

De acordo com os novos programas

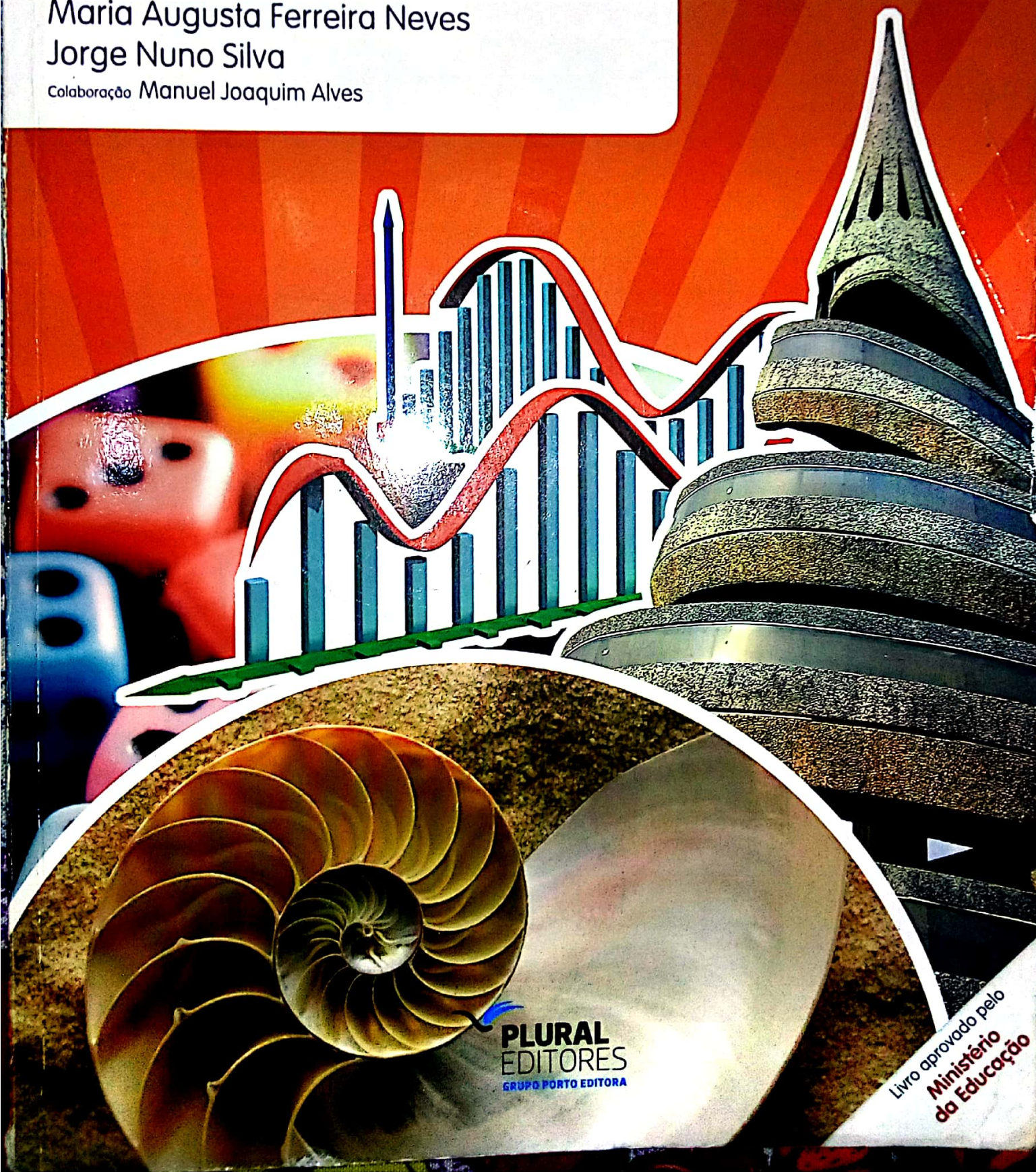
Matemática

12^a classe

Maria Augusta Ferreira Neves

Jorge Nuno Silva

Colaboração Manuel Joaquim Alves



PLURAL
EDITORES
GRUPO PORTO EDITORA

Livro aprovado pelo
**Ministério
da Educação**

Baixar Livros & Exames em PDF

Somos o portal MozEstuda.com, um espaço dedicado à educação e ao conhecimento. Fornecemos links para o **download gratuito** de materiais de acesso livre, incluindo [exames anteriores](#), [livros e diversos PDFs](#) educacionais. Nosso objetivo é facilitar o aprendizado e a pesquisa, sempre respeitando os direitos autorais e promovendo o acesso legítimo ao conhecimento. Se você apreciou este conteúdo, considere apoiar os autores e editoras adquirindo versões oficiais sempre que possível. Todos os direitos autorais pertencem aos respectivos criadores e detentores de direitos. **Não vendemos nem lucramos com as obras disponibilizadas.** Aproveite e compartilhe com outros estudantes!

Para baixar livros em PDF, acesse biblioteca.mozestuda.com e pesquise o título desejado na barra de pesquisa. Ou, se preferir, siga/ Clique os links abaixo:

BAIXAR TODOS LIVROS ESCOLARES — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Classe** para Baixar todos livros em PDF

12ª CLASSE

11ª CLASSE

10ª CLASSE

9ª CLASSE

8ª CLASSE

7ª CLASSE

6ª CLASSE

5ª CLASSE

4ª CLASSE

3ª CLASSE

2ª CLASSE

1ª CLASSE

BAIXAR TODOS MÓDULOS ESCOLARES —

MÓDULOS DO I CICLO

MÓDULOS DO II CICLO

LIVROS POR DISCIPLINAS - TODAS

BAIXAR EXAMES DA **6ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

C. NATURAIS

C. SOCIAIS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

BAIXAR EXAMES DA **10ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

FÍSICA

GEOGRAFIA

HISTORIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

BAIXAR EXAMES DA **12ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

DGD

FILOSOFIA

FÍSICA

FRANCÊS

GEOGRAFIA

HISTÓRIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

TODOS EXAMES

TODOS EDITAIS

TODOS LIVROS

BAIXAR EXAMES DE **ADMISSÃO** — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Instituição** para Baixar todos exames em PDF

IFP / Formação de Professores

UEM

UJC/ ISRI

ISPG

ISPSONGO

AC. MILITAR

PRM

ISCAM

ICS — SAÚDE — ENSINO MÉDIO

ETP / Ensino técnico Profissional

UP / UniRios: Save, Rovuma, Licungo, ...

UNIZAMBEZE

ISPT

ISCISA

ACIPOL

CFJJ

IFAPA

EDITAIS

ENEM

VESTIBULARES

ENCCEJA

TODOS EXAMES

Título

Matemática

12.ª classe

Autores

Maria Augusta Ferreira Neves

Jorge Nuno Silva

Colaboração

Manuel Joaquim Alves

Editora

Plural Editores

Copyright PORTO EDITORA



Mozambique

Av. Patrice Lumumba, 765 | Maputo

Telef. 21 36 09 00

Cel. 82 32 24 960 | 84 30 28 212

Fax 21 30 88 68

E-mail plural@pluraleditores.co.mz

www.pluraleditores.co.mz

2017

Edição de 2017, 1ª Edição Gráfica

W.D. 165/10/PLA.01/2015

12^a
classe

Matemática

Maria Augusta Ferreira Neves
Jorge Nuno Silva

Colaboração

Manuel Joaquim Alves



ESCOLA SECUNDÁRIA DE MUATALA

Entrada Nº 3048 / 18

Data: 20 / Abri / 2018

O Funcionário

 **PLURAL**
EDITORES
GRUPO PORTO EDITORA

Apresentação do manual



Maria Augusta Ferreira Neves

Doutorada em Educação Matemática. Leccionou cadeiras da área científica de Matemática e da Didáctica da Matemática no Instituto Politécnico do Porto e na Universidade do Minho. Investigadora em Didáctica da Matemática e autora de manuais escolares.
Site: www.augusta.neves.net

Jorge Nuno Silva

Doutorado em Matemática por Berkeley.
Professor de História da Matemática da Universidade de Lisboa.
Especialista em História de Jogos de Tabuleiro. Autor de livros de Matemática, de História da Matemática, de jogos e de divulgação.

Este manual foi elaborado de maneira a respeitar a forma como o aluno aprende, como o aluno pode ser ensinado e como o aluno é avaliado.

O programa da 12.^a classe tem oito capítulos. Em cada capítulo do programa, que é apresentado no manual, promove-se o desenvolvimento de competências e capacidades gerais, das quais se destacam:

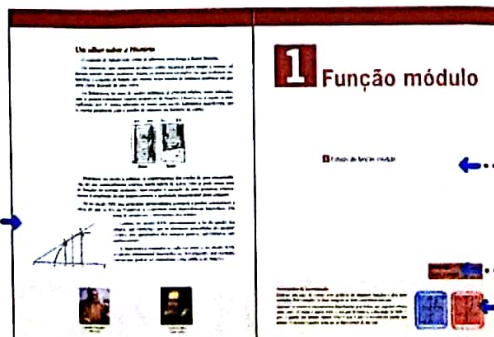
1. Utilizar e interpretar simbologia específica de Matemática.
2. Usar linguagem específica de Matemática.
3. Ler e interpretar textos da vida real e adaptar modelos matemáticos que descrevam as situações apresentadas.
4. Aplicar diferentes estratégias de resolução de problemas.
5. Interpretar e criticar resultados obtidos analiticamente ou com tecnologia gráfica.
6. Resolver problemas em contextos científicos de áreas diferentes da Matemática, aplicando métodos matemáticos.
7. Estabelecer conexões entre diferentes conceitos matemáticos.
8. Prever resultados para situações problemáticas e verificar a adequabilidade desses resultados.
9. Descrever raciocínios demonstrativos usando diferentes métodos de demonstração.
10. Descrever com clareza e rigor raciocínios que suportam estratégias de resolução de problemas.
11. Formular conjecturas para regularidades observadas com e sem experimentação.
12. Usar tecnologia gráfica em diferentes contextos, nomeadamente para:
 - efectuar cálculos;
 - prever resultados;
 - confirmar respostas;
 - acompanhar o trabalho analítico;
 - obter gráficos;
 - resolver problemas;
 - modelar situações reais.

Organização do manual

Os capítulos estão divididos por temas e em cada capítulo encontra:

• Abertura de capítulo

Um olhar sobre a História para enquadrar o estudo do capítulo na história da Matemática e promover a pesquisa histórica.



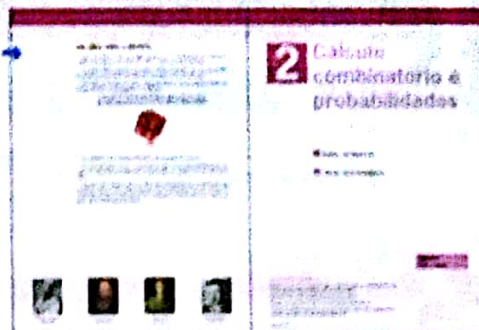
Os temas em que o capítulo se desenvolve.

• Material necessário ao estudo do capítulo.

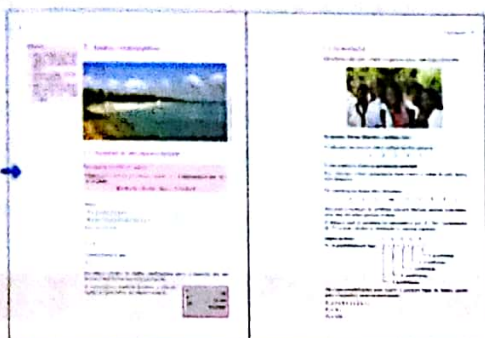
• Actividades de investigação para despertar o interesse pelo estudo do capítulo.

• Abertura de tema

Para motivar e tornar agradável do ponto de vista gráfico, o tema abre com uma imagem acompanhada dos seus objectivos específicos que indicam a forma como a sequência das matérias é desenvolvida e também ajudam o aluno a organizar o seu estudo.

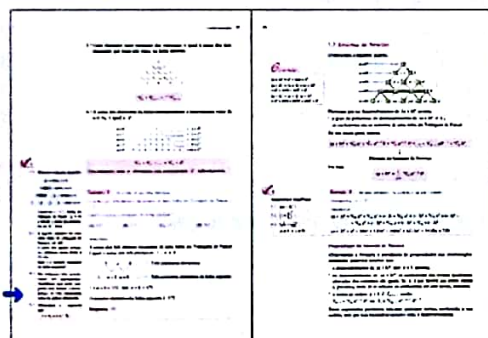


• Desenvolvimento da matéria



- Partindo de contextos reais e exemplos com significado para os alunos, procurou-se estimular a descoberta guiada.

• Verificação sistemática da aprendizagem



- Será que o estudante está a compreender o desenvolvimento da matéria? A experiência diz-nos que não se deve avançar sem saber os conteúdos anteriores. Esta é a razão porque encontra aqui uma questão estratégica para verificar passo-a-passo a sua aprendizagem.

• Simbologia

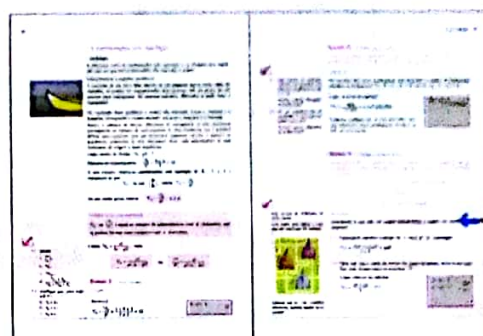


– Verifique a sua aprendizagem



– Tome em consideração

• Exemplos

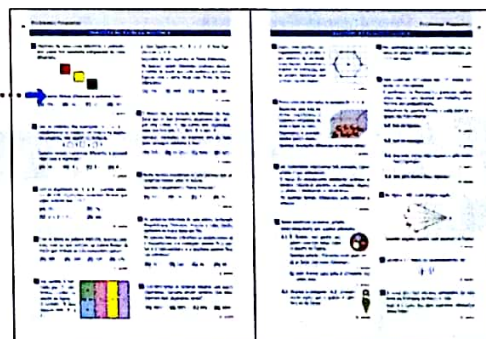


Os conceitos tornam-se mais claros quando são aplicados em contextos diversificados da Matemática, da vida real ou de outras ciências.

Os exemplos enriquecem o desenvolvimento da matéria procurando dar-lhe sentido através da aplicação em novas situações.

• Problemas Propostos

No final de cada tema encontra um conjunto alargado de problemas propostos com questões de escolha múltipla e questões de resposta aberta. Com estes problemas pretende-se a consolidação das aprendizagens.



- Poderá encontrar no site www.pluraeditores.co.mz resoluções detalhadas de todos os exercícios propostos neste manual.

Índice

1 FUNÇÃO MÓDULO

1. Estudo da função módulo

- 1.1 Módulo ou valor absoluto
- 1.2 Módulo ou valor absoluto de um número real
- 1.3 Função módulo. Definição e gráfico

Pág.

8
9
10

- 1.4 Gráfico da função $f(x)$
- 1.5 Gráfico da função $f(|x|)$

Pág.

12
12
14

Problemas Propostos

2 CÁLCULO COMBINATÓRIO E PROBABILIDADES

1. Análise combinatória

- 1.1 Factorial de um número natural
- 1.2 Permutações
- 1.3 Arranjos sem repetição
- 1.4 Arranjos com repetição
- 1.5 Combinações sem repetição
- 1.6 Triângulo de Pascal
- 1.7 Binómio de Newton

Pág.

18
19
21
23
24
26
28
30

2. Cálculo de probabilidades

- 2.1 Experiências aleatórias e experiências deterministas
- 2.2 Espaço de resultados. Acontecimentos
- 2.3 Operações com acontecimentos
- 2.4 Definição frequentista de probabilidade
- 2.5 Definição clássica ou de Laplace de probabilidade

Pág.

32
33
34
36
37
40

Problemas Propostos

3 FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

1. Generalidades sobre funções

- 1.1 Noção de função
- 1.2 Formas de representar uma função
- 1.3 Zeros de uma função
- 1.4 Extremos absolutos e extremos relativos de uma função
- 1.5 Monotonia de uma função
- 1.6 Funções reais de variável real. Conceito intuitivo de continuidade
- 1.7 Função injectiva
- 1.8 Injectividade e monotonia
- 1.9 Função sobrejectiva
- 1.10 Função bijectiva

Pág.

44
45
46
46
47
48
49
52
53
53
54

Problemas Propostos

2. Função afim. Função quadrática

- 2.1 Definição de função afim
- 2.2 Propriedades da função afim
- 2.3 Função quadrática. Definição e aplicações
- 2.4 Resolução de problemas envolvendo a função quadrática

56
57
57
59
60

Problemas Propostos

3. Função racional

- 3.1 Definição de função racional
- 3.2 Conceito intuitivo de limite
- 3.3 Assíntotas do gráfico de uma função racional
- 3.4 Determinação das assíntotas verticais
- 3.5 Determinação das assíntotas horizontais
- 3.6 Determinação das assíntotas oblíquas

Pág.

62
64
65
66
67
69
70

Problemas Propostos

4. Operações com funções

- 4.1 Igualdade de duas funções
- 4.2 Soma, diferença, produto e quociente de funções
- 4.3 Função composta de duas funções
- 4.4 Definição de função inversa
- 4.5 Determinação da função inversa de uma função injectiva

72
73
75
79
80
82

Problemas Propostos

5. Funções exponenciais. Funções logarítmicas. Funções trigonométricas (revisão)

- 5.1 Funções exponenciais
- 5.2 Funções logarítmicas
- 5.3 Funções trigonométricas (revisão)

84
89
96
106

Problemas Propostos

4 FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL NATURAL

1. Progressões aritméticas e progressões geométricas

- 1.1 Definição de sucessão
- 1.2 Sucessões monótonas
- 1.3 Sucessões limitadas
- 1.4 Progressões aritméticas
- 1.5 Soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética
- 1.6 Progressões geométricas
- 1.7 Termo geral de uma progressão geométrica
- 1.8 Soma dos termos de uma progressão geométrica

Pág.

110
111
114
117
120
121
123
124
126

Problemas Propostos

2. Cálculo de limites

- 2.1 Noção intuitiva de limite de uma sucessão
- 2.2 Sucessões infinitamente grandes e sucessões monótonas
- 2.3 Sucessões infinitamente grandes e sucessões limitadas
- 2.4 Infinitésimos e infinitamente grandes
- 2.5 Teorema sobre sucessões convergentes
- 2.6 Operações com sucessões convergentes
- 2.7 Radiciação
- 2.8 Operações com limites infinitos
- 2.9 Indeterminações

Pág.

128
131
132
133
134
136
138
140
143

4 FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL NATURAL

	Pág.		Pág.
2.10 Sucessão $n \rightarrow a^n, a \in \mathbb{R}$	146	2.12 O número de Neper	148
2.11 Soma dos termos de uma progressão geométrica	147	Problemas Propostos	150

5 LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

	Pág.		Pág.
1. Limites		2. Continuidade	
1.1 Noção intuitiva de limite	154	2.1 Continuidade de uma função num ponto	180
1.2 Limites laterais	155	2.2 Continuidade lateral	181
1.3 Definição de limite segundo Heine	158	2.3 Continuidade de uma função num intervalo	185
1.4 Regras operatórias com limites	160	2.4 Operações com funções contínuas	187
1.5 Limites e infinitos. Cálculo de limites	161	2.5 Teorema de Bolzano-Cauchy	188
1.6 Indeterminações	167	2.6 Determinação das assíntotas do gráfico de uma função	189
1.7 Limites de funções envolvendo exponenciais e logaritmos	173	Problemas Propostos	194
1.8 Limites de funções envolvendo funções trigonométricas	176		
Problemas Propostos	178		

6 CÁLCULO DIFERENCIAL. APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

	Pág.		Pág.
1. Derivadas		1.16 Derivada de funções exponenciais e logarítmicas	214
1.1 Definição de derivada de uma função num ponto. Significado geométrico	198	1.17 Derivada de funções trigonométricas	217
1.2 Derivadas laterais	199	1.18 Função segunda derivada	219
1.3 Referências a pontos nos quais uma função não é derivável	201	Problemas Propostos	220
1.4 Derivabilidade e continuidade	203	2. Aplicações das derivadas	
1.5 Função derivada	204	2.1 Função estritamente crescente e função estritamente decrescente (revisão)	222
1.6 Derivada de uma função constante	205	2.2 Extremos de uma função (revisão)	223
1.7 Derivada de uma função afim	206	2.3 Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função	225
1.8 Derivada do produto de uma constante por uma função	206	2.4 Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função	227
1.9 Derivada da soma e da diferença de duas funções	207	2.5 Extremos relativos e primeira derivada de uma função	229
1.10 Derivada de uma potência	208	2.6 Concavidade e segunda derivada de uma função	232
1.11 Derivada de funções polinomiais	209	2.7 Teste da segunda derivada	236
1.12 Derivada do produto de funções	210	2.8 Estudo de funções	238
1.13 Derivada do quociente de funções	211	2.9 Problemas de otimização	244
1.14 Derivada da função composta	212	Problemas Propostos	252
1.15 Derivada da função inversa	213		

7 PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO

	Pág.		Pág.
1. Cálculo integral		1.3 Integrais imediatos	259
1.1 Noção de primitiva de uma função. Integral indefinido	256	1.4 Integração por partes	260
1.2 Propriedades do integral indefinido	257	Problemas Propostos	262

8 NÚMEROS COMPLEXOS

	Pág.		Pág.
1. Estudo dos números complexos		1.6 Módulo e argumento de um número complexo	276
1.1 Evolução do conceito de número. O conjunto dos números complexos	266	1.7 Forma trigonométrica de um número complexo	277
1.2 Representação geométrica de um número complexo. Complexos conjugados e complexos simétricos	267	1.8 Operações com números complexos na forma trigonométrica	279
1.3 Operações com números complexos	269	1.9 Construção geométrica das raízes de uma equação em $\mathbb{C}$	285
1.4 O número i como operador da rotação de 90°	273	1.10 Translação e rotação no plano de Argand	286
1.5 Raiz quadrada de um número real negativo	275	Problemas Propostos	288

Soluções*

290

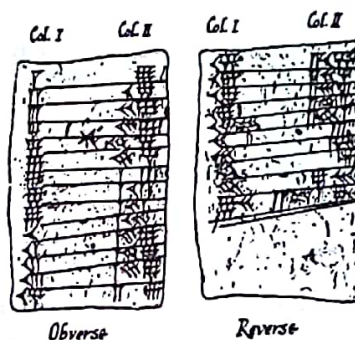
* Poderá encontrar no site www.pluraeditores.co.mz resoluções detalhadas de todos os exercícios propostos neste manual.

Um olhar sobre a História

O conceito de função tem, como já sabemos, uma longa e ilustre história.

Os números, que surgiram primeiro como recursos para medir e contar, só faziam sentido sendo positivos. Assim, os primeiros exemplos em que podemos vislumbrar o conceito de função são muitas vezes tabelas de números positivos em que uma classe depende de uma outra.

Os Babilônios, há mais de quatro milênios, já criavam tabelas, como tabuadas, que se podem considerar versões primitivas de funções. Observe-se, a seguir, a multiplicação por 9 numa tabuinha de barro com escrita babilônica cuneiforme, isto é, escrita produzida com o auxílio de objectos em formato de cunha:

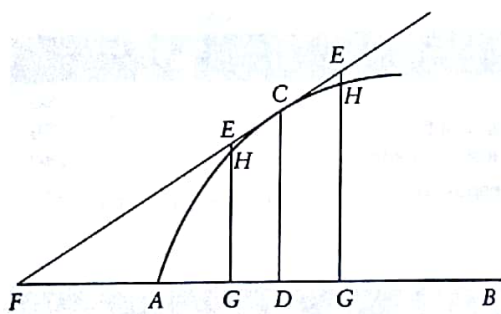


Ptolomeu, no século I, tabelou os comprimentos das cordas de uma circunferência, no que essencialmente consiste numa tabela de senos. Não se pode ainda falar de funções no sentido moderno, mas estudar a variação de uma grandeza relativamente à amplitude de um ângulo contém a qualidade fundamental deste conceito.

Só no século XIV, nas principais universidades, começou a ganhar consistência a ideia de que as leis da Natureza se exprimem com dependências funcionais. Um tema de estudo era o movimento dos sólidos.

Galileu, no século XVII, determinando a lei da queda dos corpos, que estabelece que as distâncias percorridas são proporcionais aos quadrados dos tempos gastos, aprofundou este conhecimento.

A Matemática expandiu-se cada vez mais e, no século XVII, o cálculo infinitesimal desenvolve-se, investigando, por exemplo, curvas que podem ser entendidas como gráficos de funções.



Cláudio Ptolomeu
(85-165)



Galileu Galilei
(1564-1642)

1

Função módulo

1 Estudo da função módulo

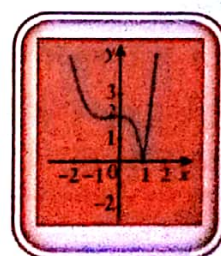
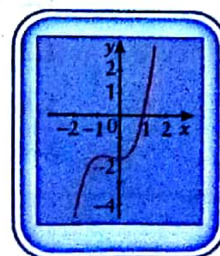


Material:
Lápis e papel

Actividades de investigação

Elabore um jogo de cartas com gráficos de algumas funções e dos seus módulos. Por exemplo, as duas imagens ao lado constituem um par.

Quando as cartas se encontrarem distribuídas por todos, um jogador coloca uma carta na mesa e quem tiver o seu par levanta-a, colocando de lado o par, e ganha um ponto. Quem tiver o par e não o reconhecer perde um ponto. O mesmo jogador pode ter as duas cartas de um par.



Objectivos

1. Aplicar as propriedades de função modular na resolução de problemas práticos da vida real.
2. Identificar funções modulares.
3. Determinar o domínio, o contradomínio, os zeros da função, a monotonia e a variação do sinal da função módulo.
4. Construir gráficos da função módulo.
5. Resolver analítica e graficamente equações e inequações modulares.

1. Estudo da função módulo



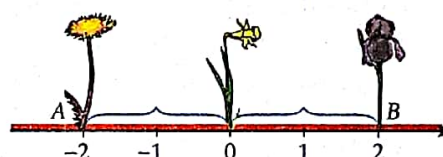
Ilha de Moçambique

1.1 Módulo ou valor absoluto

Sejam os pontos A e B de abscissas -2 e 2 , respectivamente.

$$A \curvearrowright -2 \text{ e } B \curvearrowright 2.$$

A distância de qualquer dos pontos, A ou B , à origem é 2 .



Escreve-se $|-2| = |2| = 2$ e lê-se:

“Módulo ou valor absoluto de menos dois é igual ao módulo ou valor absoluto de dois e é igual a dois.”

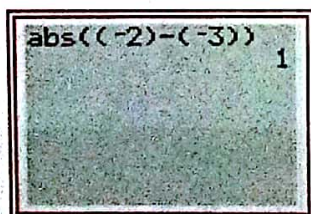
Exemplo 1 Calcular módulos

Calcule:

- 1.1 $|(-2) - (-3)|$; 1.2 $-|(-1)| - |(-2)|$;
 1.3 $|-1 - 2|^2 + |0|$; 1.4 $(-1 - 2)^2 + |(-3)|^3 + |-1|^{\frac{1}{2}} + |(-1)|^{-1}$.

Resolução

- 1.1 $|(-2) - (-3)| = |-2 + 3| = |1| = 1$
 1.2 $-|(-1)| - |(-2)| = -|1| - |2| = -1 - 2 = -3$
 1.3 $|-1 - 2|^2 + |0| = |-3|^2 + 0 = 3^2 + 0 = 9$
 1.4 $(-1 - 2)^2 + |(-3)|^3 + |-1|^{\frac{1}{2}} + |(-1)|^{-1} =$
 $= (-3)^2 + 3^3 + \sqrt{1} + |1|^{-1} = 9 + 27 + 1 + 1 = 38$



Calcule:

- 1.1 $|-2 - (-3)|^2$
 1.2 $|-1|^{\frac{1}{2}} + |(-1)|^3$
 1.3 $|-1 - 3|^2 - |(-4)|^{\frac{1}{2}}$

1.2 Módulo ou valor absoluto de um número real

Para qualquer número real a , o valor absoluto ou módulo de a representa-se por $|a|$ e tem-se:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Propriedades

1. Para $k > 0$, $|a| = k$ se e só se $a = k \vee -a = k$.

Exemplo:

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee -x = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

2. Para $k > 0$:

- $|a| < k$ se e só se $-k < a < k$;
- $|a| > k$ se e só se $a > k \vee a < -k$.

Exemplos:

$$\bullet |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \quad \bullet |x| > 3 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3$$

3. $|a| = 0$ se e só se $a = 0$.

Exemplo 2 Resolução de equações e inequações com módulos

Por processos exclusivamente analíticos resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

2.1 $|x - 1| = 5$;

2.2 $\left| -3x - \frac{1}{2} \right| = -1$;

2.3 $|x - 2| < 5$;

2.4 $|-x + 3| \geq 1$.

Resolução

$$\begin{aligned} 2.1 \quad |x - 1| = 5 &\Leftrightarrow x - 1 = 5 \vee -x + 1 = 5 \\ &\Leftrightarrow x = 5 + 1 \vee -x = 5 - 1 \\ &\Leftrightarrow x = 6 \vee x = -4 \end{aligned}$$

$$S = \{-4, 6\}$$

2.2 $\left| -3x - \frac{1}{2} \right| = -1$ Equação impossível, pois $|a| \geq 0$ para qualquer valor de a .

$$S = \emptyset$$

$$\begin{aligned} 2.3 \quad |x - 2| < 5 &\Leftrightarrow -5 < x - 2 < 5 \\ &\Leftrightarrow -5 + 2 < x < 5 + 2 \Leftrightarrow -3 < x < 7 \end{aligned}$$

$$S =]-3, 7[$$

$$\begin{aligned} 2.4 \quad |-x + 3| \geq 1 &\Leftrightarrow -x + 3 \geq 1 \vee -x + 3 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -x \geq 1 - 3 \vee -x \leq -1 - 3 \Leftrightarrow x \leq 2 \vee x \geq 4 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$$

Resolva em $\mathbb{R}$:

2.1 $|x - 1| = 3$;

2.2 $\left| -\frac{1}{2}x - 1 \right| = \frac{1}{3}$;

2.3 $\left| -2x + \frac{1}{2}x^2 \right| = 0$;

2.4 $|-1 - 2x| = -1$;

2.5 $|2x - 1| > 0$;

2.6 $|2x - 1| < 3$;

2.7 $\left| -2x + \frac{1}{2} \right| > 5$;

2.8 $\left| -x + \frac{1}{2} \right| > 7$;

2.9 $|-2x + 3| < -5$;

2.10 $|-3x + 1| > -8$.

1.3 Função módulo. Definição e gráfico

Como já se referiu, o valor absoluto ou módulo de x representa-se por $|x|$ e é definido do seguinte modo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Função módulo

A função f definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

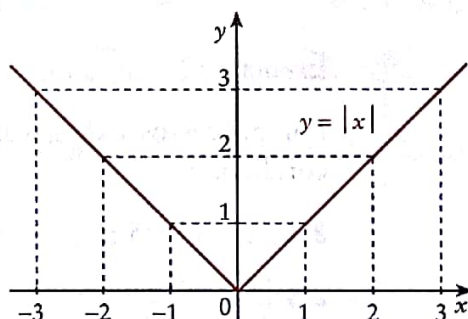
é chamada função módulo ou função valor absoluto.

O seu domínio é o conjunto dos números reais.

A função módulo é definida por dois ramos.

Representação gráfica da função módulo, $y = |x|$

O gráfico da função módulo, $y = |x|$, é formado por duas semi-rectas perpendiculares com origem no ponto de coordenadas $(0, 0)$.



Observação

Para representar analiticamente uma função definida por ramos é utilizada mais do que uma expressão analítica.



3.1 Considere a função f , de domínio $[-4, 4]$, definida por:

$$f(x) = -|x - 1| + 3$$

- Exprima $f(x)$ sem usar o símbolo de valor absoluto.
- Represente graficamente a função f .
- Indique o contradomínio da função f .
- Indique para a função f os zeros e os intervalos de monotonia.

Exemplo 3 Estudo de uma função módulo

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = |x + 1| - 3$$

3.1 Represente graficamente a função f sem recurso à calculadora gráfica.

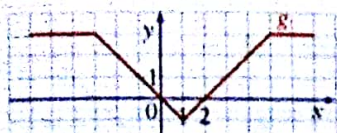
3.2 Indique para a função f :

3.2.1 o contradomínio;

3.2.2 os zeros;

3.2.3 os intervalos de monotonia.

3.2 Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida graficamente por:



a) Mostre que $g(x)$ é dada por:

$$\begin{cases} |x-1|-1 & \text{se } -3 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{se } x > 2 \vee x < -3 \end{cases}$$

Explique como procedeu, apresentando todos os cálculos.

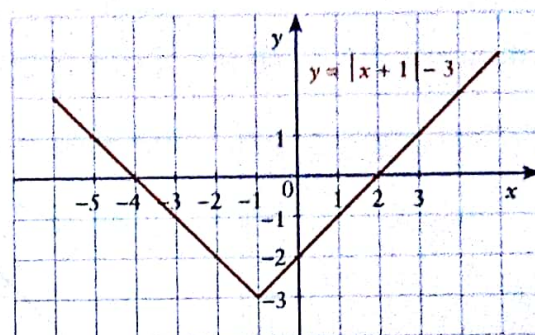
b) Para a função g indique os zeros e os intervalos de monotonia.

Resolução

3.1 $f(x) = \begin{cases} x+1-3 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1-3 & \text{se } x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-4 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

x	y = x - 2
-1	-3
2	0

x	y = -x - 4
-2	-2
-4	0



3.2.1 $D_f = [-3, +\infty[$;

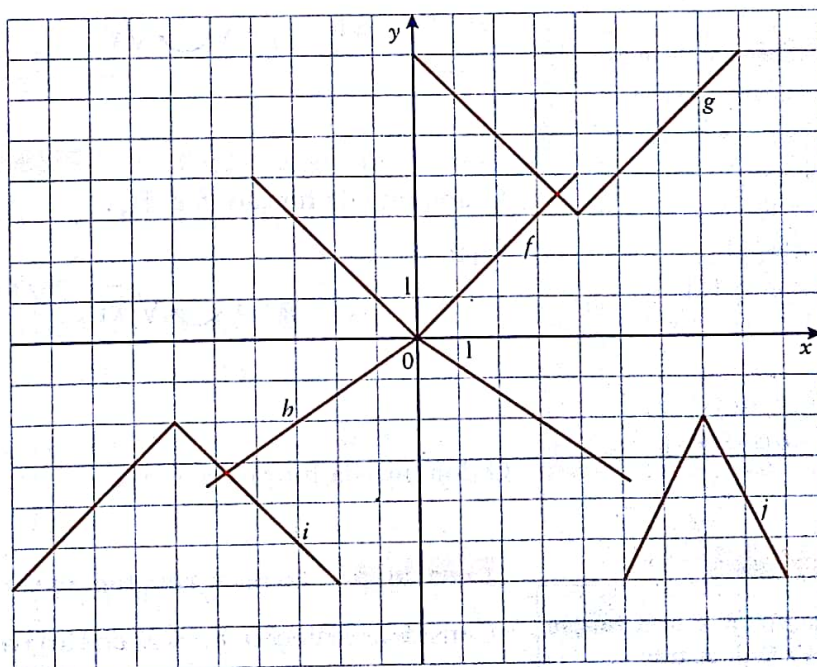
3.2.2 Zeros: -4 e 2;

3.2.3 Decrescente em $]-\infty, -1]$; crescente em $[-1, +\infty[$.

Exemplo 4 Identificar funções

A função f é definida por $f(x) = |x|$.

Escreva uma expressão algébrica que defina cada uma das outras funções representadas.



Resolução

$$g(x) = |x-1| + 1;$$

$$i(x) = -|x+1| + 1;$$

$$h(x) = -\left|\frac{2}{3}x\right| + 1;$$

$$j(x) = -|2(x-1)| + 1.$$



Use papel quadriculado para representar graficamente as seguintes funções:

4.1 $f(x) = -|x-3| + 5$;

4.2 $g(x) = -\left|\frac{1}{2}x\right| - 3$;

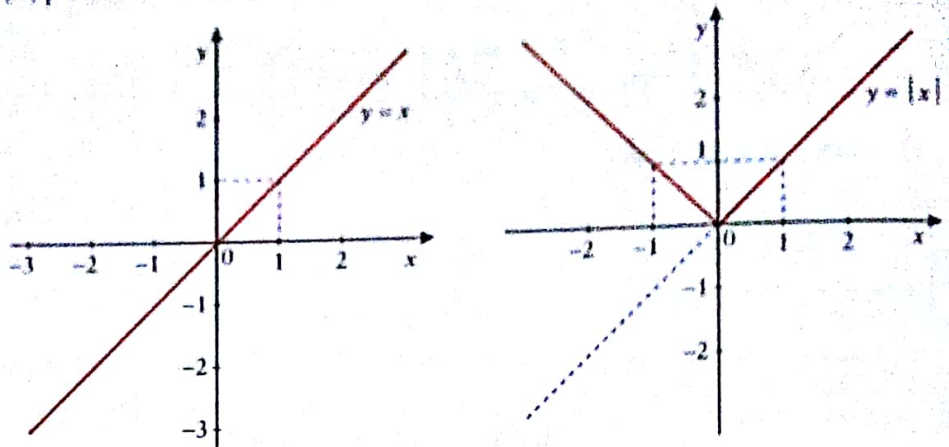
4.3 $h(x) = -2|x| + 3$;

4.4 $i(x) = -|2x-3| + 1$.

Confirme com a calculadora gráfica os seus gráficos.

1.4 Gráfico da função $|f(x)|$

O que acontecerá ao gráfico de uma função f se substituirmos $f(x)$ por $|f(x)|$?



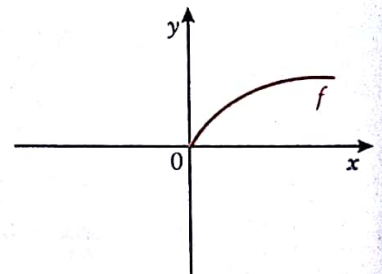
Na função $y = |x|$ as imagens são sempre positivas ou nulas. A parte do gráfico da função $y = x$ que estava “abaixo” do eixo das abscissas aparece simetricamente colocada relativamente ao eixo das abscissas.

1.5 Gráfico da função $f(|x|)$

Quando se substitui x por $|x|$, na expressão designatória de uma função, obtém-se uma nova função que é necessariamente uma função par.

Seja:

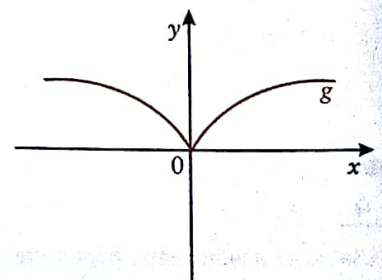
$$f: x \mapsto \sqrt{x}$$



O domínio da função f é $\mathbb{R}_0^+$.

Seja:

$$g: x \mapsto \sqrt{|x|}$$



O domínio da função g é $\mathbb{R}$.

Propriedades do módulo

1. $|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2$
2. $|x| \leq |a| \Leftrightarrow x^2 \leq a^2$
3. $|x| > |a| \Leftrightarrow x^2 > a^2$
4. $|x| \geq |a| \Leftrightarrow x^2 \geq a^2$
5. $|-a| = |a|$
6. $|ab| = |a| |b|$
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
8. $|a+b| \leq |a| + |b|$
9. $|a-b| = |b-a|$



Observação

Uma função f é uma **função par** se $\forall x \in D_f$ se tem:

$$f(-x) = f(x)$$

Uma função f é uma **função ímpar** se $\forall x \in D_f$ se tem:

$$f(-x) = -f(x)$$

Exemplo 5 Escrever uma função par

Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$$

5.1 Quantos zeros tem a função?

5.2 Quantos zeros tem a função g , sendo $g(x) = f(|x|)$? Verifique com a calculadora gráfica que a função é par.



5.1 Considere a função:

$$f: x \mapsto x^2 - 3x$$

Use a sua calculadora e obtenha as representações gráficas das funções definidas por:

a) $|f(x)|$;

b) $f(|x|)$.

Descreva o que observou.

5.2 Uma função pode ter três zeros e ser uma função par? Justifique procurando um exemplo.

Resolução

5.1 Seja $f(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$

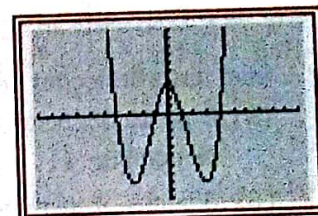
Esta função tem três zeros:

1, -1 e 4.

5.2 A função g , definida por $g(x) = (|x|^2 - 1)(|x| - 4)$, tem quatro zeros: 1, -1, 4 e -4.

A função g é par tal como se pode verificar na calculadora.

Sugestão: Verifique, por exemplo, que para $x = \frac{3}{4}$, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right)$.



Exemplo 6 Resolução de uma equação com módulos

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|-2x + 1| = 2|1 - x|$.

Resolução

$$|-2x + 1| = 2|1 - x| \Leftrightarrow |-2x + 1| = |2 - 2x|$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = 2 - 2x \vee -2x + 1 = -2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2x = 2 - 1 \vee -2x - 2x = -2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 0x = 1 \vee -4x = -3$$

$$\Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$



Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

6.1 $|x - 3| = |x - 1|$;

6.2 $2|x - 3| = -3|2x - 7|$.

Exemplo 7 Resolução de uma inequação

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $|x - 3| \leq 2|x - 1|$.

Resolução

$$|x - 3| \leq 2|x - 1| \Leftrightarrow |x - 3| \leq |2x - 2| \Leftrightarrow |x - 3| - |2x - 2| \leq 0$$

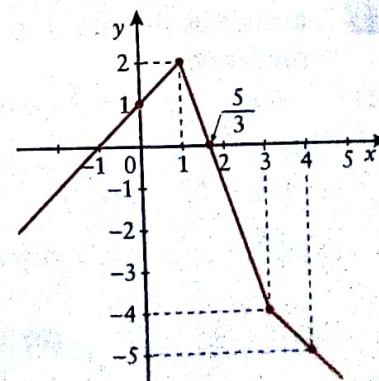
$$\text{Seja } f(x) = |x - 3| - |2x - 2|$$

$$f(x) = \begin{cases} (-x + 3) - (-2x + 2) & \text{se } x \leq 1 \\ (-x + 3) - (2x - 2) & \text{se } 1 < x < 3 \\ (x - 3) - (2x - 2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ -3x + 5 & \text{se } 1 < x < 3 \\ -x - 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Representa-se graficamente a função:

$$S =]-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$$



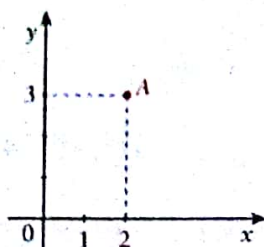
Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

7.1 $2|x - 3| \geq 3|x + 1|$;

7.2 $|x - 2|^2 - |x| \leq 0$.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1 No sistema cartesiano Oxy está representado o ponto A de coordenadas $(2, 3)$.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

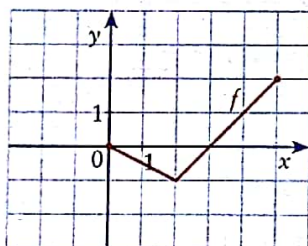
- (A) O ponto A pertence ao gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 1|$.
 (B) O ponto A pertence ao gráfico da função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 + 1$.
 (C) Há uma única função crescente, cujo gráfico contém o ponto A .
 (D) Sendo f a função definida por:

$$f(x) = |1 - x| - 4$$

o ponto A pertence ao gráfico da função g , definida por $g(x) = |f(x)|$.

10 pontos

- 2 Dada a função f , cujo gráfico é o seguinte:



pode afirmar-se que:

- (A) $D_f' = [0, 2]$; (B) $D_f' = [-1, 2]$;
 (C) $D_f = [0, 2]$; (D) $D_f = [-1, 2]$.

10 pontos

- 3 Considere as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

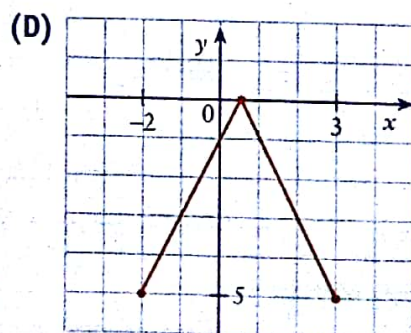
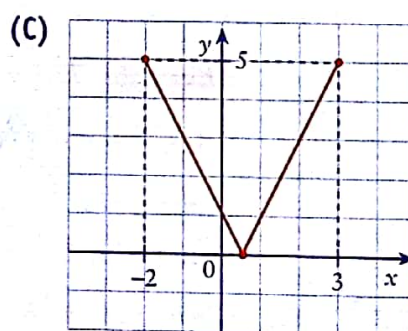
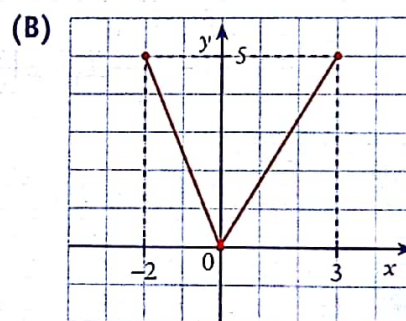
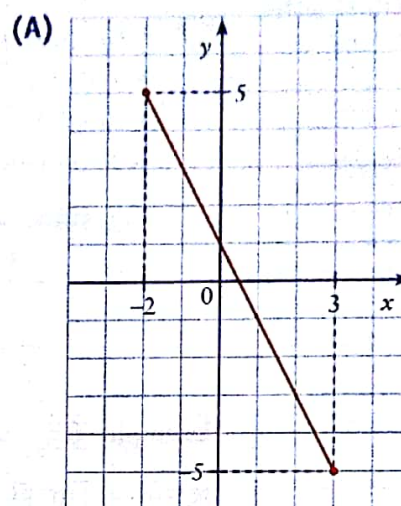
$$f(x) = |x - 1| \text{ e } g(x) = |2x - 3|.$$

Pode afirmar-se que o conjunto-solução da equação $f(x) = g(x)$ é:

- (A) $\left\{\frac{4}{3}, 1\right\}$; (B) $\left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$;
 (C) $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; (D) $\left\{\frac{4}{3}, 2\right\}$.

