetro k de modo que:

a) z_k seja número real.

b) z_k seja um imaginário puro.

c) Re z_k = Im z_k

4. De um determinado número complexo sabe-se que:

- O coeficiente da parte imaginária é o dobro da parte real.
- O seu módulo é 1.

Escreva, na forma algébrica, o número complexo referido.

5. Dado o complexo $2 + i$, o seu simétrico é dado por:

A. $-2 - i$ $\qquad$ B. $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$

C. $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ $\qquad$ D. $2 - i$

6. Determine os complexos z e z', sabendo que:

- Re z = 2 Im z.
- Im z = −Re z = −3.
- $z + z'$ é um número real.

7. Calcule:

a) i^{50}

b) $i^{38} \cdot i^7 + i^{402}$

8. Dados os números complexos:

$\omega = 2 - \frac{5}{2}i$ $\qquad$ $v = -\sqrt{10}$

$z = 9i - 9$

Indique para cada um deles:

a) A parte real.

b) A parte imaginária.

c) O conjugado.

d) O módulo.

e) O simétrico.

9. Considere os números complexos:

$z_1 = 2a - i$ e $z_2 = (a + 2) + (b - 3)i$

com a e b números reais. Determine a e b, de modo que:

a) $z_1 = z_2$

b) $z_2 = \bar{z}_1$

10. Considere o número complexo

$p = -3 + 2i$

a) Represente-o no plano de Argand pelo vector correspondente.

b) Efectue geometricamente as operações:

b1) $-2p$ $\qquad$ b2) $\bar{p}$

b3) $-ip$ $\qquad$ b4) $3\bar{p} - ip$

11. Considere os números complexos:

$v = 3\pi - i$ $\quad$ $u = \sqrt{3}i - \pi$ $\quad$ $\omega = i$

Calcule:

a) $2v - \sqrt{3}u$

b) $\bar{u} \cdot \frac{1}{3}\bar{v}\, i\omega$

c) $2\sqrt{3}i - \omega^{15}(u - v)$

Scanned by TapScanner

Exercícios propostos

12. Considere os complexos:

$r_1 = 3 - 2i \qquad r_2 = \dfrac{-2i}{i - 2}$

Calcule:

a) $\overline{3 + 2i}$

b) $\overline{r_1 + r_2}$

c) $(r_2 - \bar{r}_2) : (r_1 + \bar{r}_1)$

13. Sejam ω e z dois números complexos quaisquer na forma algébrica. Mostre que:

a) $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z \cdot i$

b) $\overline{z + \omega} = \bar{z} + \bar{\omega}$

c) $\overline{z \cdot \omega} = \bar{z} \cdot \bar{\omega}$

14. Represente na forma algébrica cada um dos números complexos:

a) $2\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right)$

b) $3\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{cis}(-8\pi)$

d) O complexo de módulo 10 e argumento $-\dfrac{\pi}{4}$.

15. Represente na forma trigonométrica os números complexos seguintes:

a) $\dfrac{7}{2}$ b) $-3i$

c) $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ d) $-\dfrac{i}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

16. Considere os complexos:

$z_1 = 1 - i \qquad z_2 = \sqrt{3}i + 1 \qquad z_3 = \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}$

Represente na forma trigonométrica:

a) $\bar{z}_1$ b) z_2

c) $\dfrac{z_3}{z_1}$ d) $z_2 \cdot z_3$

e) $-|z_2| \times \dfrac{1}{z_3}$

17. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações seguintes:

a) $2z^2 - 3 = 0$

b) $5z^2 + 10 = 0$

c) $z^2 + z = -1$

18. Calcule as raízes:

a) Quadradas de $-i$ e de $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

b) Cúbicas de $6i$.

c) Quartas de -1.

d) Quintas de $4i - 4$.

e) Sextas de 1.

Exercícios de Escolha Múltipla

19. A igualdade $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2)$:

A. Nunca é verdadeira.
B. É verdadeira para todos os complexos.
C. Só é verdadeira se z_1 e z_2 forem reais.
D. Só é verdadeira se z_1 ou z_2 forem reais.

20. A igualdade $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$:

A. Nunca é verdadeira.
B. É verdadeira para qualquer complexo z.
C. É verdadeira se e só se z é um imaginário puro.
D. Só é falsa se z é real.

21. $(1 - i)^2$ é igual a:

A. 2 B. 0 C. $-2i$ D. $(1 + i)^2$

22. Seja z um número imaginário. O conjugado de $z + 1$ é:

A. $z - 1$ B. $1 - z$
C. $z + 1$ D. $z - 1$

23. O inverso do número $2 + 2i$ é:

A. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$ B. $-2 - 2i$

C. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$ D. $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\,i$

24. Sejam $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i\sqrt{2}$ dois números complexos. Sendo $\omega = \dfrac{z_2}{(z_1)^3}$, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

A. $\omega = \dfrac{1}{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}$ iB. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{4}$

C. $\omega = \dfrac{1}{2} \operatorname{cis} \dfrac{7\pi}{4}$ iD. $\omega = \dfrac{1}{2} \operatorname{cis} \dfrac{2\pi}{3}$

Scanned by TapScanner

Os números

A obra que exerceu influência decisiva para a introdução na Europa do sistema de numeração hindu foi o «*Liber Abacci*» (o livro dos árabes) acabado em 1202. O seu autor, *Leonardo de Pisa*, mais conhecido por *Fibonacci* (da família dos *Bonacci*), era filho dum mercador de Pisa, uma das poderosas cidades comerciais dos séculos XII e XIII.

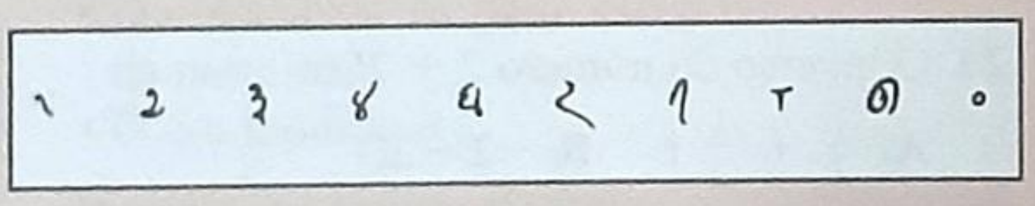
Desde muito jovem visitou o Oriente e o Norte de África onde o novo sistema de numeração já era largamente usado.

Ao longo das suas viagens conheceu a obra de *Al-Khwarizmi* (séc. IX) e assimilou numerosas informações aritméticas e algébricas que compilou no seu primeiro livro.

Escreveu depois «*Practica Geometriae*» onde, analogamente, descreve as suas recolhas sobre Geometria e Trigonometria.

Mas *Fibonacci* não foi apenas um compilador, pois estes livros contêm muitos exemplos não encontrados em documentos árabes. Além de que outra obra sua «*Liber quadratorum*» (Dos números quadrados) representa o primeiro avanço do mundo ocidental em Aritmética depois de *Diofanto* (séc. III).

O *Liber Abacci* que, apesar do nome, trata de tudo menos de ábaco, como a seguir se entenderá, começa assim:



«Estes são os novos símbolos dos indianos: Com eçes e com o sinal 0, que em árabe se chama zephirum, qualquer número pode ser escrito como a seguir demonstra.»

É importante lembrar que, embora o novo sistema de numeração já fosse conhecido no Ocidente desde o séc. XI, foi muito difícil desenraizar da prática corrente a numeração romana (ou a grega no Império Bizantino); é que a maior parte dos cálculos eram realizados com ábacos (quadros de madeira com esferas móveis) e só os resultados tinham de ser registados por escrito; e para isso a numeração romana (ou a grega) eram adequadas. A «guerra» entre os «abacistas» que queriam continuar com as numerações clássicas e os «algoritmistas» que defendiam o sistema hindu, melhorado por *Al-Khwarizmi*, arrastou-se durante séculos.

É espantoso que, em 1299, a cidade de Florença ainda publicou um édito proibindo o uso dos algarismos indo-árabes no comércio, porque «tornavam as falsificações demasiado fáceis». Este édito mostra, simultaneamente, que o novo sistema de numeração estava a divulgar-se, o que se deve ao livro fundamental de *Fibonacci*, entretanto revisto e melhorado em 1228.

Ao longo da escolaridade foi-se ampliando o conceito de número, à semelhança do que aconteceu na História da Matemática ao longo dos séculos (números naturais, fraccionários, negativos, irracionais). E, ampliando o conceito de números, alargaram-se as possibilidades de cálculo algébrico.

Vais agora conhecer um novo episódio dessa evolução: a ampliação do conjunto dos números reais para o dos números complexos ou imaginários. A designação de números imaginários pode criar a ideia de que estes números não existem. A natureza da sua existência é a mesma da dos outros números: todos são uma construção matemática.

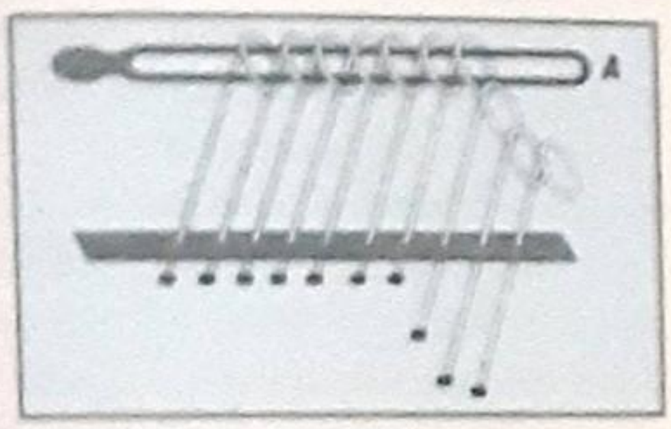
Esta nova ampliação veio responder a problemas levantados pela resolução de equações, quando conduzem a raízes quadradas de números negativos. No entanto, e ao contrário do que seria natural supor-se, as raízes quadradas de números negativos não surgiram a propósito da resolução de equações do 2.º grau. Foi ao resolver equações do 3.º grau que, pela primeira vez, se admitiram raízes quadradas de números negativos.

Scanned by TapScanner

Combinatória e Probabilidades

Durante toda a História da evolução da ciência Matemática, muitos matemáticos famosos ou desconhecidos, interessaram-se pela análise e invenção de jogos.

No séc. XVI, por exemplo, Girolamo Cardano inventou um jogo constituído por vários anéis, como mostra a figura.



O objectivo do jogo era retirar todos os anéis da barra em que se encontram colocados. Só o primeiro anel pode ser retirado sem problemas; para retirar qualquer outro é necessário que o anel mais próximo deste, do lado de *A*, esteja colocado na barra e que todos os outros anéis, do lado de *A*, estejam fora da barra (se existirem *n* anéis é necessário deslocar anéis:

$\frac{2^{n+1}-1}{3}$ vezes, se *n* for ímpar, e $\frac{2^{n+1}-2}{3}$ vezes, se *n* for par.)

Edouard Lucas, o inventor do conhecido jogo das Torres de Hanói, foi um dos entusiastas de jogos que chegou a uma das mais belas resoluções do enigma de Cardano.

Apesar de ser insolúvel, o problema levou a importantes trabalhos de combinatória.

Outro dos problemas famosos de Euler é o das Pontes de Königsberg que deu origem à Teoria de Grafos e à Topologia.

Jacques Bernoulli (1654-1705)

Começando a ser conhecido, o novo domínio das Matemáticas despertou o interesse de muitos matemáticos e físicos, com destaque para o suíço Jacques Bernoulli que escreveu uma obra extensa sobre a Teoria das Probabilidades *Ars Conjectandi* – A Arte de Conjecturar – a qual só foi publicada em 1713 depois da sua morte.

É nesta obra que aparece a «Lei dos grandes números» ou «Teorema de Bernoulli».

Resolve vários problemas de probabilidades, estuda combinações, permutações e a distribuição binomial. É a primeira grande obra sobre Probabilidades. *De ratiociniis in ludo alleae* de Huygens não passa de breve introdução.

Para além de Pascal, Cardano e Tartaglia, cujos trabalhos foram decisivos para o desenvolvimento da Combinatória e das Probabilidades, há que salientar a contribuição de Laplace.

Pierre Laplace (1749-1827)

Pierre-Simon Laplace nasceu em França em 1749, foi professor e companheiro de actividades cívicas e políticas de Napoleão Bonaparte. No entanto, este retirou-lhe o lugar de chanceler do Senador porque «ele trouxe para o governo o espírito do infinitamente pequeno».

Os seus trabalhos, na área da Astronomia e da Matemática, justificam que alguns historiadores o apelidem de «Newton francês».

Depois do notável *Tratado de Mecânica Celeste*, publicou, em 1812, a *Teoria Analítica das Probabilidades* que fez avançar este ramo da matemática com contributos inovadores, envolvendo o uso de Análise Matemática de alto nível.

Os problemas envolvendo contagens e geometria também têm proporcionado interessantíssimas discussões ao longo do tempo. Por exemplo, já no século XX, Piet Hein criou o problema dos Cubos Soma. Pretendia-se construir um cubo de $3 \times 3 \times 3$ com 7 peças específicas, o que pode ser feito, imagine-se, de 230 maneiras diferentes!