10 pontos

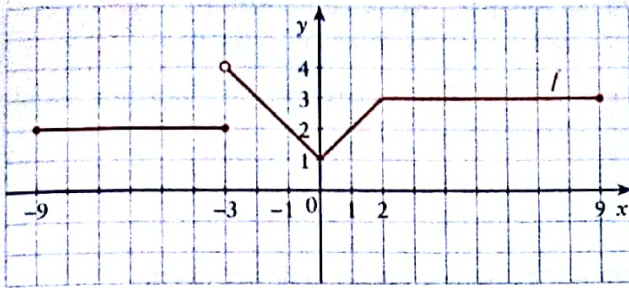
- 4 Considere a função real de variável real, de domínio $[-2, 3]$, definida por $f(x) = -2x + 1$. O gráfico da função g definida por $g(x) = |f(x)|$ é:



10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1 Considere a função f , de domínio $[-9, 9]$, representada graficamente por:



Escreva uma expressão analítica para a função f .

13 pontos

- 2 Represente graficamente a função g definida por:

2.1 $g(x) = |x + 1|$ de domínio $[-3, 2]$;

2.2 $g(x) = \begin{cases} |x - 3| - 1 & \text{se } x > 1 \\ x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

13 (5 + 8) pontos

- 3 Considere a função h , de domínio $[-5, +\infty[$, definida por $h(x) = 2|x + 3|$.

3.1 Represente graficamente a função h .

3.2 Determine uma expressão analítica para cada uma das seguintes funções e represente-as graficamente:

a) $f(x) = h(x - 1)$;

b) $g(x) = h\left(\frac{x}{2}\right)$.

21 (5 + 2 × 8) pontos

- 4 Para as funções definidas em 3., indique o domínio, o contradomínio, os zeros e os intervalos de monotonia.

14 pontos

- 5 Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

- 5.1 Faça um esboço do gráfico da função f .

- 5.2 Indique o contradomínio de f .

- 5.3 Determine os zeros de f .

- 5.4 Determine o contradomínio da função g , sendo $g(x) = |f(x)|$.

- 5.5 Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com o gráfico da função h definida por:

$$h(x) = -|3x|$$

45 (12 + 6 + 6 + 6 + 15) pontos

- 6 A Associação de Transportadores Rodoviários de Nampula (ASTRA) faz carreiras entre Nampula e Pemba, num percurso de 404 km. A tabela de preços praticados pela empresa é a seguinte:

Preços por cada 1000 kg de mercadoria	
Primeiros 100 km	1,00 Mt por km
Entre 100 km e 250 km	0,80 Mt por km
Entre 250 km e 330 km	0,50 Mt por km
Entre 330 km e 400 km	0,20 Mt por km
Entre 400 km e 430 km	0 Mt por km

- 6.1 Defina analiticamente e represente graficamente a função f em que a variável independente é a distância a percorrer e a variável dependente é o custo do transporte de 1000 kg de mercadoria, em metical.

- 6.2 Ao cliente Martins & C.^a, de Nampula, foi entregue uma carga de 3000 kg a 300 km de Nampula. Determine qual o valor pago por este cliente.

- 6.3 Uma empresa mista luso-moçambicana tem os seus armazéns a 175 km de Nampula. Defina analiticamente uma função que permita determinar o custo do transporte de x toneladas de Nampula para a empresa.

54 (26 + 13 + 15) pontos

Um olhar sobre a História

Jogar aos dados é uma actividade milenar, mas a compreensão dos fenómenos próprios dos jogos de azar não é tão velha... Tudo começou com jogos.

No século XVI, o grande matemático italiano Cardano, que era um jogador inveterado, escreveu um livro sobre jogos de dados, *Liber de ludo aleae*.

Em 1654, o Cavaleiro de Méré contactou Fermat e Pascal pedindo ajuda num assunto delicado. A sua pergunta era a seguinte:

Lançando 24 vezes um par de dados, qual é mais provável, que surja pelo menos um par de 6 ou que não surja nenhum?



Da resposta a esta pergunta dependia a sua estratégia de apostas.

Da correspondência entre os matemáticos nasce a área das probabilidades, que hoje tem aplicações diversificadas e importantes em muitos aspectos das nossas vidas.

Durante vários séculos tentou-se obter uma formalização das probabilidades que permitisse aplicar a este campo o grande arsenal matemático. Isso só aconteceu no século XX, quando o matemático russo Kolmogorov propôs uma base teórica elegante que foi universalmente aceite.



Girolamo Cardano
(1501-1576)



Pierre de Fermat
(1601-1665)



Blaise Pascal
(1623-1662)



Andrey Kolmogorov
(1903-1987)

2

Cálculo combinatório e probabilidades

1 Análise combinatória

2 Cálculo de probabilidades

Material:
Lápis e papel

Actividades de investigação

Registe a data de nascimento (dia e mês) de todos os elementos da sua turma. Quantos alunos fazem anos no mesmo dia?

Proceda a um estudo semelhante para outras turmas.

Escolha 30 matemáticos famosos e proceda da mesma forma.

A partir de quantas pessoas é mais provável haver duas com o mesmo aniversário do que todas com aniversários diferentes?

Objectivos

1. Aplicar fórmulas de factorial, arranjos, combinações e permutações para resolver problemas.
2. Distinguir arranjos, permutações e combinações.
3. Aplicar a fórmula de Newton para efectuar o desenvolvimento de $(x + y)^n$, sendo n natural.

1. Análise combinatória



Praia de Pangane, Moçambique

1.1 Factorial de um número natural

Factorial de um número natural

Chama-se factorial de um número natural n , e representa-se por $n!$, ao produto:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Assim:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8!$$

...

$$1! = 1$$

Convencionou-se que:

$$0! = 1$$

Em alguns cálculos da análise combinatória usa-se o factorial, por isso devemos familiarizar-nos com esta escrita.

A calculadora também permite o cálculo rápido do factorial de um número natural.

5!	120
8!	40320
10!	3628800

1.2 Permutações

Suponhamos que cinco amigas se queriam sentar num banco de jardim.



De quantas formas diferentes o podiam fazer?

A cada uma das pessoas vamos atribuir um dos números:

1 2 3 4 5

A esta sequência chama-se **permutação principal**.

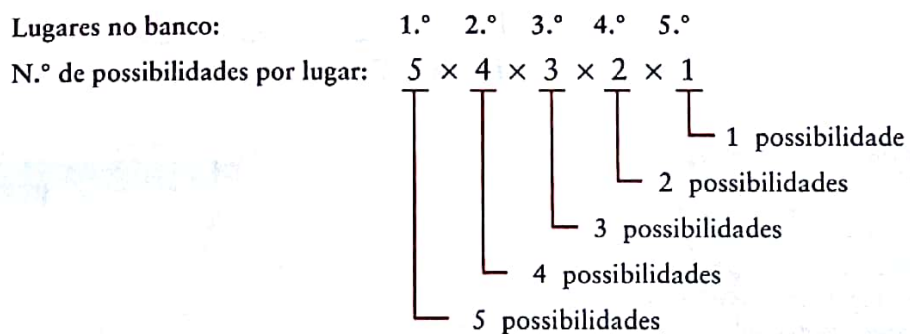
Para obtermos outras permutações basta trocar a ordem de pelo menos dois elementos.

São permutações destes cinco elementos:

1 2 4 3 5 ou 2 3 4 5 1

Mas para a resolução do problema não nos interessa escrever as permutações, mas sim saber quantas existem.

O número total de permutações representa-se por P_5 (ler: “permutações de 5”) e pode calcular-se atendendo ao seguinte esquema:



Há cinco possibilidades para ocupar o primeiro lugar do banco, quatro para o segundo e assim sucessivamente.

$$P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1;$$

$$P_5 = 5!;$$

$$P_5 = 120.$$

De um modo geral:

Permutações de n elementos

Chamam-se permutações de n elementos a todas as sequências diferentes que é possível obter com os n elementos.

O número dessas sequências representa-se por P_n (ler: "permutações de n ").

$$P_n = n!$$

Assim:

$$P_7 = 7! ;$$

$$P_{10} = 10! ;$$

$$P_1 = 1! = 1 .$$

Exemplo 1 Numa competição

Numa competição participam oito equipas.

Não havendo equipas empatadas, de quantas formas diferentes se pode apresentar a classificação final?

Resolução

Temos oito equipas.

Para o 1.º lugar temos oito possibilidades.

Para o 2.º lugar temos sete possibilidades.

...

$$\frac{1.^\circ}{8} \times \frac{2.^\circ}{7} \times \frac{3.^\circ}{6} \times \frac{4.^\circ}{5} \times \frac{5.^\circ}{4} \times \frac{6.^\circ}{3} \times \frac{7.^\circ}{2} \times \frac{8.^\circ}{1}$$



1.1 Calcule:

$$\frac{P_3 + P_5}{3!}$$

1.2 Escreva todas as permutações diferentes que é possível obter com as letras:

a, b, c .

1.3 Utilizando todas as letras da palavra "BONITA" quantas palavras diferentes, com ou sem significado, se podem formar?

$$8! = 40320$$

Logo, temos:

$$P_8 = 8! = 40\,320$$

possibilidades diferentes de classificação final.

1.3 Arranjos sem repetição

Consideremos o seguinte problema:

Numa turma com seis meninas, vai ser eleita uma para chefe de turma e outra para subchefe. Quantas formas diferentes há de fazer a eleição?

Se representarmos as meninas pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, cada forma de eleição será representada por um número de dois algarismos.

Algumas dessas possibilidades serão:

12; 21; 13; 31; 45; ...

A cada uma destas sequências chama-se arranjo sem repetição de seis dois a dois.

Como temos de ocupar dois lugares diferentes e temos seis pessoas, há seis possibilidades para o 1.º lugar e cinco possibilidades para o 2.º lugar:

Chefe de turma	Subchefe
6	5

Logo, há $6 \times 5 = 30$ formas diferentes de fazer a eleição.

De um modo geral, temos:

Arranjos sem repetição

Dados n elementos quaisquer, chama-se arranjos sem repetição dos n elementos p a p a todas as sequências que é possível obter com p elementos escolhidos arbitrariamente entre os n dados.

O número de todas as sequências designa-se por nA_p (ler “arranjos de n , p a p ”).



2.1 Calcule:

a) 6A_2 ;

b) 5A_3 ;

c) ${}^{10}A_4$.

2.2 Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, escreva todos os números possíveis de dois algarismos diferentes.

Exemplo 2 Para calcular

Calcule: 5A_2 , 7A_3 e ${}^{10}A_6$.

Resolução

$${}^5A_2 = 5 \times 4 = 20$$

$${}^7A_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$${}^{10}A_6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\,200$$

5	nPr 2	20
7	nPr 3	210
10	nPr 6	151200

De um modo geral:

$${}^nA_p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

Consequências da definição:

• **Comer:**

$${}^nA_p = n(n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

é possível escrever uma fórmula para nA_p usando o símbolo factorial.

$${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad n \geq p$$

- Quando $n = p$, ${}^nA_p = P_n$. Assim, as P_n são um caso particular de nA_p .

$${}^nA_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = P_n$$

Logo:

$${}^nA_n = P_n$$

Exemplo 3 Determinar n

Determine n , sabendo que ${}^nA_2 = 420$.

Resolução

$${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}; \quad {}^nA_2 = 420$$

$$420 = \frac{n!}{(n-2)!} \Leftrightarrow 420 = \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})!} \quad (n-2)! \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 420 = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - n - 420 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 420}}{2}. \text{ Como } n > 0, \text{ vem } n = 21.$$

Verificação: ${}^{21}A_2 = 21 \times 20 = 420$.



Determine n , sabendo que:

$${}^{42}A_3 = {}^nA_5$$

Exemplo 4 A distribuição das medalhas

Numa prova final de natação vão participar sete nadadores, que disputam as medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas formas diferentes se podem repartir estes três prémios? (Não se admitem empates.)

Resolução

Trata-se de calcular o número de arranjos de 7, 3 a 3.

$${}^7A_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

Logo, há 210 formas diferentes de distribuir os três prémios.



Quantos números de quatro algarismos diferentes existem, no sistema de numeração decimal, que não tenham nenhum zero?

1.4 Arranjos com repetição

Na linguagem dos computadores usa-se o código binário que é caracterizado pela utilização de apenas dois algarismos, 0 e 1, na escrita dos números.

- Quantas mensagens diferentes podemos escrever com os dois algarismos?

00 ; 01 ; 10 ; 11

Com dois algarismos pode-se escrever quatro mensagens diferentes.

- Quantas mensagens diferentes podemos escrever com três algarismos?

00 $\begin{cases} 0 & \text{---} & 000 \\ 1 & \text{---} & 001 \end{cases}$

01 $\begin{cases} 0 & \text{---} & 010 \\ 1 & \text{---} & 011 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 0 & \text{---} & 100 \\ 1 & \text{---} & 101 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 0 & \text{---} & 110 \\ 1 & \text{---} & 111 \end{cases}$

Portanto, com três algarismos podemos escrever oito mensagens:

000, 001, 100, 101, 010, 011, 110 e 111.

- Quantas mensagens podemos escrever com cinco algarismos?

Observando que quando acrescentamos um algarismo podemos escrever o dobro das mensagens que escrevemos antes, tem-se:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

Logo, com cinco algarismos podemos escrever 32 mensagens.

- Quantas mensagens podemos escrever com p algarismos?

Por analogia com os casos anteriores conclui-se que, em geral, com p algarismos podemos escrever 2^p mensagens.

Ao número 2^p chama-se arranjos com repetição de 2 elementos p a p e representa-se por 2A_p .

Arranjos com repetição

Dados n elementos quaisquer, $a_1, a_2, \dots, a_n$, chama-se arranjos com repetição de n elementos p a p a todas as sequências de p elementos, sendo estes diferentes ou não, que se podem formar com os n elementos dados.

 Observação

Repare que:

$a_1 a_2 a_1$ e $a_1 a_1 a_2$ são sequências diferentes de três elementos.

De um modo geral, temos:

$${}^nA_p = n^p$$

1.5 Combinações sem repetição

• Definição

A diferença entre as combinações sem repetição e os arranjos sem repetição está em que nas combinações não interessa a ordem.

Consideremos o seguinte problema:

A travessia de um rio é feita através de um pequeno barco onde, além do remador, só podem ser transportadas duas pessoas. Há um grupo de seis pessoas para transportar. De quantas maneiras diferentes se pode fazer o transporte?



Na resolução deste problema a ordem não interessa. Levar o António e a Joaquina corresponde à mesma situação que levar a Joaquina e o António.

Assim, o número de formas diferentes de transportar os seis elementos corresponde ao número de subconjuntos de dois elementos que é possível definir num conjunto com seis elementos. Sabemos calcular o número de sequências ordenadas de dois elementos. Mas, cada subconjunto de dois elementos dá origem a duas sequências.

Logo, temos de dividir 6A_2 por 2 :

$$\text{Número de subconjuntos: } \frac{{}^6A_2}{2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

A este número chama-se **combinações sem repetição** de 6, 2 a 2 e representa-se por:

$${}^6C_2 \text{ ou por } \binom{6}{2}, \text{ sendo } {}^6C_2 = \frac{{}^6A_2}{2!}.$$

De um modo geral, tem-se: ${}^nC_p = \frac{{}^nA_p}{p!}, n \geq p$

Combinações sem repetição

nC_p ou $\binom{n}{p}$ é igual ao número de subconjuntos, com p elementos, que se podem formar num conjunto com n elementos.



5.1 Calcule:

a) $\binom{6}{4}$;

b) ${}^{30}C_0$;

c) ${}^{100}C_{100}$;

d) $\frac{{}^{33}C_{10} \times P_{23}}{{}^{34}A_8 \times {}^{25}C_{10} \times P_{15}}$.

5.2 Verifique que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) ${}^nC_0 = 1$;

b) ${}^nC_n = 1$;

c) ${}^nC_1 = n$.

Como ${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$, vem:

$${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 5 Para calcular

Calcule 5C_3 .

Resolução

$${}^5C_3 = \frac{{}^5A_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$$

$${}^5nC_r \quad 3 \quad 10$$



- 6.1 Uma aposta de totoloto consiste em assinalar seis números escolhendo-os de 1 a 49.

Quantas apostas diferentes se podem fazer?

- 6.2 De 10 operários vão ser escolhidos 5 para irem trabalhar numa obra.

Quantos grupos diferentes se podem formar?

Exemplo 6 Escolher uma comissão

De quantas formas diferentes se pode escolher uma comissão de cinco professores de entre os 200 professores de uma escola?

Resolução

Na escolha dos cinco professores não interessa a ordem. É indiferente escolher os professores A, B, C, D e E ou B, A, C, D e E.

Logo, trata-se de calcular:

$${}^{200}C_5 = \frac{200!}{5! 195!} = 2\,535\,650\,040$$

Podemos escolher de 2 535 650 040 formas diferentes cinco professores de entre os 200 de uma escola.

200 nCr 5	
	2535650040

Exemplo 7 Escolher representantes

Numa turma de 20 alunos sendo 8 rapazes e 12 raparigas vão ser escolhidos 3 para representar a turma numa reunião com o Conselho Pedagógico.

Quantos grupos diferentes podem ser formados, sabendo que:

7.1 o grupo é formado só por raparigas?

7.2 a chefe de turma terá de fazer parte do grupo?

Resolução

Atendendo a que não há cargos distribuídos, a ordem da escolha não interessa.

7.1 Pretende-se escolher o grupo de 3 entre as 12 raparigas:

$${}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220$$

7.2 Uma vez que a chefe da turma faz parte do grupo, trata-se de escolher dois alunos entre os restantes 19.

Logo, trata-se de calcular:

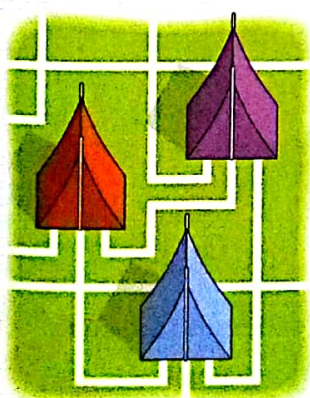
$${}^{19}C_2 = \frac{19 \times 18}{2} = 171$$

12 nCr 3	
19 nCr 2	
	220
	171



Num parque de campismo há várias tendas.

Cada tenda está ligada a cada uma das outras por um caminho.



Sabendo que há 120 caminhos diferentes, quantas tendas há no parque?

1.6 Triângulo de Pascal

Observação

O esquema triangular ao lado foi apresentado por Pascal, matemático francês, e por Tartaglia, matemático italiano.



Tartaglia
(1500-1557)



Pascal
(1623-1662)

Os valores resultantes de nC_p ($n, p \in \mathbb{N}_0$ e $n \geq p$) podem ser dispostos em forma de triângulo, do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & n=0 \\
 & & & & & & {}^nC_0 & \\
 & & & & & {}^1C_0 & {}^1C_1 & n=1 \\
 & & & & {}^2C_0 & {}^2C_1 & {}^2C_2 & n=2 \\
 & & & {}^3C_0 & {}^3C_1 & {}^3C_2 & {}^3C_3 & n=3 \\
 & & {}^4C_0 & {}^4C_1 & {}^4C_2 & {}^4C_3 & {}^4C_4 & n=4 \\
 & {}^5C_0 & {}^5C_1 & {}^5C_2 & {}^5C_3 & {}^5C_4 & {}^5C_5 & n=5 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Calculando os respectivos valores, obtemos:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

A esta representação dos valores de nC_p chama-se Triângulo de Pascal.

Propriedades das combinações

Da observação do Triângulo de Pascal resulta que:

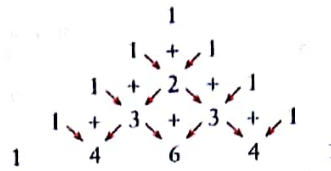
1.º Em cada linha o primeiro e o último elementos são 1.

$${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$$

2.º Em cada linha os elementos equidistantes dos extremos são iguais.

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$$

3.º Cada elemento (com exceção dos extremos) é igual à soma dos dois elementos que estão por cima, na linha anterior.



$${}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$$

4.º A soma dos elementos da linha correspondente a determinado valor de $n \in \mathbb{N}_0$ é igual a 2^n .

$$\begin{array}{lcl} n=0 & 1 & = 1 = 2^0 \\ n=1 & 1 + 1 & = 2 = 2^1 \\ n=2 & 1 + 2 + 1 & = 4 = 2^2 \\ n=3 & 1 + 3 + 3 + 1 & = 8 = 2^3 \\ n=4 & 1 + 4 + 6 + 4 + 1 & = 16 = 2^4 \end{array}$$

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 2^n$$

Um conjunto com n elementos tem exactamente 2^n subconjuntos.



8

8.1 Observe o esquema seguinte:

① → linha $n = 0$

① ① → linha $n = 1$

① ② ① → linha $n = 2$

① ③ ③ ① → linha $n = 3$

Construa a 7.ª linha do Triângulo de Pascal ($n = 6$) e calcule a soma dos elementos da 8.ª linha.

8.2 O quarto número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 22 100.

A soma dos quatro primeiros números dessa linha é 23 479.

Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

8.3 Um conjunto tem exactamente 128 subconjuntos. Justifique que este conjunto tem tantos subconjuntos de três elementos como de quatro elementos.

8.4 Determine n , sabendo que:

$$2 \times {}^nC_2 = 5 \times {}^{n-2}C_2$$

Exemplo 8 Questão de escolha múltipla

A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 172.

Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

(A) 153

(B) 171

(C) 19

(D) 969

Resolução

A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos três primeiros: 1, a e b .

$$1 \quad a \quad b \quad \dots \rightarrow \text{Três primeiros elementos}$$

$$1 \quad a+1 \quad a+b \quad \dots \rightarrow \text{Três primeiros elementos da linha seguinte}$$

$$1 + a + b = 172 \Leftrightarrow a + b = 171$$

O terceiro elemento da linha seguinte é 171.

Resposta: (B)

1.7 Binómio de Newton

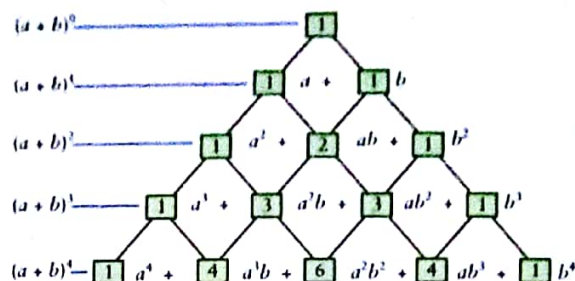
Observemos o seguinte padrão:

Observação

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b)^2 \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 \\ = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$



Notemos que no desenvolvimento de $(a + b)^n$ se tem:

- o grau do polinómio do desenvolvimento de $(a + b)^n$ é n ;
- os coeficientes são os números de uma linha do Triângulo de Pascal.

De um modo geral, tem-se:

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^nC_{n-1} a b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

Fórmula do binómio de Newton

Ou seja:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n {}^nC_p a^{n-p} b^p$$



Desenvolva e simplifique:

9.1 $(2a + b)^5$;

9.2 $\left(3 + \frac{x}{3}\right)^5$;

9.3 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4$,
($x \geq 0$ e $y \geq 0$).

Exemplo 9 Desenvolvimento da potência de um binómio

Desenvolva $(x - 3)^6$.

Resolução

$$(x - 3)^6 = {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 \times (-3) + {}^6C_2 x^4 \times (-3)^2 + {}^6C_3 x^3 \times (-3)^3 + \\ + {}^6C_4 x^2 \times (-3)^4 + {}^6C_5 x \times (-3)^5 + {}^6C_6 \times (-3)^6$$

$$(x - 3)^6 = x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 729$$

Propriedades do binómio de Newton

Observando a fórmula e atendendo às propriedades das combinações estudadas, podemos concluir que:

- o desenvolvimento de $(a + b)^n$ tem $n + 1$ termos;
- no desenvolvimento de $(a + b)^n$ os coeficientes dos termos igualmente afastados dos extremos são iguais. Se n é par haverá um termo médio e, portanto, terão de se calcular os coeficientes até esse termo, inclusive.
- o termo de ordem $p + 1$ é T_{p+1} , sendo:
 $T_{p+1} = {}^nC_p a^{n-p} b^p$ ou $T_p = {}^nC_{p-1} a^{n-p+1} b^{p-1}$.

Estas expressões permitem calcular qualquer termo, conhecida a sua ordem, sem que seja necessário escrever todo o desenvolvimento.



10

10.1 Indique quantos termos tem o desenvolvimento do binómio:

$$(2 + a)^{21}$$

10.2 Determine o oitavo termo do desenvolvimento de:

$$(\sqrt{3}x + 1)^{13} \quad (x \geq 0)$$

10.3 Determine o termo médio do desenvolvimento de:

$$(3x + y)^6$$

10.4 Determine n sabendo que no desenvolvimento de $(x + y)^n$ há um termo cuja parte literal é:

$$x^{10}y^5$$

Exemplo 10 Escrever termos

Escreva o termo médio do desenvolvimento de:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{b}\right)^8, \text{ sendo } a \geq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Resolução

O desenvolvimento do binómio tem nove termos.

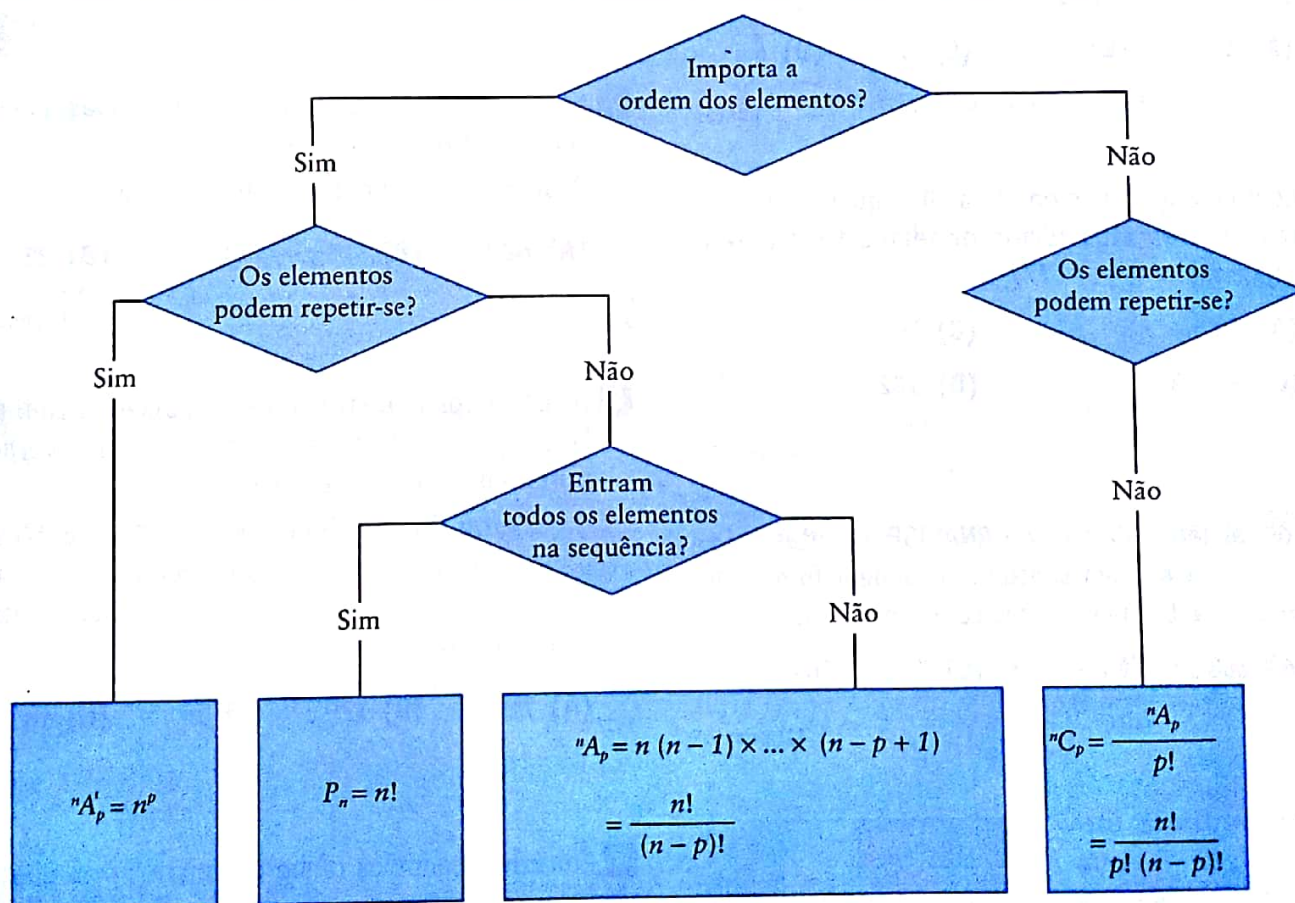
O termo médio é o 5.º termo que se obtém para $p = \frac{8}{2} = 4$.

$$T_{p+1} = {}^8C_p \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^{8-p} \left(\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^p$$

$$T_5 = {}^8C_4 \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{b}\right)^4$$

$$T_5 = 70 \times \frac{a^2}{16} \times \frac{4}{b^2} = \frac{35a^2}{2b^4}$$

Síntese



$$\bullet {}^nC_0 = {}^nC_n = 1; \quad {}^nC_p = {}^nC_{n-p};$$

$$\bullet {}^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}; \quad {}^nC_0 + {}^nC_1 + \dots + {}^nC_n = 2^n$$

$$\bullet (a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^nC_{n-1} a b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

- 1** Dispomos de nove cores diferentes e pretendemos pintar três quadrados congruentes de cores diferentes.



De quantas formas diferentes o podemos fazer?

(A) 504 ; (B) 42 ; (C) 27 ; (D) 729 .

7 pontos

- 2** Com os símbolos das operações $\times$, $+$ e $-$ completam-se os espaços em branco na expressão seguinte, sem repetir os símbolos.

2 3 4 5

Quantos valores numéricos diferentes é possível obter para a expressão?

(A) 10 ; (B) 9 ; (C) 8 ; (D) 6 .

7 pontos

- 3** Com os algarismos de 1 a 9, quantos números de três algarismos podemos formar que sejam maiores que 777 ?

(A) 70 ; (B) 9A_3 ;
(C) $3! \times 3! \times 2!$; (D) 182 .

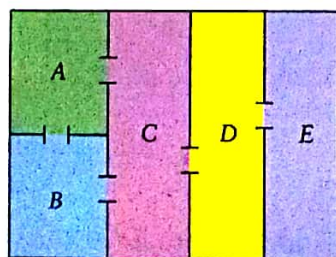
10 pontos

- 4** Com as letras da palavra ANÁLISE, quantas palavras, com ou sem sentido, se podem formar de modo que tenham as três consoantes juntas?

(A) 288 ; (B) 360 ; (C) 720 ; (D) 576 .

11 pontos

- 5** Um jardim é formado por 5 canteiros, como se mostra na figura. O canteiro A tem ligação com B e C.



C tem ligação com A, B e D. D tem ligação com C e E.

Dispomos de seis espécies de flores diferentes. De quantas formas diferentes podemos decorar o jardim de modo que cada canteiro que tenha ligação com o outro fique com flores de tipos diferentes?

(A) 720 ; (B) 3600 ; (C) 3000 ; (D) 480 .

10 pontos

- 6** O Mosse não se recorda do telefone da Ana. Sabe que os dois primeiros algarismos são 82, por esta ordem, e, dos outros sete algarismos, sabe que tem três 2, dois 5 e dois 9.

Quantas chamadas, no máximo, tem de fazer para conseguir telefonar à Ana?

(A) 210 ; (B) 15 120 ; (C) 5040 ; (D) 420 .

8 pontos

- 7** Numa reunião encontram-se sete pessoas que se cumprimentaram umas às outras.

Quantos cumprimentos foram trocados?

(A) 42 ; (B) 14 ; (C) 7 ; (D) 21 .

7 pontos

- 8** Os primeiros-ministros de sete países, incluindo Moçambique, Portugal, Angola e Cabo Verde, sentaram-se numa mesa em fila.

De quantas formas diferentes se podem sentar se o moçambicano e o português querem ficar juntos e o cabo-verdiano e o angolano querem ficar nos extremos?

(A) 72 ; (B) 120 ; (C) 96 ; (D) 48 .

8 pontos

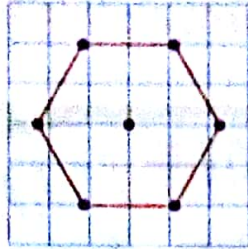
- 9** Considere todos os números ímpares com quatro algarismos. Quantos desses números têm exatamente dois algarismos pares?

(A) 1625 ; (B) 1875 ; (C) 625 ; (D) 1040 .

10 pontos

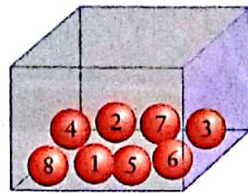
QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1** Dados sete pontos, correspondentes ao centro e aos vértices de um hexágono regular, determine o número de triângulos que se podem desenhar com vértices nesses pontos.



8 pontos

- 2** Numa caixa há oito bolas numeradas de 1 a 8. Retiramos uma bola da caixa, registamos o número e colocamos de novo a bola na caixa. Repetimos o procedimento quatro vezes. Quantos resultados diferentes é possível obter?



7 pontos

- 3** Um restaurante seleccionou três entradas, cinco pratos e seis sobremesas. O dono do restaurante pretende ordenar a ementa colocando primeiro as entradas, depois os pratos e finalmente as sobremesas. De quantas formas diferentes pode ordenar a ementa?

7 pontos

- 4** Numa sorveteria servem-se gelados. Estão disponíveis seis sabores diferentes.

- 4.1** O Ramos vai pedir um gelado com três bolas como se mostra na figura.



Quantos gelados diferentes pode pedir se:

- a) as bolas são todas diferentes;
b) pelo menos uma bola é diferente das outras duas.

7 pontos

- 4.2** Resolva o problema 4.1 considerando agora que o gelado é idêntico ao da figura.



13 pontos

- 5** Das permutações que é possível fazer com as letras da palavra AMORES, quantas começam por S ? E por vogal?

9 pontos

- 6** Uma turma da 12.ª classe tem 17 alunos dos quais 10 são rapazes.

O professor de Matemática pretende indicar cinco alunos para fazerem um trabalho sobre história das probabilidades.

Determine de quantas formas o pode fazer se o grupo dos cinco alunos:

- 6.1** tem só rapazes;

6 pontos

- 6.2** tem só raparigas;

6 pontos

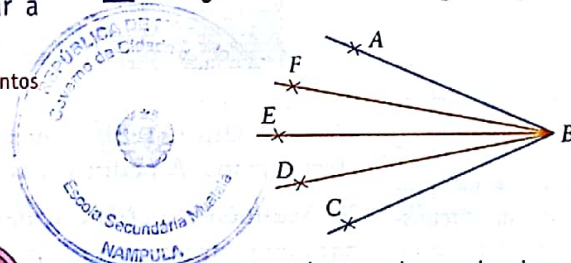
- 6.3** tem pelo menos dois rapazes e pelo menos duas raparigas;

9 pontos

- 6.4** tem pelo menos duas raparigas.

12 pontos

- 7** Na figura, ABC é um ângulo agudo.



Quantos ângulos agudos pode observar na figura?

9 pontos

- 8** Calcule o 7.º termo do desenvolvimento de:

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^{14}$$

10 pontos

- 9** A soma dos três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal é 106.

Qual é a soma dos dois primeiros elementos dessa linha?

10 pontos

Objectivos

1. Reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios.
2. Aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida.
3. Calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento.
4. Aplicar as propriedades de frequência relativa para o cálculo de probabilidades.
5. Calcular probabilidades de acontecimentos incompatíveis e equiprováveis.
6. Resolver problemas de determinação da probabilidade de um acontecimento em casos simples.

2. Cálculo de probabilidades



2.1 Experiências aleatórias e experiências deterministas

Considerem-se as duas experiências seguintes:

1.^a experiência

Atirar uma pedra a um lago.



2.^a experiência

Lançar uma moeda ao ar.



6 Observação

1. Uma experiência é um processo, ou conjunto de circunstâncias, capaz de produzir resultados observáveis.

2. A palavra *aleatório* deriva da palavra latina *alea* que significa sorte, risco ou acaso.

«*Alea jacta est*»
(«A sorte está lançada»)

3. Acaso significa ausência de causa.

4. Segundo Moore (1996), "aleatório" no vocabulário da Estatística não significa "acidental", mas refere-se a uma espécie de ordem que emerge só ao fim de um grande número de repetições (*in the long run*...).

Na primeira experiência, já conhecemos o resultado mesmo antes de a efectuarmos. A pedra vai ao fundo.

Na segunda experiência, não podemos afirmar qual das faces fica voltada para cima antes de termos efectuado a experiência.

À primeira experiência chamamos **determinista** ou **causal**.

À segunda experiência chamamos **aleatória** ou **casual**.

Experiência determinista (ou causal)

As experiências deterministas ou causais caracterizam-se por produzirem o mesmo resultado, desde que sejam repetidas sob as mesmas condições.

Experiência aleatória (ou fenómeno aleatório)

As experiências aleatórias são experiências cujo resultado, apesar de se encontrar entre um conjunto de resultados conhecidos à partida, não se conhece antes de se realizar a experiência, ainda que esta seja realizada sob as mesmas condições.

Observe-se que esta incerteza depende da intervenção do acaso. Contudo, apesar de se tratarem de fenômenos incertos, admite-se que se pode encontrar um padrão de comportamento.

A teoria das probabilidades ocupa-se do estudo das leis que regem os fenômenos cujo resultado depende do acaso. Por isso, só as experiências aleatórias interessam ao estudo das probabilidades.

2.2 Espaço de resultados. Acontecimentos

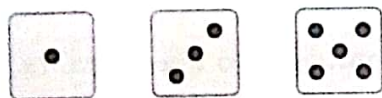
Relativamente à experiência aleatória que consiste em observar o resultado do lançamento de um dado, tem-se:



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

S é o espaço de resultados, conjunto de resultados ou espaço amostral.

Espaço amostral S é o conjunto de todos os resultados possíveis, associados a uma experiência aleatória.



Considerando a experiência aleatória que consiste em lançar um dado e observar se sai um número ímpar, temos:

$$A = \{1, 3, 5\}; A \subset S. A \text{ é um acontecimento.}$$

Acontecimento de uma experiência aleatória é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Alguns acontecimentos têm nomes específicos:

- **Acontecimento elementar**

Se o resultado de uma experiência consta de um só elemento do espaço de resultados, dizemos que se trata de um acontecimento elementar.

No espaço amostral S , $B = \{2\}$ é um acontecimento elementar.

- **Acontecimento composto**

Se o resultado de uma experiência consta de dois ou mais elementos do espaço de resultados, dizemos que se trata de um acontecimento composto.

No espaço de resultados S , $A = \{1, 3, 5\}$ é um acontecimento composto.

- **Acontecimento certo**

Se o resultado de uma experiência consta de todos os elementos do espaço de resultados, dizemos que se trata de um acontecimento certo.

Na experiência anterior, S é um acontecimento certo.

- **Acontecimento impossível**

Se o resultado de uma experiência não tem qualquer elemento do espaço de resultados, dizemos que se trata de um acontecimento impossível.

Observação

1. Ao conjunto de resultados também se pode chamar **espaço de resultados, espaço amostral** ou **universo amostral**.

2. O espaço de resultados pode ser discreto ou contínuo.

Neste capítulo só estudaremos espaços de resultados discretos e finitos, ou seja, aqueles que têm um número finito de elementos.

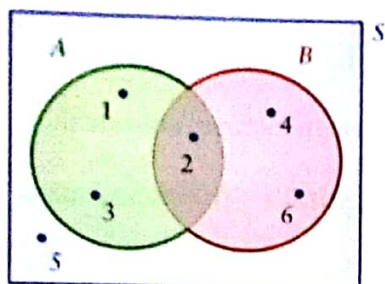
2.3 Operações com acontecimentos

Existe paralelismo entre as operações com conjuntos e as operações com acontecimentos. No entanto, utiliza-se uma linguagem própria para os acontecimentos.

Reunião de dois acontecimentos

Reunião ou união dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A ou B se realizam.

Representa-se por $A \cup B$ ou por $(A \text{ ou } B)$.



Sendo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

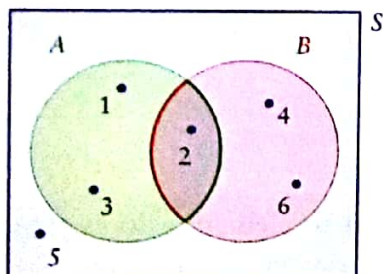
$B = \{2, 4, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Intersecção de dois acontecimentos

Intersecção dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A e B se realizam simultaneamente.

Representa-se por $A \cap B$ ou por $(A \text{ e } B)$.



Sendo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

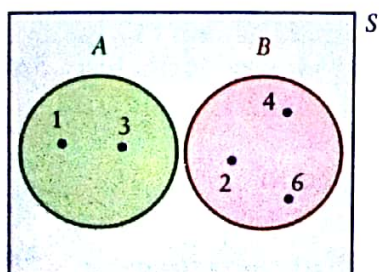
$B = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B = \{2\}$

Se $A \cap B$ é um acontecimento impossível, os acontecimentos A e B dizem-se acontecimentos disjuntos, acontecimentos incompatíveis ou acontecimentos mutuamente exclusivos.

Acontecimentos incompatíveis ou disjuntos

Acontecimentos disjuntos, incompatíveis ou mutuamente exclusivos são acontecimentos em que a realização de um deles implica a não realização do outro.



Sendo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3\}$

$B = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B = \emptyset$

A e B são disjuntos, mutuamente exclusivos ou incompatíveis.

Se dois acontecimentos A e B são disjuntos, então $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $A \cap B$ é um acontecimento impossível.

Acontecimentos contrários ou complementares

O acontecimento contrário do acontecimento A representa-se por $\bar{A}$ e é o acontecimento constituído por todos os resultados de S que não pertencem a A .

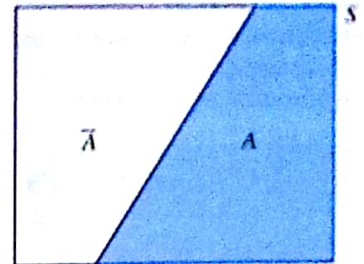
Sendo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{A} = \{4, 5, 6\}$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

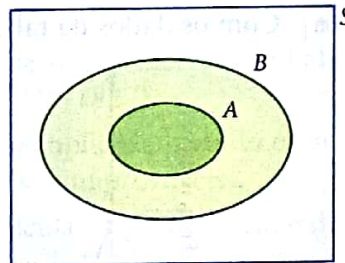
$$A \cup \bar{A} = S$$



Acontecimento A implica B

O acontecimento A implica a realização do acontecimento B quando todo o resultado de A é um resultado de B .

Escreve-se $A \subset B$.



Acontecimento diferença entre A e B

Acontecimento diferença entre A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que B se realize.

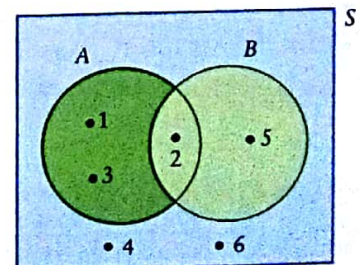
Representa-se por $A - B$ ou $A \setminus B$.

Sendo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 5\}$$

$$A - B = A \setminus B = \{1, 3\}$$



Observação

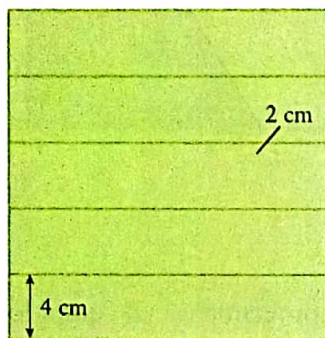
Repare que o acontecimento diferença entre os acontecimentos A e B também pode representar-se por $A \cap \bar{B}$.

Aos elementos de A retiram-se os elementos de B .

Observação

A experiência do conde de Buffon e o número π

Buffon, século XVIII, estudou a probabilidade de ao lançar uma agulha, de 2 cm de comprimento, sobre uma folha de papel com linhas separadas de 4 cm, a agulha intersectar uma das linhas.



Prova-se que a probabilidade de a agulha intersectar a linha é $\frac{1}{\pi}$. Assim, esta experiência é mais um método de determinar um valor aproximado de π .

2.4 Definição frequencista de probabilidade

Experiência

Efectuou-se a seguinte experiência com um pequeno prego:

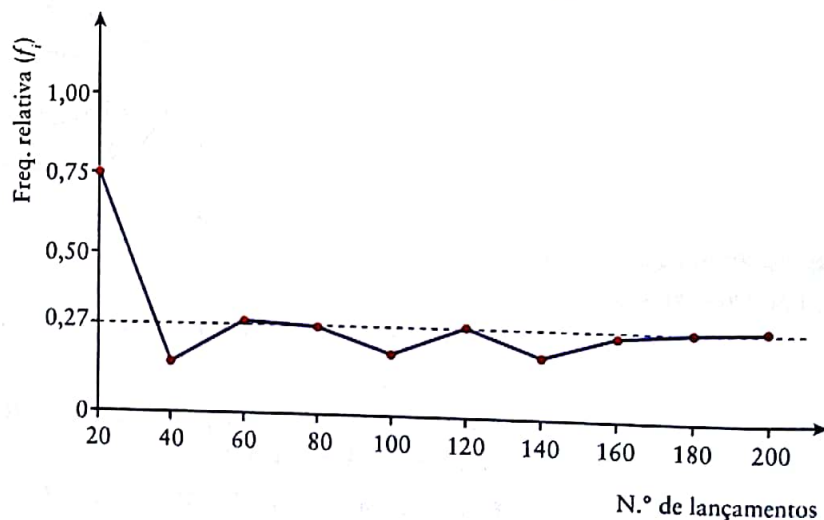
“Atirar o prego para uma mesa diversas vezes e registar o número de vezes que o prego ficou com o bico para cima”



Construiu-se a seguinte tabela:

	Número de lançamentos									
	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
N.º de vezes que o prego ficou com o bico para cima	15	5	17	21	18	32	25	40	47	54
Frequência relativa (f_i)	$\frac{15}{20}$ 0,75	$\frac{5}{40}$ 0,13	$\frac{17}{60}$ 0,28	$\frac{21}{80}$ 0,26	$\frac{18}{100}$ 0,18	$\frac{32}{120}$ 0,27	$\frac{25}{140}$ 0,18	$\frac{40}{160}$ 0,25	$\frac{47}{180}$ 0,26	$\frac{54}{200}$ 0,27

Com os dados da tabela construiu-se o seguinte gráfico:



Definição frequencista de probabilidade

Seja A um acontecimento associado a uma experiência aleatória, que pode repetir-se, as vezes que quisermos, sempre nas mesmas condições. Quando o número de realizações desta experiência aleatória aumenta muito (tende para infinito), a frequência relativa do acontecimento A – $f_i(A)$ – tende a estabilizar em torno de um certo valor. Por outras palavras, a frequência relativa do acontecimento A converge para um valor, que é a probabilidade do acontecimento A , a qual se representa por $P(A)$.