Scanned by TapScanner

Notas históricas

Cálculo infinitesimal

O notável progresso que a Ciência e a Tecnologia experimentaram no século XX foi possível, em grande parte, graças ao desenvolvimento do Cálculo Integral.

Estes «Cálculos», que constituem os dois principais ramos da Análise Infinitesimal, são um poderoso instrumento para resolver uma grande variedade de problemas nos domínios da Física, da Engenharia, da Astronomia, da Biologia, das Ciências Sociais... e de muitas outras áreas.

O conceito central do Cálculo Infinitesimal é o de limite duma função. O conceito de limite serve de ponte entre a Álgebra, a Geometria e a Análise. Por sua vez, o conceito de limite depende do de infinitésimo.

Compreende-se que as investigações sobre os infinitésimos se tenham multiplicado desde o início do séc. XVII.

De facto, o estudo dos movimentos iniciados na Idade Média não dispunha de meios para:

– Obter a velocidade instantânea ou a aceleração de um projéctil num dado instante do seu movimento (por exemplo, não se pode dividir o espaço percorrido pelo tempo gasto quando estas quantidades são praticamete nulas, pois não teria sentido dividir 0 por 0).

– Obter o declive da recta tangente a uma curva num ponto, necessário para conhecer a direcção do movimento nesse ponto da trajectória.

– Resolver problemas de máximos e de mínimos que emergem do estudo da curva descrita por um projéctil (uma bala de canhão, por exemplo, do estudo dos movimentos dos planetas...).

Ora, todas estas noções – velocidade e aceleração instantânea, declive da recta tangente a uma curva num ponto, determinação de máximos e de mínimos – estão basicamente ligados à noção de derivada cuja definição se apoia no conceito de limite.

Estes conceitos constituem tema de estudo do cálculo diferencial, do qual este ano se está a fazer uma primeira abordagem.

Da mesma forma foi necessário calcular, por exemplo, o comprimento de uma trajectória, calcular áreas de regiões limitadas por curvas, calcular volumes...

Nestes casos é a noção de integral (que não estudamos aqui) que vai permitir resolver os problemas. Estas matérias constituem temas de estudo do cálculo integral.

A definição de integral também se apoia na noção de limite.

No séc. XVII, dois homens de génio, Isaac Newton e Gottfried Leibniz, contribuíram de forma decisiva para que a Matemática viesse a experimentar avanços extraordinários ao criarem, separadamente um do outro, o Cálculo Infinitesimal.

Estes dois grandes matemáticos tiveram formação e trajectórias bem diferentes.

Enquanto Newton, fundador da Mecânica Clássica, era matemático e físico profissional, professor em Cambridge e tinha acesso às melhores fontes da Ciência do seu tempo, Leibniz impregnado de uma sólida filosofia escolástica, era filósofo, historiador, seguiu a carreira diplomática e foi, no desenvolvimento das Matemáticas, tal como Pascal, um amador de génio.

Isaac Newton (1642-1727)

Nasceu no dia de Natal de 1642 em Woolsthorpe no condado de Lincoln em Inglaterra.

Em 1965 apareceu um manuscrito de Newton enunciando a fórmula do desenvolvimento do binómio de expoente qualquer e lançando os primeiros fundamentos do seu método dos fluentes e das fluxões (método equivalente ao cálculo que Leibniz, seu contemporâneo, desenvolve, embora por outra via) pelo qual calcula «derivadas» e funções.

A grande obra de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londres 1689, é um marco muito importante na história das Ciências. Nele é anunciado a lei da atracção universal e definem-se os princípios da Mecânica Racional que haveriam de reger toda a Física dos séc. XVIII e XIX, até ao advento da Relatividade. Nessa obra são indicadas, de passagem, diversas teorias geométricas e analíticas muito fecundas.

No dizer de Einstein, «Newton mostrou o caminho ao pensamento, ao estudo e à formação do Ocidente, como nenhum outro soube fazer antes».

Scanned by TapScanner

Gottfried Leibniz (1646-1716)

Nasceu em Leipzig onde o pai era professor de Moral na Universidade.

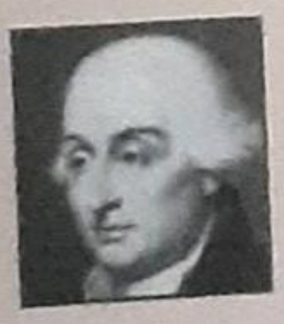
Após os estudos de Direito e de Filosofia, integrou uma missão diplomática à corte de Luís XIV de França. Durante essa visita (1672-1676) conheceu o físico e matemático C. Huygens que o iniciou no estudo das obras de Cavalieri, Roberval Pascal, Descartes, Arquimedes, Apolónio, Gregory e Wallis.

Muito ocupado com a actividade diplomática, dispunha de pouco tempo para escrever longos tratados de Matemática. Por isso, publicou o seu «Cálculo Diferencial» de forma fragmentada, numa séria de artigos breves aparecidos a partir de 1684 na *Acta Eruditorum*.

No dizer do matemático L'Hopital, «Leibniz, esse sábio geómetra começou onde os outros tinham ficado. O cálculo levou-o a áreas até à data desconhecidas: fez descobertas que espantaram os mais hábeis matemáticos do tempo».

O matemático suíço Bernoulli foi dos primeiros a aperceber-se da beleza e da importância do novo cálculo para o qual deram valiosas contribuições.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)



Lagrange foi também um dos mais notáveis matemáticos do século XVIII.

Era italiano de nascimento, francês de ascendência e alemão por adopção.

Foi este matemático que utilizou pela primeira vez a notação $f'(x)$, $f''(x)$, ..., para representar as sucessivas derivadas de uma função $f(x)$.

Bernard Bolzano (1781-1848)

Natural de Praga (actual República Checa), foi filósofo, matemático e teólogo. Apesar de ser padre, as suas ideias teológicas eram mal vistas pela Igreja, pois era considerado um livre pensador.

Bolzano foi um dos pioneiros de uma completa formalização de Matemática, contrariando a tendência, predominante até finais do século XVIII, em que a utilização da intuição dava lugar a diversos enganos. Apresentou definições rigorosas de «função contínua», de «derivada de uma função», de «relações entre a derivabilidade e a continuidade de uma função». No entanto, a sua obra matemática foi injustamente ignorada no seu tempo.

Ideias semelhantes foram desenvolvidas por Cauchy (1789–1857) na mesma época embora por pura coincidência. Cauchy chegou a viver em Praga, onde Bolzano viveu, mas não há qualquer referência a que se tenham encontrado. É de salientar que situação idêntica aconteceu com Newton e Leibniz na descoberta do conceito de «derivada».

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy, matemático, nasceu e viveu no período da Revolução Francesa, conseguindo sobreviver ao clima de terror espalhado por toda a França.

Os seus estudos foram brilhantes. Terminado o curso de Engenharia Civil, obteve um cargo importante em Chebourg como engenheiro militar na construção de portos e fortificações.

Passados três anos, tornou-se professor na Faculdade de Ciências, no Colégio de França e na Escola Politécnica, em Paris.

Cauchy foi o primeiro matemático que muito contribuiu para o esclarecimento da noção de «limite». Os métodos que ele introduziu assinalam o período de rigor que caracteriza a matemática actual.

O conceito de «limite», segundo Cauchy, é definido do seguinte modo:

Quando os sucessivos valores atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um dado valor fixo, de modo que acabam por diferir dele tão pouco quanto se queira, diz-se que tal valor é o limite de todos os outros.

Cauchy estendeu ainda a análise ao campo das funções de variável complexa, cujo interesse e utilidade é hoje de grande importância pelas suas aplicações à ciência e à técnica.

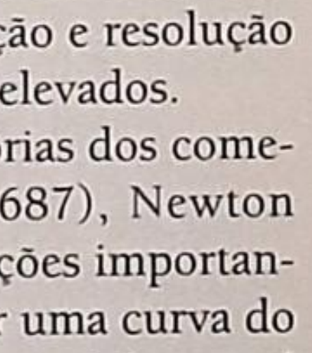
Scanned by TapScanner

Integral indefinido

Johann Bernoulli
(1667-1748)

O termo integral, como usamos no cálculo, foi atribuído por Johann Bernoulli (1667-1748) e publicado primeiramente por seu irmão mais velho Jakob Bernoulli (1654-1705). Principalmente como uma consequência do poder do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton e Leibniz, integrais eram considerados simplesmente como derivadas «inversas». Aproximadamente ao mesmo tempo em que a tabela de integrais de Newton tinha sido publicada, Johann Bernoulli desenvolveu procedimentos matemáticos para a integração de todas as funções racionais, o qual chamamos agora de método das fracções parciais. Estas regras foram resumidas elegantemente por Leonhard Euler (1707-1783) no seu trabalho enciclopédico de três volumes sobre cálculo (1768-1770). Estes esforços estimularam o aumento do interesse durante o século XVIII na factoração e resolução de equações polinomiais de graus elevados.

Enquanto descrevia as trajetórias dos cometas no *Principia Mathematica* (1687), Newton propôs um problema com implicações importantes para o cálculo: «Para encontrar uma curva do tipo parabólico (isto é, um polinómio) a qual deve passar por qualquer número de pontos dados», Newton redescobriu a fórmula de interpolação de James Gregory (1638-1675); hoje, é chamada de fórmula de Gregory-Newton, e em 1711, ele ressaltou a sua importância: «Assim as áreas de todas as curvas podem ser aproximadas à área da parábola (polinómio) será quase igual à área da figura curvilínea ... a parábola (polinómio) pode sempre ser quadrada geometricamente por métodos conhecidos em geral (isto é, usando o Teorema Fundamental do Cálculo)». O trabalho de interpolação de Newton foi estendido em épocas distintas por Roger Cotes (1682-1716), James Stirling (1692-1770), Colin Maclaurin (1698-1746), Leonhard Euler e outros. Em 1743, o matemático autodidacta Thomas Simpson (1710-1761) encontrou o que se tornou um caso especial, popular e útil das fórmulas de Newton-Cotes para aproximar um integral à Regra de Simpson.

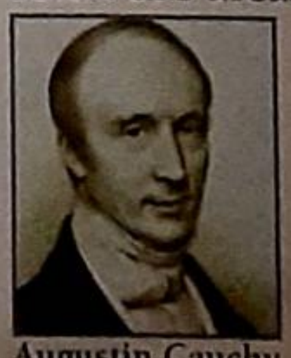

Colin Maclaurin
(1698-1746)

Euler identificou as funções com expressão analítica, que pensou numa função contínua como sendo definida apenas por uma única fórmula em todo o seu domínio. A ideia moderna de uma função contínua, independente de qualquer fórmula, foi iniciada em 1791 por Louis-François Arbogast (1759-1803): «A lei de continuidade consiste em que uma quantidade não pode passar de um estado (valor) para outro (valor) sem passar por todos os estados intermediários (valores)...». Esta ideia tornou-se rigorosa num panfleto de 1817 por Bernhard Bolzano (1781-1848) e é conhecida agora como o Teorema do Valor Intermediário. Funções descontínuas (no sentido moderno) foram forçadas na comunidade matemática e científica por Joseph Fourier (1768-1830) no seu famoso Teoria Analítica do Calor, 1822).

Quando Augustin Louis Cauchy (1789-1857) assumiu a reforma total do cálculo para os seus alunos de engenharia na *École Polytechnique* na década de 1820, o integral era uma das suas pedras fundamentais:

No cálculo integral, pareceu-me necessário demonstrar com generalidade a existência dos integrais ou funções primitivas antes de tomar conhecidas as suas diversas propriedades. Para alcançar este objectivo, foi necessário estabelecer no começo a noção de integrais tomados entre limites dados ou integrais definidos.

Cauchy definiu a integral de qualquer função contínua no intervalo $[a, b]$ sendo o limite da soma das áreas de rectângulos finos. A sua primeira obrigação era provar que este limite existia para todas as funções contínuas sobre o intervalo dado. Infelizmente, embora Cauchy tenha usado o Teorema do Valor Intermediário, não conseguiu o


Augustin Cauchy
(1789-1867)

Scanned by TapScanner

seu objectivo porque não observou dois factos teóricos cruciais. Ele não tinha noção das falhas lógicas no seu argumento e prosseguiu para justificar o Teorema do Valor Médio para Integrais e para provar o Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas. Niels Henrik Abel (1802-1829) também apontou certos erros delicados ao usar o integral de Cauchy para integrar qualquer termo de uma série infinita de funções.

Dirichlet também é responsável pela definição moderna de função (1837). Em 1855, Dirichlet sucedeu a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) como professor na Universidade de Göttingen. Por sua vez, Georg F. B. Riemann (1826-1866) sucedeu a Dirichlet (1859) em Göttingen. Riemann generalizou a definição de Cauchy do integral para funções arbitrárias no intervalo $[a, b]$, e o limite das somas de Riemann é a formulação no texto. Imediatamente, Riemann perguntou: «em que casos uma função é integrável?». A maior parte do desenvolvimento da teoria de integração foi subsequentemente verificada por Riemann e outros, mas ainda havia dificuldades com integrais de séries infinitas que não foram trabalhados até ao início do século XX.