Observação

O conceito clássico de probabilidade contrasta com o conceito frequentista de probabilidade, baseado na frequência relativa, em dois aspectos essenciais:

1.º no conceito clássico, as probabilidades são estabelecidas *a priori* a partir da suposição da equiprobabilidade dos acontecimentos; no caso do conceito frequentista, as probabilidades são estabelecidas *a posteriori* com base nos resultados observados na realização da experiência;

2.º o conceito clássico aplica-se apenas a acontecimentos equiprováveis; o conceito frequentista aplica-se a acontecimentos equiprováveis e não equiprováveis.

Na interpretação frequentista de probabilidade associam-se probabilidades aos acontecimentos a partir da frequência com que esses acontecimentos são observados, ou seja, se observamos n acontecimentos, dos quais n_A possuem um certo atributo A , então a probabilidade de A será aproximadamente a razão $\frac{n_A}{n}$.

O conceito frequentista relaciona-se com o conceito clássico através da chamada **lei dos grandes números**, abordada pela primeira vez por Bernoulli, no séc. XVIII, que afirma:

Para um grande número de experiências, tendo cada uma um resultado aleatório, a frequência relativa de cada um desses resultados tende a estabilizar, convergindo para um certo número que constitui a probabilidade desse resultado.

• Da frequência relativa para a probabilidade

A relação entre a frequência relativa e a probabilidade de um acontecimento permite estabelecer as seguintes conclusões:

$$0 \leq f_i(A) \leq 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

A probabilidade de um acontecimento A é um número maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1.

$$f_i(\text{Acontecimento certo}) = 1$$

$$P(\text{Acontecimento certo}) = 1$$

A probabilidade do acontecimento certo é 1.

$$f_i(\text{Acontecimento impossível}) = 0$$

$$P(\text{Acontecimento impossível}) = 0$$

A probabilidade do acontecimento impossível é 0.

2.5 Definição clássica ou de Laplace de probabilidade

A primeira definição que se conhece de probabilidade foi enunciada por Pierre Simon Laplace (1749-1827).

Esta definição só pode ser aplicada quando os acontecimentos elementares são igualmente prováveis (equiprováveis).

Assim, não podemos calcular a probabilidade de uma carga ficar voltada para cima usando a regra de Laplace.

Neste e em muitos outros casos teríamos de recorrer à experiência. No caso de lançamento de dados, de extracção de bolas, de lançamento de moedas, de extracção de cartas de um baralho e em todas as situações em que os acontecimentos elementares são equiprováveis, podemos calcular, com vantagem, a probabilidade sem recurso à experiência usando a definição clássica de probabilidade, também conhecida como regra de Laplace.

Lei de Laplace ou regra de Laplace

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

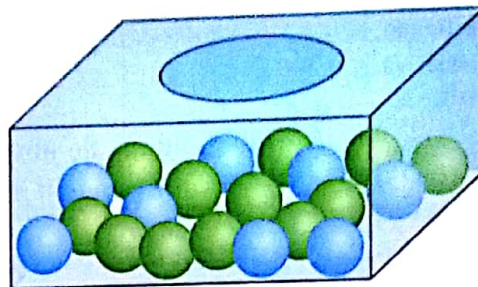
Ou:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favoráveis ao acontecimento } A}{\text{Número de casos possíveis}}$$

A regra de Laplace apenas se aplica no caso do conjunto de resultados ser finito.

Exemplo 1 Tirar bolas

Numa caixa há 20 bolas indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 20, sendo 12 verdes e 8 azuis.



1.1 Tiram-se, ao acaso, duas bolas seguidas (sem as repor).

Qual é a probabilidade de a primeira ser verde e a segunda azul?

1.2 Tiraram-se, ao acaso, três bolas seguidas, sem as repor.

Qual é a probabilidade de serem duas azuis e uma verde (sem interessar a ordem)?

Resolução**1.1 1.º processo**

Contagem dos casos possíveis:

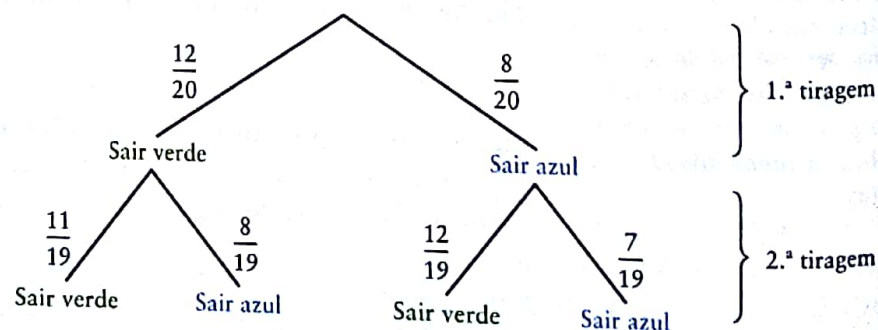
$$\begin{array}{ccccc} 1.^{\text{a}} \text{ tiragem} & & 2.^{\text{a}} \text{ tiragem} & & \\ 20 & \times & 19 & = & 380 \end{array}$$

Verdes	Azuis	Total
12	8	20

Contagem dos casos favoráveis:

$$\begin{array}{ccccc} 1.^{\text{a}} \text{ tiragem} & & 2.^{\text{a}} \text{ tiragem} & & \\ 12 & \times & 8 & = & 96 \end{array}$$

$$\text{Logo, } P = \frac{96}{380} = \frac{24}{95}.$$

2.º processo

$$\frac{12}{20} \times \frac{8}{19} = \frac{96}{380} = \frac{24}{95}$$

$$\text{Logo, } P = \frac{24}{95}.$$

Observação

O 2.º processo pode ter vantagens se acerca do mesmo problema se fizerem várias perguntas. Por exemplo, determine a probabilidade de:

- as duas bolas serem verdes;
- as duas bolas serem azuis;
- ser uma de cada cor.

1.2 Casos possíveis: $20 \times 19 \times 18 = 6840$ **Casos favoráveis:**

Se pretendemos duas azuis e uma verde, pode ser:

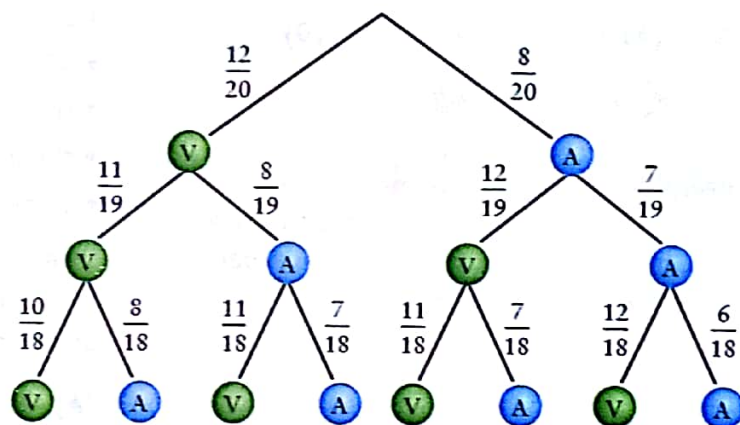
$$\begin{array}{lll} \text{azul, azul, verde} & \text{ou} & \text{azul, verde, azul} & \text{ou} & \text{verde, azul, azul} \\ 8 \times 7 \times 12 = 672 & & 8 \times 12 \times 7 = 672 & & 12 \times 8 \times 7 = 672 \end{array}$$

Logo,

$$P = \frac{3 \times 672}{6840} = \frac{2016}{6840} = \frac{28}{95} \approx 0,29$$

Ou seja, $P \approx 29\%$.

O problema também pode ser resolvido usando um diagrama em árvore:



$$\frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{18} + \frac{8}{20} \times \frac{12}{19} \times \frac{7}{18} + \frac{12}{20} \times \frac{8}{19} \times \frac{7}{18} = \frac{2016}{6840} \approx 29\%$$

Uma senhora tem três blusas (uma azul, uma verde e uma branca), duas saias (uma azul e uma verde) e dois casacos (um azul e outro verde).

1.1 Determine o número de *toilettes* (constituídas por uma blusa, uma saia e um casaco) que a senhora pode fazer.

1.2 Se ela escolher ao acaso a roupa para vestir, qual é a probabilidade de ficar vestida de uma só cor?

Exemplo 2 Lançar dados

Lançam-se dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos nos dois dados seja 6?

E de que seja 7?

Resolução

As 36 somas possíveis estão na tabela seguinte.

Observando a tabela, conclui-se que:

$$P(\text{Soma } 6) = \frac{5}{36};$$

$$P(\text{Soma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Lançou-se quatro vezes consecutivas um dado com as faces numeradas de 1 a 6.

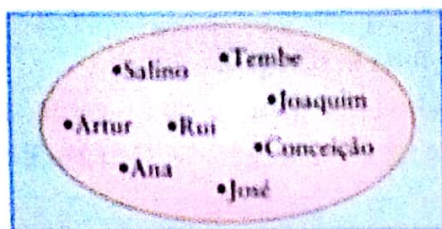
No primeiro lançamento sai face 5 e no segundo face 3.

Qual a probabilidade de os números saídos nos quatro lançamentos terem soma 16?

Explique o seu raciocínio.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1** O diagrama representa um grupo de oito amigos.



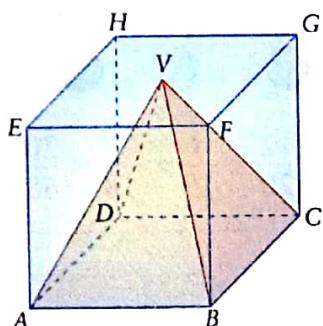
O grupo recebeu uma oferta de três bilhetes para um concerto.

Se a escolha dos contemplados for feita por sorteio, indique a probabilidade de o Tembe e o Salino serem ambos contemplados.

- (A) 10% ; (B) 0,125 ; (C) 11% ; (D) $\frac{3}{28}$.

16 pontos

- 2** Na figura estão representados um cubo e uma pirâmide. A base da pirâmide coincide com a base do cubo e o vértice V da pirâmide pertence à face superior do cubo.



Considerando ao acaso cinco dos nove vértices da figura representada, indique a probabilidade de que pelo menos três não sejam da pirâmide.

- (A) $\frac{5}{14}$; (B) $\frac{9}{14}$; (C) $\frac{20}{63}$; (D) $\frac{10}{21}$.

16 pontos

- 3** Lança-se três vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6.

Considere os acontecimentos:

A : nunca sair o número 1 ;

B : saírem todos os números diferentes ;

C : nunca sair número ímpar.



Seja $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$ as probabilidades de A, B e C, respectivamente.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $P(A) < P(B)$; (B) $P(B) < P(C)$;
(C) $P(C) > P(A)$; (D) $P(A) > 4 \times P(C)$.

16 pontos

- 4** O Salino esqueceu-se do número do telemóvel do amigo Tembe.

Lembra-se apenas que:

- o número tinha nove algarismos;
- começava por 84 ;
- não tinha zeros;
- terminava em 77 ;
- tinha um (e um só) 3 ;
- tinha três (e só três) oitos.

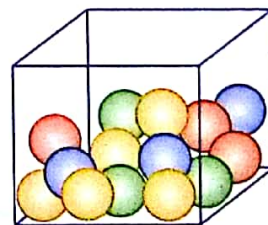
O Salino resolveu marcar o número 84 838 75 77.

A probabilidade de o Salino acertar no número do telemóvel do Tembe é:

- (A) $\frac{1}{5 \times {}^4A_2 \times 7^2}$; (B) $\frac{1}{5 \times {}^4C_2 \times 7^2}$;
(C) $\frac{5 \times {}^4C_2 \times 7^2}{9^7}$; (D) $\frac{5 \times {}^4A_2 \times 7^2}{9^7}$.

16 pontos

- 5** Numa caixa temos 14 bolas, sendo 3 verdes, 3 azuis, 3 vermelhas e 5 cor-de-laranja.



Tiram-se da caixa 4 bolas ao acaso.

A probabilidade de sair uma de cada cor é:

- (A) $\frac{{}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5C_1}{{}^{14}C_4}$; (B) $\frac{3^4}{{}^{14}C_4}$;
(C) $\frac{4^3}{{}^{14}C_4}$; (D) $\frac{3^3 \times 5^2}{{}^{14}C_4}$.

16 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1** O Salino é aluno da turma A da 12.^a classe, turma que tem 31 alunos, sendo 18 raparigas e 13 rapazes.

É necessário escolher quatro dos 31 alunos para uma comissão.

Admitindo que a escolha é feita ao acaso, determine a probabilidade de a comissão ser mista e de o Salino lhe pertencer.

Apresente o resultado sob a forma de dízima com três casas decimais.

20 pontos

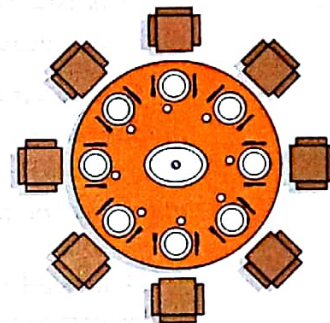
- 4** Três árbitros e cinco jogadores de futebol vão colocar-se em linha para tirarem uma fotografia.

A sequência segundo a qual os oito desportistas se vão colocar é aleatória.

Qual a probabilidade de que os três árbitros fiquem juntos e nos extremos?

13 pontos

- 5** Oito amigos, quatro raparigas e quatro rapazes, sentaram-se aleatoriamente numa mesa redonda.



Qual é a probabilidade de rapazes e raparigas ficarem sentados alternadamente, isto é, uma rapariga entre dois rapazes?

14 pontos

- 6** O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0 1 1 3.

6.1 Quantos códigos existem com pelo menos dois algarismos 9?

17 pontos

6.2 Quantos códigos existem com um número menor do que 5000 e maior do que 3000?

12 pontos

6.3 Admitindo que o código de qualquer cartão é atribuído ao acaso, determine a probabilidade de um cartão ter quatro números diferentes.

13 pontos

- 2** Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9.

Extrai-se ao acaso uma bola do saco.



Determine a probabilidade de sair:

- 2.1** A : uma bola com um número par;
2.2 B : uma bola com um número primo;
2.3 C : uma bola com um número inferior a 10;
2.4 $A \cap B$;
2.5 $A \cup B$.

15 pontos

- 3** A Luísa tem no bolso dois berlindes verdes, três berlindes azuis e um berlinde amarelo.

A Luísa retira, ao acaso, um berlinde do bolso.

Determine a probabilidade de o berlinde extraído:

- 3.1** ser verde;
3.2 ser verde ou amarelo;
3.3 não ser verde;
3.4 não ser azul.

16 pontos

Um olhar sobre a História

A noção de função tem uma longa história. Todos temos uma ideia intuitiva do significado do termo, empregando-o na linguagem comum para significar dependência de uma coisa de outra (por exemplo: "ir à praia é função das condições climáticas"). Contudo, em Matemática, o rigor é importante para clarificar as matérias.

Os primórdios deste conceito encontram-se nas antigas tabelas de números, que encontramos já na Antiguidade, nomeadamente as ligadas à aritmética (tabelas de recíprocos usadas pelos Babilônios, por exemplo).

Em 1748, o matemático suíço Euler sugeriu esta definição:

Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo da variável e de números ou quantidades constantes.

Mas isto confunde função com a sua expressão analítica... Em 1755, propôs outra definição:

Quando quantidades dependem de outras de tal modo que [as primeiras] sofrem mudanças quando [as últimas] variam, então [as primeiras] são chamadas funções [das últimas]; esta é uma ideia muito polivalente que inclui nela própria todas as maneiras em que uma quantidade pode ser determinada por outras.

Demasiado vago... Em 1822, o matemático francês Fourier recorria às coordenadas cartesianas para definir função:

Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais é arbitrária. Sendo dada uma infinidade de valores à abcissa x , existe um igual número de ordenadas $f(x)$.

Mas nem sempre uma função se pode representar num sistema de coordenadas. O alemão Dedekind, em 1888, abstraiu um pouco mais:

Uma função f num conjunto S é uma lei de acordo com a qual a cada elemento s determinado de S corresponde uma determinada coisa que é denominada a transformada de s e representada por $f(s)$.



Leonhard Euler
(1707-1783)



Jean Fourier
(1768-1830)



Richard Dedekind
(1831-1918)

3

Funções reais de variável real

- 1** Generalidades sobre funções
- 2** Função afim. Função quadrática
- 3** Função racional
- 4** Operações com funções
- 5** Funções exponenciais. Funções logarítmicas.
Funções trigonométricas (revisões)

Material:
Lápis e papel

Actividades de investigação

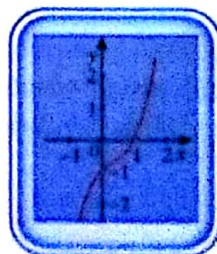
Elabore um jogo de cartas com gráficos de funções polinomiais ou trigonométricas e das respectivas expressões analíticas.

Por exemplo, as imagens ao lado constituem um par.

Distribuem-se as cartas pelos jogadores.

Um jogador coloca uma carta na mesa. Quem tiver o seu par fica com ela, junta ao par e soma 1 ponto. Quem tiver o par e não o reconhecer perde 1 ponto.

O mesmo jogador pode ter as duas cartas de um par.

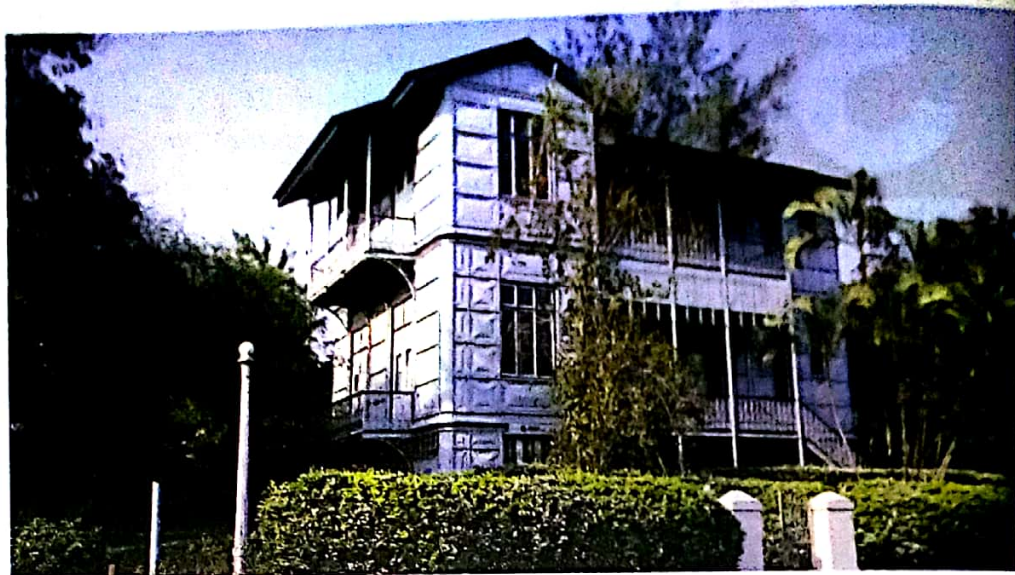


$$y = x^2 - 2x - 1$$

Objectivos

1. Identificar correspondências que são funções.
2. Definir função.
3. Identificar diferentes formas de representar uma função.
4. Definir zeros de uma função.
5. Determinar os zeros de uma função usando ou não a calculadora gráfica.
6. Interpretar os zeros de uma função em contexto real.
7. Identificar os extremos absolutos e relativos de uma função.
8. Indicar maximizantes e minimizantes.
9. Estudar a monotonia de uma função.
10. Construir a tabela de variação de uma função.
11. Definir função injectiva.
12. Identificar o gráfico de uma função injectiva.
13. Definir função bijectiva.
14. Definir função real de variável real.
15. Utilizar, de uma forma intuitiva, o conceito de função contínua.

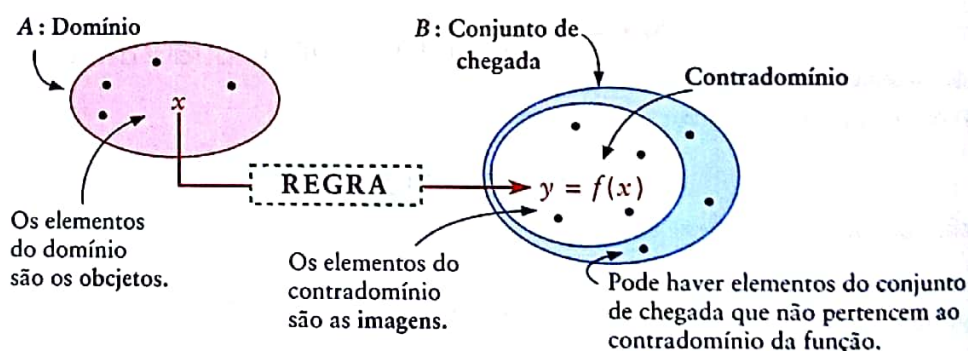
1. Generalidades sobre funções



Casa de Ferro, Maputo

1.1 Noção de função

Observe o seguinte esquema:



Noção de função

Uma função f de A com valores em B ($f: A \rightarrow B$) consiste em dois conjuntos, o domínio A (D_f), o conjunto de chegada B e uma regra ou correspondência que associa a cada elemento x (objecto) de A um e um só elemento $y = f(x)$ (imagem) de B .

Simbolicamente:

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Ao conjunto das imagens de f chama-se contradomínio da função e representa-se por D'_f .

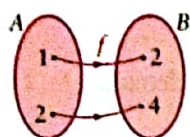
Observação

O contradomínio de uma função está contido no conjunto de chegada.

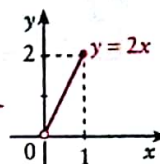
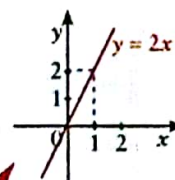
1.2 Formas de representar uma função

Uma função pode ser definida por:

- um diagrama
- uma expressão verbal:
"A cada número faz corresponder o seu dobro"
- uma expressão analítica: $y = 2x$
- uma tabela
- uma representação gráfica ou um gráfico



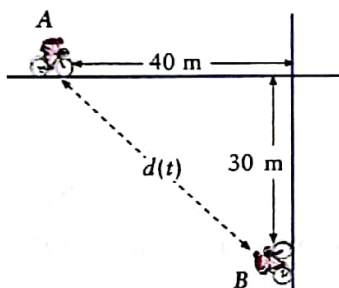
x	y
1	2
2	4
3	6



Cada uma das representações tem as suas vantagens e desvantagens.

As formas mais utilizadas de definir uma função são:

Expressão analítica ou Expressão algébrica	Tabela	Representação gráfica										
$f: x \mapsto y = x^2$	<table><tr><th>x</th><th>$y = x^2$</th></tr><tr><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	x	$y = x^2$	-1	1	0	0	1	1	2	4	
x	$y = x^2$											
-1	1											
0	0											
1	1											
2	4											

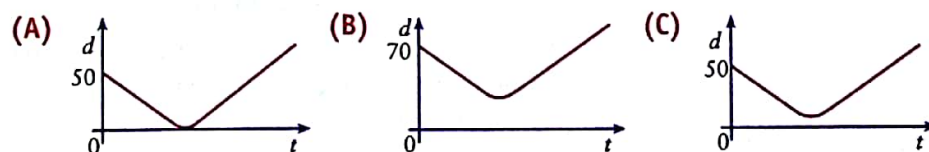


Exemplo 1 A distância entre os ciclistas

Na figura ao lado estão representados dois ciclistas, A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegarem ao cruzamento, ambos continuaram em frente. No instante $t = 0$, os ciclistas A e B encontram-se, respectivamente, a 40 e 30 metros do cruzamento.

Os ciclistas movem-se à mesma velocidade, que se mantém constante.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de t , dá a distância $d(t)$ entre os dois ciclistas, no instante t ?



Resolução

Seja x a distância entre os ciclistas no instante $t = 0$.

Pelo Teorema de Pitágoras vem:

$$x^2 = 40^2 + 30^2 \Leftrightarrow x^2 = 2500 \Leftrightarrow x = 50 \quad (x \geq 0)$$

Podemos então concluir que $d(0) = 50$.

Por outro lado, os ciclistas não se chegam a encontrar dado que, quando o ciclista A chega ao cruzamento, o ciclista B já se afastou 10 m. Como os ciclistas nunca se encontram, a distância entre ambos é sempre diferente de zero. A seguir ao cruzamento os ciclistas afastam-se.

Assim, uma possível representação gráfica é a apresentada em (C).

- 1.1 Considere a função f , de domínio $\{-1, 0, 1, 2\}$, definida por:

$$f(x) = x - \frac{1}{2}$$

Represente f :

- por uma tabela;
- por um gráfico.

- 1.2. Considere a função g definida pela tabela seguinte:

x	-1	0	1	2
y	-1	0	1	8

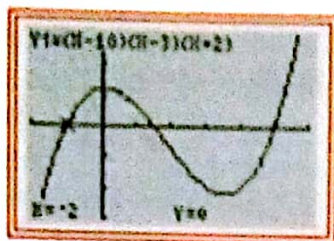
Represente g :

- por um gráfico;
- por uma expressão analítica.

1.3 Zeros de uma função

A função f de domínio $\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = (x - 10)(x - 3)(x + 2)$$



O gráfico da função f intersecta o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$, $(3, 0)$ e $(10, 0)$.

Tem-se que $f(-2) = f(3) = f(10) = 0$.

-2 , 3 e 10 são os zeros da função f .

Zero de uma função

Zero de uma função é todo o objecto que tem imagem nula.

O conhecimento dos zeros e a observação do gráfico da função permitem indicar o sinal da função.

Na função dada, tem-se:

Se $x \in]-2, 3[$ ou $x \in]10, +\infty[$, então $f(x) > 0$.

Se $x \in]-\infty, -2[$ ou $x \in]3, 10[$, então $f(x) < 0$.

1.4 Extremos absolutos e extremos relativos de uma função

Extremos absolutos

Seja f uma função de domínio D :

- $f(a)$ é o máximo absoluto de f se, para todo o x de D , $f(a) \geq f(x)$.
- $f(b)$ é o mínimo absoluto de f se, para todo o x de D , $f(b) \leq f(x)$.

Extremos relativos

Seja f uma função de domínio D :

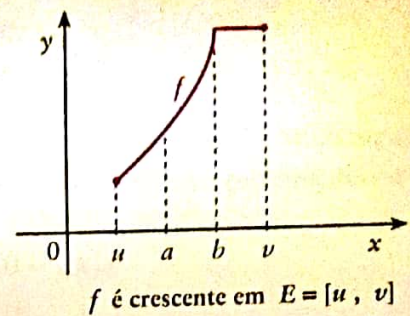
- $f(a)$ é um máximo relativo de f se existir um intervalo aberto E contendo a , tal que $f(a) \geq f(x)$, para todo x de $E \cap D$; a é um maximizante.
- $f(b)$ é um mínimo relativo de f se existir um intervalo aberto F contendo b , tal que $f(b) \leq f(x)$, para todo x de $F \cap D$; b é um minimizante.

Das definições apresentadas resulta que:

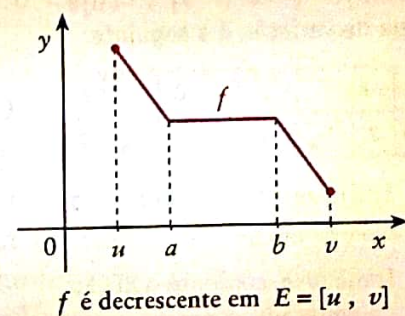
- 1.º Qualquer extremo absoluto é também extremo relativo.
- 2.º Se uma função tem máximo absoluto este coincide com o maior dos máximos relativos e com o maior valor do contradomínio.
- 3.º Se uma função tem mínimo absoluto este coincide com o menor dos mínimos relativos e com o menor valor do contradomínio.
- 4.º Uma função pode ter extremos relativos e não ter extremos absolutos.

1.5 Monotonia de uma função

Diz-se que uma função f é **crescente** em E quando, para todos os números reais a e b de E , se $a < b$, então $f(a) \leq f(b)$.

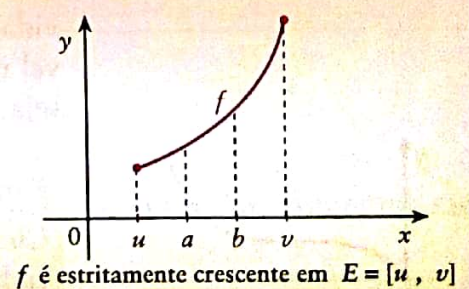


Diz-se que uma função f é **decrecente** em E quando, para todos os números reais a e b de E , se $a < b$, então $f(a) \geq f(b)$.

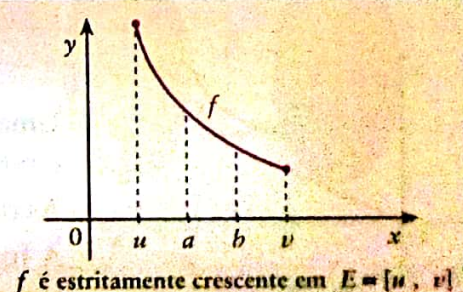


- Uma função diz-se crescente se for crescente em todo o seu domínio.
- Uma função diz-se decrescente se for decrescente em todo o seu domínio.
- Uma função é monótona num intervalo se for crescente ou decrescente nesse intervalo.
- Uma função constante é crescente e decrescente em qualquer intervalo do seu domínio.

Diz-se que uma função f é **estritamente crescente** em E quando, para todos os números reais a e b de E , se $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

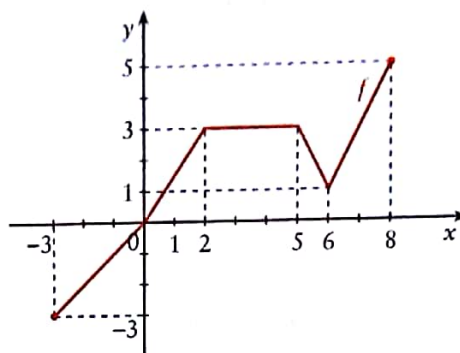


Diz-se que uma função f é **estritamente decrescente** em E quando, para todos os números reais a e b de E , se $a < b$, então $f(a) > f(b)$.



Exemplo 2 Tabela de variação de uma função

Estudar a monotonia de uma função é procurar os intervalos de maior amplitude onde a função é estritamente crescente, estritamente decrescente ou constante.



Seja f uma função definida no intervalo $[-6, 5]$, cuja tabela de variação é a seguinte:

x	-6	-3	0	5
$f(x)$	7	-3	5	0

2.1 Indique o mínimo e o máximo de f .

2.2 Indique o conjunto-solução da equação:

$$f(x) = 7$$

2.3 Indique o conjunto-solução da condição:

$$f(x) \leq -3$$

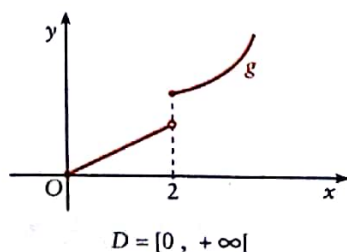
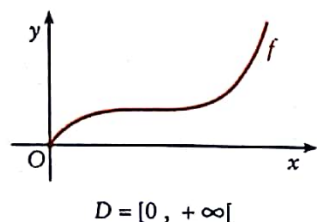
Considere a função f , de domínio $[-3, 8]$, representada no gráfico. A monotonia da função pode ser apresentada numa tabela de variação. Construa a tabela de variação da função f , tendo em conta que é estritamente crescente em $[-3, 2]$ e em $[6, 8]$, é estritamente decrescente em $[5, 6]$ e é constante em $[2, 5]$.

Resolução

x	-3	2	5	6	8
$f(x)$	-3	3	3	1	5

1.6 Funções reais de variável real. Conceito intuitivo de continuidade

Uma boa parte das funções estudadas até agora descrevem fenômenos da vida real e dentro dessas têm particular interesse aquelas em que a variável independente toma valores em $\mathbb{R}$ e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$, ou seja, as funções reais de variável real.



Função real de variável real

Chama-se **função real de variável real** a toda a correspondência que a cada elemento de um subconjunto A de $\mathbb{R}$ faz corresponder um e só número real.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Uma função real de variável real tem como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ e por conjunto de chegada $\mathbb{R}$.

As representações gráficas ao lado podem ser de funções reais de variável real. A função f é uma **função contínua** (é possível desenhar o seu gráfico sem levantar o lápis). A função g não é uma função contínua.

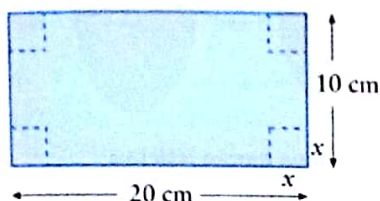
Domínio de uma função de variável real

O domínio de uma função real de variável real depende da situação em estudo e da forma como a função é definida.

Exemplo:

A função que define o volume da caixa aberta que é possível construir cortando quadrados de lado x nos cantos de uma cartolina rectangular com as dimensões indicadas é dada por:

$$V(x) = (20 - 2x)(10 - 2x)x$$



Qual é o domínio da função?

Na situação concreta $0 < 2x < 10$, pelo que $0 < x < 5$, ou seja, $x \in]0, 5[$.

Logo:

$$V:]0, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (20 - 2x)(10 - 2x)x$$

Quando uma função f é dada por uma expressão analítica e não se indica o domínio, considera-se que o domínio de f é o conjunto de valores para os quais a expressão tem significado.



Caracterize, determinando o domínio, as funções reais de variável real cujas expressões analíticas são:

3.1 $\frac{1}{x^2 - 4}$; 3.2 $\frac{x-1}{x^2 - 1}$;

3.3 $\frac{1}{x^2 + 1}$; 3.4 $\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Exemplo 3 Domínio de uma função

Caracterize a função f , real de variável real, definida por: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Resolução

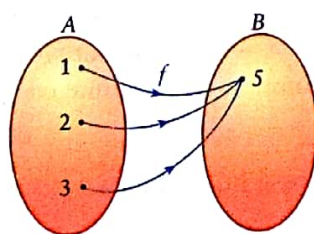
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 1}$$

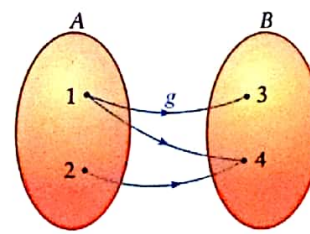
1.7 Função injectiva

Recordemos que nem todas as correspondências entre dois conjuntos são funções.



f é uma função

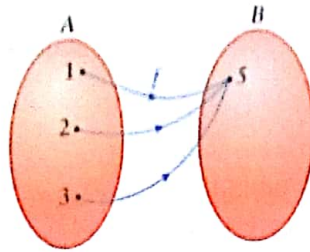
A cada objecto corresponde uma e uma só imagem.



g não é função

Ao elemento 1 do conjunto A correspondem dois elementos do conjunto B .

De entre as funções destacaremos as injectivas:

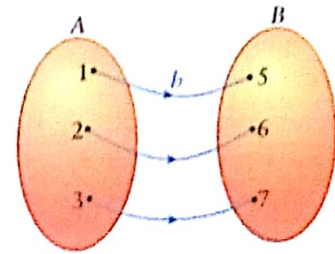


f é uma função não injectiva

Por exemplo:

$$1 \neq 2 \wedge f(1) = f(2)$$

É possível indicar dois objectos diferentes com a mesma imagem.



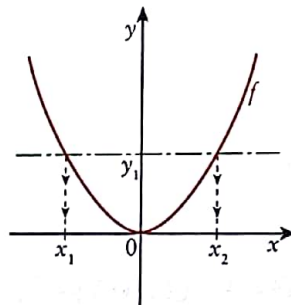
h é uma função injectiva

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_h$$

Se dois objectos são diferentes, então as suas imagens também são.

Teste da recta horizontal

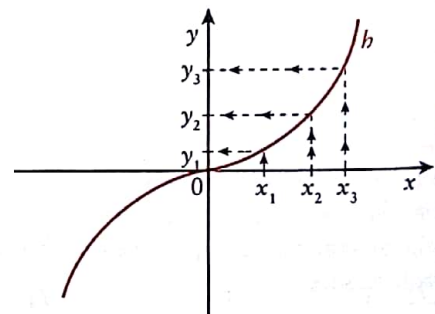
Considere-se as funções f e g definidas graficamente.



$$x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) = y_1$$

f não é injectiva

Existe pelo menos uma recta horizontal que intersecta o gráfico da função f em mais do que um ponto.



$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_h$$

h é injectiva

Qualquer que seja a recta horizontal, esta intersecta o gráfico da função somente num ponto.

Função injectiva

Uma função real de variável real $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **injectiva** se cada elemento do contradomínio é imagem por f de apenas um elemento do domínio, ou $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é injectiva se, dados dois quaisquer elementos diferentes do domínio, as suas imagens por f também são diferentes.

Simbolicamente:

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é injectiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

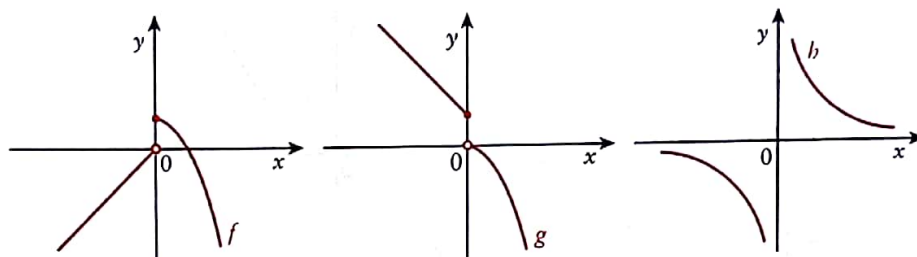
ou

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é injectiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Exemplo 4 Função injectiva

Considere as funções f , g e h cuja parte do gráfico está representada nas figuras seguintes.



As funções são injectivas?

Resolução

Vamos aplicar o teste da recta horizontal.

Sabemos que, se existir pelo menos uma recta horizontal que intersecte o gráfico da função em mais do que um ponto, a função não é injectiva. Assim, vem:

f não é injectiva pois, por exemplo, a recta $y = -1$ intersecta o gráfico da função em mais do que um ponto.

g e h são funções injectivas. Não é possível traçar uma recta horizontal e intersectar o gráfico em mais do que um ponto.



Das seguintes funções reais de variável real, identifique as que são injectivas.

4.1 $f(x) = |x|$;

4.2 $g(x) = \sqrt[3]{x}$;

4.3 $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$.

Exemplo 5 Verificação analítica

Prove, analiticamente, que a função f definida por $f(x) = -x + 3$ é uma função injectiva.

Resolução

Vamos aplicar a definição de função injectiva.

Sabemos que:

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ é injectiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer do $D_f = \mathbb{R}$.

Se $f(x_1) = f(x_2)$, vem:

$$-x_1 + 3 = -x_2 + 3 \iff -x_1 = -x_2 \iff x_1 = x_2$$

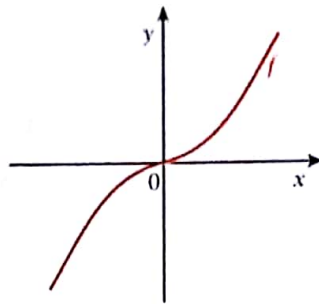
Logo, f é injectiva.



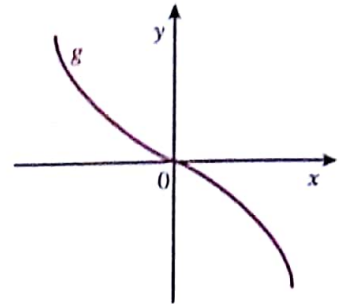
Prove, analiticamente, que a função f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é injectiva.

1.8 Injectividade e monotonia

Observemos os seguintes gráficos de funções de domínio $\mathbb{R}$.



f é uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}$.
 $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$



g é uma função estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.
 $x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

As duas funções são injectivas (passam no teste da recta horizontal).

De um modo geral, tem-se:

Função estritamente monótona e injectividade

Se o domínio de uma função f é um intervalo e se f é estritamente monótona, então f é injectiva.

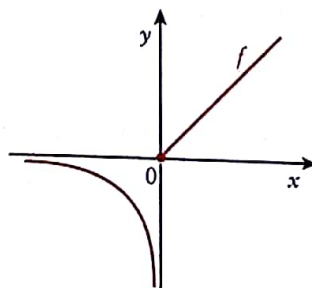
Exemplo 6 Injectividade e monotonia

Se uma função é injectiva, será que é estritamente crescente ou estritamente decrescente?

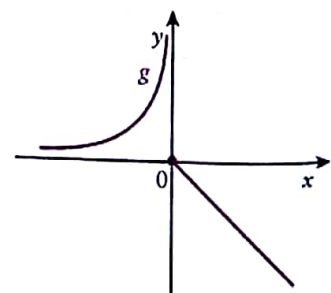
Resolução

Para mostrar que uma afirmação é falsa basta encontrar um contra-exemplo.

Os gráficos seguintes permitem concluir que uma função pode ser injectiva e não ser monótona.



f é injectiva e não é monótona.



g é injectiva e não é monótona.

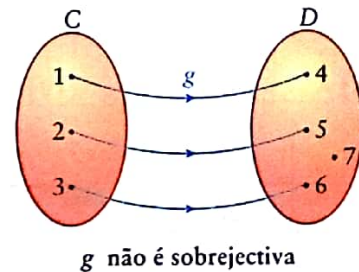
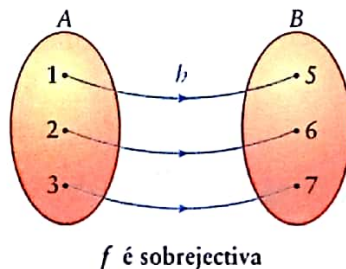


Defina, analiticamente, uma função f que seja injectiva e não seja monótona.

1.9 Função sobrejectiva

Uma função é **sobrejectiva** se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Exemplo:



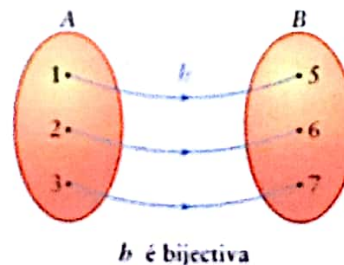
$$D'_g = \{4, 5, 6\}$$

Conjunto de chegada de g : $\{4, 5, 6, 7\}$

1.10 Função bijectiva

Uma função é **bijectiva** quando é injectiva e sobrejectiva.

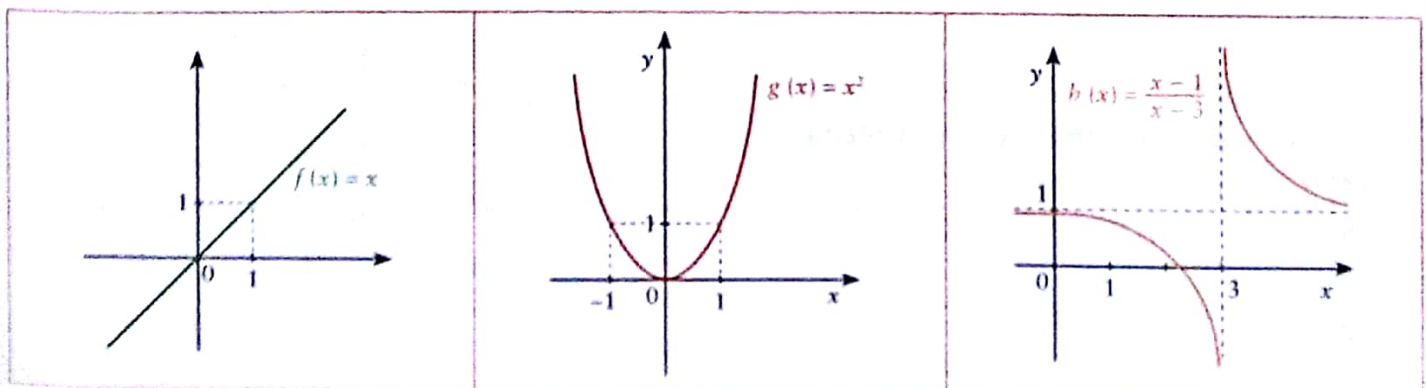
Exemplo:



Uma função real de variável real é bijectiva se é injectiva e se o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

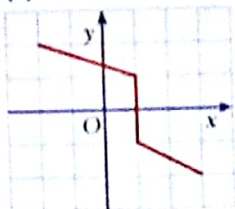
Exemplo:

A função f definida por $f(x) = x$ é bijectiva, mas as funções g e h definidas por $g(x) = x^2$ e $h(x) = \frac{x-1}{x-3}$ não são funções bijectivas.

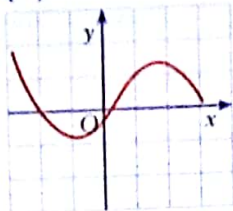


1 Considere as seguintes representações gráficas.

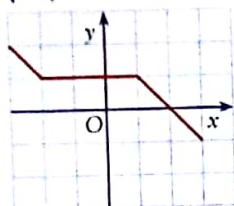
(I)



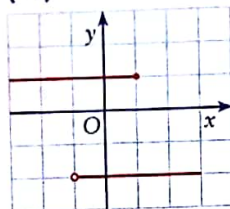
(II)



(III)



(IV)



As que correspondem ao gráfico de uma função são:

- (A) I e II; (B) II e IV;
(C) II e III; (D) I e III.