Georg F. B. Riemann
(1826-1866)

Números complexos

Aproximadamente em 850 d.C. Mahavira afirma: «...como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada». Bhaskara (1114-1185 aprox.) afirma: «O quadrado de um afirmativo [positivo] é um afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo, pois ele não é um quadrado».

O matemático Luca Paccioli (1445-1514) publica em 1494 que a equação $x^2 + c = bx$ é solúvel se $\left(\frac{b^2}{4}\right) \geq c$ e o francês Nicola Chuquet (1445-1500) faz observações semelhantes sobre «soluções impossíveis» em publicação de 1484.

Girolamo Cardano (1501--1576) considerava que o aparecimento de raízes quadradas de números negativos na resolução de um problema indicava que o mesmo não tinha solução.

Girolamo Cardano
(1501-1576)

O primeiro exemplo de raiz quadrada de número negativo foi publicado, aproximadamente, em 75 d.C. por Heron, num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide onde surge o número $\sqrt{81-144}$, que não provocando problemas de maior o trocou por $\sqrt{144-81}$.

À volta do ano 275 d.C., Diophanto ao resolver um problema depara-se com a equação:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0,$$

cujo discriminante é negativo, não tendo assim raízes reais e portanto não vendo necessidade de dar sentido a $\sqrt{-167}$.

Não podemos esquecer que nesta altura (sécs. XVI e XVII) nem os irracionais nem os negativos tinham adquirido esta *dignidade numérica*. Qualquer matemático desta altura classificaria as equações do tipo $x^2 + 1 = 0$ ou $x^2 - 2 = 0$ como absurdas, obviamente impossíveis, sem solução, não perderiam tempo com elas. Os números negativos e os números complexos apareceram mais ou menos simultaneamente.

Um grande passo no estudo dos números complexos, $z = a + bi$, foi a sua representação visual. O dinamarquês Caspar Wessel, em 1797, foi o primeiro a representar geometricamente os números complexos, estabelecendo uma correspondência bijectiva entre números complexos e pontos do plano, que, de certa forma, segue a linha da representação dos números reais numa recta.

Caspar Wessel

Esta representação de Wessel vai um pouco mais além da simples representação cartesiana, pois toma um eixo (regra geral o eixo das ordenadas) como o eixo onde se encontram todos os imaginários puros. Este trabalho de

Scanned by TapScanner

Wessel foi votado ao esquecimento, por ter sido publicado em dinamarquês, e só anos depois, à volta de 1806, agora publicado em francês por Jean Robert Argand que criava a mesma representação cuja glória, indevida, ficou ligada ao seu nome até aos nossos tempos.

Ao homem de hoje as raízes quadradas de números negativos não provocam nenhuma dificuldade de aceitação, ao contrário dos algebristas do séc. XVI que, sugestionados pelo aspecto, as consideravam como um artifício e algo fora das possibilidades numéricas, e não lhes conferiam qualquer *dignidade numérica*. Este modo de ver instalou-se de tal maneira no espírito dos algebristas que, já no séc. XVII, Descartes chamou imaginários a estes novos números.

As raízes quadradas de números complexos aparecem na resolução de cúbicas e não na resolução de equações de segundo grau tal como, por vezes, falaciosamente, se considera. É a obra de Cardano, *Ars Magna*, que despoleta o aparecimento dos números imaginários. Esta obra basicamente tratava, entres outros assuntos, das resolventes da cúbica e da quártica. Consideremos o seguinte problema constante da *Ars Magna:* «Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40.». A resolução deste problema levou Cardano a considerar as expressões $5 + \sqrt{5 -}$ e $5 - \sqrt{5 -}$ como soluções do problema e tal como pensou: «Pondo de lado a tortura mental envolvida» não lhes dando significado. A partir de um trabalho de Bombelli os números complexos começaram a ser usados, apesar de se duvidar da sua existência.

Em 1629, Albert Girard utiliza, efectivamente, o símbolo $\sqrt{-1}$ quando enuncia as relações entre raízes e coeficientes de uma equação. O símbolo *i* foi usado pela primeira vez em 1794 por Leonhard Euler para representar $\sqrt{-1}$, tornando-se aceite após o seu uso por Gauss, em 1801.

Leonhard Euler

Os termos real e imaginário foram empregues pela primeira vez em 1637 por René Descartes; a expressão número complexo foi introduzida por Gauss em 1832.

Os números complexos são muito úteis na Aerodinâmica para a estabilização do voo, na Electrónica, na Electricidade, na análise de circuitos de corrente alternada.

Os algoritmos recursivos no plano complexo criam na maioria das vezes figuras invariantes por escala denominadas fractais. Estas formas geométricas de dimensão fraccionária servem como ferramenta para: descrever as formas irregulares da superfície da Terra; modelar fenómenos, aparentemente imprevisíveis (teoria do caos), de natureza meteorológica, astronómica, económica, biológica, etc. Von Koch (1904) e Julia (1910) foram os pioneiros no nascimento dessa nova matemática (ou será nova arte?).

Scanned by TapScanner

Soluções

Unidade 1: Módulo pp. 8 a 17

1 a) 2 b) 2 c) 8 d) 7
e) −3 f) 10

3 a) 3 b) 3 c) 1

4 a) c b) $D = \mathbb{R}$, $D'_g = \mathbb{R}^+_0$, $x = 0$
Decrescente se $x \in]-\infty, 0[$
Crescente se $x \in]0, +\infty[$
Sempre positiva.
c) $D_i = \mathbb{R}$, $D'_i = \mathbb{R}^-_0$, $x = 0$;
Crescente se $x \in]-\infty, 0[$
Decrescente se $x \in]0, +\infty[$
Sempre negativa.

10. a) $S = \{1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}$
b) $S = \{-5, 5\}$ c) $S = \{-1, 1\}$
d) $S = \{2, 4\}$ e) $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$
f) $S = \{-14, 4\}$

11. a) $S =]2, 8[$ b) $S = \left[\frac{2}{21}, \frac{4}{21}\right]$

12. a) $S = \left]-\infty, -\frac{53}{20}\right[\cup \left]\frac{47}{20}, +\infty\right[$
b) $S = \left]-\infty, -\frac{21}{10}\right] \cup \left[\frac{29}{10}, +\infty\right[$

13. a) $S =]-2, -1]$ b) $S =]-8, -2[$

14. a) $S =]1, 5[$ b) $S =]-4, 10[$
c) $S = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ d) $S = \left]-\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right[$

15. a) $S = \{1, 5\}$ b) $S = \{-2, 4\}$
c) $S = \{-1, 7\}$ d) $S = \{-3, 7\}$

16. a) $S =]-13, -3[$
b) $S = \left]-\infty, \frac{17}{4}\right[\cup \left]\frac{23}{4}, +\infty\right[$
c) $S = [-6, 10]$
d) $S = \left]-\infty, -\frac{19}{2}\right] \cup \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right[$

Exercícios propostos pp. 16 e 17

1. a) $A =]0, +\infty[$ b) $B =]-\infty; -1, 7]$
c) $C = \left]-1, \frac{3}{2}\right]$ d) $D =]-4, -3[$
e) $E =]-1, 1[$ f) $F = [-2{,}5; 2{,}5]$
g) $G =]-5, 7[$ h) $H = [-3, -1]$

2. a) $\left]-4, +\frac{3}{2}\right[$ b) $]-4; -4{,}3[$
c) $\left]0, +\frac{3}{2}\right[$ d) $\left]\frac{1}{6}, +\frac{5}{3}\right[$

3. a) $S = \{\pm 7\}$ b) $S = \varnothing$
c) $S = \{\pm 2\sqrt{2}\}$ d) $S = \{-11, 3\}$
e) $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ f) $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$
g) $S = \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$ h) $S = \{0, 3\}$
i) $S = \left\{-1, \frac{3}{5}\right\}$ j) $S = \left\{-\frac{7}{9}, \frac{11}{3}\right\}$
k) $S = \{-1, 5\}$

4. a) $S =]-5, 5[$ b) $S = [-3, 3]$
c) $S =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$ d) $S = \{0\}$
e) $S = \varnothing$ f) $S =]1, 5[$
g) $S = \left[-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right]$ h) $S =]9, 11[$
i) $S = \mathbb{R}$ j) $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$
k) $S = \left]-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty\right[$

5. a) $S = \varnothing$
b) $S = \left]-\infty, -5\right] \cup \left]3, +\infty\right[$
c) $S =]2; 4]$ d) $S = \varnothing$
e) $S = \left]\frac{5}{2}, 5\right]$

6. a) 13 b) 8 c) 6 d) 0 e) 0 f) 72

7. a) $|5b|$ b) $|6p^3q^2r|$
c) $|0{,}9p^2q^5r|$ d) $|a - b|$
e) $|p - 3q|$ f) $|p^2 + p^2| = p^2 + q^2$

8. a) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right[$
b) $S = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[2, +\infty\right[$

9. a) $\varnothing$ b) $S = \{-2; 4\}$
c) $S = \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$ d) $S = \left\{4, \frac{9}{2}\right\}$
e) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $S = \left\{-6, \frac{2}{5}\right\}$
g) $S = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$ h) $S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$

10. a) $S = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ b) $S = [-10, 10]$
c) $x \in \mathbb{R}$ d) $S =]-6, -4[$
e) $S = [0, 6]$ f) $S = [-4, 8]$
g) $S = \left[\frac{4}{3}, 2\right]$ h) $S = \left]-\frac{4}{3}, 2\right[$
i) $S = \varnothing$
j) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$
k) $S =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[\cup]-1, 2[$

11. a) $S = \left]-\infty, \frac{11}{6}\right[$
b) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{6}\right]$

12. B.

13. B.

14. a) $f(x) = x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
b) $f(x) = x \in]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$
c) $f(x) = x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$
d) $f(x) = x \in]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$

Unidade 2: Cálculo combinatório e probabilidades pp. 18 a 43

1. 14 400
2. 72
3. 9 000
4. 18
5. 10 100
6. $n = 7$
8. 120
9. (a, b, c) ; (a, c, b)
(b, a, c) ; (b, c, a)
(c, a, b) ; (c, b, a)
10. a) 40 320
b) 1 440
11. a) 12 b) 8 c) 4
12. $\frac{74}{128}$
13. a) 72 b) 8 c) 136
14. 336
15. 120
16. ${}^9A_4 + 8 \cdot {}^8A_3 \cdot 4 = 13\,776$
17. 20 160
18. 220
19. 28
20. 60 060
21. 30
22. ${}^7C_0$ ${}^7C_1$ ${}^7C_2$ ${}^7C_3$ ${}^7C_4$ ${}^7C_5$ ${}^7C_6$ ${}^7C_7$ ${}^8C_8$
${}^8C_0$ ${}^8C_1$ ${}^8C_2$ ${}^8C_3$ ${}^8C_4$ ${}^8C_5$ ${}^8C_6$ ${}^8C_7$ ${}^8C_8$
1; 7; 21; 35; 35; 21; 7; 1
1; 8; 28; 56; 70; 56; 28; 8; 1
23. a) 6 b) 8 c) 2 d) 4
24. a) $n = 28$ b) $p = 48$
25. a) ${}^{16}C_3$ b) ${}^{20}C_7$ c) ${}^{49}C_{19}$

Scanned by TapScanner

26. a) $\frac{1\,024}{y^5}$, $\frac{5\,120\sqrt{y}}{y^5}$, $\frac{11\,520}{y^4}$, $\frac{15\,360\sqrt{y}}{y^4}$

b) x^5, $-5x^4y^2$, $10x^3y^4$, $-10x^2y^6$

27. a) $\frac{105}{32x^2}$ b) $\frac{7}{144}x^{15}$

28. $56x^2$

Exercícios propostos pp. 31 e 32

2. a) 210 b) 30 c) 5 040 d) 21 e) 9 900 f) 35 g) 1

3. a) $n = 11$ b) $n = 7 \vee n = 6$ c) $n = 7$ d) $n = 7$

4. 24

5. 18

6. 600

7. a) 300 b) 200

8. a) 180 b) 180 c) 204

9. 210

10. 252

11. a) 8 568 b) 3 360 c) 3 003

12. a) 10 b) 1

13. a) 210 b) 28

14. 240

15. 840

16. 73 440

17. a) 60 b) 24

18. a) 30

19. 90

20. 806 400

21. 350

22. 1 800; 352

23. ${}^{23}C_4 = 8\,855$

24. 144

25. $n = 9$ e $p = 5$

${}^7C_3 + {}^7C_4 + {}^8C_5 = {}^8C_4 + {}^8C_5 = {}^9C_5$

26. 35

27. 19 958 400

28. ${}^{46}A_9\ {}^{37}C_5 = {}^{46}C_5\ {}^{41}A_9$

29. ${}^{500}C_7\ {}^{493}A_5 = {}^{500}A_5\ {}^{495}C_7$

30. a) 658 008 b) 1 649 572

31. a) $x = 2 \vee x = 0$ b) $x = 9$ c) $x = 3$

32. a) $672x^3$

b) ${}^{10}C_2\ z^8\left(\frac{1}{2z}\right)^2 = 11{,}25\,z^6$

33. a) Sim. O 5.º termo é ${}^{12}C_4(-2)^4 = 7\,920$

b) A expressão geral dos termos é

${}^{12}C_k(-2)^k\ x^{\frac{12-3k}{2}}$ e

$\frac{12-3k}{2} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{8}{3} \notin \mathbb{N}$

34. C.

Probabilidades p. 33

29. a) Sair bola branca (B), Sair bola preta (P), Sair bola vermelha (V)

b) {B, P, V}

c) Sair bola branca ou preta ou vermelha,

d) Sair bola amarela (por exemplo).

30. a) {4, 5, 6}

b) {2, 4, 6}

c) Sair número ímpar.

31. a) $A \cap B = \{12, 24, 36\}$

b) $A \cup B = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 32, 36\}$

32. a) {1, 2, 3, 5}

b) {1}

c) Sair número par.

d) «sair número par» e «sair número 5».

33. a) 23 200; 33 600 b) 59,15%

34. a) 17; 2; 1 b) 0,85; 0,10; 0,05

36. a) $\frac{1}{2}$

b) $P(A) + P(B) = \frac{17}{12} > 1$

37. a) 0,8 b) 0,6

39. a) $P(A \cup B) = 0{,}16 + 0{,}24 = 0{,}40$

b) $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$

40. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

41. a) 792 b) $P = 0{,}4$

42. a) $P = \frac{1}{10}$

43. a) $P = \frac{1}{5}$ b) $P = \frac{9}{25}$ c) $P = \frac{2}{5}$

44. a) $P = \frac{3}{13}$ b) $P = \frac{2}{13}$ c) $P = \frac{4}{13}$

45. $P = \frac{3}{4}$

46. a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $P(1, 2, 3) = \frac{5}{8}$ d) $P(4, 5, 6) = \frac{5}{8}$ e) $P(3, 4, 5, 6) = \frac{3}{4}$

47. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{21}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{13}{14}$

Exercícios propostos pp. 42 e 43

35. a) $\{c_1c_2; c_1c_1, c_2c_1, c_2c_2\}$ onde c_1 é uma das faces e c_2 a outra face

b) 4

36. a) São, porque $A \cap B = \{3\} \neq \emptyset$, são, porque $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$

b) $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5\}$

c) $A \cup B = \{2, 3, 5, 6\}$

d) {6} – sair número 6

37. a) $f_r(A) = \frac{x}{n}$, $f_r(B) = \frac{y}{n}$

b) $f_r(\overline{A}) = 1 - \frac{x}{n}$

c) $f_r(A + B) = \frac{x}{n} + \frac{y}{n} = \frac{x+y}{n}$

38. a) Sair cara ou coroa.

b) Sair simultaneamente cara e coroa.

c) 1 d) 0 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

39. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

40. $P(A) + P(B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$ e $P(A \cap B) \geq 0$ logo $P(A) + P(B) \geq P(A \cup B)$

41. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 0

42. a) 0,002 b) 0,785

43. $P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

44. #C.P. = 36, #C.F. é o cardinal do conjunto {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}

$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

45. $P = \frac{{}^7C_4 \cdot {}^6C_4}{{}^{13}C_8} = \frac{525}{1\,287} \approx 0{,}4$

46. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{15}$

47. A.

48. $\frac{1}{6}$

49. $P = \frac{8}{35}$

50. $P = \frac{1}{5}$

51. $P = \frac{3}{5}$

52. $P = 0{,}05$

53. a) $P = 0{,}22$ b) $P = 0{,}39$

54. a) 252 b) $P = \frac{1}{15}$

55. 0,22

56. a) 24 b) $P = \frac{1}{12}$

57. a) $k = \frac{1}{12}$ b) $k = \frac{1}{3}$

58. 0,15

59. a) 0,36 b) 0,64 c) 0,14 d) 0,79 e) 0,43

Scanned by TapScanner

Unidade 3: Funções reais de variável real pp. 44 a 65

1. a) $D = \{50, 100, 150, 200, 250\}$
$D' = \{4, 8, 16, 20, 24\}$
b) Distância percorrida; consumo de gasolina.
c) 20 litros d) 150 km
e) 8 f) 250

2. a) $h(1) = 5$; $h(2) = 24$; $h(-1) = 3$; $h(-3) = 9$ b) $x = 0 \vee x = -4$

3. a) Sim b) Não

4. a) Monótona crescente
b) Monótona decrescente
c) Crescente: $x \in]-\infty, 0]$ e decrescente: $x \in [0, +\infty[$
d) Decrescente: $x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ e crescente: $x \in]0, 4[$

5. a) É

6. b) g não é injectiva.

7. a) $a > 0 \wedge b > 0$ b) $a < 0 \wedge b > 0$

8. a) • $D = D' = \mathbb{R}$
• Zero: $x = \frac{3}{2}$
• Monótona decrescente.
• Função injectiva.
• Positiva: $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$
• Negativa: $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$
• Não é par nem ímpar.
b) • $D = D' = \mathbb{R}$
• Zero: $x = 0$
• Monótona crescente.
• Positiva: $]0, +\infty[$
• Negativa: $]-\infty, 0[$
• É ímpar.
c) • $D = \mathbb{R}$ • $D' = \{-3\}$
Constante, sempre negativa.

9. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ b) $f(x) = -3x + 3$

10. $10 = 2a + b$

11. $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

12. a) $m > 3$ b) $m < 3$ c) $m = 3$

13. $k = 8$

14. $a = 2$

15. $y = -3x + 11$

16. a) $a > 0; \Delta > 0$ b) $a > 0; \Delta = 0$
c) $a < 0; \Delta < 0$

17. a) $(-1, -2)$ b) $(-1, -1)$

18. $x_2 = 10$

19. a) $m \in]0, +\infty[$ b) $m \in \left[\frac{1}{4}, +\frac{1}{12}\right]$

20. a) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$
b) $f(x) = \frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{7}{9}$

21. • $D_f = \mathbb{R}$
• $D'_f =]-\infty, 4]$
• f crescente se $x \in]-\infty, 1]$
• f decrescente se $x \in [1, +\infty[$
• Eixo de simetria: $x = 1$
• Não é par nem ímpar, não é injectiva, não é sobrejectiva.
• Negativa: $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
• Positiva: $]-1, 3[$
• Zeros: $x = -1$ e $x = 3$

22. a) Ímpar b) Ímpar
c) Nem par nem ímpar d) Par
e) Par f) Nem par nem ímpar

23. $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, b = 0, c \in \mathbb{R}$

24. a) $D_f = [0, 7]$ 25. a) $D_g = \mathbb{R}$

26. a) $D_f = D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
b) $f(1) = 1$, $g(2) = -1$, $f(3) = \frac{1}{3}$,
$g\left(\frac{1}{2}\right) = -4$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$
c) f e g são ímpares.
e) $D'_f = D'_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
f) São decrescentes no intervalo $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

27. a) $a = -3$, $b = -5$, $c = -4$

28. a) $a = 12$, $c = 3$

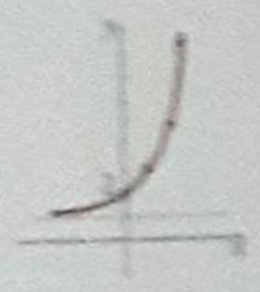
29. a) $D_{f-g} = D_{f+g} = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$
b) $(f - g)(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{x(x^2 - 2)}$
$(f + g)(x) = \frac{3x^2 + 2x - 4}{x(x^2 - 2)}$

30. a) $(h \cdot l)(x) = \frac{-2}{x + 1}$
$\left(\frac{h}{l}\right)(x) = -2x - 2$
b) $D_{f \cdot g} = D_{\frac{h}{l}} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

31. a) f e g são exponenciais porque têm a base constante e o expoente variável. h não é exponencial porque a base é variável e o expoente constante.
b) $\frac{23}{4}$

32. • $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$
• $D'_f = \mathbb{R}^+$; $D'_g = \mathbb{R}^+$
• f monótona crescente
• g monótona decrescente
• f injectiva, g injectiva
• f não é sobrejectiva, g não é sobrejectiva

33. a) $A = 1, a = 1, b = 4, B = 5$
b) $A = 2, a = 3, b = 5, B = -6$
c) $A = 1, a = -3, b = -1, B = 4$
d) $A = -1, a = 1, b = -1, B = 4$
e) $A = 1, a = 1, b = -2, B = 1$

34. a) ... 1 ... cima
b)

c) $y = 1$
d) $D'_f = [1, +\infty[$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$x = \log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

b) $D_f = \mathbb{R}^+$; $D'_f = \mathbb{R}$
c) f é injectiva e sobrejectiva, logo bijectiva, monótona decrescente, não é par nem ímpar.

36. a) $D_f =]-3, +\infty[$
b) $D_g =]0, +\infty[$
c) $D_h =]-\infty, 0]$
d) $D_k =]-\infty, -4[\cap [2, +\infty[$
e) $D_l =]-\infty, -1[\cup]1, 2]$

37. b) $D_g =]-2, +\infty[$; $D'_g = \mathbb{R}$
c) $x + 2 > 0$; $D_g =]-2, +\infty[$
d) ... 2 ... esquerda.

38. a) Através duma translação de 2 unidades para baixo.

39. a) g através duma translação de 8 unidades para baixo.
h através duma translação de 3 unidades para a direita.
b) $\mathbb{R}^+$

40. Ver páginas 58 e 59 do manual.

41. Ver páginas 60 e 61 do manual.

42. a) $D_g = [-1, 1]$, $D'_g = [0, \pi]$, monótona decrescente, nem é par nem é ímpar, é injectiva, não tem assimptotas.
b) $D_h = \mathbb{R}$, $D'_h =]0, \pi[$, monótona decrescente, nem é par nem é ímpar, é injectiva, assimptotas: A.H. $y = 0$ e $y = \pi$.

43. a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Scanned by TapScanner

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) π g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\frac{1}{2}$

i) $\frac{\pi}{3}$ j) 2006

44. a) $f(1) = 4$ b) $D'_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

45. a) $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+2} - 4$

d) $f^{-1}(x) = \log_2(x+2)$

e) $f^{-1}(x) = 4 + \log_2 x$

f) $f^{-1}(x) = 2^{x+1} + 2$

g) $f^{-1}(x) = \sqrt{10^x}$

46. a) 1 b) 1 c) 0 d) 4

47. a) 5 b) 5 c) 3 d) -3

e) $D_{fog} = \mathbb{R}_0^+$ f) $D_{gof} = \mathbb{R}_0^+$

48. a) 3 b) 0 c) 0 d) -3 e) 3

Exercícios propostos pp. 64 e 65

1. a) $a = 1, 2, \frac{1}{2}$ – monótona crescente

$a = -1, -2,$ – monótona decrescente

b) $b = -2, 0, 3$ – monótona crescente

c) Monótona crescente

d) Monótona decrescente

2. a) 45°; 63,4°; 26,6°; −45°; −63,4°

b) 45°; 45°; 45° c) 63,4° d) 26,6°

3. a) $a = 1$ e $b = 6$

b) $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $b = -3$

c) $a = \sqrt{3}$ e $b = -5 - \sqrt{3}$

d) $a = 2$ e $b = 0$

e) $a = -\frac{3}{5}$ e $b = -\frac{19}{5}$

f) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$

4. a) $x \in]-\infty, 1[\Rightarrow f$ é crescente;

$x \in]1, +\infty[\Rightarrow f$ é decrescente

b) Zeros: $x = -1$ e $x = 3$

c) $D'_f =]-\infty, 4]$

d) $x = 1$ e) $x \in \{0, 1, 2\}$

f) $a > 0$ g) $c = 3$

5. d) $D'_f = \mathbb{R}^+$; $D'_g =]-\infty, 4[$; $D'_h = \mathbb{R}^+$

6. d) $D_f = \mathbb{R}^-$ A.V.: $x = 0$

$D_g =]3, +\infty[$ A.V.: $x = 3$

$D_h =]2, +\infty[$ A.V.: $x = 2$

7. d) $D'_g = [-2, 2]$; ímpar; $P = 4\pi$

$D'_h = [-2, 4]$; par; $P = \pi$

$D'_k = [2, 4]$; $P = 2\pi$

8. a) $A = \pm 3, B = 0$ b) $A = \pm 1, B = 3$

c) $A = \pm 2, B = 6$ d) $A = \pm 2, B = 2$

e) $A = \pm 3, B = -2$

f) $A = \pm 995, B = 994$

9. a) $D_g = [-5, 0[$; $D'_g = [-1, 4[$

b) $D_g = [-2, 3[$; $D'_g = [-8, 2]$

c) $D_g = [-2, 3[$; $D'_g = [6, 11[$

d) $D_g = \left[-1, \frac{3}{2}\right[$; $D'_g = [-1, 4[$

e) $D_g = [-6, -1[$; $D'_g = [3, 8[$

f) $D_g = [-2, 3[$; $D'_g = [-8, 7[$

10. a) $x = 5$ b) $y = -7$

c) $x = -\frac{4}{3}$ d) $x = 6$

e) $x = 3$ e $y = 2$ f) $x = \frac{3}{2}$ e $y = 1$

11. $p = -3, q = 2$

13. a) $(fog)(x) = 3x - 9$

$(gof)(x) = 3x - 3$

b) $(fog)(x) = x^2 - 4x + 6$

$(gof)(x) = x^2$

c) $(fog)(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^3$

$(gof)(x) = \frac{1}{x^6+1}$

d) $(fog)(x) = \log_2(2^x + 1)$

$(gof)(x) = 2^{\log_2 x} + 1$

14. a) Par.

b) Não é par nem ímpar.

c) Não é par nem ímpar.

d) Ímpar.