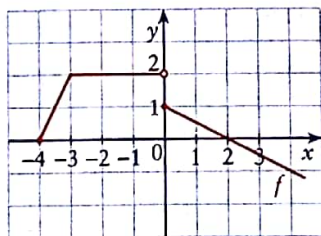
9 pontos

2 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Numa função um objecto pode não ter imagem.
(B) Numa função a imagens diferentes podem corresponder objectos iguais.
(C) Numa função um objecto tem uma só imagem.
(D) Numa função a uma imagem corresponde um só objecto.

9 pontos

3 Considere a função f com a seguinte representação gráfica.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) f tem um e um só zero.
(B) $D_h =]-4, +\infty[$.
(C) h tem máximo relativo para $x = 0$.
(D) $2 \in D_f$.

9 pontos

4 Seja f uma função contínua definida em $[-6, 6]$ com a seguinte tabela de variação:

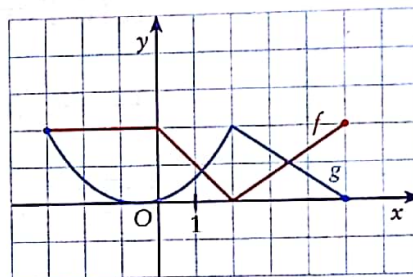
x	-6		-1		0		6
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\rightarrow$	0

Pode afirmar-se:

- (A) A função tem um único máximo relativo.
(B) $f(-0,5) > 0$
(C) $f(0,5) > f(0)$
(D) A função tem uma infinidade de maximizantes.

9 pontos

5 A figura representa o gráfico de duas funções, f e g , de domínio $[-3, 5]$.

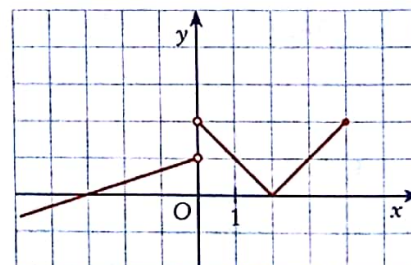


Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) $f(x) > 0$, para $x \in [-3, 5]$.
(B) A função f é crescente em $[0, 5]$.
(C) $f(x) > g(x)$, para $x \in [2, 5]$.
(D) $D_f = D_g$

9 pontos

6 Na figura está representada graficamente a função h .



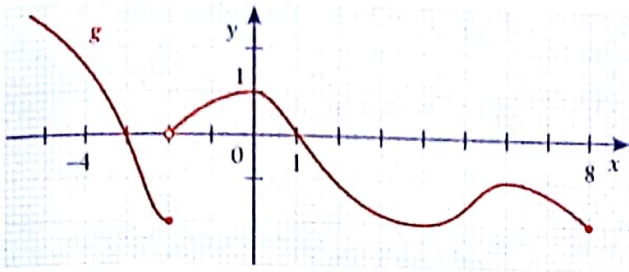
Qual das afirmações pode ser verdadeira?

- (A) $D_h =]-\infty, 4]$; (B) $D_h =]-\infty, 2]$;
(C) $h(0) = 2$; (D) $h(0) = 3$.

9 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1 Na figura está representada graficamente a função g .

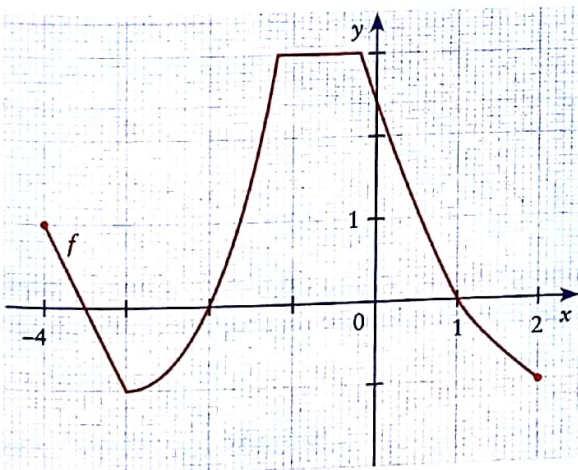


Indique:

- 1.1 D_g ;
- 1.2 D_g^i ;
- 1.3 $g(4)$;
- 1.4 x , tal que $g(x) = -2$;
- 1.5 os zeros de g ;
- 1.6 os intervalos onde a função é crescente;
- 1.7 os intervalos onde a função é decrescente;
- 1.8 os máximos relativos de g ;
- 1.9 os maximizantes de g ;
- 1.10 os mínimos relativos de g ;
- 1.11 os minimizantes de g .

55 (11×5) pontos

- 2 Seja f uma função definida em $[-4, 2]$, cuja representação gráfica é a seguinte:



2.1 Determine:

- a) $f(-1)$ e $f(2)$;
- b) a ordenada do ponto do gráfico, cuja abscissa é 1;
- c) as abscissas dos pontos, cuja ordenada é -1 ;
- d) as soluções de equação $f(x) = 0$.

2.2 Construa a tabela de variação de f .

30 (5×6) pontos

- 3 Seja f uma função contínua, definida em $[-5, 3]$, com a seguinte tabela de variação:

x	-5		0		1		3
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3.1 Elabore um possível gráfico de f .

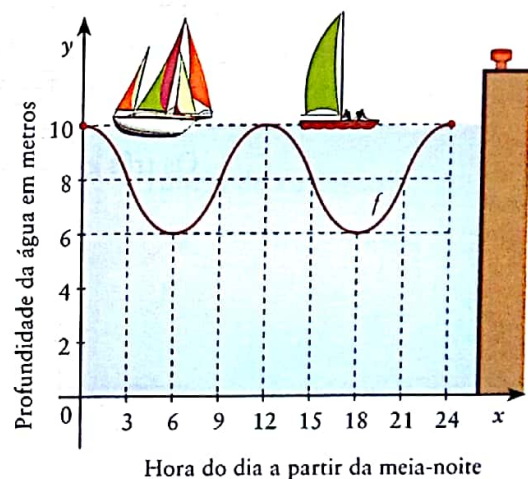
3.2 Indique x tal que $f(x) = 0$.

3.3 Indique x tal que $f(x) \geq 0$.

3.4 Indique x tal que $f(x) = f(0)$.

25 ($7 + 3 \times 6$) pontos

- 4 O gráfico representa a variação da profundidade da água do mar, ao longo de um dia, num porto de pesca.



- 4.1 A que horas registou a profundidade de 8 m?
- 4.2 Qual foi a profundidade máxima? A que horas ocorreu?
- 4.3 Qual foi a profundidade mínima? A que horas ocorreu?
- 4.4 Considere a função f , de domínio $[0, 24]$, representada na figura.

- a) Indique o contradomínio da função.
- b) Indique os intervalos de monotonia da função.
- c) Construa uma tabela de variação da função.

36 (6×6) pontos

Objectivos

1. Definir função afim.
2. Identificar uma função constante e uma função de proporcionalidade directa.
3. Estudar uma função afim.
4. Identificar funções quadráticas.
5. Resolver problemas usando funções quadráticas.

2. Função afim. Função quadrática



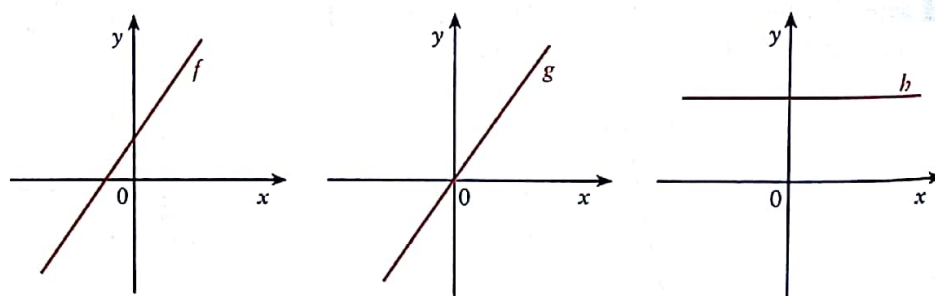
Ponte sobre o rio Pungue

2.1 Definição de função afim

Função afim

Uma **função afim** é definida por uma expressão do tipo $y = mx + b$, com m e $b \in \mathbb{R}$. O gráfico de uma função afim é uma recta.

Os três gráficos seguintes são exemplos de gráficos de funções afins.



Quando o gráfico de uma função afim contém a origem do sistema cartesiano, a função tem o nome de **função linear** ou **função de proporcionalidade directa**.

Função de proporcionalidade directa

Uma **função de proporcionalidade directa** é definida por uma expressão do tipo $y = mx$, $m \neq 0$.

Quando o gráfico de uma função afim é paralelo ao eixo das abcissas, trata-se de uma **função constante**.

Função constante

Uma **função constante** é definida por uma expressão do tipo $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$.

2.2 Propriedades da função afim

Função afim não constante

$f(x) = mx + b$, com $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$

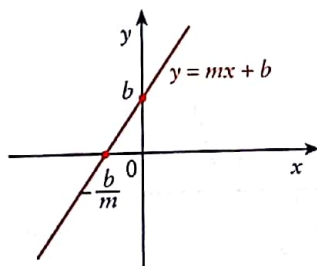
- Domínio: $\mathbb{R}$
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- Zeros

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + b = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$$

A função tem um único zero: $-\frac{b}{m}$

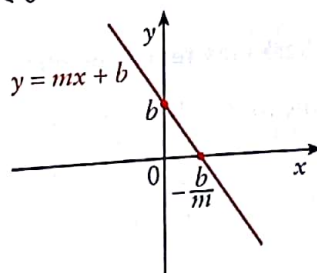
- Monotonia e tabela de variação
 $m > 0$



f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

$m < 0$

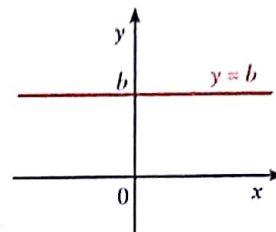


f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Função constante

$f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$



- Domínio: $\mathbb{R}$
- Contradomínio: $\{b\}$
- Zeros

Se $b \neq 0$, f não tem zeros. Se $b = 0$, f tem uma infinidade de zeros. Todos os números reais são zeros da função.

- Monotonia

A função constante pode considerar-se crescente e decrescente em $\mathbb{R}$.

- Tabela de variação

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Observação

Estudar uma função significa indicar os seus aspectos relevantes. Por exemplo:

- o domínio;
- o contradomínio;
- os zeros;
- os intervalos onde a função é monótona.

2.3 Função quadrática. Definição e aplicações

Em muitas situações da vida real, o modelo matemático que melhor descreve a relação entre duas variáveis é uma função quadrática. Pelo facto de as funções quadráticas serem importantes e especiais vamos aprender mais acerca dos seus gráficos, propriedades e aplicações.

Função quadrática

Uma **função quadrática** é uma função f definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

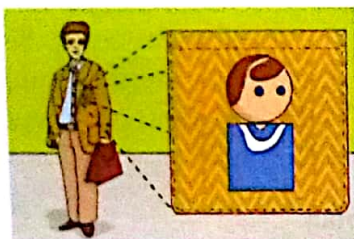
onde a , b e c são números reais.

O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais.

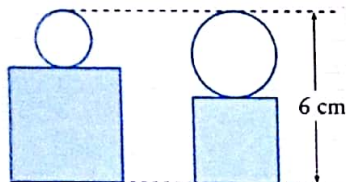
O gráfico de uma função quadrática designa-se por **parábola**.



Vai-se desenhar um boneco, constituído por um quadrado e um círculo, para ser aplicado num bolso.



Pretende-se que o boneco tenha a altura máxima de 6 cm. Apresentam-se a seguir duas possíveis concretizações desse boneco.



Admita que x é o raio do círculo.

1.1 Indique, sob a forma de intervalo de números reais, o conjunto de valores que a variável x pode tomar.

1.2 Mostre que a área A , em centímetros quadrados, do boneco é dada, em função de x , por:

$$A(x) = (4 + \pi)x^2 - 24x + 36$$

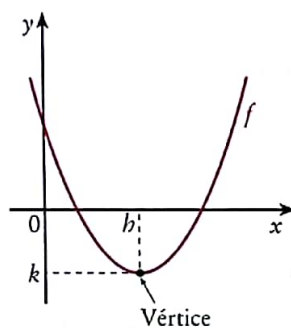
1.3 Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o raio do círculo de modo que a área do boneco seja mínima. Apresente o resultado em centímetros, arredondado às centésimas.

Sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática (parábola)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0)$$

$$a > 0$$

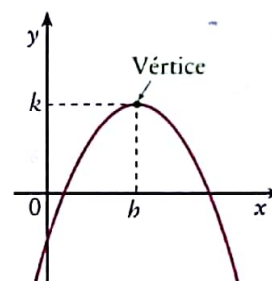
Concavidade virada para cima



$$D'_f = [k, +\infty[$$

$$a < 0$$

Concavidade virada para baixo



$$D'_f =]-\infty, k]$$

O ponto de coordenadas (h, k) é o vértice da parábola.

Exemplo 1 Será uma função quadrática?

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = -(x-1)^2 + x^2$$

Verifique, gráfica e analiticamente, que a função f não é uma função quadrática.

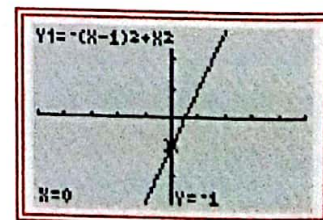
Resolução

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-1)^2 + x^2 \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + x^2 \\ &= -x^2 + 2x - 1 + x^2 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

A função f é uma função afim.

O gráfico da função é uma recta.

Portanto, f não é uma função quadrática.



2.4 Resolução de problemas envolvendo a função quadrática

A expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ que define uma função quadrática f , pode ser escrita na forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

que põe em evidência as coordenadas (h, k) do vértice da parábola.

O conhecimento desta expressão permite resolver problemas como, por exemplo, o que se segue:

Exemplo 2 A trajectória descrita pela bola

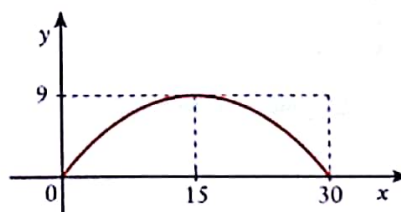
A trajectória descrita por uma bola de golfe tem a forma de uma parábola.

Num terreno plano a distância percorrida pela bola foi de 30 m e a altura máxima atingida foi de 9 m.

Escreva uma equação para a trajectória da bola.

Resolução

Para escrevermos uma equação para descrever a trajectória da bola precisamos de definir um sistema cartesiano.



Considere-se o sistema cartesiano que tem por origem das coordenadas o ponto de partida da bola.

O vértice da parábola é:

$$V \curvearrowright (15, 9)$$

$$y = a(x - 15)^2 + 9$$

Usa-se a fórmula:

$y = a(x - h)^2 + k$, onde (h, k) é o vértice da parábola.

Repare que $h = 15$ pois $\frac{0 + 30}{2} = 15$.

A parábola contém o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

Substitui-se (x, y) por $(0, 0)$ ou $(30, 0)$.

$$0 = a(0 - 15)^2 + 9$$

Determina-se o valor de a .

$$a = -0,04$$

Uma equação da trajectória é:

$$y = -0,04(x - 15)^2 + 9, \quad 0 \leq x \leq 30$$

Escreva uma equação da parábola cujo vértice V é o ponto de coordenadas $(1, -4)$ e que passa no ponto de coordenadas $(-2, 5)$.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1 Para cada concretização de m , $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = mx^2 + 4x + 2m - 2$$

é uma função quadrática.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Para qualquer valor de m a função tem pelo menos um zero.
 (B) A função tem dois zeros se $m \in]-1, 2[$.
 (C) A função tem um e um só zero se e só se $m = -1$.
 (D) A função não tem zeros qualquer que seja o valor de m .

10 pontos

- 2 A fórmula $x^2 - Sx + P = 0$ representa uma equação do segundo grau em que sendo x_1 e x_2 as raízes, $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1x_2$.

2.1 Dada a equação $x^2 + 3x + 2 = 0$ pode afirmar-se que:

- (A) a soma das raízes é 3;
 (B) o produto das raízes é -2;
 (C) as raízes são 1 e 2;
 (D) as raízes são -1 e -2.

2.2 Uma equação do 2.º grau que tem as raízes $\frac{1}{2}$ e -1 é:

- (A) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$;
 (B) $2x^2 + x - 1 = 0$;
 (C) $2x^2 - x - 1 = 0$;
 (D) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$.

20 (10 + 10) pontos

- 3 Para cada valor concreto de $m \in \mathbb{R}$ a expressão:

$$x^2 - 4x + m = 1$$

representa uma equação do 2.º grau.

Pode afirmar-se que a equação tem uma e uma só raiz real se m for igual a:

- (A) 5; (B) -5;
 (C) 4; (D) -4.

10 pontos

- 4 Considere a equação:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

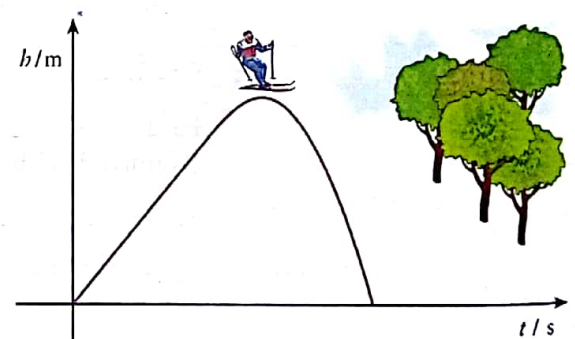
Pode afirmar-se que:

- (A) a equação não tem raízes reais;
 (B) a equação tem uma só raiz real;
 (C) a equação tem duas raízes reais simétricas;
 (D) uma das raízes reais da equação, a raiz positiva, é o número de ouro (número irracional aproximadamente igual a 1,618).

10 pontos

- 5 A figura representa o gráfico da função f que relaciona em cada instante a altura de um desportista em relação ao solo.

O gráfico é formado por um segmento de recta e parte de uma parábola.



A função f é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 5 \\ -0,5(x-6)^2 + 5,5 & \text{se } 5 \leq x \leq 9,3 \end{cases}$$

Pode afirmar-se que:

- (A) o salto do desportista durou 8 segundos;
 (B) a altura do atleta foi superior a 3 metros durante 4 segundos;
 (C) a altura máxima atingida pelo desportista foi de 7 metros;
 (D) para $t = 3,5$ e $t = 8$ o desportista esteve a 3,5 m do solo.

10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1 Para cada valor concreto do parâmetro $m \in \mathbb{R}$ a expressão $2x^2 + mx + 2 = 0$ é uma equação do 2.º grau. Determine m de modo que:

- 1.1 a equação tenha duas raízes reais;
 1.2 a equação não tenha raízes reais;
 1.3 a equação tenha uma e uma só raiz real.

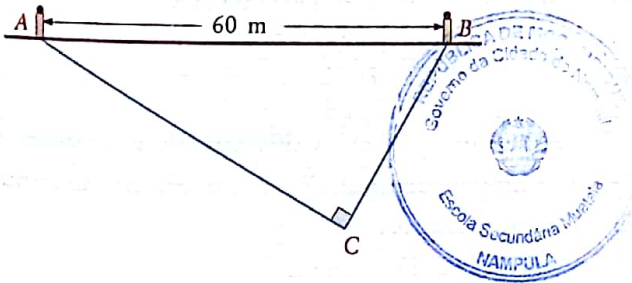
18 (10 + 4 + 4) pontos

- 2 Para cada valor concreto de m , $m \neq 1$, a expressão $(m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$ é uma equação do 2.º grau.

Mostre que, qualquer que seja m , $m \neq 1$, a equação tem duas soluções reais distintas de sinais contrários.

14 pontos

- 3 O António é jardineiro e pretende desenhar um canteiro com a forma de um triângulo rectângulo. Tem uma corda com 80 m que fixou em dois pontos A e B a uma distância de 60 m.



Determine $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de modo que $[ABC]$ seja um triângulo rectângulo em C .
 Apresente o resultado em metros com aproximação ao centímetro.

14 pontos

- 4 O Sr. Joaquim tem 100 metros de rede e pretende utilizá-la para construir uma vedação com a forma rectangular. Um dos lados do rectângulo dispensa a utilização de rede, uma vez que tem como suporte um muro.

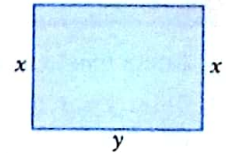


- 4.1 Designando por x e y os comprimentos dos lados do rectângulo, qual é o significado de cada uma das expressões?

- a) $2x + y$;

b) $2x + y = 100 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y = 100 - 2x$;

c) $x(100 - 2x)$.



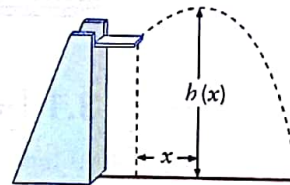
- 4.2 Determine as dimensões do terreno vedado de forma que a sua área seja máxima.

27 (12 + 15) pontos

- 5 A trajectória descrita por uma atleta, quando salta de uma prancha para uma piscina, é dada por:

$$h(x) = -0,4x^2 + 2,4x + 8$$

sendo x a distância, em metros, na horizontal, da mergulhadora à extremidade da prancha e $h(x)$ a altura, em metros, da mergulhadora relativamente ao solo onde está colocada a prancha.



- 5.1 Determine a altura da prancha.
 5.2 Determine $h(5)$ e interprete o resultado no contexto do problema.
 5.3 Determine a altura máxima atingida pela atleta.
 5.4 Determine a distância, na horizontal, da prancha ao ponto onde a atleta entra na água. Apresente o resultado em metros com aproximação às centésimas.
 5.5 Resolva a equação $h(x) = 10$ e interprete as soluções no contexto do problema.
 5.6 Resolva a inequação $h(x) > 5,2$ e interprete a solução no contexto do problema.

55 (4 + 5 + 10 + 10 + 12 + 14) pontos

- 6 O modelo seguinte representa a concentração de álcool no sangue durante oito horas de um indivíduo do género masculino que ingere cerveja numa dada refeição:

$$C(t) = \begin{cases} 0,022 + 0,007(t-1), & \text{para } 1 \leq t \leq 5 \\ 0,050 - 0,016(t-5), & \text{para } 5 < t \leq 8 \end{cases}$$

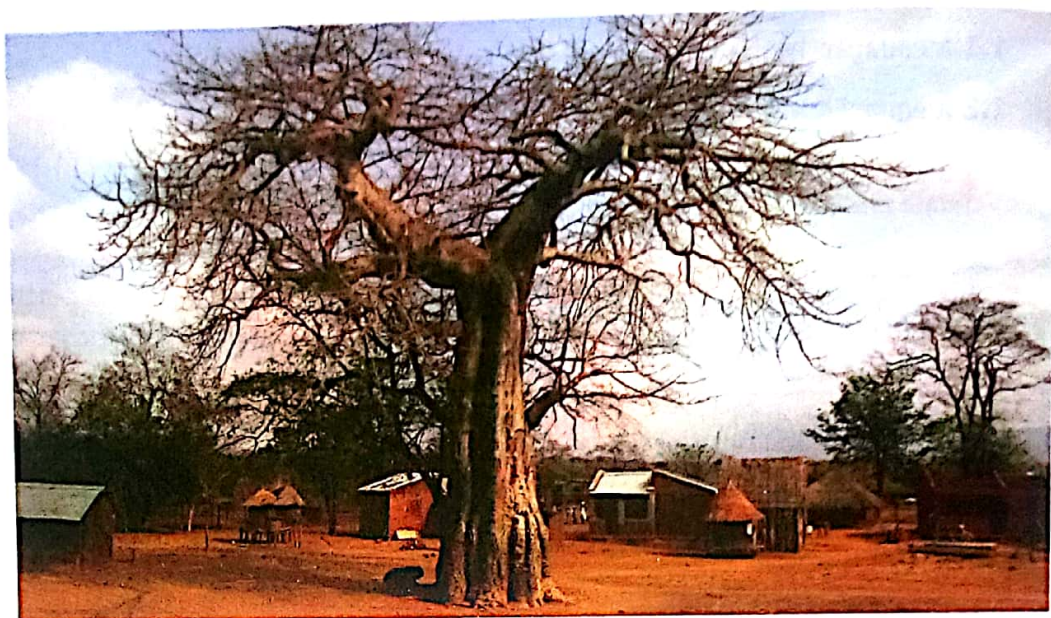
Esboce o gráfico desta função.

12 pontos

Objectivos

1. Definir função racional.
2. Determinar o domínio de uma função racional.
3. Reconhecer características do gráfico de uma função racional.
4. Identificar as assíntotas do gráfico de uma função racional.
5. Representar graficamente uma função racional.

3. Função racional



Embondeiro

3.1 Definição de função racional

Uma **função racional** é uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios e $d(x)$ é diferente do polinómio nulo. O domínio D_f , de uma função racional, f , é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : d(x) \neq 0\}$$

Por exemplo, são funções racionais as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 1} \text{ e } g(x) = \frac{x + 1}{x^3}.$$

Exemplo 1 Função racional

Das funções cujas expressões analíticas a seguir se apresentam, identifique as que são funções racionais.

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - 1}; \quad g(x) = \frac{x - 3}{2x + 1}; \quad h(x) = x^2 + 2x + 1;$$

$$i(x) = \sqrt{x} + 3; \quad j(x) = \frac{\sqrt{3} + x}{x}; \quad k(x) = |x|; \quad l(x) = \frac{5^x}{x + 1}.$$

Resolução

Vamos aplicar a definição de função racional.

São funções racionais as funções f , g , h e j por serem definidas pelo quociente dos dois polinômios.

Repare que qualquer função polinomial é uma função racional.

$$\left(h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{1} = x^2 + 2x + 1 \right)$$

Não são funções racionais as funções i , k e l :

• $i(x) = \sqrt{x} + 3$ porque $\sqrt{x} + 3$ não é um polinômio.

• $k(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, $k(x)$ não é um polinômio.

• $l(x) = \frac{5^x}{x+1}$ porque 5^x não é um polinômio.

Das seguintes funções identifique as que são funções racionais.

1.1 $f(x) = x^2 - 3$;

1.2 $g(x) = \frac{-x+3}{2}$;

1.3 $h(x) = \frac{\cos x}{x-1}$;

1.4 $i(x) = \frac{\pi x + 3}{5x + 1}$;

1.5 $j(x) = \frac{\sqrt{2} + x}{\sqrt{x^2}}$.

Exemplo 2 Função racional

Determine o domínio da função racional f definida por:

2.1 $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$;

2.2 $f(x) = \frac{x+1}{x^3 + 5x^2 - 6x}$.

Resolução

Vamos determinar os valores de x que não anulam o denominador.

2.1 $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \neq 0\}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{2} \vee x = \frac{-1-3}{2} \Leftrightarrow x = 1, \vee x = -2$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$$

Aplica-se a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para resolver a equação do 2.º grau

2.2 $f(x) = \frac{x+1}{x^3 + 5x^2 - 6x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 - 6x \neq 0\}$$

Tem-se:

$$x^3 + 5x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 5x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6 \vee x = 1$$

$$\text{Logo, } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -6, 1\}.$$

O domínio são todos os números reais excepto os que anulam o denominador
 $\{0, -6, 1\} = \{-6, 0, 1\}$

A ordem, na escrita em extensão de um conjunto, não é relevante.

Determine o domínio de cada uma das seguintes funções racionais:

2.1 $f(x) = \frac{1}{3x+3}$;

2.2 $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$;

2.3 $h(x) = \frac{3x}{x^2 - x^3}$;

2.4 $i(x) = \frac{2}{3x^2 - 6x + 9}$;

2.5 $j(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 4x^2 - 5x}$.

3.2 Conceito intuitivo de limite



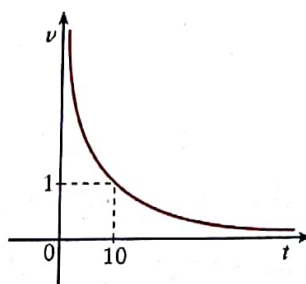
A distância entre um caracol e uma alface é de 10 m.

Considere v a velocidade média do caracol, em m/s, e t o tempo, em segundos, que o caracol vai demorar a chegar à alface.

Tem-se:

$$10 = v t \Leftrightarrow v = \frac{10}{t} \text{ ou } v(t) = \frac{10}{t}$$

Vamos representar graficamente esta função:



O que acontece à velocidade quando t se aproxima de $+\infty$

Se $t = 10$: $v = 1$

Se $t = 20$: $v = \frac{1}{2}$

Se $t = 1000$: $v = \frac{1}{100}$

...

Se t tende para $+\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), v tende para 0 ($v \rightarrow 0$).

Escreve-se: $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$

O que acontece à velocidade quando t se aproxima de 0

Se $t = 10$: $v = 1$

Se $t = 0,1$: $v = 100$

Se $t = 0,01$: $v = 1000$

...

Se t tende para 0 ($t \rightarrow 0$), v tende para $+\infty$ ($t \rightarrow +\infty$).

Escreve-se: $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = +\infty$

Escreve-se 0^+ porque t "caminha" para zero por valores positivos.

Consideremos agora a função f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

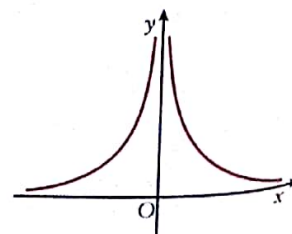
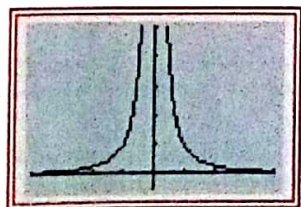
Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0;$$

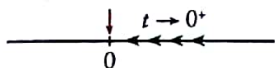
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

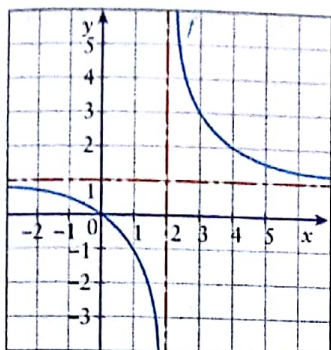


Observação

Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não representam números reais.



3.3 Assíntotas do gráfico de uma função racional

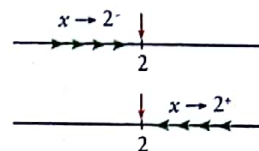


Na figura pode-se observar a representação gráfica da função racional f definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Observa-se que quando $x \rightarrow 2^-$ ou $x \rightarrow 2^+$, a função tende para $-\infty$ ou $+\infty$, respectivamente.

Diz-se que a recta da equação $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f .



Assíntota vertical

A recta da equação $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico da função f se:

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ ou } f(x) \rightarrow -\infty$$

quando x tende para a por valores à direita ou por valores à esquerda, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty.$$

Observa-se que quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$ o gráfico da função f aproxima-se da recta da equação $y = 1$.

Diz-se que a recta da equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f .

Assíntota horizontal

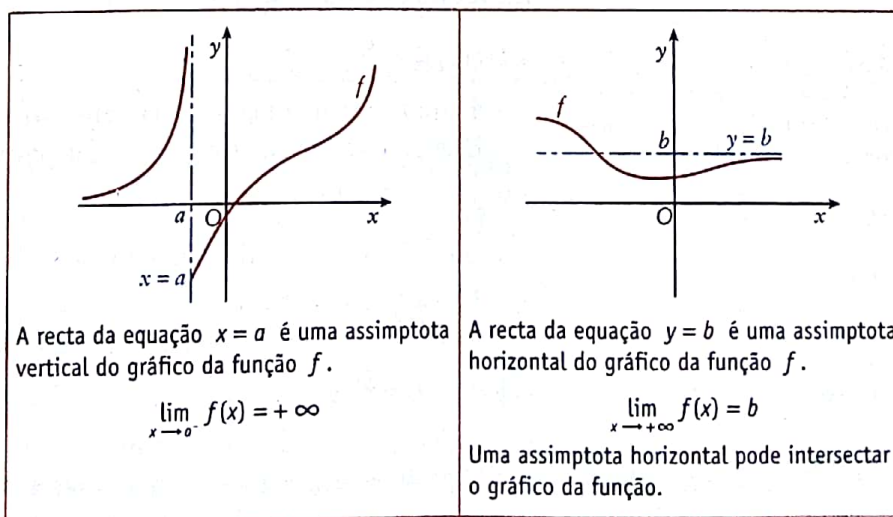
A recta da equação $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico da função f se:

$$f(x) \rightarrow b \text{ quando } x \rightarrow +\infty \text{ ou quando } x \rightarrow -\infty$$

Ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

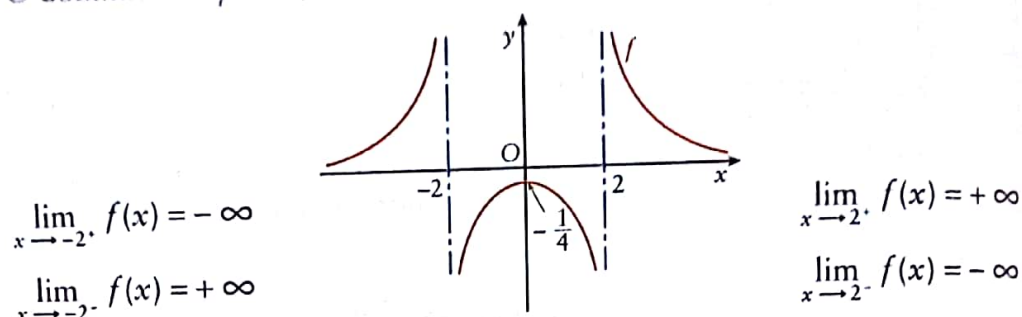
Repare que:



3.4 Determinação das assíntotas verticais

Com ajuda da calculadora gráfica observa-se uma representação gráfica da função racional definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

O domínio é $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.



As rectas da equações $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais do gráfico de f .

Nas funções racionais as assíntotas verticais estão relacionadas com o domínio da função.

Determinação das assíntotas verticais do gráfico de uma função racional

Seja f uma função racional definida por $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios.

Se a é um número real tal que $d(a) = 0$ e $n(a) \neq 0$, então a recta da equação $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f .

Exemplo 3 Determinação das assíntotas verticais

Determine as assíntotas verticais do gráfico de cada uma das seguintes funções racionais.

$$3.1 \ f(x) = \frac{x}{x-4}; \quad 3.2 \ g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}; \quad 3.3 \ h(x) = \frac{3x}{x^4+1}.$$

Resolução

Vamos procurar os valores de x que anulam o denominador da fracção racional que define a função e não anulam o numerador.

$$3.1 \ f(x) = \frac{x}{x-4} \quad x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

4 anula o denominador e não anula o numerador.

Logo, a recta da equação $x = 4$ é assíntota do gráfico da função f .

$$3.2 \ g(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$$

-1 e 1 são zeros do denominador. $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

1 é zero do numerador.

Logo, a recta da equação $x = -1$ é assíntota do gráfico de g .

$$3.3 \ h(x) = \frac{3x}{x^4+1}$$

O denominador não tem zeros.

O gráfico da função h não tem assíntotas verticais.



Determine as assíntotas verticais do gráfico de cada uma das seguintes funções racionais:

$$3.1 \ f(x) = \frac{x-3}{x+5};$$

$$3.2 \ g(x) = \frac{1}{3-x^2};$$

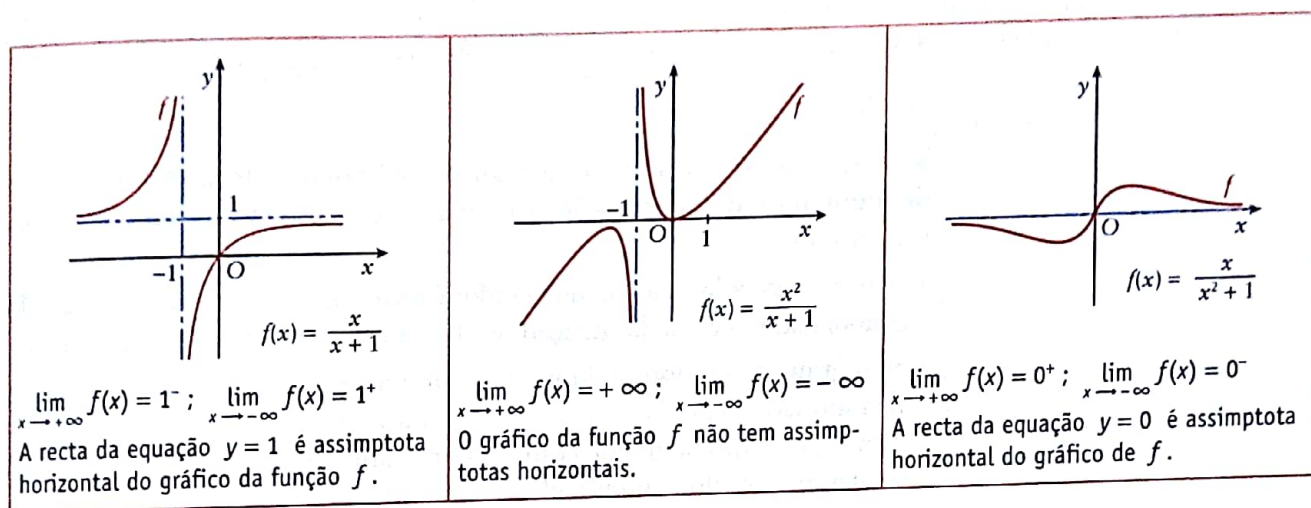
$$3.3 \ h(x) = \frac{9-x}{x^2-81};$$

$$3.4 \ i(x) = \frac{x-3}{x-3};$$

$$3.5 \ j(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}.$$

3.5 Determinação das assíntotas horizontais

Observemos os gráficos de algumas funções racionais e o comportamento da função quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.



Dada uma função racional f , definida por:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

pondo $a_n x^n$ em evidência no numerador e $b_m x^m$ em evidência no denominador, obtemos:

$$f(x) = \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \dots + \frac{b_0}{b_m x^m} \right)}$$

Dado que as quantidades dentro dos parênteses se aproximam de 1 quando x tende para $\pm\infty$, concluímos que o comportamento de $f(x)$, quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ é determinado por $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$, isto é, o

comportamento de $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$ e $a(x) = \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$, quando $x \rightarrow \pm\infty$, é aproximadamente o mesmo.

Determinação da assíntota horizontal do gráfico de uma função racional (caso exista)

Seja f uma função racional definida por:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

1. Se $n < m$, a recta da equação $y = 0$ é a assíntota horizontal do gráfico da função f .
2. Se $m = n$, a recta da equação $y = \frac{a_n}{b_m}$ é a assíntota horizontal do gráfico da função f .
3. Se $n > m$, o gráfico da função f não tem assíntota horizontal.

Exemplo 4 Determinação das assíntotas horizontais

Determine, caso existam, as assíntotas horizontais dos gráficos de cada uma das seguintes funções racionais.

$$4.1 \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2};$$

$$4.2 \quad g(x) = \frac{4x^2-1}{2x^2+1}.$$

Resolução

Vamos analisar e comparar o grau de polinómios do numerador e do denominador das expressões racionais que definem as funções, pois sabemos que:

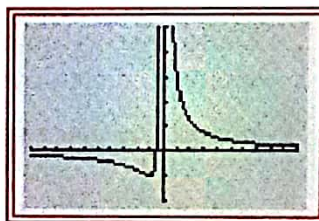
- Se o grau do polinómio do numerador é menor que o grau do polinómio do denominador a recta da equação $y=0$ é assíntota do gráfico da função.
- Se o grau do polinómio do numerador é igual ao grau do polinómio do denominador encontra-se a equação da assíntota dividindo o coeficiente do termo de maior grau do numerador pelo coeficiente do termo de maior grau do denominador.
- Se o grau do polinómio do numerador é superior ao grau do polinómio do denominador, então o gráfico da função não tem assíntotas horizontais.

$$4.1 \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$$

O polinómio do numerador tem grau 1 e o polinómio do denominador tem grau 2 ($2 > 1$).

Logo, a recta da equação $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f .

Confirmemos, usando a calculadora gráfica.



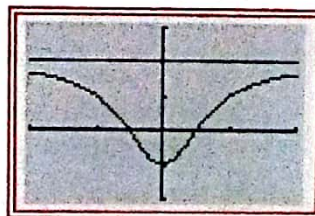
$$4.2 \quad g(x) = \frac{4x^2-1}{2x^2+1}$$

O grau do polinómio do numerador é igual ao do denominador ($=2$).

Logo, a recta da equação:

$$y = \frac{4}{2} \Leftrightarrow y = 2 \text{ é uma assíntota horizontal do gráfico de função } g.$$

Confirmemos, usando a calculadora gráfica.



Determine, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de cada uma das seguintes funções racionais:

$$4.1 \quad f(x) = \frac{2}{x-1};$$

$$4.2 \quad g(x) = \frac{2x}{7-x};$$

$$4.3 \quad h(x) = \frac{3x}{x^2-x-6};$$

$$4.4 \quad i(x) = \frac{-x^2}{x^2-3x+4};$$

$$4.5 \quad j(x) = \frac{x^3-3}{x^3};$$

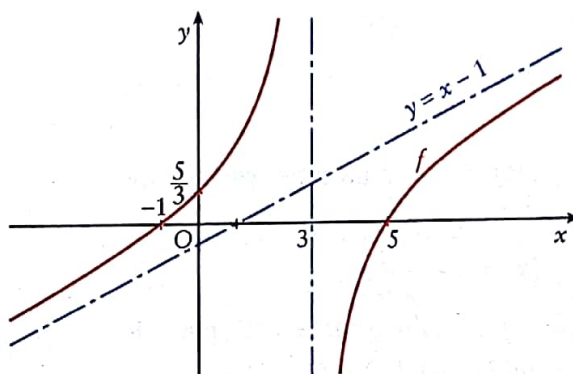
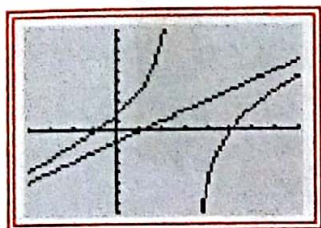
$$4.6 \quad k(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

3.6 Determinação das assíntotas oblíquas

Consideremos a função racional f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

Sabemos que o gráfico desta função não tem qualquer assíntota horizontal uma vez que o grau do polinómio do numerador é superior ao grau do polinómio do denominador ($2 > 1$).

Observemos uma representação gráfica desta função.



Verifica-se que quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$ o gráfico da função se aproxima cada vez mais da recta da equação $y = x - 1$.

A recta da equação $y = x - 1$ é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f .

Como obter a equação desta recta?

Vamos escrever de outra forma a expressão algébrica que define a função.

Dividendo	Divisor
$x^2 - 4x - 5$	$x - 3$
$-x^2 + 3x$	$x - 1$
	Quociente
$-x - 5$	
$+x - 3$	
-8	
Resto	

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 3)(x - 1) - 8$$

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x - 3} = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

$$f(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

Quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $\frac{8}{x - 3} \rightarrow 0$ e o gráfico da função f aproxima-se da recta da equação $y = x - 1$.

Determinação da assíntota oblíqua do gráfico de uma função racional (caso exista)

Se $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios e o grau de $n(x)$ é maior, em uma unidade, que o grau de $d(x)$, então $f(x)$ pode ser escrita na forma $f(x) = mx + b + \frac{r(x)}{d(x)}$, onde o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $d(x)$.

Neste caso, a recta da equação $y = mx + b$, $m \neq 0$, é uma assíntota oblíqua do gráfico de f , ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1 O gráfico da função racional f tem como assíntotas as rectas das equações:

$$x = -1 \text{ e } y = 2.$$

Então, o gráfico da função g definida por:

$$g(x) = f(x-1) + 5$$

tem como assíntotas as rectas definidas por:

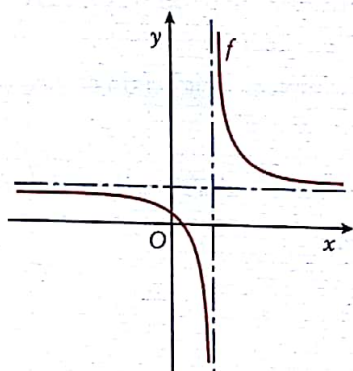
- (A) $x = 0$ e $y = 7$; (B) $x = 0$ e $y = -3$;
(C) $x = -2$ e $y = 7$; (D) $x = -2$ e $y = 5$.

7 pontos

- 2 Para um certo valor de a e para um certo valor de b , a expressão:

$$f(x) = a + \frac{1}{x-b}$$

define a função f , cujo gráfico está parcialmente representado na figura seguinte.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $a > 0$ e $b < 0$; (B) $a > 0$ e $b > 0$;
(C) $a < 0$ e $b < 0$; (D) $a < 0$ e $b > 0$.

7 pontos

- 3 Um tanque tem a forma de um cubo com 2 m de aresta.

O tanque estava vazio quando começou a encher por uma mangueira que verte água à taxa de 2 m^3 por hora, até encher o tanque.

Qual das seguintes expressões define a função que permite calcular a altura h da água no tanque, t horas após a mangueira começar a encher o tanque?

- (A) $h(t) = 2t$; (B) $h(t) = \frac{t}{2}$;
(C) $h(t) = -2t$; (D) $h(t) = t + \frac{2}{t}$.

7 pontos

- 4 Uma companhia farmacêutica concluiu que quando um certo medicamento é administrado num doente a concentração c do medicamento no sangue em mg/l , h horas depois do medicamento ser administrado, é dada por:

$$c(h) = \frac{50h}{h^2 + 1}, \quad h \geq 0$$



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A concentração máxima obtida é 20 mg/l .
(B) $15 \leq c(h) \leq 20$ durante 30 minutos.
(C) $c(3) = 11,765$.
(D) Sete horas depois da administração do medicamento a concentração no sangue é de 7 mg/l .

7 pontos

- 5 Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ por:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$$

A equação da assíntota oblíqua do gráfico da função f é:

- (A) $y = x + 1$; (B) $y = x - 1$;
(C) $y = x + 2$; (D) $y = -x + 1$.