15. a) Não é par nem ímpar d) $k = \frac{\pi}{2}$

17. b) f é par; $P = \pi$

g é par; $P = 2\pi$

18. a) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$

b) $f^{-1}(x) = \frac{4}{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$

c) $f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{2x-5}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$

$(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$

19. a) $-\sqrt{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$

20. $D_g = \mathbb{R}$; $D'_g =]-\pi, \pi]$

21. A fracção não está definida.

23. a) $D_g = \mathbb{R}$; Zeros: $x = \frac{1}{2}$

b) $f(1) \neq f(0)$

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - x$, $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}$ é sobrejectiva

Unidade 4: Função real de variável natural pp. 66 a 93

1. a) $a_1 = 3$; $a_2 = \frac{5}{2}$; $a_3 = \frac{7}{3}$; $a_4 = \frac{9}{4}$;

$a_5 = \frac{11}{5}$ $v_1 = 0$; $v_2 = -1$; $v_3 = 0$;

$v_4 = -1$; $v_5 = 0$

2. a) V b) V

3. a) $u_1 = 4$; $u_2 = 3$; $u_3 = \frac{5}{2}$; $u_4 = \frac{11}{5}$; $u_5 = 2$

b) Não é termo da sucessão pois

$-\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

c) A partir da ordem 29 inclusive.

4. a) $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{4}{3}$; $u_4 = \frac{4}{5}$;

$u_5 = \frac{6}{5}$; $u_6 = \frac{6}{7}$.

b) É o termo de ordem 11: $u_{11} = \frac{12}{11}$.

c) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

5. a) $a_n = \frac{8}{2^n}$ b) $b_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 3}$

c) $c_n = 4^n - 1$

6. a) $v_1 = 1$; $v_2 = \frac{1}{2}$; $v_3 = \frac{1}{3}$; $v_4 = \frac{1}{4}$;

$v_5 = \frac{1}{5}$; $v_6 = \frac{1}{6}$

b) É termo. c) $v_n = \frac{1}{n}$

Scanned by TapScanner

Soluções

7. a) Não é monótona.
b) Monótona decrescente

8. a) $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

9. a) u_n é crescente. b) u_n é decrescente.

10. a) u_n é decrescente porque $u_n = \frac{1}{n}$ é decrescente.
b) v_n é crescente porque $v_n = n$ é crescente

11. a) Monótona crescente
b) Monótona crescente
c) Não é monótona

12. a) $\frac{2}{3} \leq \frac{2n}{n+2} < 2$

b) $0 \leq 1 - \frac{(-1)^n}{n} \leq 2$

c) $-1 \leq \cos n \leq 1$

13. a) $\lim_{n\to\infty} (5n^2 + 2) = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} (4 + \sqrt{n+2}) = +\infty$

c) $\lim_{n\to\infty} 9n^2 = +\infty$

14. $-\infty$

15. $\lim_{n\to\infty} (3 - 2^n) = -\infty$

16. a) $c_1 = -4; c_2 = 12; c_3 = -32; c_4 = 80; c_5 = -192$

c) $\lim_{n\to\infty} |(-2)^n \cdot (n+1)| = +\infty$

17. a) $b_n; d_n; g_n$ b) $a_n; e_n; f_n$

18. Não é.

21. a) Divergente b) Convergente
c) Divergente d) Divergente
e) Convergente

24. 3 333

25. a) $+\infty$ b) ∞ c) 0 d) $+\infty$ e) 0 f) ∞

26. a) $+\infty$ b) 1

27. a) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{-3n} = -2$

b) $\lim_{n\to\infty} \left[5 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 5$

28. a) V b) F c) F d) V

30. a) 0 b) -1 c) -3 d) $-\frac{4}{3}$
e) 0 f) $+\infty$ g) $-\frac{1}{5}$ h) 0 i) $-\infty$

31. a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $-\infty$ d) 0 e) -1
f) $\frac{3}{4}$ g) 2 h) $\frac{13}{5}$ i) 3 j) $-\infty$

32. a) F b) F c) F d) F

33. a) $e^{\frac{1}{2}}$ b) e^{20} c) e^{-3}
d) e e) $e^{-\frac{1}{2}}$ f) $\frac{1}{e}$

34. a) Sim b) Sim c) Sim
d) Sim e) Sim f) Não

35. $d = 4; a_3 = 13$

36. a) $a_{14} = 57; a_n = 4n + 1$
b) $a_{14} = -32; a_n = 10 - 3n$

37. a) Sim b) Não c) Não d) Sim

38. a) $d = -3; a_1 = 26$

39. a) $u_7 = 27; u_{15} = 59; S_{10} = 210$
b) $u_1 = 14; u_{10} = -4; S_5 = 50$
c) $u_1 = \frac{26}{5}; d = \frac{18}{5}$
d) $u_1 = 5$
e) $u_1 = 1; d = 5$

40. a) $u_1 = -66; d = 90$
b) $S_{10} = 3\,390$

41. a) $u_1 = 2; u_2 = -5; u_3 = -12; u_4 = -19$
b) Sim.
c) Monótona decrescente
d) 6 termos

42. 901 números.

43. a) Não é. b) É; $q = -\frac{1}{3}$
c) É; $q = 1 - a$ d) Não é.

44. a) $a_{10} = -\frac{1}{32}$ b) $a_{10} = \sqrt{128}$

45. 24°; 48°; 96°; 192°

46. a) $a_n = -\frac{3}{2} \cdot (-2)^n$
b) $a_n = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$
c) $a_n = 6n - 1$
d) $a_n = (6n-1)(-1)^{n+1}$
e) $a_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{4n+1}$
f) $a_n = \frac{2n-1}{2 \cdot (-2)^n}$

47. a) $r = 2; a_1 = 4$
b) $S_{20} = 4\,194\,300$

48. a) $5 = \frac{16}{3}$

49. a) $\frac{103}{33}$

Exercícios propostos pp. 91 a 93

1. a) $u_1 = -2, u_2 = 1, u_3 = 4$
b) $u_1 = 3, u_2 = 10, u_3 = 29$
c) $a_1 = 6, a_2 = -12, a_3 = 24$
d) $b_1 = 0, b_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, b_3 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
e) $f_1 = 1, f_2 = 0, f_3 = -1$

2. d) É termo da sucessão $d_n = \frac{n-1}{n}$

3. a) Decrescente b) Não é monótona
c) Crescente d) Decrescente
e) Decrescente f) Decrescente
g) Crescente

4. a) $a_n = -\frac{1}{n}$
b) $b_n = (-1)^n \cdot n$
c) $c_n = -3 + \frac{1}{n}$
d) $d_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$
e) $e_n = (-1)^n \cdot n - n$

5. a) Limitada b) Limitada
c) Não limitada d) Limitada

6. a) $a_5 = \frac{15}{7}$
b) Não é termo da sucessão.
c) Monótona decrescente.

7. a) -2 b) 0 c) ∞ d) $\frac{2}{3}$
e) $-\sqrt{2}$ f) 0 g) 0

8. a) $a_{20} = \frac{17-40}{3} = -\frac{23}{3}$

-5 não é termo da sucessão.

b) $a_{n+1} - a_n < 0$ c) $S_{20} = -\frac{4}{3}$

9. a) $a_n = 6n - 6$ b) $a_n = 4n - 3$
c) $a_n = -6n + 7$

10. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) 2 d) 0
e) -1 f) $\sqrt{e}$ g) $\frac{1}{e}$ h) $+\infty$
i) e^{-4} j) $+\infty$ k) 0 l) e^{-3}
m) 0 n) e^{-64} o) e^4 p) 0
q) $e^{-\frac{3}{2}}$ r) $\sqrt{e}$

11. a) $u_1 = -1\,470; d = 780$
b) $u_{10} = 5\,550$

12. a) 190,63. Ao fim de 3 horas existem 190 bactérias.
b) Ao fim de 12 horas

Scanned by TapScanner

13. a) $u_n = 3 \times 0{,}3^{n-1}$
b) $u_{20} = 3{,}49 \times 10^{-10}$
c) $S_{20} = 4{,}29$

14. $S_{10} = 2\,046$

15. a) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ b) $S_{10} = \frac{1\,023}{64}$
c) $S = 16$

16. b) $S_5 = \frac{341}{128}$ c) $S_n = 2\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}$

17. a) $l_{15} = 3{,}6 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{15}}{1-\frac{4}{5}} =$
$= 18\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{15}\right] = 28{,}94$ cm
b) Não
$l = 18$ cm porque $\left(\frac{4}{5}\right)^n \to 0$

18. 40 m por 20 m

19. A.

20. C.

21. B.

22. C.

23. D.

24. C.

25. A.

26. C.

Unidade 5: Limites e continuidade de funções pp. 94 a 121

1. 1; 1; $-\infty$, $+\infty$

2. a) 0 b) 0 c) 0 d) ∞ e) ∞ f) ∞

3. a) $-1, -2$ b) $-5, 9$ c) $2, 2$ d) $-3, -3$

4. c) e d)

5. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$

6. a) 0 b) 0 c) 1 d) -1
e) $-\infty$ f) $\frac{3}{2}$ g) $+\infty$ h) $-\infty$

7. a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) 2 000

8. a) 2 b) -2 c) 1 d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$ g) 2 h) 2

9. a) $-\frac{2}{5}$ b) 3 c) $\frac{11}{16}$ d) $\frac{23}{12}$ e) -2

10. a) -2 b) $+\frac{4}{5}$ c) ∞ d) 1

11. a) 4 b) -4 c) 0 d) $\frac{1}{12}$ e) 12

12. a) 2 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) 1
f) $\frac{1}{2}$ g) 2 h) $+1$ i) 0 j) 0 k) $\frac{2}{3}$

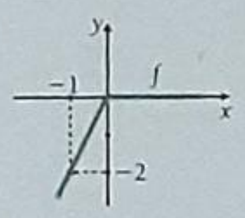
13. a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) $\frac{1}{2}$ e) 12
f) -3 g) $-\frac{1}{6}$ h) -1 i) $\frac{2}{3}$ j) 15

14. a) e^a b) e^6 c) e^{-1} d) e^6

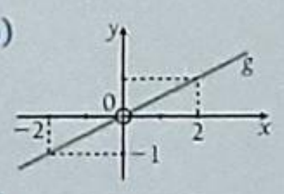
15. a) e^a b) e c) e d) m
e) $\sqrt{e}$ f) $\sqrt{e}$ g) $-\frac{1}{2}$

16. a) A função é contínua à esquerda de -1, ou seja, não é contínua em $x = -1$.
b) A função é descontínua em $x = 2$, descontinuidade bilateral.

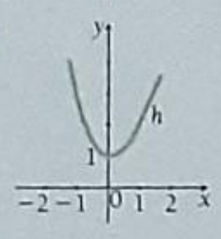
17. a) -6 b) 4
c) Não. Porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

18. a) 

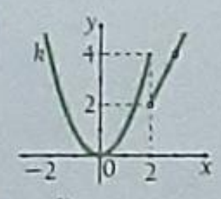
Continuidade em $\mathbb{R}$

b) 

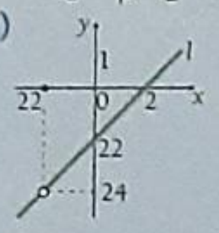
Descontinuidade eliminável em $x = 0$

c) 

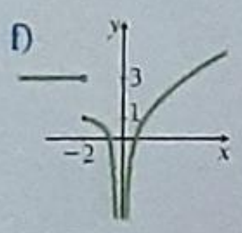
Continuidade em $\mathbb{R}$

d) 

Descontinuidade não eliminável em $x = 2$

e) 

Descontinuidade eliminável em $x = -2$

f) 

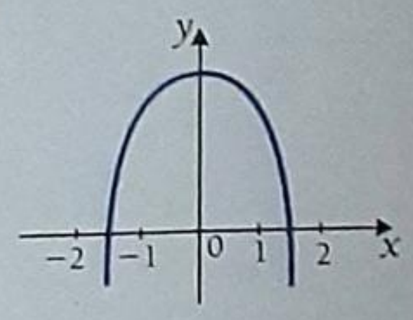
Descontinuidade não eliminável em $x = -2$ e $x = 0$

19. a) Descontinuidade não eliminável em $x = 0$; $x = -1$.
b) Descontinuidade eliminável em $x = 0$. Não eliminável em $x = 3$.
c) É contínua em $x = 1$, descontinuidade não eliminável em $x = -2$.
d) É contínua em $x = 2$.
e) Descontinuidade não eliminável em $x = 0$.
f) Contínua em $x = 0$ e descontinuidade não eliminável $x = 2$.