7 pontos

- 6 Considere a igualdade:

$$\frac{4}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

Então:

- (A) $A = -4$;
(B) $B = 5$;
(C) $C = -2$;
(D) Não é possível determinar A , B e C .

7 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1** Numa piscicultura, existe um tanque que tem actualmente 500 xarés. No tanque não existem outros peixes.

Ao serem introduzidos x peixes-serras, a proporção $P(x)$ do número de peixes-serras, relativamente ao número total de peixes que passam a existir no tanque, é dada por:

$$P(x) = \frac{x}{500 + x}, \quad x > 0$$

- 1.1** Determine as assíntotas do gráfico da função P e interprete o seu significado.
- 1.2** Pretende-se que a percentagem de peixes-serras, relativamente ao número total de peixes, não seja superior a 20%.

Qual é o número máximo de peixes-serras que podem ser introduzidos no tanque?

Resolva a questão por processos exclusivamente analíticos e apresente os cálculos que efectuar.

38 (18 + 20) pontos

2 Experiência profissional

Numa fábrica de componentes electrónicos situada na Matola, o número N de peças que um operador de determinada máquina produz por hora depende do número t de dias de experiência.

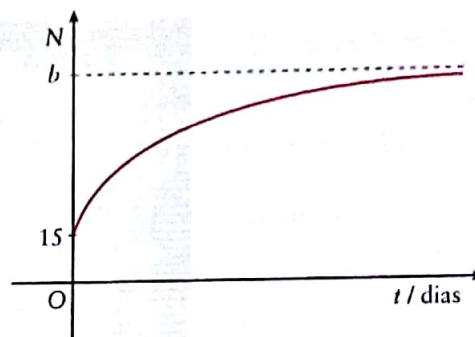


Essa relação, para determinado valor de k , é dada por:

$$N(t) = \frac{50t + k}{t + 25}, \quad t \geq 0$$

Na figura seguinte apresenta-se parte do gráfico da função N onde se visualiza a evolução do número de peças fabricadas por hora por

determinado operário à medida que a sua experiência vai aumentando:



Tal como a figura sugere, a recta da equação $y = b$ é uma assíntota do gráfico da função N .

- 2.1** Servindo-se dos dados da figura mostre que $k = 375$.

Nas alíneas seguintes, faça $k = 375$.

- 2.2** Qual o número de peças que é de esperar que um operário com 10 dias de experiência produza por hora?

- 2.3** Determine o valor da constante b e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

50 (15 + 10 + 25) pontos

- 3** Uma mancha circular de tinta é detectada sobre um tecido. O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detectada, é dado por:

$$r(t) = \frac{1 + 5t}{4 + t}, \quad t \geq 0$$

- 3.1** Calcule $r(0)$ e interprete o resultado.
- 3.2** Determine as assíntotas do gráfico da função r e interprete o resultado.
- 3.3** Com a ajuda da calculadora gráfica faça um esboço do gráfico de r .
- 3.4** Calcule, com aproximação às décimas de segundo, o instante t para o qual a área da nódoa é igual a 40 cm^2 .

Nota: Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo duas casas decimais.

70 (10 + 15 + 15 + 30) pontos

Objectivos

1. Identificar duas funções iguais.
2. Definir soma, diferença, produto e quociente de duas funções.
3. Definir a função composta de duas funções.
4. Reconhecer que a composição de funções não goza a propriedade comutativa.
5. Definir a função inversa de uma função injectiva.

4. Operações com funções



4.1 Igualdade de duas funções

As funções f e g definidas por $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ e $g(x) = \frac{1}{x+2}$ não são iguais, porque não têm o mesmo domínio.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \text{ e } D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Igualdade de funções

Duas funções reais de variável real, f e g , são iguais se:

- $D_f = D_g$
- e
- $f(x) = g(x), \forall x \in D_f$

Exemplo 1 Igualdade de funções

Diga, justificando, se f e g são iguais, sendo:

$$1.1 \ f(x) = |x| \text{ e } g(x) = \sqrt{x^2}; \quad 1.2 \ f(x) = x \text{ e } g(x) = (\sqrt{x})^2.$$

Resolução

$$1.1 \ D_f = D_g = \mathbb{R} \text{ e } |x| = \sqrt{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \text{ e } f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Portanto, f e g são iguais.

$$1.2 \ f(x) = x \text{ e } g(x) = (\sqrt{x})^2$$

$$D_f = \mathbb{R}; \quad D_g = \mathbb{R}_0^+$$

As funções f e g não têm o mesmo domínio. Por isso, não são iguais.



Diga, justificando, se são iguais as funções f e g definidas por:

$$1.1 \ f(x) = \frac{x+3}{x+3} \text{ e } g(x) = 1;$$

$$1.2 \ f(x) = \sqrt{(x+3)^2} \text{ e } g(x) = x+3;$$

$$1.3 \ f(x) = \sqrt{(-2x)^2} \text{ e } g(x) = |2x|;$$

$$1.4 \ f(x) = |\sqrt[3]{x}| \text{ e } g(x) = \sqrt[3]{|x|}.$$

4.2 Soma, diferença, produto e quociente de funções

Consideremos duas funções reais de variável real f e g .

$f(x)$ e $g(x)$ também são números reais. Por isso, podemos efectuar as operações:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\rightarrow \text{soma} & f(x) - g(x) &\rightarrow \text{diferença} \\ f(x) \times g(x) &\rightarrow \text{produto} & \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 &\rightarrow \text{quociente} \end{aligned}$$

O resultado de cada uma destas operações é uma nova função e tem-se:

Operações com funções

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x), \quad D_{fg} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$$

Repare que as funções soma, diferença e produto têm por domínio a intersecção dos domínios das funções envolvidas.

A função quociente tem por domínio o conjunto dos números reais que pertencem, simultaneamente, aos domínios das funções f e g e que não são zeros da função g .

Exemplo 2 Soma, diferença, produto e quociente de funções

Sejam f e g as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2x}{x-1}.$$

Defina as funções:

$$f + g, \quad f - g, \quad fg \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}.$$

Resolução

Definir ou caracterizar uma função é indicar o domínio, o conjunto de chegada e um processo que permita conhecer a imagem de qualquer objecto. Neste caso, o processo consiste em indicar a expressão analítica que define a função e o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

O denominador anula-se se $x = 0$.

$$g(x) = \frac{2x}{x-1}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

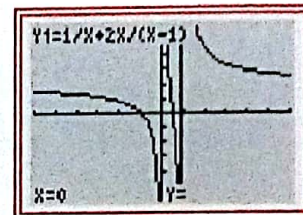
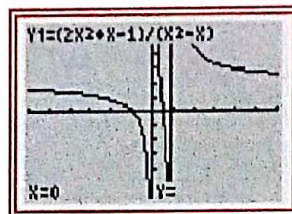
O denominador anula-se se $x = 1$.

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Função soma

$$\begin{aligned}
 (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x-1} \\
 &= \frac{x-1}{x(x-1)} + \frac{2x^2}{x(x-1)} \\
 &= \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x}
 \end{aligned}$$

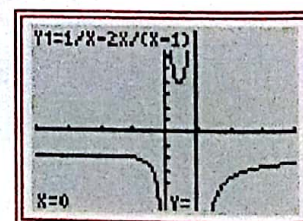
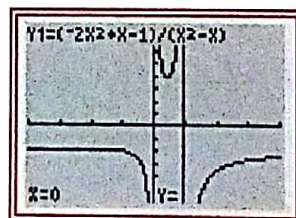
$$\begin{aligned}
 f+g: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x}
 \end{aligned}$$



Função diferença

$$\begin{aligned}
 (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x-1} \\
 &= \frac{x-1}{x(x-1)} - \frac{2x^2}{x(x-1)} \\
 &= \frac{-2x^2 + x - 1}{x^2 - x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f-g: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \frac{-2x^2 + x - 1}{x^2 - x}
 \end{aligned}$$

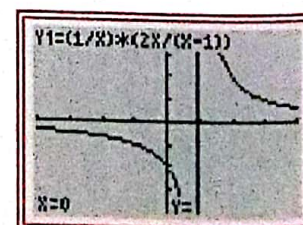
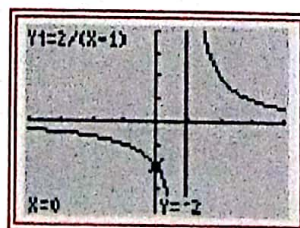


Função produto

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{1}{x-1} \times \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
 fg: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \frac{2}{x-1}
 \end{aligned}$$

Note que D_{fg} não coincide com o domínio de $\frac{2}{x-1}$.



Função quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} : \frac{2x}{x-1} = \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{2x} = \frac{x-1}{2x^2}$$

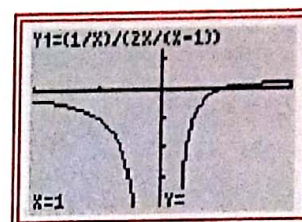
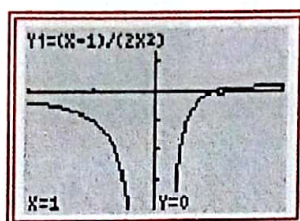
Zeros de g :

$$2x = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x-1}{2x^2}$$

$$\begin{aligned} D'_g &= D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \cap \mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \end{aligned}$$



2

Sejam f e g funções reais de variável real, defina:

$$f+g, f-g, fg \text{ e } \frac{f}{g}$$

se:

$$2.1 \quad f(x) = 3x \text{ e } g(x) = x + \frac{1}{2};$$

$$2.2 \quad f(x) = \frac{x+3}{x} \text{ e } g(x) = \frac{x}{x+4};$$

$$2.3 \quad f(x) = \frac{2x-6}{x} \text{ e } g(x) = \frac{x+1}{x-3}.$$

4.3 Função composta de duas funções

Consideremos as funções f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e a função g , de domínio $[0, +\infty[$, definida por $g(x) = \sqrt{x}$.

Vamos calcular $f(g(4))$.

$$4 \xrightarrow{g} \sqrt{4} = 2 \xrightarrow{f} \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, $f(g(4)) = 1$.

$f(g(x))$ é a expressão analítica de uma nova função.

$$x \xrightarrow{g} \sqrt{x} \xrightarrow{f} \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

$$\text{Logo, } f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

Esta nova função representa-se por: $f \circ g$ (f após g).

$f \circ g$ é a composta de f por g .

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Domínio da função composta

Calculemos $(g \circ f)(-2)$.

$$(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g\left(-\frac{1}{3}\right) = \sqrt{-\frac{1}{3}},$$

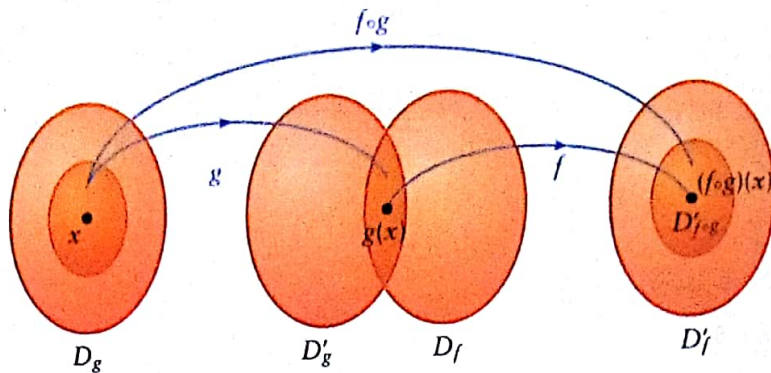
mas $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ não é um número real.

Conclui-se que -2 não pertence ao domínio de $g \circ f$.



Como determinar o domínio de uma função composta?

D'_g = contradomínio de g
 D'_f = contradomínio de f
 $D'_{f \circ g}$ = contradomínio de $f \circ g$



$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Do mesmo modo se define

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

Assim:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; g(x) = \sqrt{x}; D_g = [0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \bullet D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, +\infty[\wedge \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} \quad \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Leftrightarrow x \neq 1 \\ &= [0, +\infty[\setminus \{1\} \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Caracterização de $f \circ g$:

$$(f \circ g) : [0, +\infty[\setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\begin{aligned} \bullet D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \wedge \frac{1}{x-1} \in [0, +\infty[\} \\ &=]1, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} &\Leftrightarrow x \neq 1 \\ \frac{1}{x-1} \in [0, +\infty[&\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

Caracterização de $g \circ f$:

$$(g \circ f) :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

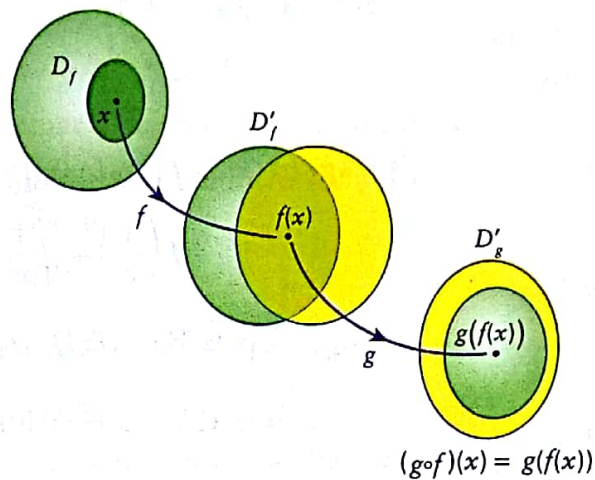
$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

Função composta

Dadas as funções f e g , a composta de g por f é a função que se representa por $g \circ f$ e se define por:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

**Exemplo 3** Composição de funções

Sendo f , g e h as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

defina as funções:

$$f \circ g, \quad g \circ h \quad \text{e} \quad f \circ g \circ h.$$

Resolução

Começa-se por determinar os domínios das funções dadas.

Em seguida, aplica-se a definição de função composta das duas funções para determinar a sua expressão analítica.

$$D_f = \mathbb{R}_0^+; \quad D_g = \mathbb{R}; \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\bullet (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \in \mathbb{R}_0^+\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

x^2 é sempre maior ou igual a zero.

Logo:

$$\begin{array}{ccc} f \circ g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$



3.1 Calcule, em cada caso,

$$(f \circ g)(-2) \text{ e } (g \circ f)(-2),$$

sendo:

a) $f(x) = x - 1$ e

$$g(x) = 2x + \frac{1}{2};$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2}$ e

$$g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

3.2 Caracterize, em cada caso,

$$(f \circ g)(x) \text{ e } (g \circ f)(x),$$

sendo:

a) $f(x) = x^2 + 1$ e

$$g(x) = 2x - 2;$$

b) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ e

$$g(x) = \sqrt{x};$$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ e

$$g(x) = \sqrt{x+1}.$$

3.3 Dada a função f , definida por $f(x) = x - 2$, defina uma função g , de modo que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, ou seja, que as funções f e g sejam funções permutáveis.

$$\bullet (g \circ h)(x) = g[h(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$D_{g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_g\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo:

$$g \circ h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$

$$\bullet (f \circ g \circ h)(x) = f[(g \circ h)(x)] =$$

$$= f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}$$

$$D_{f \circ g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_{g \circ h} \wedge (g \circ h)(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}_0^+\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo:

$$f \circ g \circ h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{|x|}$$

Em exemplos anteriores já vimos que a função $f \circ g$ pode ser diferente da função $g \circ f$, isto é, a composição de duas funções não é comutativa.

Acontece que, para certas funções f e g , tem-se que: $f \circ g = g \circ f$.

Nesse caso, diz-se que f e g são funções permutáveis.

Exemplo 4 Funções permutáveis

Mostre que são permutáveis as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = 3x \text{ e } g(x) = -2x.$$

Resolução

Vamos definir as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ e verificar que as duas funções são iguais.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(-2x) = 3(-2x) = -6x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3x) = -2(3x) = -6x$$

$$D_f = D_g = D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$$

Logo, $f \circ g = g \circ f$, pelo que as funções f e g são permutáveis.



Averigue se as funções f e g são permutáveis sendo:

4.1 $f(x) = -x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$

$$g(x) = \pi x + 3, D_g = \mathbb{R}$$

4.2 $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, +\infty[$

$$g(x) = \frac{1}{x-3}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

A função composta de duas funções pode não existir.

Exemplo 5 A função composta não existe

Sejam as funções f e g definidas por:

$$f(x) = -x^2 \text{ e } g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Mostre que a função $g \circ f$ não existe.

Resolução

Vamos determinar o domínio da função composta.

Se esse domínio for o conjunto vazio, por definição de função, a função composta não existe.

$$D_f = \mathbb{R}; D_g = \mathbb{R}^+$$

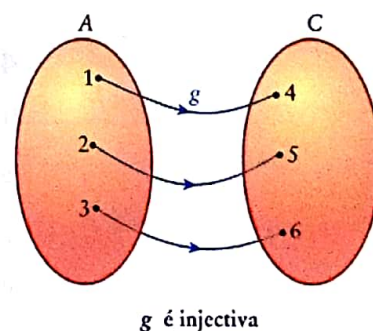
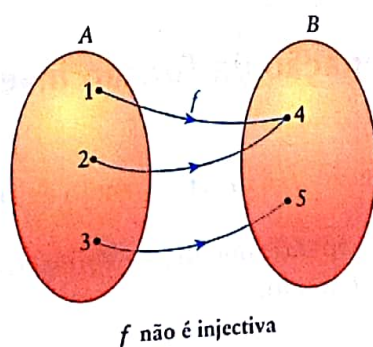
$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \wedge -x^2 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \emptyset, \text{ logo, não existe } g \circ f. \end{aligned}$$

5

Defina duas funções reais de variável real, f e g , de modo que $f \circ g$ não exista, mas $g \circ f$ exista.

4.4 Definição de função inversa

Consideremos as duas funções f e g representadas por um diagrama de setas.



Invertendo o sentido das setas, consideremos agora a correspondência "inversa" de B para A e de C para A .

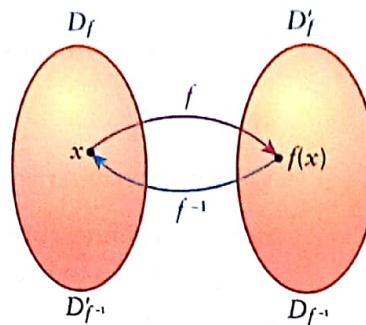
Enquanto que a correspondência inversa de g é uma função $4 \curvearrowright 1$; $5 \curvearrowright 2$; $6 \curvearrowright 3$, a correspondência inversa de f não é função (4 teria duas imagens).

Só as funções injectivas têm inversa.

Função inversa

Dada uma função injectiva f , a inversa de f é a função f^{-1} tal que

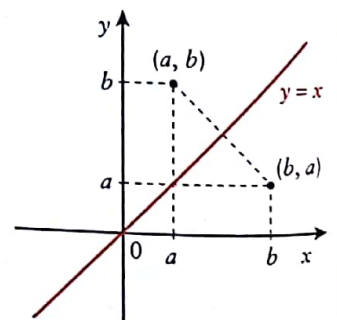
- $D_{f^{-1}} = D_f'$;
- $D_f' = D_{f^{-1}}$;
- $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, $\forall x \in D_f$, $\forall y \in D_{f^{-1}}$.



Representação gráfica de f^{-1}

O ponto de coordenadas (b, a) pertence ao gráfico de f^{-1} se, e só se, o ponto de coordenadas (a, b) pertence ao gráfico de f .

A recta da equação $y = x$ é o eixo de reflexão relativamente aos pontos (a, b) e (b, a) .



4.5 Determinação da função inversa de uma função injectiva

Se uma dada função f é injectiva, então existe f^{-1} .

Para determinar, analiticamente, a expressão que define f^{-1} , pode proceder-se do seguinte modo:

Estratégia para determinar a função inversa de uma função dada

- 1.º Determina-se o domínio e o contradomínio de f .
- 2.º Considera-se a equação $f(x) = y$.
- 3.º Trocam-se as variáveis x por y e y por x .
- 4.º Resolve-se a equação em ordem a y .
- 5.º O domínio de f^{-1} é o contradomínio de f e o contradomínio de f^{-1} é o domínio de f .

Exemplo 6 Determinação da função inversa

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2x + 4$$

Caracterize a função inversa da função f e represente graficamente f e f^{-1} .

Resolução

Vamos seguir os passos indicados anteriormente.

- $f(x) = 2x + 4$
 $D_f = \mathbb{R}; D_f' = \mathbb{R}$
- $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 4 = y$
- $2y + 4 = x$
- $2y + 4 = x \Leftrightarrow 2y = x - 4$
 $\Leftrightarrow y = \frac{x - 4}{2}$
 $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - 2$

Trocam-se as variáveis.

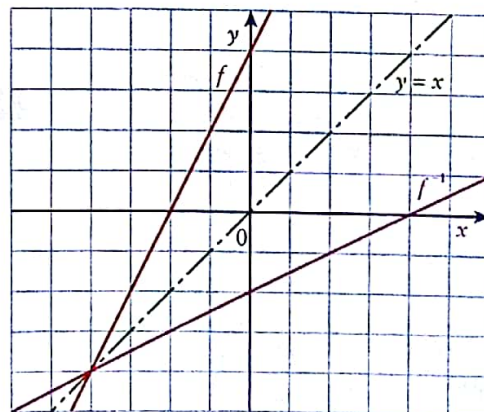
Resolve-se a equação em ordem a y .

- Define-se a função:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{2} - 2$$

- Graficamente:

**6**

Caracterize, para cada caso, a função inversa de f , sendo:

6.1 $f(x) = \frac{6}{x}$;

6.2 $g(x) = 6x + 1$;

6.3 $h(x) = \frac{2}{x - 3}$.

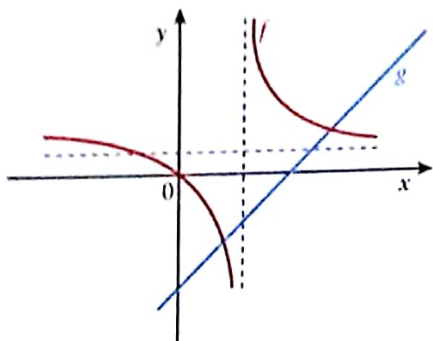
Para cada uma das funções faça o seu esboço gráfico, assim como o da sua função inversa.

Relação entre uma função e a sua inversa

Seja f uma função real de variável real que possui inversa f^{-1} .

1. $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D_f$
2. $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in D_{f^{-1}}$

- 1** Na figura seguinte estão representadas:
- parte do gráfico de uma função racional f ;
 - parte do gráfico de uma função afim g .

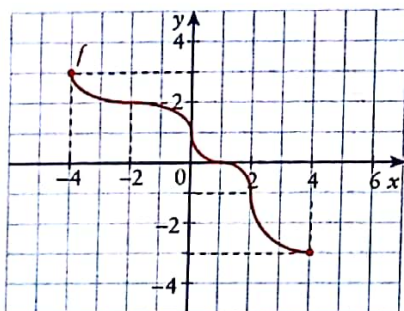


Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto-solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$?

- (A) $]-\infty, 0] \cup]1, 2]$;
 (B) $]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$;
 (C) $[0, 1] \cup]2, +\infty[$;
 (D) $[0, 1[\cup]2, +\infty[$.

10 pontos

- 2** Seja f a função cujo gráfico está representado na figura seguinte.



- 2.1** Seja f^{-1} a inversa da função f . Qual é o valor de $f^{-1}(0) - f^{-1}(2)$?
- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) -2.

- 2.2** Sendo g a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, definida por:

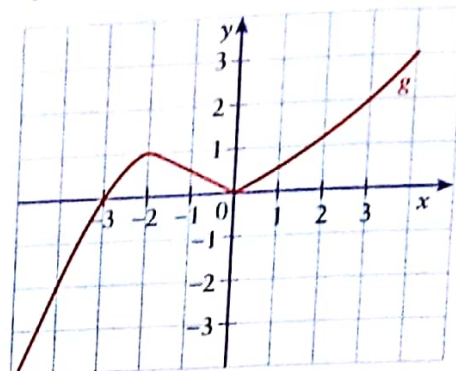
$$g(x) = 1 + \frac{2}{x-3}$$

Qual o valor de $(g \circ f)(2)$?

- (A) $\frac{1}{2}$; (B) $-\frac{1}{2}$; (C) $\frac{3}{2}$; (D) $\frac{3}{4}$.

10 pontos

- 3** Na figura está representada parte de um gráfico da função g .



Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{-2+x}$$

- 3.1** Qual é o valor de $(g \circ f)(29)$?

- (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

- 3.2** Qual é o valor de $f^{-1}(-2) + f(-6)$?

- (A) -6; (B) -8; (C) -10; (D) 8.

20 pontos

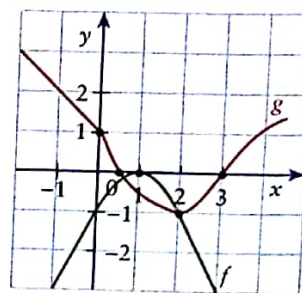
- 4** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, injectiva e tal que $f(a) = 3$, sendo $a \in \mathbb{R}$.

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 3$?

- (A) 0; (B) 2; (C) 3; (D) 1.

10 pontos

- 5** Na figura seguinte estão representadas graficamente as funções f e g .



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) -1 é zero da função $f - g$.
 (B) 1 é zero da função $\frac{g}{f}$.
 (C) $(f \circ g)(4) = -1$
 (D) Em $]0, 4[$, a função $f \times g$ tem três zeros.

10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1** Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B .

Admita que, t anos após o início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A , é dado aproximadamente por:

$$a(t) = \frac{11t + 6}{t + 1} \quad (t \geq 0)$$

e que o número de animais, em milhares, da espécie B é dado, aproximadamente, por:

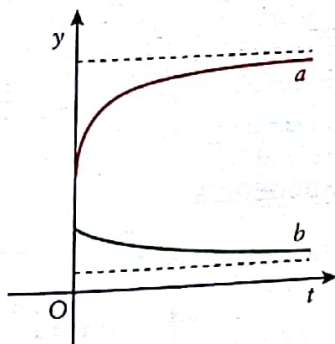
$$b(t) = \frac{t + 9}{t + 3} \quad (t \geq 0)$$

Resolva as duas questões seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

- 1.1** Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A .

Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

- 1.2** Na figura seguinte, estão representadas graficamente as funções a e b .



Tal como estes gráficos sugerem, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor.

Determine esse valor, recorrendo às assíntotas horizontais dos gráficos das funções a e b , e escreva as expressões analíticas dessas funções.

- 1.3** Mostre que $g(t) = (a \circ b)(t)$ é definida por:

$$g(t) = \frac{17t + 117}{2t + 12}$$

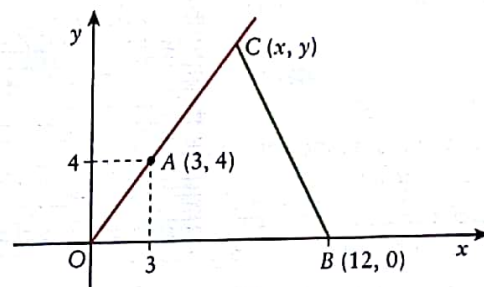
- 1.4** Considere a função f como um prolongamento a $\mathbb{R}$ da função a , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11x + 6}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 11 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Caracterize a função inversa de f .

80 pontos

- 2** Na figura seguinte está representado num sistema cartesiano o triângulo $[OBC]$.



O ponto C move-se sobre a semi-recta $\vec{OA}$, sem nunca atingir o ponto O .

- 2.1** Escreva a área do triângulo em função de x .
2.2 Escreva o perímetro do triângulo em função de x .

30 pontos

- 3** Admita que o número N de bactérias de uma cultura depende da temperatura ambiente T , em graus Celsius, de acordo com a função:

$$N(T) = T^2 + 125T + 100, \quad 10 \leq T \leq 34$$

A temperatura T depende, por sua vez, do número de horas h , após o início da cultura começar o seu crescimento.

A função $T(h) = 4h + 10$, $0 \leq h \leq 6$, relaciona h com T .

- 3.1** Escreva o número de bactérias N como função de h .
3.2 Quantas bactérias tem a cultura 4 horas após o início do seu crescimento?
3.3 Para a cultura ter 5000 bactérias, quanto tempo terá de decorrer desde o início do seu crescimento?
 Apresente a resposta em horas e minutos.

30 pontos

Objectivos

1. Identificar funções exponenciais.
2. Conhecer as propriedades das funções exponenciais.
3. Resolver equações exponenciais.
4. Aplicar as funções exponenciais na modelação de situações reais.
5. Identificar funções logarítmicas.
6. Conhecer as bases especiais 10 e e.
7. Conhecer as propriedades das funções logarítmicas.
8. Aplicar as propriedades operatórias dos logaritmos.
9. Resolver equações exponenciais e logarítmicas.
10. Resolver inequações com exponenciais e logaritmos.
11. Resolver problemas em contexto real usando funções exponenciais e funções logarítmicas.
12. Conhecer e aplicar as propriedades das funções trigonométricas.
13. Resolver equações trigonométricas.
14. Obter gráficos de funções trigonométricas a partir do gráfico de $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

5. Funções exponenciais. Funções logarítmicas. Funções trigonométricas (revisão)



5.1 Funções exponenciais

Chama-se **função exponencial** de base a à função:

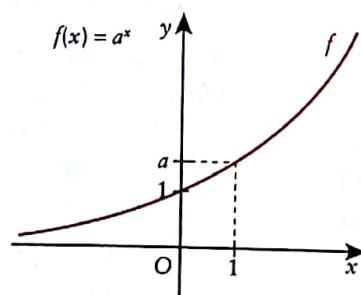
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a^x$$

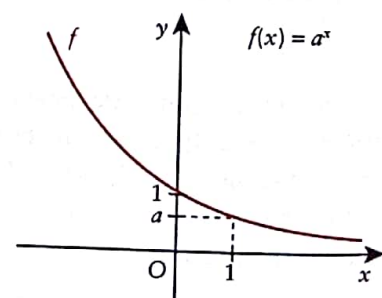
sendo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Algumas propriedades da função exponencial

Base: $a > 1$



Base: $0 < a < 1$



- Domínio: $\mathbb{R}$
- Contradomínio: $\mathbb{R}^+$ ($a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$)
- f é contínua em $\mathbb{R}$
- f é injectiva
- f não tem zeros (o gráfico não intersecta o eixo Ox)

Nota:

Considerando que os tempos lectivos propostos para cada unidade temática podem não ser suficientes, sugerimos que este tema seja indicado como trabalho individual ou de grupo.

Se $a > 1$:• f é estritamente crescente

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

A recta da equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f quando $x \rightarrow -\infty$.

O gráfico de f não tem mais assíntotas.

Se $0 < a < 1$:• f é estritamente decrescente

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

A recta da equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

O gráfico de f não tem mais assíntotas.

Função exponencial de base e

Sabe-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

O número e , denominado número de Neper, é um número irracional.

$$e \approx 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045$$

A função exponencial de base e :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

tem as propriedades já enunciadas para a função exponencial de base $a > 1$.

Os modelos matemáticos em que figura a função exponencial de base e têm particular interesse na interpretação de fenómenos, tais como:

- crescimento populacional;
- desintegração radioactiva;
- capitalização de juros.

Regras operatórias das funções exponenciais

As regras operatórias das funções exponenciais resultam das regras operatórias das potências de expoente real, que são as mesmas das regras operatórias das potências de expoente racional. Assim, temos que, para quaisquer números reais positivos a e b e para quaisquer números reais x e y , as funções exponenciais:

$$f: x \mapsto a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

satisfazem as seguintes regras operatórias:

• $a^x \times a^y = a^{x+y}$

• $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

• $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } m \in \mathbb{Z}$

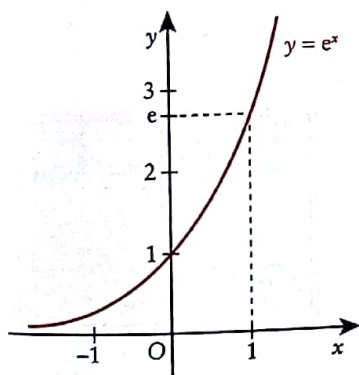
• $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

• $(a^x)^y = a^{xy}$

• $a^x \times b^x = (a \times b)^x$

• $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

• $a^0 = 1$





Observação

Funções exponenciais e condições

As funções exponenciais $x \mapsto a^x$ são:

- injectivas (se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$);
- crescentes, se $a > 1$;
- decrescentes, se $0 < a < 1$.

Estas propriedades permitem resolver equações e inequações envolvendo exponenciais.

Exemplo 1 Condições envolvendo exponenciais

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das condições:

1.1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \sqrt{8}$;

1.2 $(0,1)^{-x} < 10^3$;

1.3 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\frac{x}{2}} > 3^x$.

Resolução

1.1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 8^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{-2x} = (2^3)^{\frac{1}{2}}$

$$\Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

1.2 $(0,1)^{-x} < 10^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{-x} < 10^3$

$$\Leftrightarrow 10^x < 10^3$$

Como $10 > 1$, a função $x \mapsto 10^x$ é crescente.

Então, $10^x < 10^3 \Leftrightarrow x < 3$.

Logo, $S =]-\infty, 3[$.

1.3 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\frac{x}{2}} > 3^x$; $(3^{-1})^{1-\frac{x}{2}} > 3^x$; $3^{-1+\frac{x}{2}} > 3^x$

Como a base é $3 > 1$, a função $f(x) = 3^x$ é crescente e, então, vem:

$$-1 + \frac{x}{2} > x \Leftrightarrow -2 + x > 2x$$

$$\Leftrightarrow -x > 2$$

$$\Leftrightarrow x < -2$$

Logo, $S =]-\infty, -2[$.

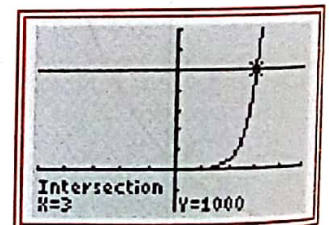
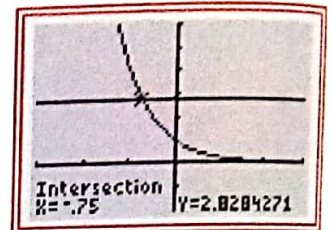
Também poderíamos proceder do seguinte modo:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\frac{x}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$$

$$1 - \frac{x}{2} < -x \Leftrightarrow 2 - x < -2x$$

$$\Leftrightarrow x < -2$$

Neste caso, como a base $a = \frac{1}{3} < 1$, temos de inverter o sinal da desigualdade para relacionar os expoentes.



1

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das condições:

1.1 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27}$;

1.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{-x+1}$.



R

e

2

2



3

Cal
fim
ren
a L
5%
ção

Exemplo 2 Equações com exponenciais

Resolva cada uma das seguintes equações:

$$2.1 \quad 2^{2x+1} = 16; \quad 2.2 \quad 3^{1-x^2} = \frac{1}{81}; \quad 2.3 \quad 2^{x+3} + 4^{x+1} = 320.$$

Resolução

$$2.1 \quad 2^{2x+1} = 16 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 2^4 \Leftrightarrow 2x+1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

$$2.2 \quad 3^{1-x^2} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^{1-x^2} = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-4} \Leftrightarrow 1-x^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow -x^2 = -5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Logo, } S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}.$$

$$2.3 \quad 2^{x+3} + 4^{x+1} = 320 \Leftrightarrow 2^{x+3} + (2^2)^{x+1} - 320 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x \times 2^3 + 2^{2x} \times 2^2 - 320 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x \times 8 + 2^{2x} \times 4 - 320 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2 \times 2^x - 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 \times 2^x - 80 = 0$$

Fazendo $2^x = t$, vem:

$$t^2 + 2t - 80 = 0 \Leftrightarrow t = -10 \vee t = 8$$

Substituindo de novo a variável, vem:

$$2^x = -10 \vee 2^x = 8$$

Como $2^x = -10$ é impossível, fica:

$$2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Logo, } S = \{3\}.$$

Exemplo 3 Capitalização contínua

Use a fórmula $M = Ce^{rt}$ para calcular o capital acumulado ao fim de dois anos se se depositarem num banco 100 meticais a uma taxa anual nominal de 3%, considerando a capitalização contínua.

Resolução

$$M = 100 \times e^{0,03 \times 2}$$

$$M \approx 106,18$$

Ao fim de dois anos ter-se-ia no banco, aproximadamente, 106,18 meticais.

Resolva cada uma das seguintes equações:

$$2.1 \quad 2^x = 32;$$

$$2.2 \quad 5^{-2x} = 25^{x+2}.$$

Calcule o capital acumulado ao fim de 3 anos se se depositarem num banco 1000 meticais a uma taxa anual nominal de 5%, considerando a capitalização contínua.

Exemplo 4 Modelo logístico

Admita que, em condições ambientais normais, o número aproximado de aves de uma certa população, t anos após um determinado instante inicial, é dado por:

$$N(t) = \frac{125A}{A + (125 - A)e^{-0,2t}}$$

($t \geq 0$ e A é uma constante positiva)



4.1 Verifique que A é o número de aves existentes no instante inicial.

4.2 Ao longo dos cinco anos que se seguiram ao instante inicial, a população cresceu em condições ambientais normais. Nasceram 80 aves e morreram 57, não tendo entrado nem saído mais aves da população.

Estime o número de aves que havia nessa população, no instante inicial, sabendo que esse número era inferior a 25.



No período de testes que antecedeu a entrada em funcionamento de um gasômetro, com capacidade de 100 toneladas, procedeu-se ao seu enchimento, continuamente, durante 24 horas.

Por razões de segurança, o gasômetro foi lastrado com 2,5 toneladas de gás, após o que se iniciou a operação de enchimento. A partir daí, o seu enchimento foi feito de acordo com o modelo:

$$M(t) = \frac{100}{1 + 39e^{-0,49t}}$$

sendo $0 \leq t \leq 24$

(M representa a massa total, expressa em toneladas, existente no gasômetro t horas desde o início do seu enchimento.)

Nota: Na resolução da questão seguinte, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

Qual era a massa total, aproximada, existente no gasômetro 3 horas após o início do seu enchimento?

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Resolução

$$4.1. N(0) = \frac{125A}{A + (125 - A)e^{-0,2 \times 0}} = \frac{125A}{A + 125 - A} = \frac{125A}{125} = A \quad \text{c. q. v.}$$

4.2. Para $t = 5$, $80 - 57 = 23$ é o número de aves registadas ao fim de cinco anos mais as existentes no instante inicial.

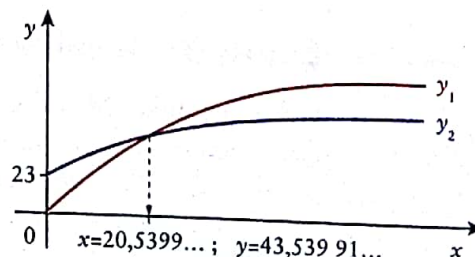
Assim:

$$N(5) = A + 23 \Leftrightarrow \frac{125A}{A + (125 - A)e^{-0,2 \times 5}} = A + 23$$

$$\Leftrightarrow \frac{125A}{A + (125 - A)e^{-1}} = A + 23$$

O ponto de intersecção dos gráficos das funções $y_1 = \frac{125A}{A + (125 - A)e^{-1}}$

e $y_2 = A + 23$ com $A = x$ é a solução para o problema.



Estima-se que o número de aves existentes no instante inicial seria 21.

5.2 Funções logarítmicas

Logaritmo de um número

Chama-se **logaritmo de um número positivo x na base a** , com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, ao número y tal que $a^y = x$. Este número representa-se por $\log_a x$, ou seja:

$$\log_a x = y \iff x = a^y$$

Da definição resulta que:

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a^x = x \quad \text{e} \quad a^{\log_a x} = x$$

Observação

$$\log_{10} x = \log x$$

$$\log_e x = \ln x$$

Logaritmo de bases especiais

No cálculo com logaritmos há duas bases que são usadas com maior frequência: a base 10 e a base e . O logaritmo de base 10 diz-se **logaritmo decimal** e o logaritmo de base e diz-se **logaritmo natural** ou **neperiano**.

Estas bases são quase sempre suprimidas e a escrita normal é modificada.

Assim, por exemplo:

- $\log_{10} 1000 = \log 1000 = \log 10^3 = 3$
- $\log_e \sqrt{e} = \ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Sendo $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:

Logaritmo do produto

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

Logaritmo do quociente

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

Logaritmo de uma potência

$$\log_a (x^p) = p \log_a x$$

Mudança de base

$$\log_b x = \log_a x \times \log_b a \quad \text{ou} \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Em particular, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ou $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

$\log(10)$	1
$\ln(e)$	1

$\ln(8)/\ln(2)$	3
$\log(8)/\log(2)$	3

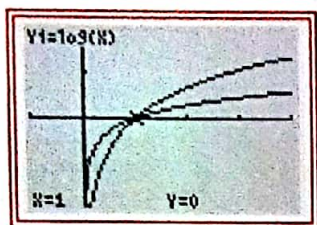
$$\log_2 8 = 3$$

Definição de função logarítmica

Chama-se **função logarítmica** de base a ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) e $x \in \mathbb{R}^+$ à função:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_a x$$



Com a calculadora também se pode obter directamente os gráficos das funções $y = \log x$ e $y = \ln x$.

A função logarítmica é a inversa da função exponencial:

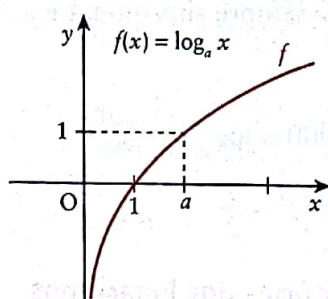
$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y \quad \text{ou} \quad \log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

Algumas propriedades da função logarítmica

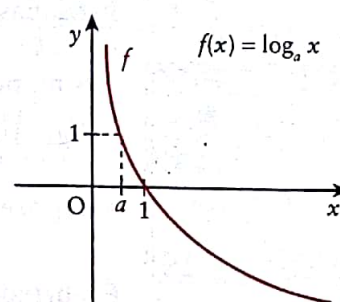
$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_a x$$

Base: $a > 1$



Base: $0 < a < 1$



- Domínio: $\mathbb{R}^+$
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- f é contínua em $\mathbb{R}^+$
- f é injectiva
- $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; 1 é o único zero de f

Se $a > 1$:

- f é estritamente crescente
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

A recta da equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f .

O gráfico de f não tem mais assíntotas.

Se $0 < a < 1$:

- f é estritamente decrescente
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$

A recta da equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f .

O gráfico de f não tem mais assíntotas.

Exemplo 5 Cálculo de logaritmos

Calcule:

5.1 $\log_{10} 10$;

5.2 $\log_{20} 1$;

5.3 $\log_2 \sqrt{2}$;

5.4 $\log_{\frac{1}{4}} 8$;

5.5 $\log_2 1024$;

5.6 $\log_2 64 + \log_5 1 + \log_{0,01} 10$.

Resolução

5.1 $\log_{10} 10 = x \Leftrightarrow 10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$

Logo, $\log_{10} 10 = 1$.

5.2 $\log_{20} 1 = x \Leftrightarrow 20^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Logo, $\log_{20} 1 = 0$.

5.3 $\log_2 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 2^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

5.4 $\log_{\frac{1}{4}} 8 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2^2}\right)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Logo, $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2}$.

5.5 $\log_2 1024 = x \Leftrightarrow 2^x = 1024 \Leftrightarrow 2^x = 2^{10} \Leftrightarrow x = 10$

Logo, $\log_2 1024 = 10$.

5.6 $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$;

$\log_5 1 = 0$;

$\log_{0,01} 10 = -\frac{1}{2}$ porque $(0,01)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$.

Logo, $\log_2 64 + \log_5 1 + \log_{0,01} 10 = 6 + 0 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$.

**5**

Calcule:

5.1 $\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_3 243 + \log_{216} 6$;

5.2 $\log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} + \log_4 \sqrt{2}$.

Observação

Equações e inequações com logaritmos

As funções logarítmicas são injectivas e como tal tem-se:

$$\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \iff x_1 = x_2, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

A função $f(x) = \log_a x$ é:

- crescente se $a > 1$
- decrescente se $0 < a < 1$

Atendendo a estas propriedades é possível resolver algumas condições envolvendo logaritmos.

Exemplo 6 Equações com logaritmos

Resolva cada uma das equações:

6.1 $\log(x+1) - \log x = \log(2x)$;

6.2 $\log_5(25^x + 6) = x + 1$.

Resolução

6.1 Em primeiro lugar teremos de determinar o domínio da condição:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge x > 0 \wedge 2x > 0\}$$

Então:

$$D =]0, +\infty[$$

Em D , vamos resolver a equação dada:

$$\log(x+1) - \log x = \log(2x) \iff \log(x+1) = \log x + \log(2x)$$

$$\iff \log(x+1) = \log(x \times 2x)$$

$$\iff x+1 = 2x^2$$

$$\iff -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\iff x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$$

Como $D =]0, +\infty[$, só existe uma solução: $S = \{1\}$.

6.2 $\log_5(25^x + 6) = x + 1 \iff 25^x + 6 = 5^{x+1}$

$$\iff (5^2)^x - 5^x \times 5 + 6 = 0$$

$$\iff (5^x)^2 - 5 \times 5^x + 6 = 0$$

Fazendo $5^x = t$, vem:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$\iff t = 3 \vee t = 2$$

Substituindo a variável, vem:

$$5^x = 3 \vee 5^x = 2$$

$$x = \log_5 3 \vee x = \log_5 2$$

Como $D = \{x \in \mathbb{R} : 25^x + 6 > 0\} = \mathbb{R}$, vem:

$$S = \{\log_5 2, \log_5 3\}$$



6

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

6.1 $\log_4 81 = 4$;

6.2 $\log_3 \frac{1}{3} = -2$.

Exemplo 7 Resolução de uma equação com logaritmos

Resolva a equação:

$$\ln(2x+1) - \ln(3x) = 1 - \ln 2$$

Resolução

Determinação do domínio da equação:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 > 0 \wedge 3x > 0\}$$

$$\begin{aligned} 2x+1 > 0 \wedge 3x > 0 &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \wedge x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

$$D =]0, +\infty[$$

Resolvendo a equação em $D =]0, +\infty[$, vem:

$$\ln(2x+1) - \ln(3x) = 1 - \ln 2$$

$$\ln \frac{2x+1}{3x} = \ln e - \ln 2$$

$$\ln \frac{2x+1}{3x} = \ln \frac{e}{2}$$

Então:

$$\frac{2x+1}{3x} = \frac{e}{2} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 4x+2 = 3ex$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3ex = -2$$

$$\Leftrightarrow x(4 - 3e) = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{4 - 3e}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3e - 4}$$

Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

7.1 $2 \ln(x+3) = \ln(1-3x)$;

7.2 $\ln\left(\frac{5-x}{e^x}\right) = -x$.