20. a) Contínua em $\mathbb{R}$;
b) Descontinuidade não eliminável em $x = 2$.
c) Contínua em $x = 4$
d) Descontinuidade eliminável em $x = 4$
e) Contínua em $x = 0$.

21. a) $a = 5$ b) $a = 1$
c) $a = 4$ d) $a = -1$

22. a) $f(-x) = -(-x)^4 + 4 = -x^4 + 4 =$
$= f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

b) 

c) $f(1) = 3$ $f(2) = -12$
Existe um zero em $]1, 2[$

d) $-1{,}4$; $1{,}4$

23. $k \in]4, 10[$

24. f é contínua em $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$ e $f\left(\frac{1}{e}\right) =$
$= \frac{1-e}{e} < 0$ e $f(1) = 1 > 0$

25. $b = 1$ e $a \neq 4$

26. $v(60) \approx 470$ m/s e $v(90) \approx 894$ m/s
v é contínua em $[60, 90]$ e
$v(60) < 600 < v(90)$. Logo o Teorema Bolzano garante que
$[\exists\, t \in]60, 90[: v(t) = 600$.

27. $V(1{,}25) = 8{,}181$ e $V(1{,}26) \approx 8{,}379$
logo $\exists c \in]1{,}25; 1{,}26[: V(c) = 8, 25]$.

Exercícios propostos pp. 120 e 121

1. a) 0 b) $-\frac{7}{2}$ c) $-\infty$ d) $-\frac{1}{4}$
e) ∞ f) $-\infty$ g) -1 h) 1
i) ∞ j) -12 k) 2 l) $-\frac{3}{2}$
m) 4 n) 0 o) 1 p) $3a^2$
q) e^a r) e^3 s) $\frac{1}{e}$ t) e^2

Scanned by TapScanner

u) e v) e^{-2} w) e x) $e^{\frac{2}{5}}$

y) e^{-b} z) e^{20}

2. a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) $\frac{1}{2}$

e) 6 f) 1 g) $\frac{2}{5}$ h) 6

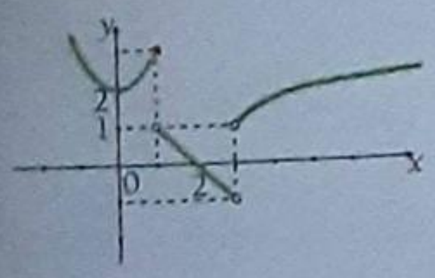
3. a) Descontinuidade eliminável em $x = 2$ e não eliminável em $x = 3$.
b) Descontinuidade eliminável em $x = 0$ e $x = 1$.
c) Descontinuidade não eliminável em $x = -2$; eliminável em $x = 1$.
d) Descontinuidade não eliminável em $x = -2$.
e) Contínua em $x = 0$.

4. a) Descontinuidade não eliminável em $x = -2$, descontinuidade eliminável em $x = -3$ e $x = -1$.
b) Contínua em $x = 0$.
c) Descontinuidade eliminável em $x = 2$ e não eliminável em $x = -1$.

5. Contínua em $x \in]-7, -2[\cup]-2, 2[\cup]2; +\infty[$ ou seja, tem descontinuidade não eliminável em $x = -2$ e eliminável em $x = 2$.

6. $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$

7. a)



b) 4

c) Porque não está definida em $x = 3$.

8. Contínua em $x = 2$.

9. a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

b) f é contínua $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) f é ímpar, pois o seu gráfico é simétrico relativamente à origem do referencial.

10. $f(x) + g(x)$ é contínua no ponto $x = 2$.

Unidade 6: Cálculo diferencial pp. 122 a 155

1. a) $f'(a) = 4a$; $f'(2) = 8$, $f'(-3) = -12$

b) $g'(a) = 3a^2$; $g'(2) = 12$; $g'(-3) = 27$

c) $h'(a) = 3a^2 - 6a$; $h'(2) = 0$; $h'(-3) = 45$

d) $i'(a) = \frac{\sqrt{a}}{2a}$; $i'(2) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $j'(a) = \frac{2}{a^2}$; $j'(2) = \frac{1}{2}$; $j'(-3) = \frac{2}{9}$

2. a) $y = 4x - 3$ b) $y = 4x$
c) $y = 4x - 16$ d) $y = 8x$

3. a) $a = -10$

4. a) $x = 1$ e $x = -1$
b) Para $x = 1$ vem $y = 0$; para $x = -1$ vem $y = -2$

5. $f'(x) = 6x + 2$; $f''(x) = 6$

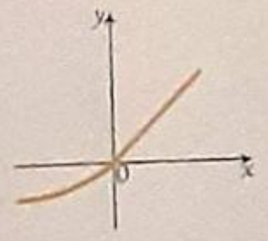
6. a) $f'(1) = 0$; $f'(3) > 0$; $f'(0) > 0$
b) $x = -1$

7. $f \rightarrow A$; $g \rightarrow B$

8. a) Sim. Porque as derivadas laterais no ponto $x = 0$ são iguais.
$g'(0^-) = g'(0^+) = 0$

b) A função é contínua. Pois toda a função que tem derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

9. a) $g'(0) = 0$



b) É contínua. Porque
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

c) $f'(0^+) = 1$; $f'(0^-) = +\infty$
Não contradiz o teorema, pois f não é derivável em $x = 0$.

10. a) $f'(1^+) = 3$; $f'(1^-) = 1$. Não existe $f'(1)$ porque $f'(1^+) \neq f'(1^-)$.

b) $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

11. a) $f'(x) = 3$ b) $f'(x) = \frac{1}{3}$
c) $f'(x) = a$ d) $f'(x) = \frac{3}{4}$
e) $f'(x) = 2x - 3$ f) $f'(x) = 6x - 6$

12. a) $f'(x) = 2x + 4$
b) $g'(x) = 16x + 1$
c) $h'(x) = 4x^3 - 4x$
d) $i'(x) = 15x^2 - 38x - 4$

13. a) $f'(x) = \frac{4}{10}x^3$

b) $g'(x) = \frac{2}{x^2}$

c) $h'(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{15}{x^4}$

d) $i'(x) = \frac{-2x^2 + 9}{x^4}$

14. a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

b) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}$

c) $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

15. a) $h(x) = (x + 1)^3$ b) $h'(1) = 12$

16. a) $f'(x) = 4e^{4x}$
b) $g'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$
c) $h'(x) = 2e^{4x}(1 + 4x \ln 4)$
d) $i'(x) = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$

17. a) $f'(x) = \ln 10 \cdot 2 \cdot 10^{2x-3}$
b) $g'(x) = \frac{\ln 2 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x + 1}}$
c) $h'(x) = \frac{3^x(\ln 3 - 1)}{x^2}$
d) $i'(x) = \ln 5 \cdot 2x \cdot 5^{x^2}$

18. a) $f'(x) = \frac{1}{x - 1}$
b) $g'(x) = \frac{1}{2x}$
c) $h'(x) = \frac{1}{(x + 3)\ln 10}$
d) $i'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
e) $m'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)\ln 2}$

19. a) $m'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 7 \\ -1 & \text{se } x < 7 \end{cases}$

b) $n'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \geq -2 \\ -3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$

Scanned by TapScanner

c) $p'(x) = \begin{cases} -5 & \text{se } x \leq \frac{4}{5} \\ +5 & \text{se } x > \frac{4}{5} \end{cases}$

20. A função não é derivável para $x = 2$.

21. a) $f'(x) = 2\cos x$ b) $g'(x) = 3\cos 3x$

c) $h'(x) = -2\,\frac{\text{cotg } 2x}{\text{sen } 2x}$

d) $m'(x) = \text{cotg } x$

22. a) $f'(x) = -2\text{sen } 2x$

b) $g'(x) = 6\,\frac{\text{tg } 3x}{\cos 3x}$

c) $h'(x) = -\text{tg } x$

d) $i'(x) = -2x \text{ sen } (x^2 - 1)$

23. a) $f'(x) = \frac{5}{\cos^2 5x}$

b) $g'(x) = -\frac{2x}{\text{sen}^2 x^2}$

24. a) $f'(x) = -\frac{3}{\text{sen}^2 3x}$

b) $g'(x) = -\frac{4}{\cos^2 2x}$

25. a) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

b) $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}$

d) $f'(x) = -\frac{2}{1 - 4x^2}$

26. a) $f(x)$ é crescente para $x \in]-\infty, 3[$. A função tem um máximo igual a 9 para $x = 3$.

b) $f(x)$ é decrescente para $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

27. a) $f''(x) = 6x - 12$

b) $g''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

c) $h''(x) = -\frac{192}{(3x + 4)^3}$

d) $i'(x) = \frac{84}{(7 - x)^3}$

28. $f' \to A$; $f'' \to B$

29. a) Não tem pontos de inflexão. Tem a concavidade voltada para baixo.

b) (1, 2) é ponto de inflexão.

$]-\infty, 1[$ a concavidade está voltada para baixo.

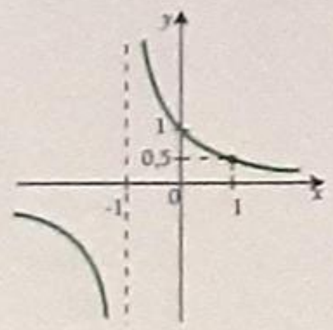
$]1, +\infty[$ a concavidade está voltada para cima.

c) Não tem pontos de inflexão.

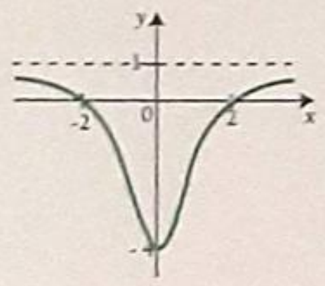
$]-\infty, -3[$ a concavidade está voltada para cima.

$]-3, +\infty[$ a concavidade está voltada para baixo.

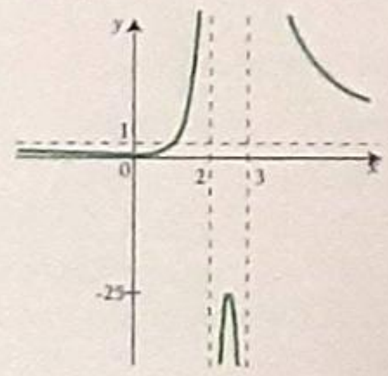
30. a) Assimptotas: $x = -1$; $y = 0$



b) Assimptota: $y = 1$



c) Assimptotas: $x = 2$; $x = 3$; $y = 1$



31. a) $x = 0$; $y = x - 2$

b) $x = 2$; $y = -x - 2$

32. a) $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$; $D'_h = \mathbb{R}$. É contínua.

Assimptotas: $x = -1$; $x = 1$ e $y = 0$.

É ímpar.

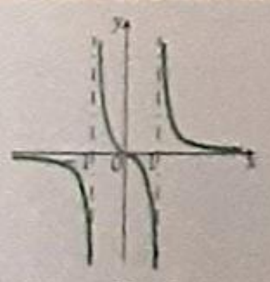
Monotonia:

$]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ é decrescente.

Extremos: Não tem.

Concavidade e pontos de inflexão:

x	$-\infty$		-1		0		1	$+\infty$
$h''(x)$		$-$	ND	$+$	0	$-$	ND	$+$
$h(x)$		⌒	ND	⌣	PI	⌒	ND	⌣



PI(0, 0)

b) $D_f = \mathbb{R}$; $D'_f = \mathbb{R}$. É contínua.

Não tem assimptotas. Não é par nem ímpar.

Monotonia:

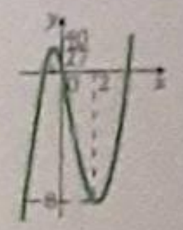
$\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup [2, +\infty[$ é crescente;

$\left]-\frac{2}{3}, 2\right[$ é decrescente.

Extremos: máximo $\left(-\frac{2}{3}, \frac{40}{27}\right)$; mínimo $(2, -8)$.

Concavidades e pontos de inflexão:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		⌒	PI	⌣



PI$\left(\frac{2}{3}, \frac{-88}{27}\right)$

c) $D_u =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$D'_u = \mathbb{R}$. Não é contínua.

Assimptotas: $x = -1$; $x = 1$. É par.

Monotonia:

$]-\infty, -1[$ é decrescente,

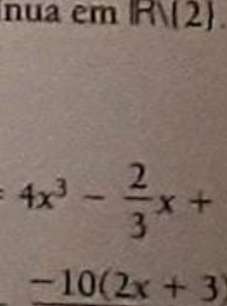
$]1, +\infty[$, é crescente.

Extremos: Não tem.

Concavidade: voltada para baixo

$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Pontos de inflexão: não tem.