Como $3e - 4 > 0$, vem $S = \left\{ \frac{2}{3e - 4} \right\}$.

Exemplo 8 Resolução de uma inequação com logaritmos

Resolva a inequação:

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(1-x) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

Resolução

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1-x > 0 \wedge x + \frac{11}{4} > 0 \right\}$$

$$1-x > 0 \wedge x + \frac{11}{4} > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > -\frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{11}{4}, 1 \right[$$

$$D = \left] -\frac{11}{4}, 1 \right[$$

Em D , vem:

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(1-x) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(1-x)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

Como a base é menor do que 1, vem:

$$(1-x)^2 \leq x + \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 - x - \frac{11}{4} \leq 0$$

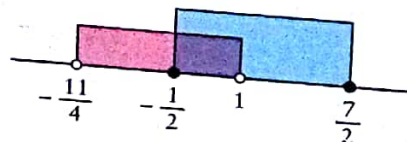
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - \frac{7}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x - 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right]$$

Determinando a intersecção deste intervalo com o domínio, vem:

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right] \cap \left] -\frac{11}{4}, 1 \right[= \left[-\frac{1}{2}, 1 \right[$$



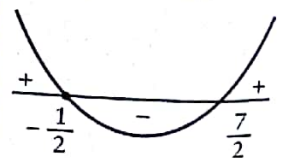
Logo, a solução da condição é:

$$S = \left[-\frac{1}{2}, 1 \right[$$

Cálculos auxiliares:

$$4x^2 - 12x - 7 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{7}{2}$$

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$2 \ln(x) - \ln(x+3) \leq \ln(x+5)$$

**Exemplo 9** A altura das plantas

Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t)$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

9.1 Uma planta tem 50 cm de altura. Quantos meses tem a planta?

Apresente a resposta arredondada às décimas.

9.2 Mostre que, para qualquer valor de t , $h(3t) - h(t)$ é constante.

Determine um valor aproximado às centésimas dessa constante e interprete esse valor no contexto do problema.

Resolução

9.1 50 cm = 0,5 m

Para responder à questão, basta resolver a equação $h(t) = 0,5$.

$$h(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,32 + 0,89 \ln(t) = 0,5$$

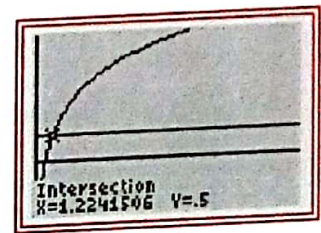
$$\Leftrightarrow 0,89 \ln(t) = 0,18$$

$$\Leftrightarrow \ln(t) = \frac{0,18}{0,89}$$

$$\Leftrightarrow t = e^{\frac{0,18}{0,89}}$$

$$\Rightarrow t \approx 1,2$$

A planta tem, aproximadamente, 1,2 mês.



$$\begin{aligned} \mathbf{9.2} \quad h(3t) - h(t) &= 0,32 + 0,89 \ln(3t) - 0,32 - 0,89 \ln t \\ &= 0,89 (\ln(3t) - \ln t) \end{aligned}$$

$$= 0,89 \left(\ln \frac{3t}{t} \right)$$

$$= 0,89 \ln 3$$

$$\approx 0,98$$

$$h(3t) - h(t) \approx 0,98 \text{ m} \approx 98 \text{ cm}$$

A diferença de alturas de duas plantas, em que uma tem o triplo da idade da outra, é cerca de 98 cm.

A magnitude de um sismo está relacionada com a energia E (joules) libertada por esse sismo. Admita que essa relação é definida por:

$$M = -3,64 + 0,69 \log_{10} E$$

9.1 Qual é a magnitude de um sismo cuja energia libertada é de 3×10^{10} joules?

9.2 Qual é a energia libertada por um sismo de magnitude 7?

5.3 Funções trigonométricas (revisão)

Na vida real encontram-se muitos fenómenos que se podem traduzir por variações periódicas: comprimento do dia ao longo do ano numa determinada localidade, altura das marés ao longo do dia, fases da Lua, receitas em negócios sazonais, etc.

Para modelar estes fenómenos são usadas funções periódicas.

Período de uma função

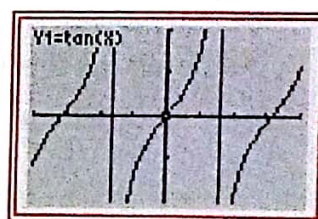
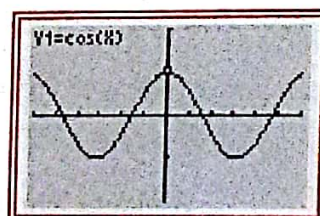
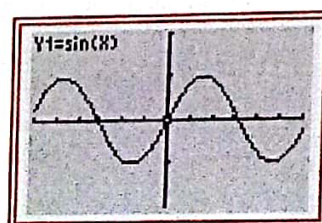
Uma função f é **periódica** se existe um número positivo p tal que:

$$f(t + p) = f(t), \quad \forall t \in D_f$$

Ao menor valor de p chama-se **período da função**.

Observando os gráficos das funções trigonométricas:

$$y = \sin x; \quad y = \cos x \quad \text{e} \quad y = \operatorname{tg} x$$



tem-se que:

- a função seno tem período 2π :

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- a função co-seno tem período 2π :

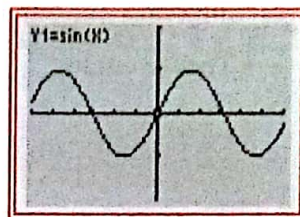
$$\cos(t + 2\pi) = \cos t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- a função tangente tem período π :

$$\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

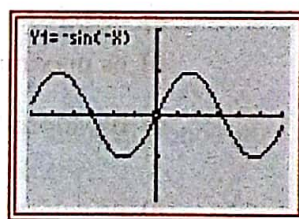
Função seno

Com a calculadora gráfica obteve-se o gráfico da função f definida por $f(x) = \sin x$.



Acerca da função f , real de variável real, pode-se observar que:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = [-1, 1]$
- $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\forall x \in D_f$
(A função seno é periódica de período 2π .)
- A função seno é uma função ímpar: $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in D_f$



Objectos simétricos têm
imagens simétricas.

- A função seno é estritamente crescente, por exemplo, em:

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

- A função seno é estritamente decrescente, por exemplo, em:

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

- A função seno tem máximo absoluto, igual a 1, para:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- A função seno tem mínimo absoluto, igual a -1, para:

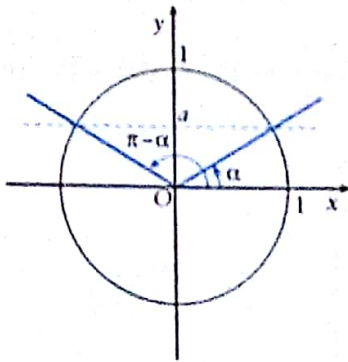
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- A função seno tem os zeros:

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- A função seno é contínua em $\mathbb{R}$.

- O gráfico da função seno não tem assíntotas.



Equações trigonométricas do tipo $\sin x = a$

- A equação $\sin x = a$ só tem soluções se $a \in [-1, 1]$.
- Para cada valor do intervalo $]-\pi, \pi]$ existe outro valor do mesmo intervalo que tem o mesmo seno: se um é α e o outro é $\pi - \alpha$.
- Tem-se então:

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 10 Resolução de condições trigonométricas envolvendo a função seno

Considere a função f , de domínio $[-2\pi, 2\pi]$, definida por:

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

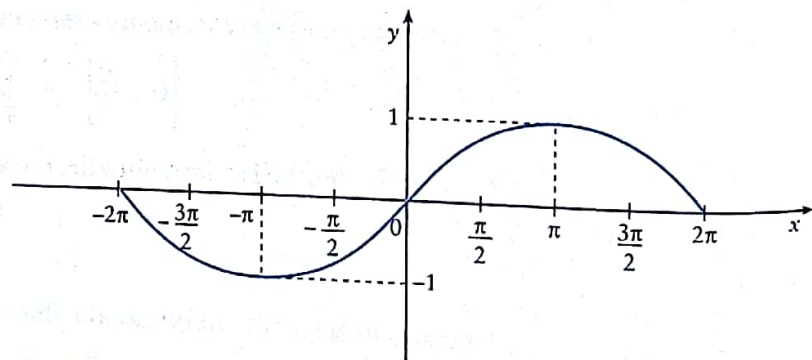
10.1 Represente graficamente a função com a ajuda da calculadora gráfica.

10.2 Determine analiticamente os valores exactos para:

- os zeros da função;
- os maximizantes e os minimizantes;
- os valores de x de modo que $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- os valores de x de modo que $f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Resolução

10.1



10.2 a) Zeros da função

$$D_f = [-2\pi, 2\pi]$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

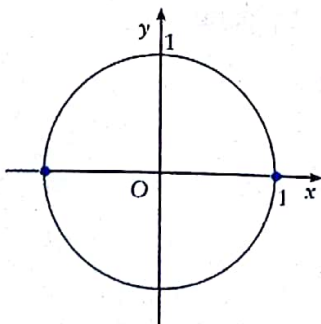
$$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

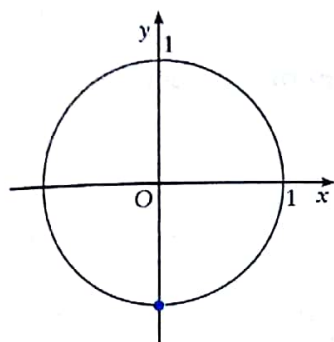
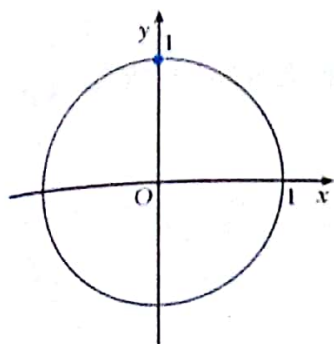
$$k = 0 \rightarrow x = 0$$

$$k = 1 \rightarrow x = 2\pi$$

$$k = -1 \rightarrow x = -2\pi$$

Os zeros da função são: $0, 2\pi$ e -2π



**b) Maximizantes**

$$D_f = [-2\pi, 2\pi], D'_f = [-1, 1]$$

$$\sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, $x = \pi$

O maximizante é π .

Minimizantes

$$\sin \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 3\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = -1$, $x = -\pi$

O minimizante é $-\pi$.

$$\text{c) } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De acordo com a imagem obtida pela calculadora gráfica, encontraremos duas soluções.

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

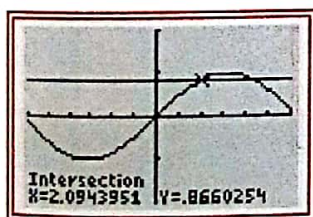
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2\pi + 12k\pi \vee 3x = 4\pi + 12k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } k = 0 \longrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$$

O valor da função é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ quando x é $\frac{2\pi}{3}$ ou x é $\frac{4\pi}{3}$.



$$\text{d) } f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Partindo dos valores encontrados na resolução da alínea anterior,

$$f(x) < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ se:}$$

$$x \in \left[-2\pi, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$$

Considere a função real, de variável real, definida por:

$$f(x) = -2 + 2 \sin x$$

Determine:

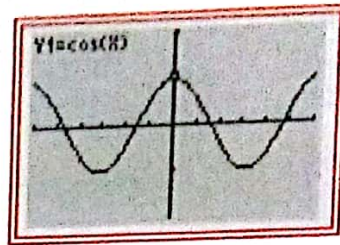
10.1 o domínio;

10.2 o contradomínio;

10.3 o período.

Função co-seno

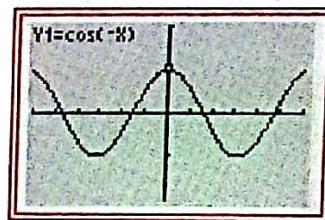
Com a calculadora gráfica obteve-se o gráfico da função f definida por $f(x) = \cos x$.



Acerca da função f , real de variável real, pode afirmar-se que:

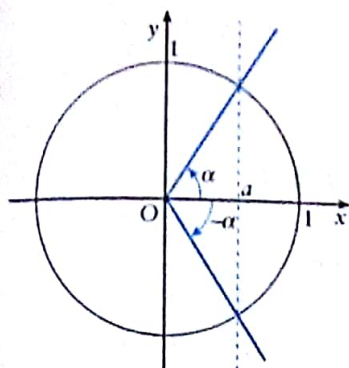
- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = [-1, 1]$
- $\cos(2\pi + x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
(A função co-seno é periódica de período 2π .)
- A função co-seno é uma função par:

$$\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$$



Objectos simétricos têm a mesma imagem.

- A função co-seno é estritamente crescente, por exemplo, em $[\pi, 2\pi]$.
- A função co-seno é estritamente decrescente, por exemplo, em $[0, \pi]$.
- A função co-seno tem máximo absoluto, igual a 1, para $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função co-seno tem mínimo absoluto, igual a -1, para $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função co-seno tem os zeros $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função co-seno é contínua em $\mathbb{R}$.
- O gráfico da função co-seno não tem assíntotas.



Equações trigonométricas do tipo $\cos x = a$

- A equação $\cos x = a$ só tem soluções se $a \in [-1, 1]$.
- Para cada valor do intervalo $[-\pi, \pi]$ existe outro valor do mesmo intervalo que tem o mesmo co-seno: se um é α , o outro é $-\alpha$.
- Tem-se, então:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 11 Resolução de condições trigonométricas envolvendo a função co-seno

Considere a função f , de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por:

$$f(x) = \cos(x - 1)$$

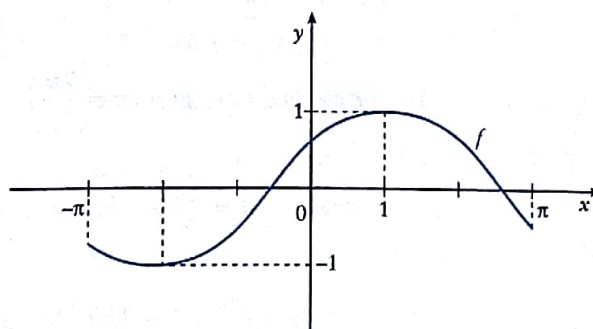
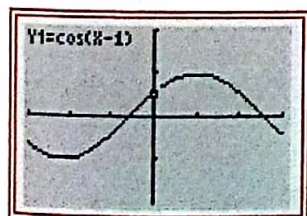
11.1 Com a ajuda da calculadora gráfica, faça um esboço do gráfico da função f .

11.2 Determine analiticamente os valores exactos para:

- os zeros da função;
- os maximizantes;
- os minimizantes;
- os valores de x de modo que $f(x) = -\frac{1}{2}$.

Resolução

11.1



11.2 a) Zeros da função

$$D = [-\pi, \pi]$$

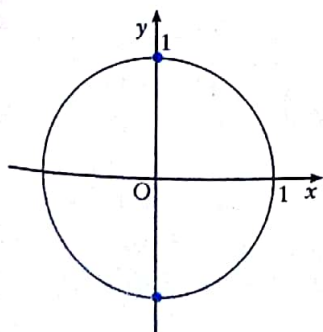
$$\cos(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

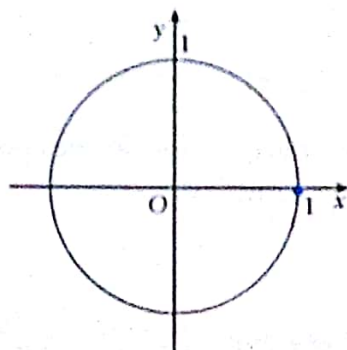
$$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow x = 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$k = -1 \rightarrow x = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Os zeros são: } 1 - \frac{\pi}{2} \text{ e } 1 + \frac{\pi}{2}.$$





b) Maximizantes

O valor máximo da função é 1.

$$\cos(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow x = 1$$

A função tem um maximizante: $x = 1$.

c) Minimizantes

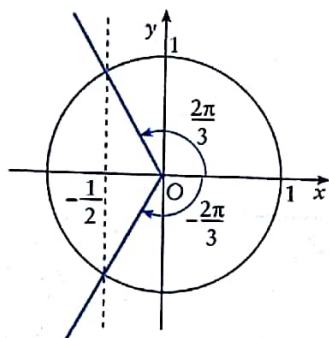
O valor mínimo da função é -1 .

$$\cos(x-1) = -1 \Leftrightarrow x-1 = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \rightarrow x = 1 - \pi$$

A função tem um minimizante: $1 - \pi$.



$$d) f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-1) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x-1 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 1 + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 1 \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 1$$

Logo, $f(x) = -\frac{1}{2}$ se x for $1 + \frac{2\pi}{3}$ ou $1 - \frac{2\pi}{3}$.

11

Sendo $f(x) = 1 - \cos x$, determine, no intervalo $[-\pi, 2\pi]$:

11.1 os intervalos onde a função é estritamente crescente;

11.2 os zeros da função;

11.3 os valores de x de modo que $f(x)$ seja máximo de f .

Equações trigonométricas do tipo $\operatorname{tg} x = a$

- A equação $\operatorname{tg} x = a$ tem soluções, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \iff x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 12 Resolução de condições trigonométricas envolvendo a função tangente

Considere as funções reais de variável real f e g , definidas por:

$$f(x) = 3 \operatorname{tg} x \text{ e } g(x) = \operatorname{tg}(2x).$$

Determine $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $f(x) = g(x)$.

$$\left(\text{Use a fórmula: } \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)$$

Resolução

Seja $x \in D_f \cap D_g$.

$$g(x) = \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$g(x) = f(x) \iff \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 3 \operatorname{tg} x$$

$$\iff 2 \operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}^3 x$$

$$\iff -\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}^3 x = 0$$

$$\iff \operatorname{tg} x (-1 + 3 \operatorname{tg}^2 x) = 0$$

$$\iff \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\iff \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

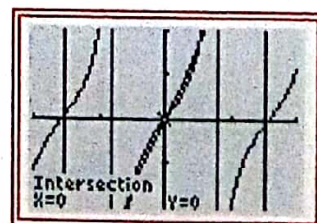
$$\iff x = 0 + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, vem: $k = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6}$

Os valores de x pedidos são: $-\frac{\pi}{6}$, 0 e $\frac{\pi}{6}$.

Confirmemos a resposta à questão com a calculadora gráfica.

Os valores de x pedidos são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico das duas funções.



Considere a função:

$$f(x) = 1 + \operatorname{tg} x$$

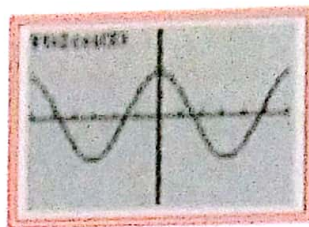
No segmento, $[-\pi, 2\pi]$, indique:

12.1 os zeros da função;

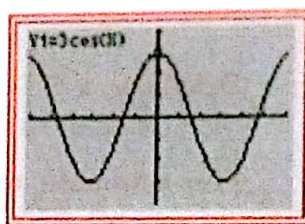
12.2 os valores de x de modo que $f(x)$ seja máximo de f .

Determinação do período de uma função trigonométrica

A função $y = 2 \cos x$ tem amplitude 2.



A função $y = 3 \sin x$ tem amplitude 3.



A função $y = a \sin x$ ou $y = a \cos x$ tem amplitude $|a|$.

A variação da amplitude de uma função trigonométrica não interfere no período.

Também se pode verificar que as deslocações horizontais não interferem no período.

O período da função $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ é igual ao período da função $y = \cos x$, por exemplo.

O que interfere no período é a multiplicação da variável independente por um factor $k \neq 0$.

Seja:

$$y = \cos(kx) \text{ ou } y = \sin(kx).$$

As funções completam um período quando $|k|x$ varia entre 0 e 2π .

$$0 \leq |k|x \leq 2\pi \iff 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{|k|}.$$

Assim, o período da função:

$$y = a \sin[k(x - b)] + c \text{ ou } y = a \cos[k(x - b)] + c$$

é $\frac{2\pi}{|k|}$.

Do mesmo modo se pode concluir que o período da função

$$y = a \operatorname{tg}[k(x - b)] + c$$

é $\frac{\pi}{|k|}$.

Exemplo 13 Definir um modelo matemático

O número de elementos de uma população de aves oscila sinusoidalmente entre o valor mais baixo de 300, relativo a 1 de Janeiro, e um valor mais elevado de 900, relativo a 1 de Julho.

Esboce um gráfico e escreva uma expressão analítica para uma função que represente a situação apresentada.

Resolução

Procuramos uma função do tipo

$$f(t) = a \sin [k(t - b)] + c$$

- A amplitude a é $\frac{900 - 300}{2} = 300$.

- Como t é em meses, o período é 12.

$$\frac{2\pi}{k} = 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2\pi}{12} \Leftrightarrow k = \frac{\pi}{6}$$

- A deslocação na vertical é $c = \frac{900 + 300}{2} = 600$.

- Falta determinar o valor da deslocação na horizontal, ou seja, o valor de b em:

$$f(t) = 300 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - b) \right] + 600$$

Partindo do conhecimento de que $f(0) = 300$, dado que $t = 0$ corresponde a 1 de Janeiro, temos:

$$f(0) = 300 \Leftrightarrow 300 \sin \left[\frac{\pi}{6}(0 - b) \right] + 600 = 300$$

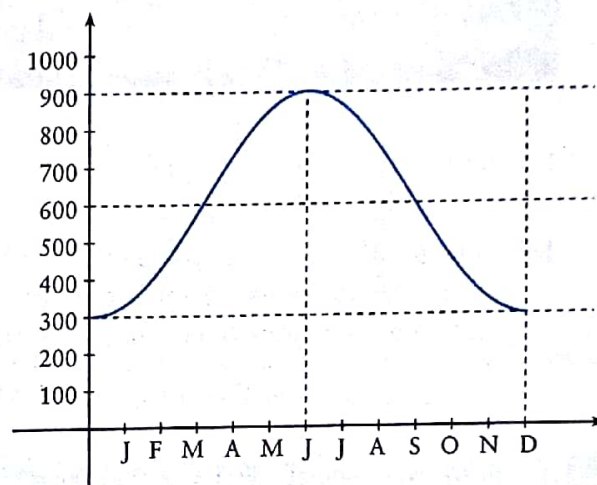
$$\Leftrightarrow \sin \left(-\frac{\pi}{6}b \right) = -1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Para determinar } b \\ \text{basta uma solução} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}b = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow b = 3$$

Logo:

$$f(t) = 300 \sin \left[\frac{\pi}{6}(t - 3) \right] + 600$$



13

A temperatura média mensal numa cidade varia entre o mínimo de 37°F em 31 de Julho e o máximo de 87°F em 31 de Janeiro.

13.1 Faça um esboço do gráfico da função para a temperatura média ao longo de um ano sabendo que é do tipo $y = a \cos [b(x - c)] + d$.

(x é o número de meses decorridos desde o início do ano.)

13.2 Encontre uma expressão analítica para representar a função.



QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1** Suponha que uma ilha com uma população de 10 000 habitantes está a crescer exponencialmente de acordo com a função $P(t) = 10\,000e^{0,02t}$ (t em anos).



1.1 Mostre que $\frac{P(t+1)}{P(t)}$ é constante.

1.2 Determine o valor dessa constante com aproximação às centésimas e interprete esse valor no contexto da situação descrita.

15 pontos

- 2** A função exponencial $N(t) = 2\,000\,000e^{-0,558t}$, $t \geq 0$, exprime aproximadamente o número N de bactérias no tempo de uma mesa t minutos após se ter aplicado um *spray* desinfectante sobre ele.

Calcule a quantidade de bactérias que ficam sobre o tampo da mesa cinco minutos depois de se ter colocado o *spray* desinfectante.

15 pontos

- 3** Antes da abertura do pára-quedas, a velocidade em metros por segundo do pára-que-dista é modelada pela função:

$$f(t) = 50(1 - e^{-0,2t})$$

$t > 0$, sendo t o tempo decorrido, em segundos, após o início do salto.

Determine a velocidade após 20 segundos em queda livre.

15 pontos



- 4** Pouco tempo depois de uma formiga descobrir um pacote de açúcar começaram rapidamente a surgir outras formigas, dirigindo-se para a fonte de alimento.

O número n de formigas perto do açúcar cresce exponencialmente de acordo com a função:

$$n(t) = 1,36\left(\frac{e}{2,5}\right)^t$$

sendo t a quantidade de minutos desde que a primeira formiga descobriu o pacote de açúcar.

Quantas formigas estarão no pacote de açúcar em 40 minutos?

15 pontos

- 5** Thomas Malthus, pensador do século XVIII, elaborou um modelo para prever a evolução da população mundial. De acordo com este modelo, a população mundial duplicaria de 25 anos em 25 anos.

Considerando que, no ano de 1900, a população mundial era de 1,65 mil milhões de pessoas, estime, de acordo com o modelo de Malthus, qual teria sido o valor da população mundial em 2000.

Apresente o resultado em milhares de milhões, arredondado às unidades.

15 pontos

- 6** O comprimento médio, em centímetros, de dois pequenos animais A e B , t dias após o nascimento, é dado por:

$$a(t) = \frac{20}{1 + 4e^{-0,07t}}$$

e

$$b(t) = \frac{30}{1 + 9e^{-0,03t}}$$

respectivamente.

6.1 Qual é o comprimento de cada um dos animais na altura do nascimento?

6.2 O que pode afirmar acerca do comprimento médio dos animais A e B quando adultos? Justifique a sua resposta.

6.3 Recorra à calculadora gráfica para determinar quantos dias após o nascimento os dois animais têm o mesmo comprimento. Indique como procedeu.

30 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 7** Um grupo de 40 cabritos é colocado numa ilha onde até então não existia qualquer cabrito.



Admita que a população de cabritos, na ilha, cresce de acordo com a seguinte lei:

$$N(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-0,12t}}$$

onde N é o número de cabritos existentes t anos após a chegada dos 40 cabritos à ilha.

- 7.1** Quantos cabritos haverá na ilha decorridos cinco anos?
- 7.2** Quantos anos terão de decorrer até que, na ilha, o número de cabritos seja 100?
- 7.3** Parece-lhe ser viável os recursos existentes na ilha permitirem que o número de cabritos ultrapasse largamente os 200 animais? Justifique convenientemente a sua resposta.

30 pontos

- 8** Numa empresa, o lucro, L , originado pela produção de n peças, é dado em dezenas de milhares de meticais por:

$$L(n) = \log_{10}(100 + n) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sabendo-se que se não há produção não há lucro, determine:

- 8.1** o valor da constante k ;
- 8.2** o lucro obtido pela produção de 5000 peças;
- 8.3** o número de peças que é necessário produzir para que o lucro seja, aproximadamente, uma dezena de milhar de meticais.

30 pontos

- 9** A magnitude de um sismo está relacionada com a energia total E (joules) libertada por esse sismo. Esta relação é definida por:

$$M = -3,64 + 0,69 \log_{10} E$$



- 9.1** Qual a magnitude de um sismo cuja energia total libertada é de 5×10^{12} ?

- 9.2** Qual a energia libertada por um sismo de magnitude 4?

20 pontos

- 10** Suponha que a altura A (metros) de uma criança do sexo feminino é expressa, em função do seu peso p (quilogramas), pela seguinte expressão:

$$A = -0,52 + 0,55 \ln p$$



Segundo este modelo, qual será a altura de uma criança que pesa 10 kg?

Apresente o resultado em centímetros com aproximação às unidades.

15 pontos

Objectivos

1. Determinar qualquer termo de uma sucessão a partir do termo geral.
2. Verificar se um dado número é ou não termo de uma dada sucessão.
3. Identificar sucessões monótonas.
4. Verificar se uma sucessão é ou não limitada.
5. Verificar se uma sucessão é uma progressão aritmética ou é uma progressão geométrica.
6. Resolver problemas envolvendo progressões aritméticas e progressões geométricas.

1. Progressões aritméticas e progressões geométricas



Fotografia de Carlos Rosta, Tere

1.1 Definição de sucessão

O Nhantumbo vive do lado da rua em que as portas têm números ímpares. A sua casa fica em 40.º lugar.

Qual é o número da porta da casa onde vive o Nhantumbo?



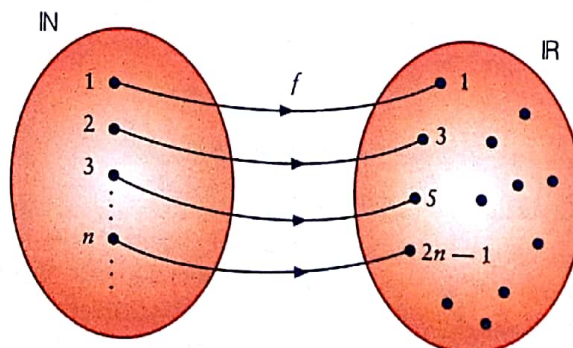
Lugar da rua

1
2
3
⋮
 n
40

N.º da porta

1
3
5
⋮
 $2n - 1$
 $2 \times 40 - 1 = 79$

ou



A porta da casa do Nhantumbo tem o número 79.

A correspondência $n \mapsto 2n - 1$ é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ e o contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Por isso a função chama-se sucessão.

1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ... $\leftarrow$ são os termos da sucessão.

↓ ↓ ↓

1.º termo 4.º termo n.º termo

ou ou

termo de termo de termo de

ordem 1 ordem 4 ordem n

(n º lê-se "enésimo")

À expressão $(2n - 1)$ chama-se termo geral da sucessão e escreve-se:

$$a_n = 2n - 1 \quad \text{ou} \quad f(n) = 2n - 1$$

Sucessão

Uma sucessão de números reais (a_n) é uma função f em que o domínio é o conjunto dos números naturais e as imagens são números reais.

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

- Os valores da função $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, são os termos da sucessão.
- $f(n) = a_n$ é o termo geral da sucessão.

Observação

Por vezes, por simplificação, chama-se sucessão à sequência dos termos da sucessão (por exemplo, a sucessão dos números pares 2, 4, 6, ...).

Assim, numa sucessão:

- $n \longrightarrow$ ordem do termo
- $f(n) = a_n \longrightarrow$ é o termo geral da sucessão de números reais
- $(f(n))$ ou $(a_n) \longrightarrow$ representa a sucessão
- $\{f(n)\}$ ou $\{a_n\} \longrightarrow$ representa o contradomínio

A sucessão também pode ser representada como uma função qualquer:

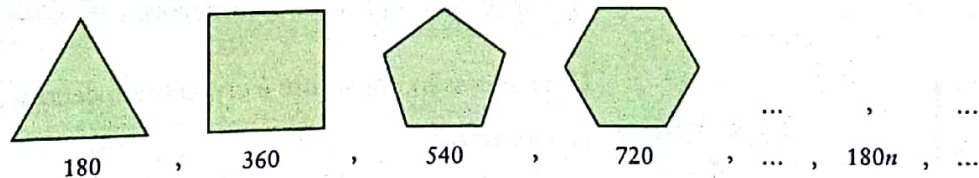
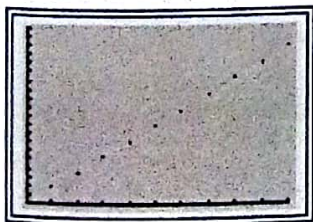
$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto 2n - 1 \quad \text{ou} \quad a_n = 2n - 1$$

1.2 Sucessões monótonas (*)

1.2.1 Sucessão crescente

Observe a figura seguinte:



Os números representam as medidas, em graus, da soma das amplitudes dos ângulos internos dos polígonos de $n + 2$ lados.

Considere a sucessão de termos

$$180, 360, 540, 720, \dots$$

(*) O estudo algébrico da monotonia de uma sucessão não está explicitamente referido no programa. Sugerimos que seja indicado como trabalho individual do aluno ou de grupo.

Esta sucessão é crescente. Cada termo a, partir do segundo, é sempre maior do que o anterior.

Também é crescente a sucessão: 1, 2, 2, 3, 4, 4, ...

Nesta sucessão cada termo, a partir do segundo, é sempre maior ou igual ao anterior.

Sucessão crescente

Uma sucessão (u_n) é crescente se cada termo é maior ou igual ao termo anterior, ou seja, se:

$$u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

No primeiro exemplo verificou-se que $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão diz-se estritamente crescente. No segundo exemplo verificou-se que $u_{n+1} - u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

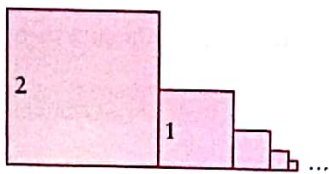
A sucessão diz-se crescente em sentido lato.

1.2.2 Sucessão decrescente

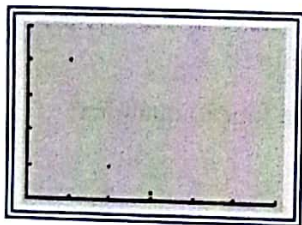
Considere-se a sucessão de termos $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$, em que os números representam as medidas das áreas dos quadrados representados na figura ao lado.

Esta sucessão é decrescente.

Também é decrescente a sucessão: $4, 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$



A medida do lado de cada quadrado é metade da medida do lado do quadrado anterior.



Sucessão decrescente

Uma sucessão (u_n) é decrescente se cada termo é menor ou igual ao termo anterior, ou seja, se:

$$u_{n+1} \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se, como no caso das medidas das áreas, se tem que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$$

a sucessão diz-se estritamente decrescente.

1.2.3 Sucessão monótona

Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se uma sucessão monótona.

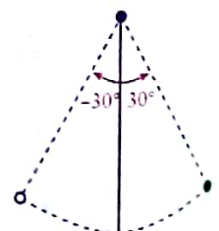
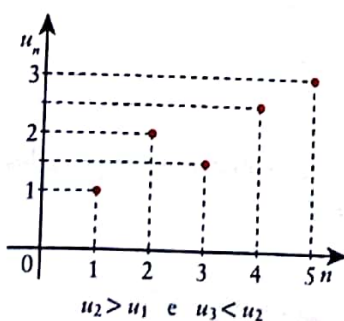
Uma sucessão constante é crescente e decrescente.

A sucessão:

$$30, -30, 30, -30, 30, -30, \dots$$

não é crescente nem decrescente, portanto, não é monótona.

Também não é monótona a sucessão (u_n) , representada graficamente na figura ao lado.



Exemplo 1 Estudar a monotonia de uma sucessão

Estude a monotonia das sucessões definidas por:

1.1 $u_n = \frac{n}{n+1}$;

1.2 $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Resolução

1.1 $u_n = \frac{n}{n+1}$

Usando o cálculo algébrico, vem:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\
 &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} \\
 &= \frac{1}{(n+2)(n+1)}
 \end{aligned}$$

Como $n+2 > 0$ e $n+1 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$$

Pode-se concluir que a sucessão dada é estritamente crescente, ou seja, que é monótona crescente em sentido estrito.

1.2 $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Uma sucessão é estritamente decrescente se $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n < 0$.Como, neste caso, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a definição pode ser apresentada do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n < 0 &\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \\
 &\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

Calcula-se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.Como $\frac{2}{3} < 1$, a sucessão é monótona decrescente em sentido estrito.

1.1 Estude a monotonia de cada uma das sucessões definidas por:

a) $a_n = 6 - \frac{1}{n}$;

b) $b_n = 6 + (-1)^n$;

c) $c_n = \frac{n+3}{n+1}$.

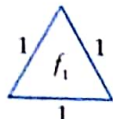
1.2 Justifique que a sucessão $u_n = (-3)^n$ não é monótona.1.3 Justifique que a sucessão $v_n = (6-n)^2$ não é monótona.

Observação

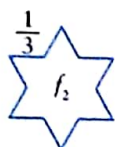
⁽¹⁾ O floco de neve (*snowflake*) foi referido pela primeira vez pelo matemático Helge von Koch (1904) como exemplo de uma curva com comprimento infinito contendo uma área limitada.

O floco de neve é um fractal.

A tecnologia gráfica actual permite obter imagens deste e de outros fractais.



$$P_1 = 3 \times 1 = 3$$



$$P_2 = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

$$P_{n+1} = \frac{4}{3} P_n$$

P_1	P_2	P_3	P_4	...
↓	↓	↓	↓	
3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$	

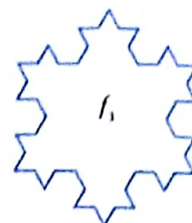
$$\begin{cases} P_1 = 3 \\ P_{n+1} = \frac{4}{3} \times P_n, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ou

$$P_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1.3 Sucessões limitadas

A curva "floco de neve" vai-se construindo da forma seguinte:



...

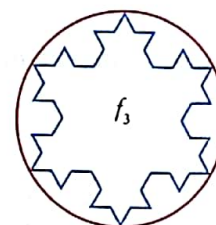
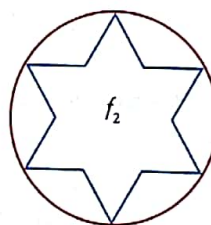
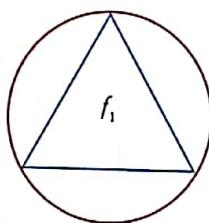
O que poderá dizer-se acerca da sucessão dos perímetros das figuras?

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ (P_n designa o perímetro da figura n)

A sucessão dos perímetros é crescente mas não é limitada, porque não existe nenhum número maior do que todos os termos da sucessão⁽¹⁾.

O que poderá dizer-se acerca da sucessão das áreas das figuras?

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ (A_n designa a área da figura n)



...

A sucessão das áreas é crescente mas é limitada.

A área de qualquer figura é menor do que a área do círculo onde está inscrita e maior ou igual que a área do triângulo inicial.

Assim, temos:

$$\text{Área do triângulo} \leq A_n < \text{Área do círculo}$$

Sucessão limitada

Uma sucessão (a_n) é limitada se existirem dois números reais m e M tais que:

$$m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Muitas vezes é fácil concluir se uma sucessão é ou não limitada por observação do seu termo geral.

Será limitada a sucessão definida por:

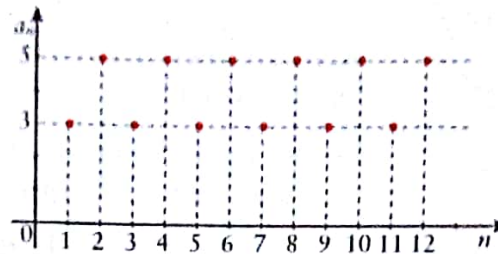
$$a_n = 4 + (-1)^n ?$$

Observando o termo geral, conclui-se imediatamente que:

$$3 \leq a_n \leq 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

A sucessão é limitada.

Uma representação gráfica desta sucessão é a seguinte:



Os termos da sucessão são pontos pertencentes às rectas cujas equações são $y = 3$ ou $y = 5$.

1.3.1 Majorantes e minorantes

Para a sucessão definida por $u_n = 4 + (-1)^n$, tem-se que:

$$3 \leq u_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

Diz-se que 3 é um dos **minorantes** do conjunto dos seus termos e 5 é um dos **majorantes** do conjunto dos seus termos.

Qualquer número maior ou igual a 5 é majorante do conjunto dos termos da sucessão.

Qualquer número menor ou igual a 3 é minorante do conjunto dos termos da sucessão.

Seja P um subconjunto de $\mathbb{R}$.

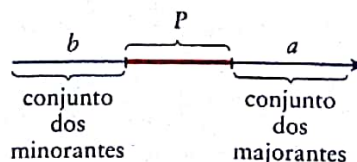
O número a é **majorante** do conjunto P se e só se a é maior ou igual que qualquer elemento de P .

O número b é **minorante** do conjunto P se e só se b é menor ou igual que qualquer elemento de P .

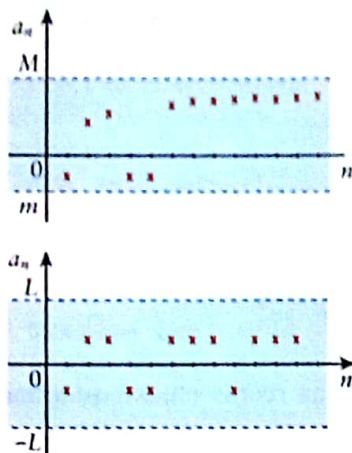
Enquadrar um número é indicar um número menor e um número maior do que esse número.

Um conjunto que tem pelo menos um majorante é **limitado superiormente**.

Um conjunto que tem pelo menos um minorante é **limitado inferiormente**.



Utilizando os termos majorante e minorante, tem-se que uma sucessão é **limitada** quando o conjunto dos seus termos tem um majorante e um minorante, ou seja, o conjunto dos termos da sucessão é **majorado e minorado**.



Observação

Recorde que:

$$|a_n| \leq L \Leftrightarrow -L \leq a_n \leq L \\ \Leftrightarrow a_n \geq -L \wedge a_n \leq L$$

Por definição, quando uma sucessão é limitada tem-se:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Graficamente, os termos da sucessão encontram-se numa região do plano limitada pelas rectas horizontais cujas equações são $y = m$ e $y = M$.

Tendo L como o maior dos valores $|m|$, $|M|$ também podemos concluir que a sucessão (a_n) é limitada quando:

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ : |a_n| \leq L, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 2 Sucessão limitada

Mostre que é limitada a sucessão definida por: $u_n = \frac{n+2}{n}$.

Resolução

Usando enquadramento, temos que:

$$\frac{n+2}{n} = \frac{n}{n} + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$$

Por outro lado, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, daí que $0 < \frac{2}{n} \leq 2$.

E, assim, $1 < 1 + \frac{2}{n} \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 < u_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão é limitada porque o conjunto dos seus termos é minorado e majorado.

Outro processo para mostrar que existem números reais m e M de modo que:

$$m \leq \frac{n+2}{n} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

pode ser o seguinte:

recorrendo a uma representação gráfica da sucessão parece poder concluir-se que:

$$1 \leq \frac{n+2}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

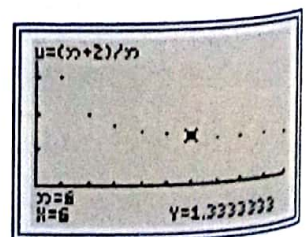
Vejamos se, de facto, tal é verdade.

$$\bullet 1 \leq \frac{n+2}{n} \stackrel{n \neq 0}{\Leftrightarrow} n \leq n+2 \Leftrightarrow 0n \leq 2$$

$$\bullet \frac{n+2}{n} \leq 3 \stackrel{n \neq 0}{\Leftrightarrow} n+2 \leq 3n \Leftrightarrow -2n \leq -2 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Atendendo a que $0n \leq 2$ e $n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pode concluir-se que a sucessão é limitada e que:

$$1 \leq \frac{n+2}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$$



2.1 Mostre que são limitadas as sucessões:

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$;

b) $b_n = 5$;

c) $c_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}$;

d) $d_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

2.2 Dada a sucessão definida por $a_n = \frac{n}{n+3}$, mostre que:

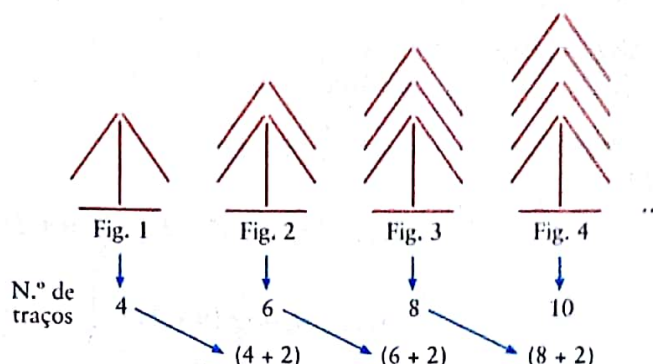
a) $\frac{1}{4} \leq a_n$;

b) a sucessão (a_n) é limitada.

1.4 Progressões aritméticas

1.4.1 Definição

Observemos a sequência de figuras apresentadas a seguir.



A primeira figura é formada por quatro traços. A partir da primeira, cada figura tem sempre mais dois traços do que a anterior.

Seja a_n o número de traços de uma figura. Então:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \text{ ou seja, } a_{n+1} - a_n = 2.$$

A partir do segundo termo, a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante e igual a 2.

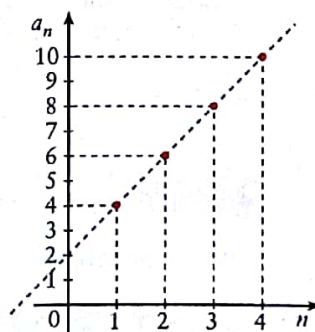
A uma sucessão deste tipo chama-se **progressão aritmética**.

Progressão aritmética

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (p. a.) se existe um número real r tal que $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ao número r chama-se **diferença da progressão aritmética**.

O termo geral da progressão aritmética apresentada é $a_n = 2n + 2$, cuja representação gráfica é, como em qualquer sucessão, um conjunto de pontos isolados.



Os pontos da representação gráfica de uma progressão aritmética pertencem a uma mesma recta. O declive da recta que contém os pontos do gráfico da sucessão é igual à diferença da progressão aritmética.

São exemplos de progressões aritméticas:

- $a_n = 4n + 2 \rightarrow 6, 10, 14, 18, \dots; r = 4$
- $b_n = 2 - 3n \rightarrow -1, -4, -7, -10, \dots; r = -3$

Observação

São progressões aritméticas:

- a sucessão dos números naturais:

$$u_n = n$$

- a sucessão dos números pares:

$$u_n = 2n$$

- a sucessão dos números ímpares:

$$u_n = 2n - 1$$



3.1 Escreva os cinco primeiros termos de uma progressão aritmética em que o 1.º termo é -2 e a diferença é:

- a) 2 ;
- b) -3 ;
- c) $\frac{1}{2}$;
- d) 0 .

3.2 Mostre que $a_n = \frac{1}{2} - 3n$ é uma progressão aritmética e que $b_n = n^2 - 1$ não é progressão aritmética.

3.3 Verifique se a sucessão:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é uma progressão aritmética.

Exemplo 3 Para mostrar

Mostre que (a_n) é uma progressão aritmética e que (b_n) não é uma progressão aritmética, sendo:

$$a_n = \frac{1}{3}(n+1) \quad \text{e} \quad b_n = n - n^2.$$

Resolução

$$a_n = \frac{1}{3}(n+1)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(n+1+1) = \frac{1}{3}(n+2)$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3}(n+2) - \frac{1}{3}(n+1) \\ &= \frac{1}{3}n + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Calcula-se $a_{n+1} - a_n$.