33. A concentração é mais intensa ao fim de 5 horas.

34. $r = \frac{54}{\pi}$ cm; $h = 54$ cm

35. $p = \frac{1}{3}$; $q = \frac{74}{3}$

36. $30 \cdot 30$

37. $x \approx 11{,}2$; $y \approx 11{,}2$

Exercícios propostos pp. 154 e 155

1. a) É contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) 2; $\frac{1}{2}$

2. a) $f'(x) = 4x^3 - \frac{2}{3}x + \sqrt{2}$

b) $f'(x) = \frac{-10(2x + 3)}{(x - 1)^3}$

c) $f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^3 - 2)^2}}$

d) $f'(x) = \frac{2}{(x + 2)^2\sqrt{\frac{x - 2}{x + 2}}}$

e) $f'(x) = \frac{2}{(2x - 1)\ln 2}$

f) $f'(x) = 2x \log_2 x + \frac{x}{\ln 2}$

Scanned by TapScanner

e) $f'(x) = \dfrac{4x+3}{2x^2+3x+5}$

h) $f'(x) = 4\cos(4x-1)$

i) $f'(x) = \operatorname{sen} x^2 + 2x^2 \cos x^2$

j) $f'(x) = \dfrac{-3\operatorname{sen} 3x \cos x + \operatorname{sen} x \cos 3x}{\cos^2 x}$

k) $f'(x) = -\operatorname{sen} x\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1\right) + \dfrac{1}{\cos x}$

l) $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

m) $f'(x) = \dfrac{3}{1-(x-1)^2}$

n) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{(x^2-1)(2-x^2)}}$

o) $f'(x) = 2e^{2x+1}$

p) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

q) $-4x e^{-x^2} + 2^x \ln 2$

3. a) $(f+g)(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

b) $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

c) $g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

d) $(f+g)'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

4. a) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} g(2) = 6$

b) $g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 2 \\ -\dfrac{3}{(x-1)^2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	M	↘

Logo $g(2)$ é máximo relativo.

5. a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) $S = \{1\}$

c) $x = 2$ e $y = 1$

d) g é crescente em $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$.
g não admite extremos.

f) f é injectiva, pois se $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

6. D.

7. a) 2(supondo $a \neq 0$)

b) $g^{-1}(x) = \log_a x$

c) $D_f = \mathbb{R}$

d) $S = \{0\}$

e) f é decrescente em $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ e crescente em $[-1, 1[$.

f tem um mínimo relativo -2 $(f(-1) = -2)$ para $x = -1$.

f tem um máximo relativo 2 $(f(1) = 2)$ para $x = 1$.

g) f é impar, pois o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial.

8. a) $S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

b) f é crescente em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
f é decrescente em $]-1, +1[$
f tem máximo relativo 4 $(f(-1) = 4)$ para $x = -1$.
f tem mínimo relativo -4 $(f(1) = -4)$ para $x = 1$.

9. a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $S = \{-2, 0\}$

c) f é crescente em $\left]-\infty, -\dfrac{4}{3}\right[\cup]0, +\infty[$

f é decrescente em $\left]-\dfrac{4}{3}, 0\right[$

f tem um máximo relativo $\dfrac{32}{27}$

$\left(f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{32}{27}\right)$ para $x = -\dfrac{4}{3}$

f tem um mínimo relativo 0 $(f(0) = 0)$ para $x = 0$

10. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$

$D_g = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup]0, +\infty[$

b) 1 c) $x = 2$; $x = -2$; $y = 0$

d) A função é sempre crescente, logo não tem extremos.

f) Não é injectiva. Pois objectos diferentes têm a mesma imagem ($-1 \neq 1$ mas $f(-1) = f(1)$).

11. a) $D_g = \mathbb{R}$

b) $g^{-1}(x) = \ln(x-1)$

c) 2

d) $S = \{0, 1\}$

e) f é crescente em $\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\cup]1, +\infty[$

f é decrescente em $\left]\dfrac{1}{3}, 1\right[$

f tem um máximo $\dfrac{4}{27}$

$\left(f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{27}\right)$ para $x = \dfrac{1}{3}$

f tem um mínimo 0 $(f(1) = 0)$ para $x = 1$

12. a) 16,1 m

b) 24,5 s

c) $v = 25$ m/s

13. $7 \cdot 7$

14. D

Unidade 7: Primitiva de uma função pp. 156 a 171

1. a) $\dfrac{x^2}{2} + C$

b) $x^2 + C$

c) $\dfrac{x^6}{6} + C$

d) $3x + C$

e) $-\dfrac{1}{x} + C$

f) $\operatorname{sen} x + C$

g) $-\cos x + C$

h) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$

i) $e^x + C$

j) $\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$

k) arc tg $x + C$

l) arc sen $\dfrac{x}{2} + C$

Scanned by TapScanner

2. a) $-\frac{5}{2}x^3 + 2x^2 + 3x + C$

b) $-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + C$

c) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 3\log|x| + C$

d) $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$

e) $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$

f) $\frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{5}{3}x^{6/5} + C$

3. a) $2e^{\sqrt{x}}$

b) $-\log|\text{sen } x + \cos x|$

c) $\frac{1}{3}\text{ arc tg } x^3$

4. a) $\frac{x^4-1}{4}e^{x^4}$

b) $-x^2\cos x + 2x\,\text{sen } x + 2\cos x$

5. a) $-\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\text{sen } 3x$

b) $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen } 5x$

6. a) $\frac{1}{10}\sec^5 2x - \frac{1}{6}\sec^3 2x + C$

b) $\frac{-\text{sen } x\cos x + x}{2} + C$

7. a) $x\text{ arc tg } 3x - \frac{1}{6}\log|1+9x^2| + C$

b) $\frac{a^2}{2}\left(\text{arc sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C$

8. a) $\frac{3}{4}x^{4/3} + C$

b) $3x^{1/3} + C$

c) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

d) $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

e) $\frac{1}{2}\ln(2x-3) + C$

f) $-\frac{1}{6}\ln(1-2x^3) + C$

g) $\frac{e^{3x}}{3} + C$

h) $-\frac{1}{2}\log|\cos 2x| + C$

i) $-\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$

j) $\text{arc sen } x + C$

k) $\frac{1}{3}\text{ arc tg }\frac{x}{3} + C$

l) $\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C$

9. a) $-x\cos x + \text{sen } x + C$

b) $x e^x - e^x + C$

c) $\frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C$

d) $-x^2\cos x + 2x\,\text{sen } x + 2\cos x + C$

e) $\frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x^2 e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$

f) $\frac{e^x\,\text{sen } x + e^x\cos x}{2} + C$

Exercícios propostos p. 171

1. a) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$

b) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-e^{6x}}$

c) $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

d) $\sqrt{2}\,x^3$

e) $3\cos x + 2/3x^3$

f) $0{,}5\,e^{-x^2}$

g) $1/3\,(1+x^2)^{3/2}$

2. a) $\frac{1}{2}e^{\text{sen } x}$ b) $\log|\cos x|$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ arc tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

d) $\frac{\text{sen}^3 x}{4} - \frac{\text{sen}^6 x}{6}$

e) $1/2\text{ arc tg }(e^x/2)$

f) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc sen}\left(\sqrt{2x^2}\right)$

3. a) $-\frac{x^2+5}{e^x}$

b) $-\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\text{ sen } 2x$

c) $-\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$

d) $2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x}$

e) $x\log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

f) $-x\,\text{cotg } x + \log|\text{sen } x|$

g) $\frac{x\,\text{sen}(\log x) - x\cos(\log x)}{2}$

h) $-\frac{\log^2 x}{x} - 2\frac{\log x}{x} - \frac{2}{x}$

i) $x\,\text{arc sen}^2 x + 2\,\text{arc sen } x\sqrt{1-x^2} - 2x$

4. a) $2x^3 + 4x^2 + 3x + C$

b) $\frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} + C$

c) $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x} + C$

d) $\frac{1}{\sqrt{7}}\text{ arc tg }\frac{x}{\sqrt{7}} + C$

e) $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C$

f) $\text{arc sen }\frac{x}{2\sqrt{2}} + C$

g) $\text{arc sen }\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-2}\right) + C$

h) $\text{tg } x - x + C$

i) $\frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1} + C$

j) $x + \ln|2x+1| + C$

k) $2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

l) $\frac{1}{4}\text{ arc tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + C$

m) $\frac{1}{2\ln 7}7^{x^2} + C$

n) $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x) + C$

o) $\ln|\text{tg } x| + C$

p) $\sqrt{x^2+1} + C$

Scanned by TapScanner

Soluções

Unidade 8: Números complexos pp. 172 a 197

1. a) $\text{Re}(z) = 0; \text{Im}(z) = \frac{1}{2}$

b) $\text{Re}(\omega) = -4; \text{Im}(\omega) = 1$

c) $\text{Re}(t) = 8; \text{Im}(t) = 0$

d) $\text{Re}(u) = 0; \text{Im}(u) = \sqrt{2} + 1$

2. a) $s = 2 \wedge k = \frac{5}{3}$

b) $k = -1 \wedge (s = \sqrt{2} \vee s = -\sqrt{2})$

3. a) $6 + 2i$ b) $6 + 7i$

4. a) $9 + 2i$ b) $2 - 2i$

5. a) $6 + 4i$ b) $2 - 2i$

c) $5 + 14i$

6. a) $-i + 3$ b) $-20i + 5$

c) $\frac{5}{2} i$

7. a) $-32i + 5$ b) $-i$ c) -1

8. a) $52 - 47i$ b) -4

9. a) $3 + 4i$ b) $-3i$

c) $\frac{-5 - i}{3}$

10. a) $2\sqrt{3}$ b) 7

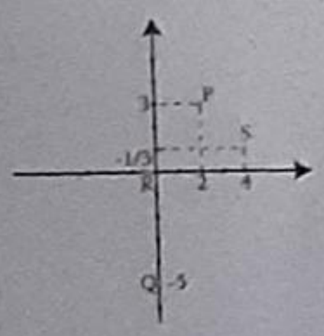
11. a) $\frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$ b) $\frac{5}{29} + \frac{2}{29} i$

12. $(z = 1 + yi \text{ com } y \in \mathbb{R}) \vee z \in \mathbb{R}$

13. a) $x_1 = \sqrt{2}i \vee x_2 = -\sqrt{2}i$

b) $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{3} i}{2} \vee x_2 = \frac{-5 + \sqrt{3}i}{2}$

14.



15. a) $|z_1| = \sqrt{73}$ b) $|z_2| = 4$

c) $|z_3| = 2$

16. a) $-1 - \sqrt{3} i$ b) $-i$

17. a) $3\text{cis } \pi$ b) $4\text{cis } \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{1}{2} \text{cis } \frac{3}{2} \pi$

18. a) $2 + 5i$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} + 1}{4} i$

19. a) $2\text{cis } \frac{11}{6} \pi$ b) 8

20. a) $\frac{1}{4} \text{cis } \frac{5}{6} \pi$

b) $\frac{1}{2} \text{cis } \frac{7\pi}{10}$

21. $3\text{cis } \frac{5\pi}{3}; 3\text{cis } \frac{\pi}{3}; 3\text{cis } \frac{5\pi}{3};$

$3\text{cis } \pi; \ 3\text{cis } \frac{\pi}{3};$

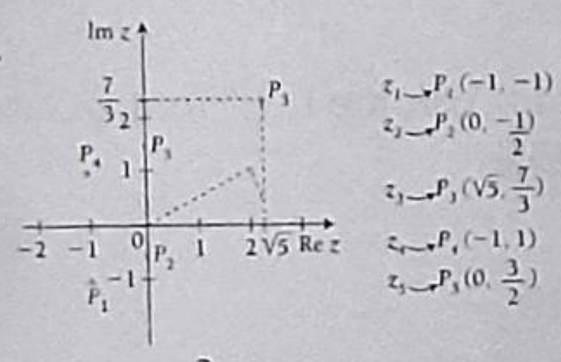
22. a) $2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{3\pi}{8}; \ 2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{11\pi}{8};$

b) $\text{cis } \frac{\pi}{12}; \ \text{cis } \frac{5\pi}{12}; \ \text{cis } \frac{3\pi}{4};$

$\text{cis } \frac{13\pi}{12}; \text{cis } \frac{17\pi}{12}; \text{cis } \frac{7\pi}{4}$

Exercícios propostos pp. 196 e 197

1.



2. $P_1 \smile z_1 = \frac{3}{2} i; \quad P_2 \smile z_2 = -2;$

$P_3 \smile z_3 = 2 - 3i$

3. a) $k = \pm \sqrt{5}$ b) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $k = 0 \vee k = 5\sqrt{2}$

4. $\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} i \text{ ou } \frac{-\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} i$

5. A.

6. $6 - 3i, \ 3 + 3i$

7. a) -1 b) $-1 + i$

8. a) $2, -\sqrt{10}, -9$ b) $-\frac{5}{2} i, \ 0, \ 9i$

c) $2 + \frac{5}{2} i, -\sqrt{10}, -9i - 9$

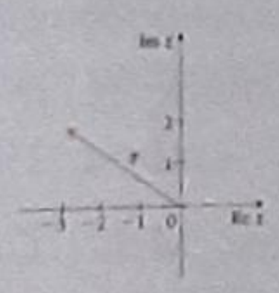
d) $\frac{\sqrt{41}}{5}, \ \sqrt{10}, \ 9\sqrt{2}, \ e$

e) $-2 + \frac{5}{2} i, \ \sqrt{10}, 9 - 9i$

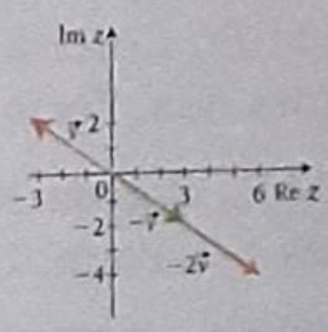
9. a) $a = b = 2$

b) $a = 2, b = 4$

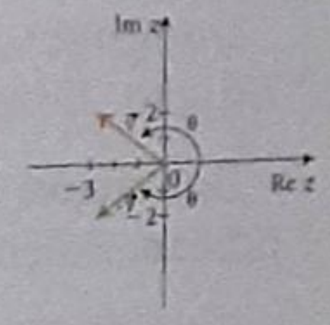
10. a)



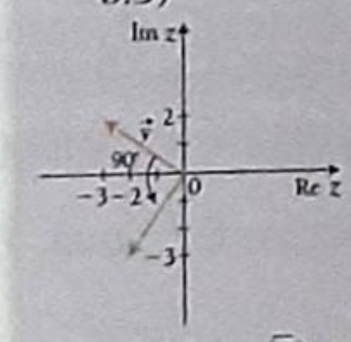
b.1)



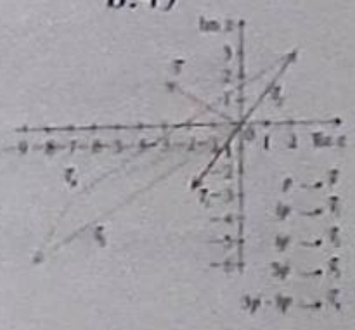
b.2)



b.3)



b.4)



11. a) $(6 + \sqrt{3}) \pi - 5i$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3} - \pi^2 + 1 + \left(-\sqrt{3} \pi - \frac{\pi}{3}\right) i$

c) $-\sqrt{3} - 1 + (2\sqrt{3} - 4\pi) i$

12. a) r_1 b) $\frac{13}{5} + \frac{6}{5} i$ c) $\frac{4}{15} i$

15. a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ b) $3i$ c) 1

d) $5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$

16. a) $\frac{7}{2} \text{ cis } 0$ b) $3\text{cis } \frac{3\pi}{2}$

c) $2\text{cis } \frac{7\pi}{4}$ d) $\text{cis } \frac{11\pi}{6}$

e) $2\text{cis } \frac{3}{4} \pi$

17. a) $\left\{\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ b) $\{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$

c) $\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$

18. a) $\text{cis } \frac{3\pi}{4}, \text{cis } \frac{7\pi}{4}, \text{cis } \frac{\pi}{3}, \text{cis } \frac{4\pi}{3}$

b) $\sqrt[3]{6} \text{ cis } \frac{\pi}{6}, \sqrt[3]{6} \text{ cis } \frac{5\pi}{6}, \sqrt[3]{6} \text{ cis } \frac{3\pi}{2}$

c) $\text{cis } \frac{\pi}{4}, \text{cis } \frac{3\pi}{4}, \text{cis } \frac{5\pi}{4}, \text{cis } \frac{7\pi}{4}$

d) $\sqrt{2} \text{ cis } \frac{3\pi}{20}, \sqrt{2} \text{ cis } \frac{11\pi}{20}, \sqrt{2} \text{ cis } \frac{19}{20}$

$\sqrt{2} \text{ cis } \frac{27\pi}{20}, \sqrt{2} \text{ cis } \frac{35\pi}{20}$

e) $\text{cis } 0, \text{cis } \frac{\pi}{3}, \text{cis } \frac{2\pi}{3}, \text{cis } \pi, \text{cis } \frac{4\pi}{3},$

$\text{cis } \frac{5\pi}{3}$

19. D. 20. B. 21. C.

22. C. 23. D. 24. C.

Scanned by TapScanner

Bibliografia

Dias I; Sousa, H, I; Pona F.; Branco A.P.; Ribeiro A. *A solução, Matemática 11.º ano*, Texto Editora, Lda., Lisboa, 1998.

Dias I; Sousa, H, I; Pona F.; Branco A.P.; Ribeiro A. *A solução, Matemática 12.º ano*, Texto Editora, Lda., Lisboa, 1999.

Domingos, M.E., Correia, M.C., Fernandes, T.T. *Eu e a Matemática: Livro Guia 4* – Vol. 1,1.ª Edição, Edições Asa, Porto, 1986.

Domingos, M.E., Correia, M.C., Fernando, T.T. *Eu e a Matemática: Livro de Consulta 4* – Vol. 1, 2.ª Edição, Edições Asa, Porto, 1986.

Domingos, M.E., Correia, M.C., Fernandes, T.T. *Eu e a Matemática: Livro de Consulta e Guia 5* – Vol. 2, 1.ª Edição, Edições Asa, Porto, 1986.

Gomes, F.; Viegas, C. *XEQMAT. Matemática 11.º ano,* Volume I, Texto Editores, Lda., Lisboa, 2004.

Gomes, F.; Viegas, C. *XEQMAT. Matemática 11.º ano,* Volume II, Texto Editores, Lda., Lisboa, 2004.

Gomes, F.; Viegas, C. *XEQMAT. Matemática 11.º ano,* Volume III, Texto Editores, Lda., Lisboa, 2004.

Gomes, F.; Viegas, C.; Lima, Y. *XEQMAT. Matemática 12.º ano,* Volume I, Texto Editores, Lda., Lisboa, 2005.

Gomes, F.; Viegas, C.; Lima, Y. *XEQMAT. Matemática 12.º ano,* Volume II, Texto Editores, Lda., Lisboa, 2005.

Gomes, F.; Viegas, C.; Lima, Y. *XEQMAT. Matemática 12.º ano,* Volume III, Texto Editores, Lda., Lisboa, 2005.

Silva, J. S. *Compêndio de Matemática* – Volume I, 1.º tomo, Gabinete de Estudos e Planeamento, Ministério da Educação e Cultura, Lisboa, 1975.

Scanned by TapScanner

Arone Chilaúle

Licenciado em Engenharia Electrotécnica e em Ensino de Matemática e Física pela Universidade Eduardo Mondlane. É Professor de Matemática na Escola Secundária Francisco Manyanga, desde 1987, tendo também leccionado em algumas escolas públicas e privadas da capital.

Orlando Machango

Licenciado em Matemática e em Ensino de Matemática e Física pela Universidade Eduardo Mondlane. Apresenta o programa da Telescola da TVM na disciplina de Matemática. É Professor de Matemática na Escola Secundária Francisco Manyanga, tendo também leccionado em algumas escolas públicas e privadas da capital.

HINO NACIONAL

Pátria Amada

Na memória de África e do Mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro

Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela Paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

Flores brotando do chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios, pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique
Nenhum tirano nos irá escravizar.

Scanned by TapScanner

Programa Actualizado

M12

Matemática 12.ª Classe

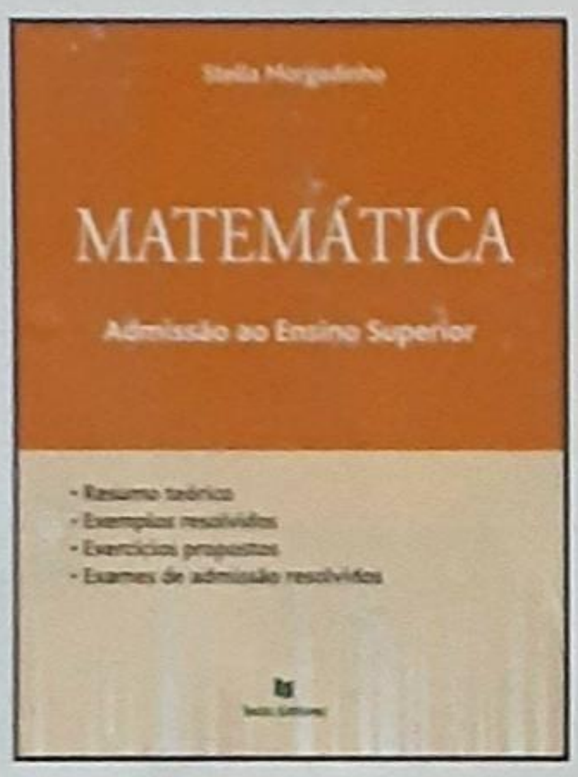
Já à venda:

Biologia 12
DGD 12
Filosofia 12
Física 12
História 12
Inglês 12
Matemática 12 – Letras
Português 12
TIC 12

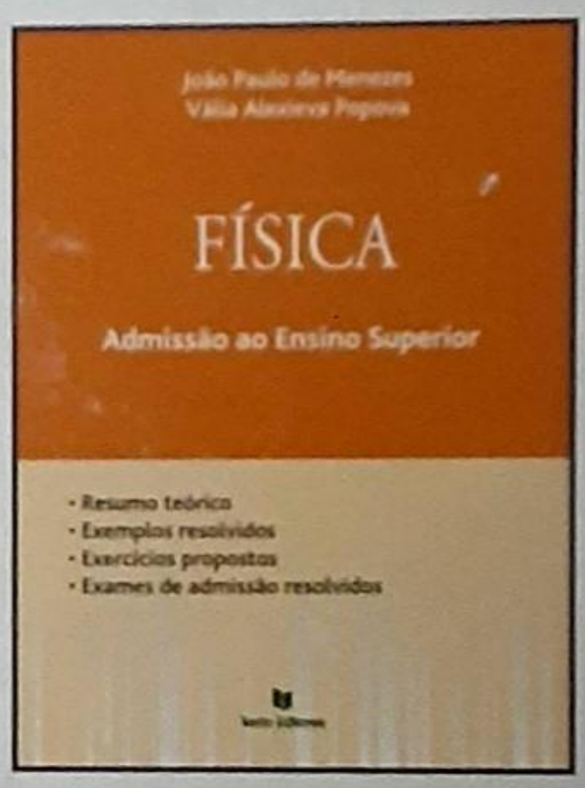
Brevemente:

Educação Visual 12
Química 12

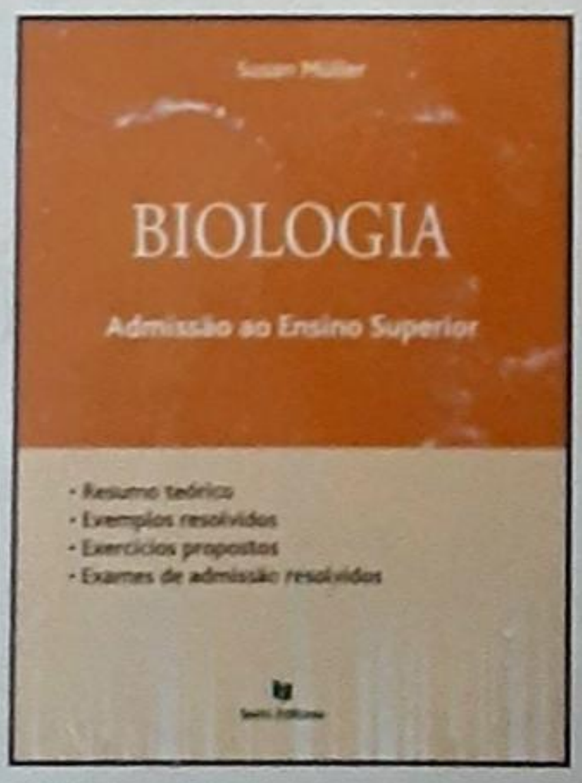
Publicações de referência para apoio ao ensino



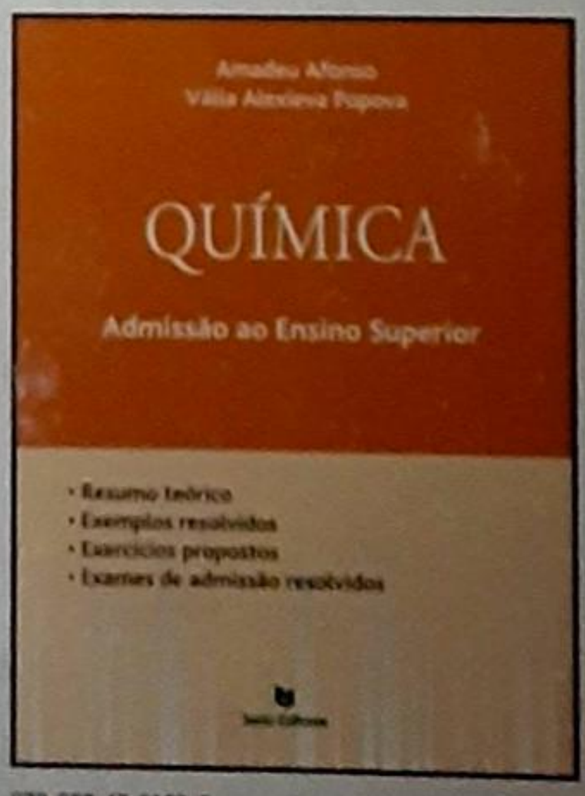
978-902-47-6101-2



978-902-47-6102-9



978-902-47-6104-3



978-902-47-6103-6

LeYa
Texto Editores
978-902-47-5447-2
www.leya.com
E-mail: info@ptw.com.mz

Scanned by TapScanner