Verifica-se que a diferença é uma constante.

Como $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ é uma constante real, a sucessão (a_n) é uma progressão aritmética de diferença $\frac{1}{3}$.

$$b_n = n - n^2$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= [(n+1) - (n+1)^2] - (n - n^2) \\ &= n + 1 - (n^2 + 2n + 1) - n + n^2 \\ &= n - n^2 - 2n - 1 + n^2 \\ &= -2n \end{aligned}$$

Calcula-se $b_{n+1} - b_n$.

Verifica-se que a diferença não é uma constante.

$b_{n+1} - b_n = -2n$ não é constante, pois depende de n .

Logo, a sucessão (b_n) não é uma progressão aritmética.

Exemplo 4 Determinar a diferença

Numa progressão aritmética $u_4 = \frac{5}{2}$ e $u_6 = 3$.

Qual é a diferença desta progressão aritmética?

Resolução

Tem-se que: $u_6 = u_4 + 2r$

$$3 = \frac{5}{2} + 2r \Leftrightarrow 6 = 5 + 4r \Leftrightarrow 1 = 4r \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$$

A diferença desta progressão é $\frac{1}{4}$.

Sabe-se da definição que:

$$\begin{aligned} u_5 &= u_4 + r \\ u_6 &= u_5 + r + r \\ u_6 &= u_4 + 2r \end{aligned}$$



Sabendo que numa progressão aritmética (u_n) , $u_5 = 14$ e $u_8 = 23$, determine a diferença da progressão.

1.4.2 Termo geral de uma progressão aritmética

O conhecimento do termo geral de uma progressão é muito importante, pois permite determinar qualquer termo conhecida a sua ordem.

Considere-se a progressão aritmética:

$$-1, 4, 9, 14, 19, \dots$$

Tem-se:

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = -1 + 5$$

$$u_3 = -1 + 5 + 5 = -1 + 2 \times 5$$

$$u_4 = -1 + 5 + 5 + 5 = -1 + 3 \times 5$$

$\vdots$

$$u_n = -1 + \underbrace{5 + \dots + 5}_{n-1 \text{ parcelas}} = -1 + (n-1) \times 5$$

$$\text{Logo, } u_n = -6 + 5n.$$

De um modo geral, seja:

$$u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_n, \dots$$

uma progressão aritmética de diferença r .

$$u_1 = u_1$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_1 + r + r \Leftrightarrow u_3 = u_1 + 2r$$

$\vdots$

$$u_n = u_1 + \underbrace{r + r + \dots + r}_{(n-1) \text{ parcelas}} \Leftrightarrow u_n = u_1 + (n-1)r$$

Termo geral

O termo geral, u_n , de uma progressão aritmética de diferença r é dado por:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Aplicando a fórmula $u_n = u_1 + (n-1)r$ pode-se obter o valor de qualquer termo de ordem k , sendo $u_k = u_1 + (k-1)r$.

Então, vem:

$$\begin{aligned} u_n - u_k &= u_1 + (n-1)r - [u_1 + (k-1)r] \Leftrightarrow u_n - u_k = nr - r - kr + r \\ &\Leftrightarrow u_n = u_k + (n-k)r \end{aligned}$$

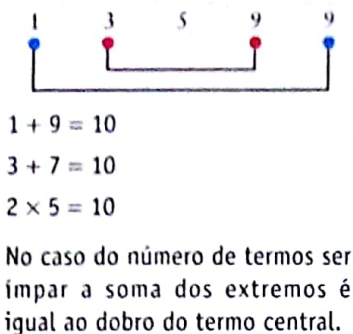
Logo:

O termo geral, u_n , de uma progressão aritmética de diferença r é dado por

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

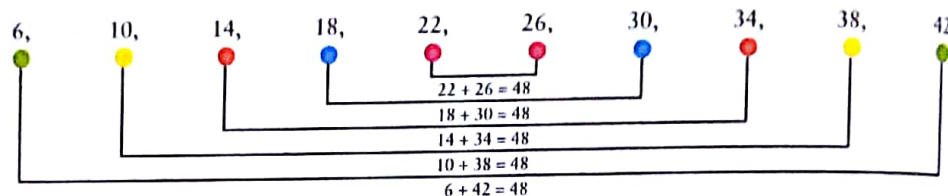
sendo u_k um termo qualquer.

Observação



1.5 Soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética

Consideremos os 10 primeiros termos da progressão aritmética (a_n) de termos geral $a_n = 4n + 2$.



A soma de dois termos igualmente distanciados dos extremos é igual à soma dos extremos.

De um modo geral, tem-se:

Soma de termos igualmente distantes dos extremos

Em n termos consecutivos de uma progressão aritmética, a soma dos termos igualmente distanciados dos extremos é igual à soma dos extremos.

Esta propriedade permite deduzir uma fórmula para calcular a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética.

• Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

Seja:

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$\vdots$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética representa-se por S_n .

Vamos procurar escrever S_n usando apenas u_1 e u_n .

Escrevemos S_n de dois modos diferentes e adicionamos termo a termo.

Assim:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_3 + u_2 + u_1$$

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \dots + (u_{n-2} + u_3) + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$$

n parcelas iguais a $(u_1 + u_n)$

$$2S_n = n \times (u_1 + u_n) \Leftrightarrow S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

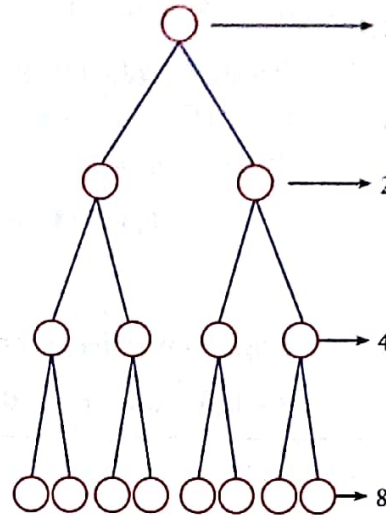
A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (u_n) é dada por:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

1.6 Progressões geométricas

1.6.1 Definição

A bactéria *estreptococos* (responsável pela amigdalite) reproduz-se duplicando-se de meia em meia hora.



A sucessão que representa o número de bactérias é:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

Se a_n é um termo da sucessão referida, então:

$$a_{n+1} = a_n \times 2$$

ou seja:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

Trata-se de uma progressão geométrica de razão 2.

Progressão geométrica

Uma sucessão (u_n) de termos não nulos é uma progressão geométrica (p. g.) se existe um número real r , não nulo, tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N} \text{ ou } a_{n+1} = a_n \times r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se razão da progressão.

Observação

Na definição de progressão geométrica não consideramos os casos em que a razão é zero e/ou o 1.º termo é zero.

São exemplos de progressões geométricas (p. g.):

$$1, 4, 16, 64, \dots, 4^{n-1}, \dots \quad \rightarrow \text{razão: } 4$$

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, 2^{-n+4}, \dots \quad \rightarrow \text{razão: } \frac{1}{2}$$

Exemplo 5 Determinar a razão de uma progressão geométrica

Determine a razão de uma progressão geométrica em que o 4.º e o 6.º termos são, respectivamente, 15 e 1,35.

Resolução

$$u_4 = 15 \text{ e } u_6 = 1,35.$$

Numa progressão geométrica um termo obtém-se do anterior multiplicando este pela razão.

$$\text{Assim: } u_5 = u_4 \times r \text{ e } u_6 = u_4 \times r \times r \Leftrightarrow u_6 = u_4 \times r^2$$

$$1,35 = 15 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 0,09$$

$$\Leftrightarrow r = \pm 0,3$$

Logo, o problema tem duas soluções:

$$r = 0,3 \text{ ou } r = -0,3.$$



5

Escreva os cinco primeiros termos da progressão geométrica em que:

5.1 $a_1 = -3$ e $r = 2$;

5.2 $a_2 = 10$ e $r = -2$;

5.3 $a_4 = -1$ e $r = -1$;

5.4 $a_4 = 6$ e $a_7 = 3$.

Exemplo 6 Determinar a razão de uma progressão geométrica

Verifique que as sucessões (a_n) e (b_n) são progressões geométricas e indique a razão.

$$6.1 \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 2 \times a_n \end{cases}$$

$$6.2 \quad b_n = -3 (0,25)^{n-1}$$

Resolução

6.1 Temos que:

$$a_{n+1} = 2 \times a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

logo (a_n) é uma progressão geométrica, já que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante.

A razão desta progressão é 2.

$$6.2 \quad b_n = -3 (0,25)^{n-1}$$

$$b_{n+1} = -3 (0,25)^{n+1-1} = -3 (0,25)^n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-3 (0,25)^n}{-3 (0,25)^{n-1}} = 0,25^{n-n+1} = 0,25$$

Como é constante a razão entre qualquer termo e o anterior, trata-se de uma progressão geométrica.

A razão desta progressão é 0,25.



6

Verifique se são progressões geométricas e, em caso afirmativo, indique a razão de cada uma das sucessões cujos termos gerais são:

6.1 5^{1-n} ;

6.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$;

6.3 $(-1)^{2n+1}$;

6.4 $2\left(\frac{1}{3}\right)^{1-n}$;

6.5 $\frac{-1}{5^n}$;

6.6 $-\frac{n}{2} (0,4)^{n+1}$.

1.7 Termo geral de uma progressão geométrica

Conhecendo o 1.º termo e a razão de uma progressão geométrica podemos conhecer qualquer outro termo.



Se pretendêssemos conhecer o termo de ordem 100 pelo processo indicado levaríamos muito tempo, por isso, vamos procurar uma fórmula que nos permita calcular o valor de um termo conhecida a sua ordem.

Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão 3 e $a_1 = 2$:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \times 3$$

$$a_3 = 2 \times 3 \times 3$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2 \times \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{n-1 \text{ factores}}$$

$$\text{Logo, } a_n = 2 \times 3^{n-1} \text{ e } a_{100} = 2 \times 3^{99} \approx 3,4 \times 10^{47}.$$

De um modo geral, temos:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \times r$$

$$a_3 = a_1 \times r^2$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

Termo geral

Numa progressão geométrica (a_n) , de razão r , o termo geral é:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

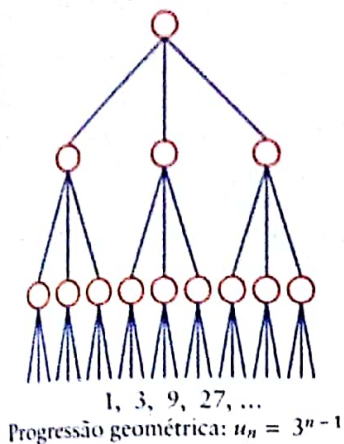
Se a_k é um termo qualquer de uma progressão geométrica (a_n) vem, substituindo n por k , $a_k = a_1 \times r^{k-1}$.

Então:

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_1 \times r^{n-1}}{a_1 \times r^{k-1}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_k} = r^{n-1-k+1} \Leftrightarrow a_n = a_k \times r^{n-k}$$

Numa progressão geométrica (a_n) de razão r , o termo geral é dado por $a_n = a_k \times r^{n-k}$, sendo a_k um termo qualquer.

Uma progressão geométrica fica definida conhecendo-se um termo qualquer e a razão.



1.8 Soma dos termos de uma progressão geométrica

• Soma dos n primeiros termos

Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão 3 em que $a_1 = 1200$.

Vamos calcular a soma dos 20 primeiros termos de (a_n) , ou seja:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$$

Para calcular esta soma não se calcularam os termos todos. Seguiu-se um método mais simples.

$$S = 1200 + 3600 + \dots + 1200 \times 3^{19}$$

$$3S = 3600 + \dots + 1200 \times 3^{19} + 1200 \times 3^{20}$$

$$a_n = 1200 \times 3^{n-1}$$

Subtraindo membro a membro, vem:

$$3S - S = 1200 \times 3^{20} - 1200$$

$$2S = 1200 \times 3^{20} - 1200$$

$$S = \frac{1200 \times 3^{20} - 1200}{2} = \frac{1200(3^{20} - 1)}{2} = 600(3^{20} - 1)$$

De um modo geral:

Se $u_1, u_2, \dots, u_n$ são os n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$r \times S_n = \underbrace{ru_1}_{u_2} + \underbrace{ru_2}_{u_3} + \dots + \underbrace{ru_{n-1}}_{u_n} + \underbrace{ru_n}_{ru_n}$$

$$r \times S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n + ru_n$$

$$r \times S_n - S_n = ru_n - u_1$$

$$S_n(r - 1) = ru_n - u_1$$

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\text{Se } r \neq 1$$

ou

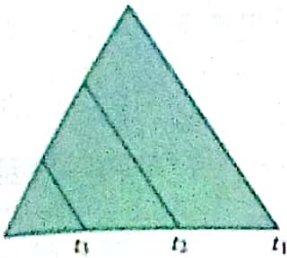
$$S_n = u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}, \text{ se } r \neq 1$$

Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $r \neq 1$ é:

$$S_n = u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

7 Os triângulos da figura seguinte são equiláteros.



Considere que t_1 tem lado 1 e que a medida da área de cada triângulo $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ é $\frac{1}{4}$ da área do anterior.

7.1 Escreva a expressão do termo geral da sucessão dos perímetros.

7.2 Calcule a soma das medidas das áreas dos 10 primeiros triângulos, com aproximação às centésimas.

7.1 Escreva, em função de n , a expressão da soma das medidas das áreas dos n primeiros triângulos.

Exemplo 7 Calcular um termo de uma progressão geométrica
Numa progressão geométrica (u_n) , temos que:

$$S_5 = 1,21 \text{ e a razão é } -2.$$

Calcule o 6.º termo desta progressão.

Resolução

$$S_5 = u_1 \times \frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,21 = u_1 \times \frac{1 + 32}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1,21 = u_1 \times 11$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 0,11$$

$$u_6 = u_1 \times r^{6-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_6 = 0,11 \times (-2)^5$$

$$\Leftrightarrow u_6 = -3,52$$

Logo, o 6.º termo desta progressão é $-3,52$.

Exemplo 8 Determinar a soma de termos consecutivos de uma p. g.

Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão 2 com $a_1 = \frac{1}{2}$.

Calcule a soma $a_9 + a_{10} + \dots + a_{18}$.

Resolução

1.º processo:

$$a_9 + a_{10} + \dots + a_{18} = S_{18} - S_8 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2^{18}}{1 - 2} - \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2}$$

$$= 131\,071,5 - 127,5$$

$$= 130\,944$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

2.º processo:

$$a_9 + a_{10} + \dots + a_{18} = a_9 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} =$$

$$= 128 \times 1023$$

$$= 130\,944$$

a_9 é a 1.ª parcela.

$18 - 9 + 1 = 10$ é o número de parcelas.

$$a_9 = \frac{1}{2} \times 2^8 = 128$$

8 Numa progressão geométrica de termos positivos:

$$u_3 = 208 \text{ e } u_5 = 3328.$$

Calcule a soma dos cinco termos consecutivos a partir do 8.º, inclusive.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1** Numa progressão aritmética (u_n) , temos que:

$$u_4 + u_5 + u_6 = 63 \text{ e } u_{10} + u_{12} = 102$$

A diferença de progressão, r , é igual a:

- (A) $r = 3$;
 (B) $r = 4$;
 (C) $r = 5$;
 (D) $r = 6$.

5 pontos

- 2** A soma

$14 + 10,5 + 7 + 3,5 + \dots + (-17,5)$ é igual a:

- (A) -15 ;
 (B) $-16,5$;
 (C) -17 ;
 (D) $-17,5$.

5 pontos

- 3** Seja a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 7, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) A sucessão é uma progressão geométrica.
 (B) (u_n) é monótona decrescente.
 (C) $u_n = -7n - 9$.
 (D) A soma dos primeiros seis termos é -91 .

5 pontos

- 4** Sabe-se que 6 , x e $8,64$ são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

O valor de x é igual a:

- (A) $\pm 7,2$;
 (B) $+6$;
 (C) ± 5 ;
 (D) $\pm 4,2$.

5 pontos

- 5** A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão $0,3$ e $a_2 = 0,9$.

O termo da ordem 20 é igual a:

- (A) $3 \times (0,3)^{18}$;
 (B) $3 \times (0,3)^{19}$;
 (C) $0,3 \times 3^{18}$;
 (D) $0,3 \times 3^{19}$.

5 pontos

- 6** A soma das primeiras 10 potências de base 2 e expoente natural é igual a:

- (A) 2006 ;
 (B) 2046 ;
 (C) 2056 ;
 (D) 2066 .

5 pontos

- 7** O Langa depositou num banco 5 mil meticais e resolveu aí colocar, todos os meses, 500 meticais. Assim, decorrido um mês o Langa tinha 5500 meticais no banco.

Ao fim de quantos meses o Langa terá $50\,000$ meticais depositados no banco?

- (A) 70 meses;
 (B) 80 meses;
 (C) 90 meses;
 (D) 100 meses.

5 pontos

- 8** De um barril de vinho retira-se diariamente $\frac{1}{4}$ do seu conteúdo.

Se inicialmente o barril tem 510 litros, a quantidade de vinho que fica no barril decorridos 10 dias, em litros com duas casas decimais, é igual a:

- (A) $28,72$ l ;
 (B) $30,02$ l ;
 (C) $31,03$ l ;
 (D) $32,72$ l .

5 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1 Numa progressão geométrica tem-se $u_1 = 90$ e $u_6 = 2430$. Determine:

1.1 u_1 e a razão; 1.2 S_{10} .

15 (10 + 5) pontos

- 2 Numa progressão geométrica tem-se $u_2 = 24$ e $u_6 = 384$.

2.1 Determine u_1 e a razão.

2.2 Calcule S_{10} para cada uma das soluções obtidas em 2.1.

20 (10 + 10) pontos

- 3 Considere a seguinte progressão geométrica:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}, \frac{\pi^3}{8}, \frac{\pi^4}{16}, \frac{\pi^5}{32}, \dots$$

3.1 Escreva o termo de ordem 10.

3.2 Calcule um valor aproximado de S_{10} com duas casas decimais.

20 pontos

- 4 Diga, justificando, se cada afirmação é verdadeira ou falsa.

4.1 Sendo $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, então:

(A) $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{n}$; (B) $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$;

(C) $u_{n+1} - u_n = -2$.

4.2 Sendo $u_n = 2^{n+1}$, então:

(A) $u_{2n} = 2^{2n+2}$; (B) $u_{3n} = 6^{n+1}$;

(C) $u_{5n} = 2^{5n+1}$.

4.3 A sucessão (v_n) é definida por:

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ Então:}$$

(A) $v_2 = 2v_1 + 3$; (B) $v_{2n-1} = 2v_{2n} + 3$.

4.4 A sucessão (u_n) é definida por $u_1 = 2$ e $u_{n+1} = u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N}$ e (v_n) é definida por

$$v_1 = 3 \text{ e } v_{n+1} = \frac{8}{5} \times v_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de diferença -3 .

(B) A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de diferença $\frac{5}{8}$.

4.5 O 2.º termo de uma progressão geométrica (a_n) é 3 e a razão é r . Então: $a_n = 3 \times r^{n-2}$.

4.6 Se (u_n) é uma progressão geométrica estritamente crescente, então:

(A) $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

(B) $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

65 (15 × 3) pontos

- 5 Numa progressão aritmética...

Três números estão em progressão aritmética (isto é, são termos consecutivos de uma progressão aritmética), a sua soma é 3 e o seu produto -3 . Quais são os números?

10 pontos

- 6 O mentiroso

Um mentiroso conta uma mentira a três amigos. Ao fim de 10 minutos cada um deles conta-a a outros três que, por sua vez, a contam em 10 minutos a outros três (cada um).

Quantas pessoas, incluindo o mentiroso, conhecem a mentira ao fim de uma hora a contar do momento em que os três amigos a começam a espalhar?

10 pontos

- 7 A escolha do salário

Duas amigas foram passar férias aos Estados Unidos e resolveram trabalhar para ganharem algum dinheiro extra.

Teriam de trabalhar no mínimo 20 horas e só ao fim desse tempo receberiam o dinheiro correspondente ao trabalho.

Tinham três hipóteses de escolher a forma de pagamento:

1.ª hipótese: 50 dólares por hora.

2.ª hipótese: a primeira hora 8 dólares e cada hora seguinte teria um aumento de 5 dólares relativamente à hora anterior.

3.ª hipótese: a primeira hora seria $\frac{1}{500}$ do dólar, e cada hora seguinte seria o dobro da anterior.

Qual era a melhor hipótese? E a pior?

20 pontos



Objectivos

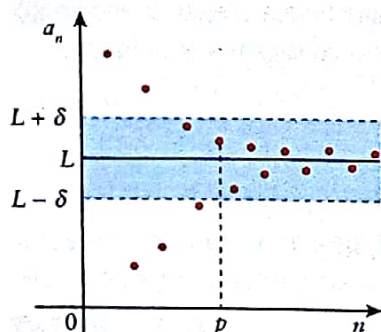
1. Conhecer teoremas e propriedades sobre sucessões.
2. Aplicar teoremas sobre sucessões convergentes.
3. Operar com sucessões convergentes.
4. Operar com limites infinitos.
5. Levantar indeterminações.
6. Calcular, quando existir, a soma de todos os termos de uma progressão geométrica.
7. Conhecer o número de Neper.
8. Determinar limites de sucessões utilizando o número de Neper.

2. Cálculo de limites



2.1 Noção intuitiva de limite de uma sucessão

2.1.1 Sucessões convergentes



Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve-se $\lim a_n = L$) se, por muito pequeno que seja o número positivo δ , existir uma ordem p a partir da qual se tem $|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quanto se queira.

Simbolicamente:

$$\lim a_n = L \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |a_n - L| < \delta$$

ou

$$\lim a_n = L \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow L - \delta < a_n < L + \delta$$

Se uma sucessão qualquer (a_n) tem por limite um número real L , escreve-se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L, \lim a_n = L \text{ ou } a_n \rightarrow L$$

e lê-se:

“o limite de (a_n) é L ”

ou

“ (a_n) converge para L ”

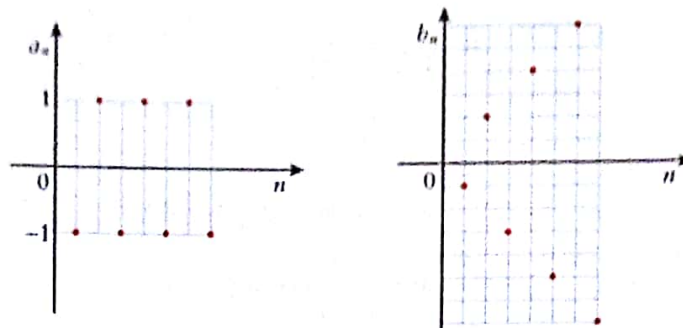
ou

“ (a_n) tende para L ”.

As sucessões que têm por limite um número real dizem-se **convergentes**.
As sucessões que não são convergentes dizem-se **divergentes**.

Exemplos:

As sucessões $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^n \times n$ são divergentes:



Uma sucessão (a_n) que tende para zero chama-se **infinitésimo** ou **infinitamente pequeno**.

$$(a_n) \text{ é um infinitésimo } \Leftrightarrow a_n \rightarrow 0$$

Exemplos:

As seguintes sucessões são infinitésimos:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = -\frac{1}{n} \quad \text{e} \quad w_n = (-1)^n \times \frac{1}{n}.$$

2.1.2 Limites infinitos

Seja (a_n) a sucessão tal que $a_n = n^2$.

Para que:

- $a_n > 100$ basta que $n > 10$;
- $a_n > 10^{10}$ basta que $n > 10^5$;
- $a_n > 10^{2p}$ basta que $n > 10^p$;

isto é, é sempre possível determinar uma ordem (n) , a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que qualquer valor positivo (L) .

Diz-se, neste caso, que (a_n) é um **infinitamente grande positivo** ou que $a_n \rightarrow +\infty$

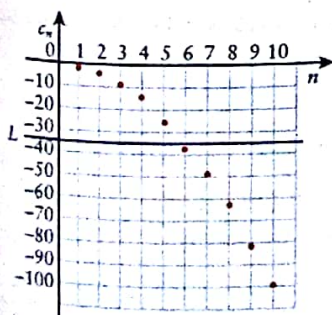
Infinitamente grande positivo

Uma sucessão (a_n) é um infinitamente grande positivo e escreve-se:

$$a_n \rightarrow +\infty \quad \text{ou} \quad \lim a_n = +\infty$$

se e só se, qualquer que seja o número positivo L , existe uma ordem a partir da qual todos os termos de (a_n) são maiores que L , ou seja:

$$a_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow a_n > L$$



Considerando a sucessão $c_n = -a_n$, ou seja, $c_n = -n^2$, o gráfico da sucessão (c_n) é simétrico do gráfico da sucessão (a_n) , relativamente ao eixo das abcissas.

Qualquer que seja o número real L , a partir de certa ordem todos os termos de (c_n) são menores que L .

Diz-se que (c_n) é um infinitamente grande negativo e escreve-se:

$$\lim c_n = -\infty \quad \text{ou} \quad c_n \rightarrow -\infty.$$

Infinitamente grande negativo

Diz-se que (a_n) é um infinitamente grande negativo e escreve-se:

$$a_n \rightarrow -\infty \quad \text{ou} \quad \lim a_n = -\infty$$

se e só se $(-a_n)$ é um infinitamente grande positivo.

Consideremos agora a sucessão (d_n) definida por $d_n = (-1)^n \times n^2$.

$$\text{Atendendo a que } d_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -n^2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a sucessão (d_n) não é um infinitamente grande negativo nem é um infinitamente grande positivo.

No entanto, como $|d_n| = n^2 \rightarrow +\infty$, diz-se que (d_n) é um infinitamente grande em módulo e escreve-se:

$$\lim d_n = \infty \quad \text{ou} \quad d_n \rightarrow \infty.$$

Infinitamente grande em módulo

Diz-se que (a_n) é um infinitamente grande ou um infinitamente grande em módulo e escreve-se:

$$a_n \rightarrow \infty$$

se e só se $(|a_n|)$ é um infinitamente grande positivo.

2.1.3 Classificação das sucessões quanto à existência e natureza do limite

Das definições apresentadas resulta que todos os infinitamente grandes positivos e todos os infinitamente grandes negativos são infinitamente grandes em módulo.

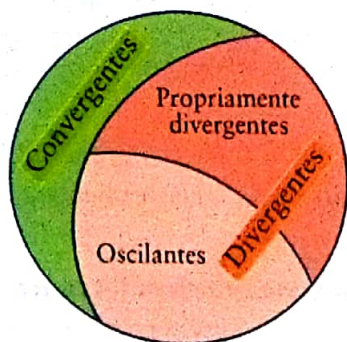
Se $(2n) \rightarrow +\infty$, então $(2n) \rightarrow \infty$.

Se $(-2n) \rightarrow -\infty$, então $(-2n) \rightarrow \infty$.

Os infinitamente grandes são sucessões divergentes.

Se uma sucessão tende para $+\infty$ ou $-\infty$, diz-se que a sucessão é propriamente divergente; as sucessões divergentes que não são propriamente divergentes dizem-se sucessões oscilantes.

Assim, quanto à existência e natureza do limite, as sucessões classificam-se da forma seguinte:



Sucessões	{	Convergentes (limite real)	{	Propriamente divergentes (limite $+\infty$ ou limite $-\infty$)
		Divergentes (não convergentes)		Oscilantes

Exemplos:

- São convergentes as sucessões de termo geral:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{3^n}, 1 + \frac{2}{3^n} \text{ e } 5 - \frac{1}{n}, \text{ tendo-se:}$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0; \frac{2}{3^n} \rightarrow 0; 1 + \frac{2}{3^n} \rightarrow 1; 5 - \frac{1}{n} \rightarrow 5$$

- São propriamente divergentes as sucessões de termo geral:

$$2n + 3, 8 + n^2, -(2n + 3) \text{ e } 8 - n^2, \text{ tendo-se:}$$

$$2n + 3 \rightarrow +\infty; -(2n + 3) \rightarrow -\infty; 8 + n^2 \rightarrow +\infty; 8 - n^2 \rightarrow -\infty$$

- São oscilantes as sucessões de termo geral:

$$(-1)^n (2n + 3) \text{ e } (-1)^n \frac{8 + n^2}{n}, \text{ tendo-se:}$$

$$(-1)^n (2n + 3) \rightarrow \infty; (-1)^n \frac{8 + n^2}{n} \rightarrow \infty$$

Outros exemplos são $(-1)^n$ e $(1 + (-1)^n) \times n^2$.

2.1.4 Subsucessão de uma sucessão

Consideremos a sucessão (u_n) tal que $u_n = \frac{1}{n}$, ou seja:

$$u_n: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

Sejam (a_n) e (b_n) as sucessões definidas por:

- $a_n = u_{2n} = \frac{1}{2n}$, ou seja: $a_n: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$
- $b_n = u_{n+3} = \frac{1}{n+3}$, ou seja: $b_n: \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$

As sucessões (a_n) e (b_n) são subsucessões de (u_n) : (a_n) é a subsucessão dos termos de ordem par e (b_n) é a subsucessão dos termos de ordem superior a três.

Subsucessão de uma sucessão

Subsucessão de uma sucessão dada é uma sucessão que se obtém da primeira suprimindo um número finito ou infinito de termos e mantendo a ordem dos termos restantes.

2.2 Sucessões infinitamente grandes e sucessões monótonas

Consideremos as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n^2} \text{ e } b_n = (n - 3)^2.$$

- A sucessão (a_n) é estritamente crescente, mas não é um infinitamente grande positivo, dado que $a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- A sucessão (b_n) é um infinitamente grande positivo, mas não é crescente, dado que $b_2 = 1, b_3 = 0$ e $b_4 = 1$.



Dê exemplo de:

- 1.1 uma sucessão que não seja crescente e seja um infinitamente grande positivo;
- 1.2 uma sucessão que não seja decrescente e seja um infinitamente grande negativo;
- 1.3 uma sucessão que seja crescente e não seja um infinitamente grande positivo;
- 1.4 uma sucessão que seja decrescente e não seja um infinitamente grande negativo.

De um modo geral, temos que:

- o facto de uma sucessão ser crescente não é suficiente para que seja um infinitamente grande positivo;
- um infinitamente grande positivo não é necessariamente uma sucessão crescente.

Exemplo 1 Sucessões crescentes e infinitamente grandes

Qual é o valor lógico da afirmação seguinte:

“Todas as sucessões crescentes tendem para $+\infty$.”

Resolução

Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ é crescente pois $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$

Por outro lado, $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ pelo que (u_n) não é um infinitamente grande positivo.

Portanto, a afirmação é falsa.

2.3 Sucessões infinitamente grandes e sucessões limitadas

Se $u_n = \sqrt{n}, u_n \rightarrow +\infty$. O conjunto de termos de (u_n) não é limitado superiormente.

Se $u_n = -\sqrt{n}, u_n \rightarrow -\infty$. O conjunto de termos de (u_n) não é limitado inferiormente.

Se $u_n = (-1)^n \times \sqrt{n}, u_n \rightarrow \infty$. O conjunto dos termos de (u_n) não é limitado superior nem inferiormente.

Será que toda a sucessão não limitada é um infinitamente grande?

Seja a sucessão: $n \rightarrow u_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Alguns termos da sucessão: 2, 3, 6, 3, 10, 3, 14, 3, ...

Por definição de infinitamente grande, fixado um número A , a partir de certa ordem todos os termos são maiores do que A . Ora, se considerarmos $A = 4$ (por exemplo), há sempre termos de sucessão (os termos de ordem par) que são menores do que A . Logo, uma sucessão pode ser não limitada e não ser infinitamente grande.

De um modo geral temos que:

Se uma sucessão é um infinitamente grande não é limitada.

Se uma sucessão é não limitada e não é um infinitamente grande, então:

- admite pelo menos uma subsucessão que é um infinitamente grande;
- admite pelo menos uma subsucessão limitada.

2

Considere a sucessão:

$$a_n = 8n + (-1)^n 8n$$

2.1 Escreva os seis primeiros termos da sucessão.

2.2 Defina duas sub-sucessões da sucessão dada.

2.3 A sucessão é um infinitamente grande? Justifique.

Exemplo 2 Será um infinitamente grande?

A sucessão $a_n = n + (-1)^n \times n$ será um infinitamente grande?

Resolução

Para $a_n = n + (-1)^n \times n$: $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 0$; $a_4 = 8$, ...

Logo, a sucessão não é um infinitamente grande.

Por exemplo, fixado o número 1, existe sempre uma infinidade de termos da sucessão que são inferiores a 1 (todos os termos de ordem ímpar).

2.4 Infinitésimos e infinitamente grandes

Inverso de um infinitamente grande

Se (u_n) é um infinitamente grande e $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ é um infinitésimo.

Exemplo: n , n^2 , n^3 , ..., n^p , com $p \in \mathbb{N}$, são termos gerais de infinitamente grandes. Então:

$\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, ..., $\frac{1}{n^p}$, com $p \in \mathbb{N}$, são termos gerais de infinitésimos.

Assim:

- se $n \rightarrow +\infty$, então $\frac{1}{n} \rightarrow 0$; • se $n^2 \rightarrow +\infty$, então $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$;
- se $n^p \rightarrow +\infty$, então $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$, $p \in \mathbb{N}$.

Inverso de um infinitésimo

Se (u_n) é um infinitésimo e $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ é um infinitamente grande.

Assim:

- se $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, então $n \rightarrow +\infty$; • se $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, então $n^2 \rightarrow +\infty$;
- se $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$, então $n^p \rightarrow +\infty$, $p \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3 Calcular um limite

Calcule cada um dos seguintes limites:

3.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3}$;

3.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n+3} \right]$.

Resolução

3.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} = 0$

$(n+3 \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{n+3} \rightarrow 0)$

3.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n+3} \right] = 0$

$(n+3 \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{n+3} \rightarrow 0)$

Indique o limite de cada uma das sucessões de termo geral:

3.1 $a_n = n + 1$;

3.2 $d_n = \frac{1}{n+1}$;

3.3 $g_n = \frac{1}{3n+2}$.

2.5 Teoremas sobre sucessões convergentes

Unicidade do limite

O limite de uma sucessão convergente é único.

A demonstração do teorema será feita por redução ao absurdo.

Demonstração:

Suponhamos que $u_n \rightarrow a$ e $u_n \rightarrow b$ com $a < b$.

Seja δ um número positivo tal que $\delta < \frac{b-a}{2}$ (δ é um número menor que metade da distância entre a e b).

Como $u_n \rightarrow a$ e $u_n \rightarrow b$, existe uma ordem p_1 a partir da qual:

$$|u_n - a| < \delta \iff a - \delta < u_n < a + \delta$$

e existe uma ordem p_2 a partir da qual:

$$|u_n - b| < \delta \iff b - \delta < u_n < b + \delta$$



Designando por p a maior das ordens p_1 ou p_2 , a partir da ordem p os termos da sucessão (u_n) pertencem simultaneamente aos intervalos $]a - \delta, a + \delta[$ e $]b - \delta, b + \delta[$, o que é absurdo pois, como $\delta < \frac{b-a}{2}$, aqueles intervalos são disjuntos.

Podemos, então, concluir que não pode ser $a < b$.

De igual modo se provaria que não pode ser $b < a$.

Limite de uma sucessão constante

O limite de uma sucessão constante é a própria constante.

Demonstração:

Seja $u_n = k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que $\delta > 0$, tem-se a partir de qualquer ordem p , $k - \delta < u_n < k + \delta$, dado que $u_n = k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

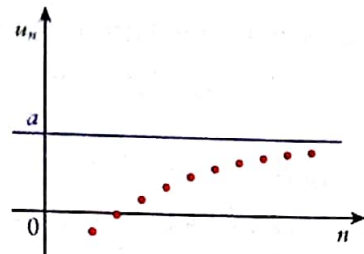
Então, $\lim u_n = k$.

Exemplos:

- $a_n = 3$, $\lim a_n = 3$
- $b_n = -5$, $\lim b_n = -5$

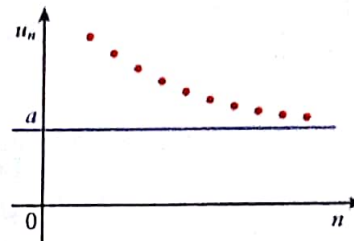
Convergência de sucessões monótonas e limitadas
Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Se (u_n) é crescente e limitada é convergente.



(a é o menor dos majorantes)
 $u_n \rightarrow a$

Se (u_n) é decrescente e limitada é convergente.



(a é o maior dos minorantes)
 $u_n \rightarrow a$

Subsucessões e convergência

Se uma sucessão (u_n) é convergente para L , qualquer subsucessão de (u_n) é convergente para L .

Exemplo: A sucessão (u_n) definida por $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

é divergente porque $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ e $1 \rightarrow 1$, e uma sucessão convergente não pode ter subsucessões com limites diferentes.

Exemplo 4 Sucessão monótona e limitada

Considere a sucessão $a_n = \frac{n}{n+1}$.

4.1 Mostre que a sucessão é monótona.

4.2 Mostre que a sucessão é limitada.

4.3 Justifique que a sucessão é convergente.

Resolução

$$4.1 \quad a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+1+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é monótona.

$$4.2 \quad a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{n+1} < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a_n < 1$$

Logo, a sucessão a_n é limitada pois $\frac{1}{2} \leq a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

4.3 A sucessão é convergente porque é uma sucessão monótona e limitada.

Considere a sucessão de termo geral:

$$a_n = \frac{1-n}{2n}$$

4.1 Mostre que a sucessão (a_n) é monótona.

4.2 Mostre que a sucessão (a_n) é limitada.

4.3 Justifique que a sucessão (a_n) é convergente.

2.6 Operações com sucessões convergentes

Adição

Dadas as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n+1}$:

$$\lim a_n = 0 \text{ e } \lim b_n = 0$$

$(a_n + b_n)$ é a sucessão de termo geral $a_n + b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$:

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = 0$$

Limite de uma soma

Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões convergentes com limites, respectivamente, a e b , então $(u_n + v_n)$ é convergente e tem por limite $a + b$.

Multiplicação e divisão

O produto e quociente de duas sucessões define-se de modo análogo ao da soma. Assim, por exemplo, sendo $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{2+n}{n}$, tem-se:

$$\begin{aligned} a_n \times b_n &= \frac{1}{n} \times \frac{2+n}{n} \\ &= \frac{2+n}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n : b_n &= \frac{1}{n} : \frac{2+n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n}{2+n} = \frac{1}{2+n} \end{aligned}$$

O quociente $\frac{a_n}{b_n}$ só é uma sucessão se todos os termos de (b_n) forem diferentes de zero.

Limite do produto e limite do quociente

Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, respectivamente, para a e b :

- a sucessão $(u_n \times v_n)$ é convergente para $a \times b$;
- a sucessão $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ é convergente para $\frac{a}{b}$, desde que $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$.

Consequências do teorema

1. Se (u_n) é convergente e $k \in \mathbb{R}$ (constante), então:

$$\lim (k \times u_n) = k \times \lim (u_n)$$

$$\begin{aligned} \text{Com efeito, } \lim (k \times u_n) &= \lim k \times \lim u_n \\ &= k \times \lim u_n \end{aligned}$$

$\lim k = k$, pois k é constante

2. Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, então:

$$\lim (u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$$

Basta atender a que $u_n - v_n = u_n + (-1) \times v_n$

3. Se (u_n) é convergente e $p \in \mathbb{N}$, então $\lim (u_n)^p = (\lim u_n)^p$.

Basta atender a que $(u_n)^p = \underbrace{u_n \times u_n \times \dots \times u_n}_{p \text{ factores}}$

$$\begin{aligned} \text{e } \lim (u_n)^p &= \lim \underbrace{u_n \times u_n \times \dots \times u_n}_{p \text{ factores}} \\ &= (\lim u_n)^p \end{aligned}$$

Exemplo 5 Cálculo de limites de sucessões convergentes

Sabendo que $a_n \rightarrow -2$, calcule $\lim (3a_n - a_n^3)$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim (3a_n - a_n^3) &= \lim 3a_n - \lim a_n^3 \\ &= 3 \lim a_n - (\lim a_n)^3 \\ &= 3 \times (-2) - (-2)^3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim (k \times u_n) = k \times \lim u_n$$

$$\lim u_n^p = (\lim u_n)^p$$

Substitui-se $\lim a_n = -2$

Efectuam-se os cálculos.

5 Calcule $\lim (2a_n - a_n^2)$, sabendo que $a_n \rightarrow -3$.

Exemplo 6 Cálculo de limites

Sabendo que $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{3n+1}{n}$, calcule:

6.1 $\lim (a_n \times b_n)$;

6.2 $\lim (a_n : b_n)$;

6.3 $\lim (a_n - 3b_n)^2$.

Resolução

$$a_n = 2 - \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{3n+1}{n}.$$

Começamos por calcular $\lim a_n$ e $\lim b_n$.

$$\lim a_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \lim 2 - \lim \frac{1}{n} = 2 - 0 = 2$$

$$\lim b_n = \lim \left(\frac{3n+1}{n} \right) = \lim \left(\frac{3n}{n} + \frac{1}{n} \right) = \lim 3 + \lim \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$$

6.1 $\lim (a_n \times b_n) = \lim (a_n) \times \lim (b_n) = 2 \times 3 = 6$

6.2 $\lim (a_n : b_n) = \lim (a_n) : \lim (b_n) = \frac{2}{3}$

6.3 $\lim (a_n - 3b_n)^2 = [\lim (a_n - 3b_n)]^2 = [\lim a_n - 3 \lim b_n]^2$
 $= [2 - 3 \times 3]^2 = 49$

6 Se as sucessões (a_n) e (b_n) têm por limites, respectivamente, -1 e $\frac{1}{3}$; $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, calcule:

6.1 $\lim (a_n + b_n)$;

6.2 $\lim (a_n - b_n)$;

6.3 $\lim (a_n \times b_n)$;

6.4 $\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$;

6.5 $\lim \left(\frac{a_n + b_n}{a_n} \right)^3$.

2.7 Radiciação

No cálculo de limites de sucessões envolvendo raízes utiliza-se o seguinte teorema:

Se (u_n) é convergente e p é um número natural, também $(\sqrt[p]{u_n})$ é convergente e tem-se:

$$\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}$$

(se p é par supõe-se que $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

Exemplo 7 Cálculo de um limite

Calcule o $\lim \sqrt[5]{\frac{32n+1}{n}}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[5]{\frac{32n+1}{n}} &= \sqrt[5]{\lim \frac{32n+1}{n}} = \sqrt[5]{\lim \left(32 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \sqrt[5]{\lim 32 + \lim \frac{1}{n}} = \sqrt[5]{32 + 0} = 2 \end{aligned}$$



Calcule $\lim \sqrt[3]{\frac{2n+1}{n}}$.

2.7.1 Outros teoremas sobre limites de sucessões convergentes

Teorema das sucessões encaixadas

Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes com o mesmo limite a e se, a partir de certa ordem, a sucessão (w_n) é tal que:

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

então $\lim w_n = a$.

No cálculo de limites de sucessões ainda se aplicam os seguintes teoremas:

- Se (u_n) é convergente, $\lim |u_n| = |\lim u_n|$.
- Se a sucessão (u_n) é convergente, e a partir de certa ordem $u_n \geq 0$, então $\lim u_n \geq 0$.
- Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes e, a partir de certa ordem se tem $u_n \geq v_n$, então $\lim u_n \geq \lim v_n$.

Exemplo 8 Cálculo de limites

Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{2n + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}$$

8.1 Calcule os três primeiros termos.

8.2 Poderá concluir que (u_n) é monótona?

8.3 Calcule $\lim u_n$.

Resolução

$$8.1 \quad u_1 = \frac{2 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

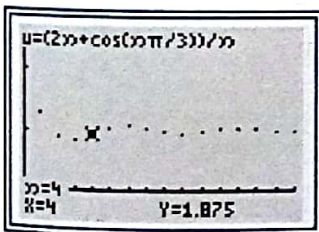
$$u_2 = \frac{4 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{4 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

$$u_3 = \frac{6 + \cos(\pi)}{3} = \frac{6 - 1}{3} = \frac{5}{3}$$

8.2 Apesar de $u_1 > u_2 > u_3$, não podemos concluir que u_n é monótona, pois só conhecemos os três primeiros termos.

$$\text{Calculando } u_4 = \frac{8 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{4} = \frac{15}{8} \text{ verificamos que } u_3 < u_4, \text{ logo}$$

u_n não é monótona, como podemos confirmar na calculadora.



8.3 Sabemos que $-1 \leq \cos\left(n \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então:

$$\frac{2n + (-1)}{n} \leq \frac{2n + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n} \leq \frac{2n + (+1)}{n}$$

$$1) \quad \frac{2n-1}{n} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \quad \begin{cases} \lim\left(\frac{2n-1}{n}\right) = \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 - 0 = 2 \\ \lim\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + 0 = 2 \end{cases}$$

De 1) e 2), e pelo teorema das sucessões enquadadas, $\lim u_n = 2$.

8 Calcule, aplicando o teorema das sucessões enquadadas, cada um dos seguintes limites:

8.1 $\lim \frac{1 + \sin n}{n}$;

8.2 $\lim \left(\frac{n + \cos(2n)}{2n}\right)^2$.

2.8 Operações com limites infinitos

Se (u_n) tende para $a \neq 0$ (finito ou infinito) e (v_n) é um infinitamente grande, então $(u_n \times v_n)$ é um infinitamente grande.

A fim de facilitar a aplicação deste teorema vamos adoptar a convenção:

$$a \times (+\infty) = \infty, \quad a \neq 0$$

Observação

Para simplificar a escrita, convençionamos que os símbolos $+\infty$, $-\infty$ e ∞ designam um infinitamente grande positivo, um infinitamente grande negativo ou um infinitamente grande, respectivamente.

Conjugando este teorema com os teoremas relativos ao inverso de um infinitamente grande e ao inverso de um infinitésimo é possível estabelecer as seguintes regras práticas:

- $\frac{a}{\infty} = 0$, $a \in \mathbb{R}$ (a é finito)
- $\frac{a}{0} = \infty$, $a \neq 0$ (a é finito ou infinito)

- Se $(u_n) \rightarrow 0$ e $(v_n) \rightarrow \infty$, a sucessão $(u_n \times v_n)$ pode ser convergente ou divergente.

No caso de ser convergente nada se pode afirmar sobre o seu limite, como se pode verificar nos seguintes exemplos:

Seja:

- $(u_n) = \frac{1}{n^2}$; $u_n \rightarrow 0$;
- $(v_n) = 2n^2$, $v_n \rightarrow +\infty$ e $v_n \times u_n = \frac{2n^2}{n^2} = 2$, logo $(v_n \times u_n) \rightarrow 2$;
- $(v_n) = 2n^3$, $v_n \rightarrow +\infty$ e $v_n \times u_n = \frac{2n^3}{n^2} = 2n$, logo $(v_n \times u_n) \rightarrow +\infty$;
- $(v_n) = n$, $v_n \rightarrow +\infty$ e $v_n \times u_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, logo $(v_n \times u_n) \rightarrow 0$.

Assim, se $(u_n) \rightarrow 0$ e $(v_n) \rightarrow +\infty$, a determinação de $\lim (u_n \times v_n)$ conduz a uma situação de indeterminação. Por isso, $0 \times \infty$ é um símbolo de indeterminação.

- O cálculo do limite do quociente de dois infinitésimos e do quociente de dois infinitamente grandes conduz igualmente a situações de indeterminação.

$\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ são também símbolos de indeterminação.

Exemplo 9 Cálculo de limites

Calcule cada um dos seguintes limites:

9.1 $\lim [2(1 - 5n)]$;

9.2 $\lim [-5(1 + 3n)]$;

9.3 $\lim \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \times (1 - 3n) \right]$;

9.4 $\lim \frac{6}{n^2 + n}$;

9.5 $\lim \left[\sqrt[3]{\frac{8n+1}{n}} \times \left(\frac{n+1}{n^2} \right)^3 \right]$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 9.1 \quad \lim [2(1 - 5n)] &= \\
 &= \lim 2 \times \lim (1 - 5n) \\
 &= 2 \times (-\infty) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.2 \quad \lim [-5(1 + 3n)] &= \\
 &= \lim (-5) \times \lim (1 + 3n) \\
 &= -5 \times (+\infty) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9.3 \quad \lim \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \times (1 - 3n) \right] &= \\
 &= \lim \left(2 + \frac{1}{n} \right) \times \lim (1 - 3n) = 2 \times (-\infty) = -\infty
 \end{aligned}$$

9.4 $\lim \frac{6}{n^2 + n} = \frac{6}{+\infty} = 0$

$$\begin{aligned}
 9.5 \quad \lim \left[\sqrt[3]{\frac{8n+1}{n}} \times \left(\frac{n+1}{n^2} \right)^3 \right] &= \\
 &= \lim \sqrt[3]{8 + \frac{1}{n}} \times \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^3 \\
 &= \sqrt[3]{\lim \left(8 + \frac{1}{n} \right)} \times \left[\lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right]^3 \\
 &= \sqrt[3]{8 + 0} \times (0 + 0)^3 = 2 \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

9

Calcule:

9.1 $\lim [-7(-1 + 3n)]$;

9.2 $\lim [-4(2 - 7n)]$;

9.3 $\lim \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \times (1 - n) \right]$;

9.4 $\lim \frac{7}{1 - 2n}$;

9.5 $\lim \frac{-4}{1 + n}$;

9.6 $\lim \left[\left(n \times \frac{1}{n} \right) \times (n - 1) \right]$;

9.7 $\lim \left[\left(n^2 \times \frac{1}{n} \right) \times \left(1 - \frac{1}{3n} \right) \right]$.

Se $(u_n) \rightarrow a \in \mathbb{R}$ e (v_n) é um infinitamente grande, então $(u_n + v_n)$ é um infinitamente grande.

Assim, sendo $a \in \mathbb{R}$, temos as convenções:

$$a + (+\infty) = +\infty \quad \text{e} \quad a + (-\infty) = -\infty$$

Este teorema é ainda válido no caso em que (u_n) e (v_n) são infinitamente grandes com o mesmo sinal. Neste caso, tem-se:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad \text{e} \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

No caso da soma de um infinitamente grande positivo com um infinitamente grande negativo, estamos na presença de um novo símbolo de indeterminação, geralmente representado por $\infty - \infty$.

Se $(u_n) \rightarrow \infty$, então $(u_n)^p \rightarrow \infty$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

O sinal é determinado pela regra dos sinais:

$$(+\infty)^p = +\infty$$

- Se p é par, $(-\infty)^p = +\infty$.
- Se p é ímpar, $(-\infty)^p = -\infty$.

Se $(u_n) \rightarrow +\infty$ e $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $(\sqrt[p]{u_n}) \rightarrow +\infty$, $\forall p \in \mathbb{N}$.
 $\infty^p = \infty$ e $\sqrt[p]{+\infty} = +\infty$, $p \in \mathbb{N}$.



10

Calcule, caso exista, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

10.1 $a_n = 1 - n$;

10.2 $a_n = n - 3$;

10.3 $a_n = \frac{1-n}{n}$;

10.4 $a_n = \left(\frac{1-n}{n}\right)^2$;

10.5 $a_n = \frac{2}{n+1}$;

10.6 $a_n = \frac{2n+3}{4n}$;

10.7 $a_n = \frac{n^2}{n^3} - \frac{1}{n}$;

10.8 $a_n = (n+1)^2 + n^3$.

Exemplo 10 Cálculo de limites

Calcule cada um dos seguintes limites:

10.1 $\lim (n^2 + \sqrt{n})$;

10.2 $\lim (-2n^2 + 1)^3$;

10.3 $\lim (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

Resolução

10.1 $\lim (n^2 + \sqrt{n}) = \lim n^2 + \lim \sqrt{n} = +\infty + \infty = +\infty$

10.2 $\lim (-2n^2 + 1)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

10.3 $\lim (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \lim \sqrt{n+1} + \lim \sqrt{n}$
 $= \sqrt{\lim (n+1)} + \sqrt{\lim n}$
 $= +\infty + (+\infty) = +\infty$

2.9 Indeterminações

Das exclusões aos teoremas anteriormente apresentados surgiram indeterminações, simbolicamente representadas por:

$$0 \times \infty; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad \infty - \infty$$

Normalmente, efectuando algumas operações consegue-se calcular o limite numa situação de indeterminação. Nesse caso, diz-se que se “levantou” a indeterminação.

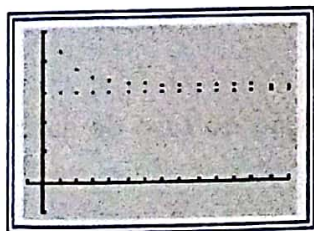
Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Considerem-se alguns exemplos:

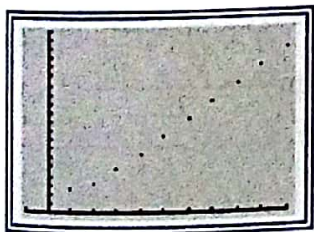
$$\bullet \quad n \xrightarrow{u_n} 3n^2 + 2n + 1; \quad n \xrightarrow{v_n} 5n^2 + n + 1$$

Sabe-se que $(u_n) \rightarrow +\infty$ e $(v_n) \rightarrow +\infty$.

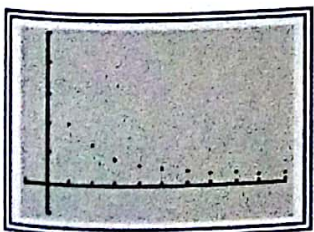
A calcular directamente $\lim \frac{u_n}{v_n}$ somos conduzidos à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.



$$\begin{aligned} \lim \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + n + 1} &= \lim \frac{3n^2 \left(1 + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n^2}\right)}{5n^2 \left(1 + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n^2}\right)} \\ &= \lim \frac{3n^2}{5n^2} \times \lim \frac{1 + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n^2}}{1 + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n^2}} = \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim \frac{2n^3 + 3}{n^2 + n} &= \lim \frac{2n^3 \left(1 + \frac{3}{2n^3}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{2n^3}{n^2} \times 1 = \lim 2n = +\infty \\ \bullet \quad \lim \frac{n^2 + 1}{2n^3 + 3} &= \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{2n^3 \left(1 + \frac{3}{2n^3}\right)} = \lim \frac{n^2}{2n^3} \times 1 = \lim \frac{1}{2n} = 0 \end{aligned}$$



De um modo geral:

$$\begin{aligned} \lim \frac{P(n)}{Q(n)} &= \lim \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q} = \lim \frac{a_0 n^p \left(1 + \frac{a_1}{a_0 n} + \dots + \frac{a_p}{a_0 n^p}\right)}{b_0 n^q \left(1 + \frac{b_1}{b_0 n} + \dots + \frac{b_q}{b_0 n^q}\right)} \\ &= \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} \times 1 = \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} \end{aligned}$$

$$\text{Se } p = q, \text{ então } \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} = \frac{a_0}{b_0}.$$

$$\text{Se } p < q, \text{ então } \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} = 0.$$

$$\text{Se } p > q, \text{ então } \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q} = \pm \infty \text{ de acordo com as regras dos sinais.}$$

**11**

Calcule:

11.1 $\lim \frac{n^3 + 1}{3n^2 - 2};$

11.2 $\lim \frac{1 - n}{n^2 + 3};$

11.3 $\lim \frac{-n^2 + 3n}{n^2 + 1};$

11.4 $\lim \frac{n^3 + 3n^2 + 5n}{1 - n^3};$

11.5 $\lim \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+3}{2n} \right);$

11.6 $\lim \left(\frac{1}{n} + \frac{n^3 + 5}{n^2} \right).$

Exemplo 11 Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Calcule cada um dos seguintes limites:

11.1 $\lim \frac{3n^2 + 1}{3n};$

11.2 $\lim \frac{2n + 1}{1 - 5n};$

11.3 $\lim \frac{1 - 3n}{n^2}.$

Resolução

11.1 $\lim \frac{3n^2 + 1}{3n} = \lim \frac{3n^2}{3n} = \lim n = +\infty$

11.2 $\lim \frac{2n + 1}{1 - 5n} = \lim \frac{2n}{-5n} = -\frac{2}{5}$

11.3 $\lim \frac{1 - 3n}{n^2} = \lim \frac{-3n}{n^2} = \lim \frac{-3}{n} = 0$

O método seguido para levantar a indeterminação no caso do quociente de polinômios resulta ainda noutras situações:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim \frac{n + \sqrt{3n^2 + 1}}{2n} & \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim \frac{n + \sqrt{n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}}{2n} = \lim \frac{n + n\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}}}{2n} \\
 & = \lim \frac{n \left(1 + \sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} \right)}{2n} = \lim \frac{1 + \sqrt{3 + \frac{1}{n^2}}}{2} \\
 & = \frac{1 + \sqrt{3 + 0}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Exemplo 12

Calcule $\lim \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}.$

Resolução

Vamos aplicar a estratégia utilizada anteriormente para “levantar” a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim \sqrt{\frac{n+1}{n+3}} = \sqrt{\lim \frac{n+1}{n+3}} = \sqrt{\lim \frac{n}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$$

**12**

Calcule:

12.1 $\lim \sqrt{\frac{n^2 + 3}{4n^2 + 1}};$

12.2 $\lim \frac{\sqrt{3n+1} + n}{n}.$

Indeterminação $0 \times \infty$ e $\frac{0}{0}$

Estas indeterminações "levantam-se" simplificando as expressões que lhes dão origem, tal como se vê no exemplo seguinte.

Exemplo 13 Indeterminação $0 \times \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$

Considere as sucessões definidas por:

$$a_n = \frac{2}{3n-1} ; \quad b_n = \frac{3}{n+3} ; \quad c_n = 3n+2.$$

Determine:

13.1 $\lim (a_n \times c_n) ;$

13.2 $\lim \frac{a_n}{b_n}.$

Resolução

13.1 $a_n = \frac{2}{3n-1} \rightarrow 0 ; \quad c_n = 3n+2 \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim (a_n \times c_n) &= \lim \left(\frac{2}{3n-1} \times (3n+2) \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim \frac{2(3n+2)}{3n-1} \\ &= \lim \frac{6n+4}{3n-1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{6n}{3n} = 2 \end{aligned}$$

13.2 $a_n = \frac{2}{3n-1} \rightarrow 0 ; \quad b_n = \frac{3}{n+3} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \lim \frac{\frac{2}{3n-1}}{\frac{3}{n+3}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim \left(\frac{2}{3n-1} \times \frac{n+3}{3} \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \\ &= \lim \frac{2(n+3)}{3(3n-1)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{2n+6}{9n-3} = \lim \frac{2n}{9n} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Indeterminação $\infty - \infty$

Para "levantar" esta indeterminação, por vezes resulta o método anteriormente seguido.

$$\begin{aligned} \bullet \lim (-n^2 + n) &= \lim \left[-n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \lim (-n^2) \times \lim \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim (-n^2) \times 1 = -\infty \end{aligned}$$

De um modo geral:

$$\begin{aligned} \lim P(n) &= \lim (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p) \\ &= \lim \left[a_0 n^p \left(1 + \frac{a_1}{a_0 n} + \dots + \frac{a_p}{a_0 n^p} \right) \right] = \lim a_0 n^p \times \lim \left(1 + \frac{a_1}{a_0 n} + \dots + \frac{a_p}{a_0 n^p} \right) \\ &= \lim a_0 n^p \times 1 = \lim a_0 n^p \end{aligned}$$

$$\bullet \lim (1 + 2n^4 - 3n^5) = \lim (-3n^5) = -\infty$$

13

Sendo:

$$u_n = \sqrt{2n+3}, \quad v_n = \frac{1}{2n+1} \text{ e}$$

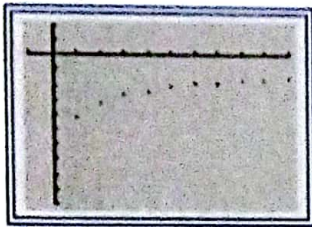
$$w_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+2+n}},$$

calcule:

13.1 $\lim (u_n \times v_n) ;$

13.2 $\lim \frac{v_n}{w_n}.$

Por exemplo, o conjugado de $a - b$ é $a + b$,
e o conjugado de $\sqrt{a} + \sqrt{a - b}$ é $\sqrt{a} - \sqrt{a - b}$.



Quando a indeterminação $\infty - \infty$ surge de expressões com radicais, normalmente levantam-se indeterminações multiplicando e dividindo pelo conjugado.

$$\begin{aligned} \bullet \lim (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) &\stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\ &= \lim \frac{(\sqrt{n})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 14 Indeterminação $\infty - \infty$

Calcule $\lim (\sqrt{n} - n)$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{n} - n) &= \lim \frac{(\sqrt{n} - n)(\sqrt{n} + n)}{(\sqrt{n} + n)} = \\ &= \lim \frac{n - n^2}{\sqrt{n} + n} = \lim \frac{\cancel{n}(1 - n)}{\cancel{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{n} + 1\right)} = \lim \frac{1 - n}{\sqrt{\frac{1}{n}} + 1} \\ &= \frac{1 - \infty}{0 + 1} = -\infty \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Calcule:

14.1 $\lim (-2n^3 + n^2 + 1)$;

14.2 $\lim (n^8 - n^5)$;

14.3 $\lim (\sqrt{n^2 + 2} - n)$;

14.4 $\lim (\sqrt{n^2 + n} - n)$;

14.5 $\lim (n - \sqrt{n^2 + 1})$;

14.6 $\lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$.

2.10 Sucessão $n \mapsto a^n$, $a \in \mathbb{R}$

Seja $u_n = a^n$, com $a \in \mathbb{R}$.

- Se $a < -1$, (u_n) é um infinitamente grande em módulo.
 (u_n) é divergente (oscilante) e não limitada.

Exemplo: $u_n = (-2)^n = \begin{cases} -2^n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2^n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

- Se $a = -1$, $u_n = (-1)^n$.
 (u_n) é divergente (oscilante) e limitada.

- Se $-1 < a < 1$, $u_n \rightarrow 0$.
 (u_n) é convergente, logo é limitada.

Exemplos: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$; $b_n = (-0,9)^n \rightarrow 0$

- Se $a = 1$, $u_n = 1^n = 1$.
 (u_n) é constante, logo (u_n) é limitada e convergente.

- Se $a > 1$, $u_n \rightarrow +\infty$.
 (u_n) é um infinitamente grande positivo, logo (u_n) é divergente e não limitada.



Observação

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ S_{13} &= u_1 + u_2 + \dots + u_{13} \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow +\infty$ obtemos a soma de todos os termos da sucessão.

2.11 Soma dos termos de uma progressão geométrica

Ao estudarmos progressões geométricas deduzimos a fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos.

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Se chamarmos S à soma de todos os termos, ou seja, ao limite de S_n quando $n \rightarrow +\infty$, vem:

$$S = \lim \left(u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

Se $-1 < r < 1$, ou seja, se $|r| < 1$, sabemos que $r^n \rightarrow 0$.

Logo, se $|r| < 1$, então:

$$S = \frac{u_1}{1 - r}$$

A soma de todos os termos de uma progressão geométrica só é convergente se $|r| < 1$ e, nesse caso, $S = \frac{u_1}{1 - r}$.

Suponhamos que tínhamos uma bola a um metro do solo, que a deixávamos cair e ela subia meio metro. Caía de novo e subia $\frac{1}{4}$ de metro, etc.

Se de cada vez que a bola batesse no solo subisse metade da distância percorrida na descida, teoricamente a bola nunca mais pararia e a distância percorrida nas descidas seria:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & & \dots \\ & & | & & | & & | & & | & & \\ \hline & & 1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & & \dots \end{array}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

A soma tem uma infinidade de parcelas.

As parcelas são termos de uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, sendo, portanto, o seu valor absoluto menor do que 1.

Logo, como $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, a soma de todas as parcelas é:

$$S = \lim S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2.12 O número de Neper

Observação

A história do número e pode ser encontrada em tempos longínquos, entre os criadores dos logaritmos, nomeadamente por John Napier (1550-1617).

O primeiro a relacioná-la com o cálculo de juros compostos foi Jacob Bernoulli (1654-1705).

Esta constante é hoje conhecida por número de Neper, mas foi Euler (1707-1783) que a baptizou com a segunda vogal e que estabeleceu as primeiras relações matemáticas, como provar que

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, e que este número notável pode ser obtido como soma de uma série:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots$$

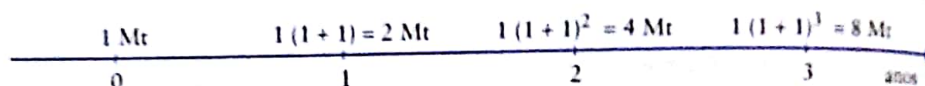


Leonhard Euler (1707-1783)

2.12.1 $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Se colocarmos num banco 1 metical à taxa anual de 100%, no final do ano o capital duplicará.

No final de dois anos teremos 4 meticais, no final de três 8 meticais, ...



Se o juro fosse calculado mensalmente teríamos no fim de um ano:

$$1 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2,61 \text{ meticais.}$$

Se o juro fosse calculado diariamente teríamos no fim de um ano:

$$1 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2,71 \text{ meticais.}$$

Se o juro fosse calculado minuto a minuto, segundo a segundo, o capital iria aumentado, mas teria um limite.

Se dividíssemos o ano em n partes iguais, fazendo tender n para infinito, ter-se-ia $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828$

Nunca 1 metical, no final do ano, poderia dar 3 meticais. O máximo rendimento não ultrapassaria $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718$.

A sucessão de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente e o seu limite designa-se por número de Neper e representa-se por e .

2.12.2 Cálculo de limite de sucessões envolvendo o número de Neper

Vimos que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Tendo por base esta igualdade, prova-se o seguinte:

Se $x \in \mathbb{R}$ e u_n é um infinitamente grande, então:

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$$

Exemplos:

$$\bullet \lim \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{n^2} = e^3; \quad \bullet \lim \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = \lim \left(1 + \frac{-2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Exemplo 15 Cálculo de limites

Calcule:

$$15.1 \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+3}; \quad 15.2 \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^n; \quad 15.3 \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n};$$

$$15.4 \lim \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n; \quad 15.5 \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}; \quad 15.6 \lim \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n.$$

Resolução

$$\begin{aligned} 15.1 \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+3} &= \lim \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 \right] \\ &= \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \times \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 \\ &= e^2 \times 1 = e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.2 \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^n &= \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{(n+3)-3} \\ &= \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{n+3} \times \lim \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{-3} \\ &= e^2 \times 1 = e^2 \end{aligned}$$

$$15.3 \lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right]^3 = \left[\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right]^3 = (e^2)^3 = e^6$$

ou

$$\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim \left(1 + \frac{3 \times 2}{3 \times n}\right)^{3n} = \lim \left(1 + \frac{6}{3n}\right)^{3n} = e^6$$

$$15.4 \lim \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n = \lim \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ e } \sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}}$$

$$\begin{aligned} 15.5 \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \right]^2 = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \right]^2 \\ &= \left(e^{\frac{1}{3}}\right)^2 = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15.6 \lim \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n &= \lim \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+3}{n}}\right)^n = \lim \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n+3}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^3} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

Calcule:

$$15.1 \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1};$$

$$15.2 \lim \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^n;$$

$$15.3 \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}};$$

$$15.4 \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3n};$$

$$15.5 \lim \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n;$$

$$15.6 \lim \left(1 + \frac{4}{3n}\right)^n;$$

$$15.7 \lim \left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2};$$

$$15.8 \lim \left(\frac{5n-2}{5n+3}\right)^{3n}.$$

1 Qual das seguintes sucessões **não** é convergente?

- (A) $\frac{500 + (-1)^n}{n}$; (B) $500 + \frac{(-1)^n}{n}$;
 (C) $500 + (-1)^n \times n$; (D) $\frac{500 + (-1)^n \times n}{n^2}$.

5 pontos

2 Considere a sucessão de termo geral:

$$a_n = \frac{1 + n^2}{1 - 3n^2}$$

O limite da sucessão é:

- (A) $-\frac{1}{3}$; (B) -3 ;
 (C) 0 ; (D) 1 .

5 pontos

3 Considere a sucessão de termo geral:

$$b_n = \frac{(-1)^n \times 3}{n + 2} - 7$$

O limite da sucessão é:

- (A) 3 ; (B) 0 ;
 (C) -3 ; (D) -7 .

5 pontos

4 Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

- (A) Uma sucessão que tende para $+\infty$ é crescente.
 (B) Uma sucessão que tenda para $-\infty$ é não limitada.
 (C) Uma sucessão que tende para $-\infty$ pode não ser decrescente.
 (D) Um infinitésimo é uma sucessão limitada.

5 pontos

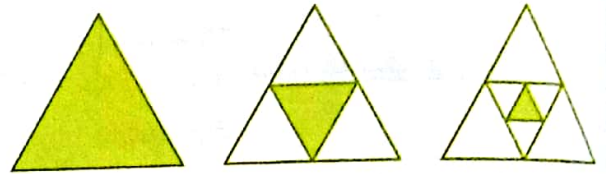
5 Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

- (A) Um infinitésimo ou é uma sucessão crescente ou uma sucessão decrescente.
 (B) Uma sucessão convergente é uma sucessão limitada.
 (C) Uma sucessão limitada é convergente.
 (D) Uma sucessão não convergente não é uma sucessão limitada.

5 pontos

6 As áreas dos triângulos

Considere a sucessão (u_n) , cujos termos são as medidas das áreas dos triângulos coloridos a cor verde.



Admita que os termos seguintes se obtenham seguindo o processo sugerido e considerando o triângulo inicial de área 1.

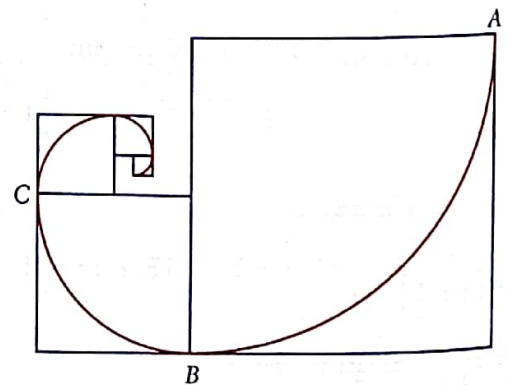
A expressão geral da área dos triângulos é:

- (A) 2^{n-1} ; (B) 3^{1-n} ;
 (C) 2^{1-n} ; (D) 4^{1-n} .

5 pontos

7 A espiral

Observe a figura e o processo de construção da espiral com quartos de arcos de circunferência, cujos centros são os vértices dos quadrados.



Considere que a medida do lado do quadrado maior é $\frac{1}{\pi}$ e que o lado de cada quadrado é metade do lado do quadrado precedente.

A soma dos comprimentos dos 10 primeiros arcos da espiral é igual a:

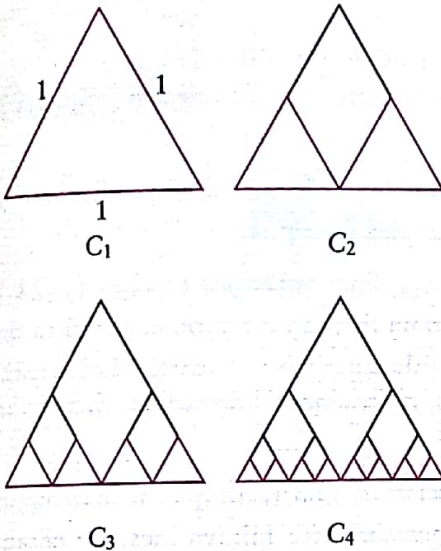
- (A) $\frac{1}{32}$; (B) $\frac{1005}{1004}$;
 (C) $\frac{1023}{1024}$; (D) $\frac{2023}{2024}$.

5 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1 Comprimento da linha

Considere a sucessão (c_n) , cujos termos são os comprimentos das linhas representadas a cor-de-rosa. Os lados são sempre divididos ao meio.



1.1 Determine o limite de (c_n) .

1.2 Mostre que o limite de uma sucessão constante é a própria constante.

35 pontos

2 Calcular limites

Calcule cada um dos seguintes limites:

2.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n-3n^2}{8-n^2};$

2.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n^4}{\sqrt{n^8+1}} + 3 \right);$

2.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{n^2+1};$

2.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n);$

2.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^2+2});$

2.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+3}}{n+1};$

2.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n};$

2.8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}+3^{n+1}}{4^n+3^n}.$

40 pontos

3 Sucessão não limitada superiormente

Considere a sucessão (t_n) definida por:

$$t_n = n + (-1)^{n+1}(n+3)$$

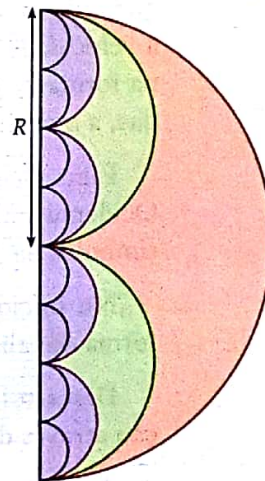
3.1 Mostre que a sucessão não é limitada superiormente mas que não é um infinitamente grande.

3.2 Indique o termo geral de uma sucessão (s_n) de modo que $(s_n \times t_n)$ seja um infinitésimo.

35 pontos

4 Os semicírculos

Observe a seguinte figura.



O raio do semicírculo exterior é R .

O raio de cada semicírculo é metade do anterior.

Os termos da sucessão dos raios dos semicírculos são:

$$R; \quad \frac{R}{2}; \quad \frac{R}{4}; \quad \frac{R}{8}; \quad \dots$$

4.1 Seja (p_n) a sucessão cujos termos são as medidas dos perímetros dos semicírculos.

a) Calcule p_1 , p_2 e p_3 .

b) Escreva p_n em função de n .

c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

4.2 Seja (a_n) a sucessão cujos termos são as medidas das áreas dos semicírculos.

a) Calcule a_1 , a_2 e a_3 .

b) Escreva a_n em função de n .

c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e descreva o que acontece à área definida quando a construção continua indefinidamente.

55 pontos

Um olhar sobre a História

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes em Matemática.

Desde o tempo dos Babilônios (2000 a. C.) que se usam tabelas para representar a dependência entre duas variáveis.

Com efeito, estas tabelas facilitavam o cálculo das divisões, já que o algoritmo da multiplicação é mais simples e dividir dois números equivale a multiplicar o dividendo pelo recíproco do divisor.

Na trigonometria usada na época alexandrina (356-323 a. C.) utilizavam-se, por exemplo, tabelas equivalentes às recentes tabelas de senos.

Outras formas de usar funções foram experimentadas por Oresme (1323-1382), que utilizou um gráfico para representar numa direção o tempo e, na outra direção, a velocidade de um móvel. Para Oresme, tudo que fosse mensurável era imaginável na forma de grandeza contínua e, portanto, representável através de duas coordenadas, a que chamava latitude e longitude.

Estas ideias, que remontam ao século XIV, demonstram que os matemáticos do Ocidente tinham imaginação e rigor de pensamento; faltava-lhes, no entanto, os símbolos da álgebra, que surgiram com Viète, no final do século XVI.

No início do século XVII, as funções eram ainda usadas essencialmente em forma de tabelas.

Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) fizeram evoluir o conceito de função através da geometria analítica.

A utilização da simbologia algébrica veio revolucionar a matemática da época e contribuir de uma forma decisiva para a criação do conceito de função.

Em meados do século XVII, Mengoli, Mercador, Gregory e Newton usaram, cada um à sua maneira, relações funcionais. Newton e Leibniz estabeleceram o desenvolvimento de funções por séries de potências, o que foi uma considerável proeza para a época.

Leibniz (1646-1716) terá em 1673 introduzido pela primeira vez o termo “função” e Euler (1707-1783) terá utilizado pela primeira vez a expressão “ $f(x)$ ”.

O simbolismo algébrico foi aperfeiçoado por matemáticos dos séculos XVII e XVIII, entre os quais Descartes, Newton, Leibniz e Euler.

Com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal resolveram-se muitos problemas antigos, utilizando a nova linguagem das funções e as respetivas técnicas.



Gottfried von Leibniz

5

Limites e continuidade de funções

1 Limites

2 Continuidade

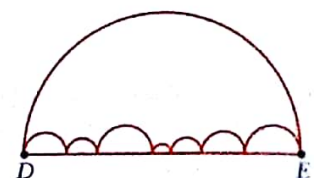
Material:
Lápis e papel

Actividades de investigação

Na figura ao lado, a medida do comprimento do diâmetro DE é de duas unidades. A semicircunferência maior mede π .

Quanto mede a totalidade das semicircunferências menores?

E se aumentarmos o seu número?



Objectivos

1. Explicar a noção de limite de uma função.
2. Aplicar as propriedades dos limites de funções para o cálculo de limites.
3. Identificar as formas indeterminadas de limites de funções.
4. Levantar as indeterminações de funções.
5. Calcular limites laterais.
6. Calcular limites notáveis.
7. Definir uma função contínua num ponto e num intervalo.
8. Identificar uma função contínua dado o seu gráfico.
9. Determinar se uma função é contínua dada a sua expressão analítica.

1. Limites



1.1 Noção intuitiva de limite

Nas funções que até agora estudámos há duas variáveis: a variável independente, normalmente representada por x , e a variável dependente, normalmente representada por y .

$$f: x \mapsto y = f(x)$$

O que agora está em estudo é saber se “controlando” a variável independente se pode prever o que acontece à variável dependente.

Assim, se a variável independente se aproxima cada vez mais de um valor c , será possível descobrir se existe e, se assim for, qual será o valor do qual se aproxima a variável dependente?

Vejamos um exemplo.

$$\text{Seja } f: x \mapsto y = 2x - 1$$

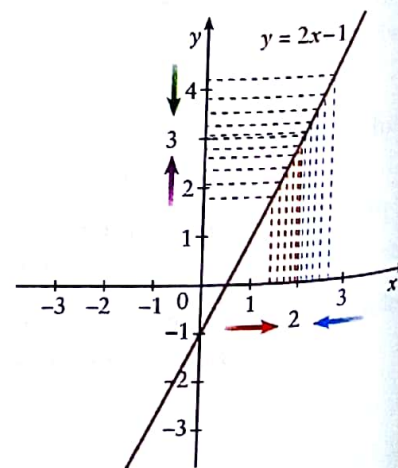
O que acontece a y quando x se aproxima de 2?

O gráfico sugere que à medida que x se aproxima de 2, y aproxima-se de 3.

Diz-se que:

O limite de $f(x)$, quando x tende para 2, é 3 e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$



Para obter o valor do limite de $f(x)$, quando x tende para 2, é suficiente, como se observou, substituir x por 2 em $f(x)$.

$$f(x) = 2x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

Este procedimento aplica-se a outras funções, nomeadamente as polinomiais.

Exemplo 1 Cálculo de limites por concretização da variável independente

Calcule:

1.1 $\lim_{x \rightarrow 2} (-3x^2)$;

1.2 $\lim_{x \rightarrow 0} (-3)$;

1.3 $\lim_{x \rightarrow -5} (-1 - x^2)$;

1.4 $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x + 3x^2)$;

1.5 $\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^2 + x - 2)$.

1.1 $\lim_{x \rightarrow 5} (-2)$;

1.2 $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 1)$.

Resolução

1.1 $\lim_{x \rightarrow 5} (-2) = -2$

A função é constante.

1.2 $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 1) = 5^2 - 1 = 24$

Substitui-se x por 5.

1.2 Limites laterais

Será que para calcular o limite de uma função, quando $x \rightarrow a$, basta substituir x por a na expressão analítica da função?

Considere-se a função real de variável real:

$$f: x \mapsto y = \frac{x^2 + 2x}{x}$$

Qual será o $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

A representação gráfica da função encontra-se ao lado.

Observando o gráfico conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

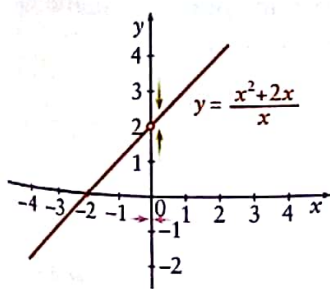
Este limite não poderia ser calculado efectuando a substituição de x por 0 (zero) na expressão analítica que define a função, uma vez que 0 (zero) não pertence ao domínio da função ($\frac{0}{0}$ não é um número real).

Este exemplo sugere uma nota importante:

O limite de $f(x)$, quando x se aproxima de c , não depende do valor de $f(c)$. O limite, se existir, é apenas dependente dos valores de f quando $x \neq c$ e x se aproxima de c .

Apercebemo-nos também de que:

Para calcular o limite de uma função num ponto é importante aprender mais sobre limites, pois nem sempre a simples concretização da variável independente resolve o problema.

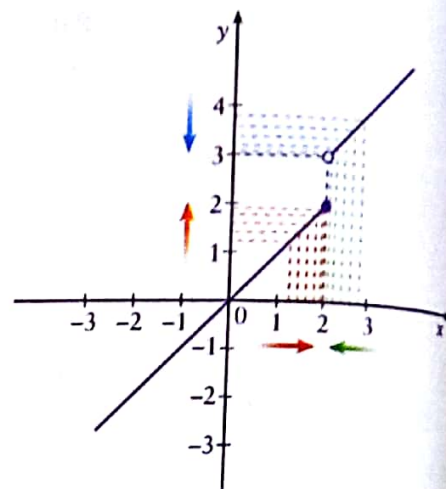


Consideremos agora a função:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

O que acontece a y quando x se aproxima de 2?

Observando o gráfico concluímos que à medida que x se aproxima de 2 a função $f(x) = y$ não se aproxima de uma constante única.



Quando x se aproxima de 2 pela direita, $f(x)$ aproxima-se de 3.

Escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \quad (\text{ler: "o limite lateral de } f(x) \text{ à direita de 2 é 3"}).$$

Quando x se aproxima de 2 pela esquerda, $f(x)$ aproxima-se de 2.

Escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad (\text{ler: "o limite lateral de } f(x) \text{ à esquerda de 2 é 2"}).$$

Aos limites referidos chamamos limites laterais.

Como os limites laterais são diferentes, diz-se que não existe limite de $f(x)$, quando x tende para 2, e escreve-se:

$$\text{não existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{ou} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Se existirem os limites laterais de uma função num ponto, o limite da função nesse ponto existe se e só se os limites laterais são iguais.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$



Considere a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Calcule, se existir:

2.1 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$;

2.2 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

2.3 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

Exemplo 2 Limites laterais

Considere a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x > 2 \\ 1 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Estude a existência de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

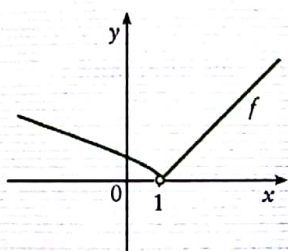
Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

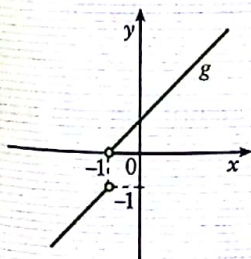
Exemplo 3 Dar exemplos

O limite de uma função, quando a variável independente se aproxima de um ponto, não depende do valor da função nesse ponto. Dê exemplos que confirmem esta observação.

Resolução3.1 Observe o gráfico de f .

Complete.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots$

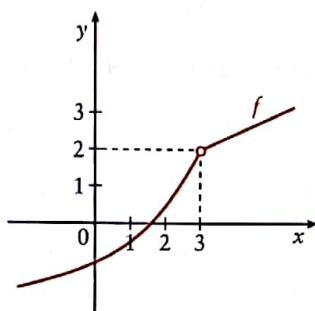
3.2 Observe o gráfico de g .

Complete.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \dots$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \dots$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \dots$

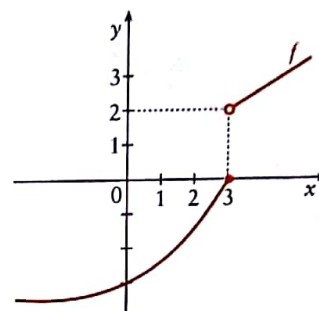
3.3 Represente graficamente uma função f , sabendo que:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$;
- $f(0) = 2$.



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \end{aligned}$$

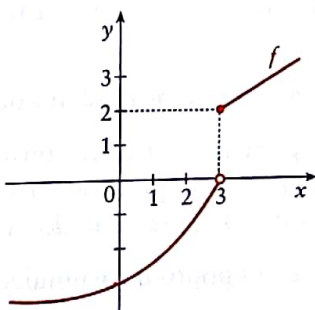
A função não está definida no ponto $x = 3$.



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

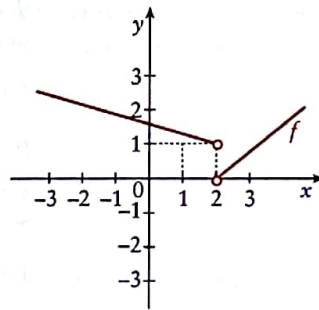
$$f(3) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

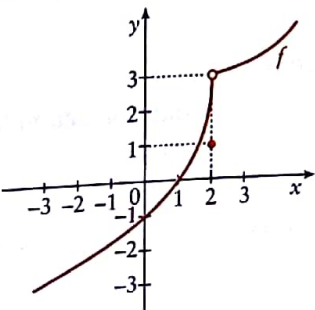
$$f(3) = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

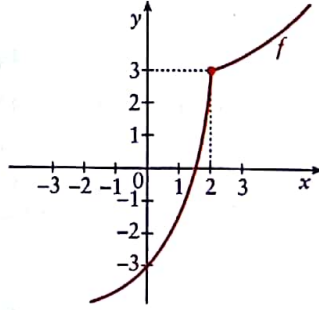
Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

A função não está definida no ponto $x = 2$.



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \end{aligned}$$

$$f(2) = 1$$

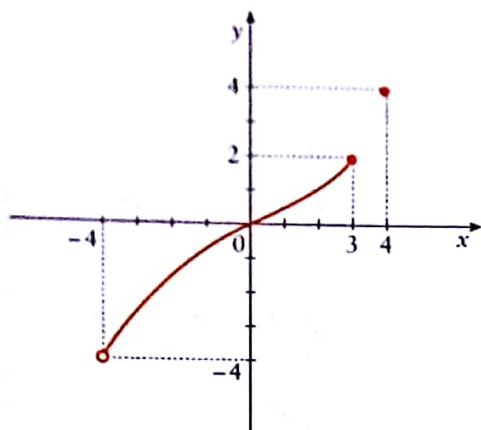


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \end{aligned}$$

$$f(2) = 3$$

1.3 Definição de limite segundo Heine

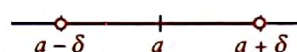
A noção intuitiva de limite pode ser aprofundada com uma definição formal. Considere-se a função f , representada graficamente.



- $D_f =]-4, 3] \cup \{4\}$;
- 4 é ponto isolado de D_f ;
- 3 é ponto de acumulação de D_f ;
- 1,99 é ponto de acumulação de D_f ;
- -4 é ponto de acumulação de D_f ;
- $[-4, 3]$ é o conjunto dos pontos de acumulação de D_f .

Chama-se vizinhança de centro a e raio δ ($V_\delta(a)$) ao intervalo:

$$]a - \delta, a + \delta[\quad (\delta > 0)$$



Se considerássemos uma vizinhança de centro em 4 e raio, por exemplo, 0,1, nenhum valor do domínio da função, além do 4, pertencia a essa vizinhança.

Dizemos que 4 é um ponto isolado do domínio da função.

Imaginemos agora que iríamos considerar uma vizinhança centrada no ponto 3. Por menor que fosse o raio dessa vizinhança ela iria conter sempre pontos de D_f para além do 3.

Diz-se que 3 é um ponto de acumulação do domínio da função.

E relativamente ao ponto -4?

Se centrarmos uma vizinhança neste ponto, por menor que seja o raio, ela contém sempre pontos de D_f , por isso -4 é um ponto de acumulação de D_f .

Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a um número real.

Ponto de acumulação

O número a diz-se ponto de acumulação de um conjunto C se e só se em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um elemento de C diferente de a .

Note-se que a pode ou não pertencer a C .

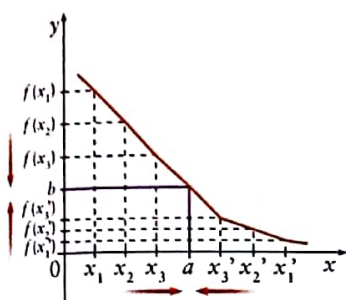
Ponto isolado

O número a diz-se ponto isolado de um conjunto C se pertence a C e se existe pelo menos uma vizinhança de a que não contenha nenhum elemento de C para além do próprio a .

As funções que vamos estudar têm por domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ sem pontos isolados.

Assim, o conceito de limite e de continuidade de uma função num ponto diz apenas respeito a pontos de acumulação do domínio.

Em estudos mais avançados estudará os conceitos de limite e continuidade de funções que têm no seu domínio pontos isolados.



Definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine)

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio de f . Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

se e só se a toda a sucessão de valores de x do domínio de f convergente para a , sendo os termos da sucessão todos diferentes de a , corresponde uma sucessão de imagens por f convergente para b .

Exemplo 4 Aplicar a definição de limite

Consideremos a função representada graficamente que se refere ao preço do transporte de uma mercadoria de acordo com o respectivo *peso*.

Prove, usando a definição, que não existe $\lim_{x \rightarrow 20} f(x)$.

Resolução

Fixemo-nos no ponto $x = 20$.

Ao observarmos o gráfico vemos que não existe $\lim_{x \rightarrow 20} f(x)$. Para provarmos isso, usando a definição, vamos começar por escrever sucessões convergentes para 20.

Temos um número infinito de sucessões que convergem para 20:

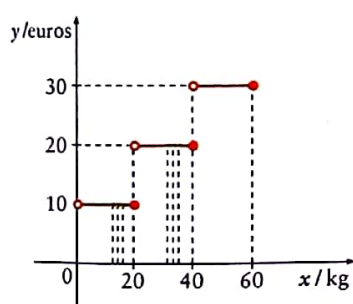
$$\begin{aligned} a_n &= 20 + \frac{1}{n}; & b_n &= 20 + \frac{1}{2n}; \\ c_n &= 20 - \frac{1}{n}; & d_n &= 20 - \frac{1}{2n}; \dots \end{aligned}$$

Se considerássemos a sucessão $a_n = 20 + \frac{1}{n}$, a sucessão das imagens tendia para 30, dado que $a_n > 20$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se considerássemos a sucessão $c_n = 20 - \frac{1}{n}$, a sucessão das imagens convergia para 10, dado que $c_n < 20$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Encontrámos duas sucessões nas condições da definição, ambas convergentes para 20, todos os termos das sucessões eram do domínio e as respectivas sucessões das imagens convergiam para valores diferentes.

Logo, a função não tem limite quando $x \rightarrow 20$.



Mostre, usando a definição de limite segundo Heine, que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$.

1.4 Regras operatórias com limites

Para determinar os limites de algumas funções pode recorrer-se a regras operatórias com limites. Demonstram-se os seguintes teoremas onde se supõe que c é um ponto de acumulação do domínio das funções envolvidas.

Limite da função constante

Se f é a função constante, $f(x) = k$, então, para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k$$

Limite da função identidade

Se f é a função identidade, $f(x) = x$, então, para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

Limites de operações com funções

Se L_1 e L_2 são dois números reais e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$, então:

- Limite da soma

$$\lim_{x \rightarrow c} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_1 + L_2$$

- Limite do produto

$$\lim_{x \rightarrow c} [(f \times g)(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \times \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_1 \times L_2$$

- Limite do quociente

$$\lim_{x \rightarrow c} \left[\left(\frac{f}{g} \right)(x) \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

- Limite da potência

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n = L_1^n$$

- Limite da raiz

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}, \quad \text{com } L_1 \geq 0$$

Exemplo 5 Aplicação das regras operatórias dos limites

Calcule:

5.1 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-2}$;

5.2 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{x^2-3}{x+1} \right)^3$.

Resolução

5.1 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} (x-2)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

5.2 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{x^2-3}{x+1} \right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow 1} 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3}{x+1} \right)^3 = \left(1 - \frac{-2}{2} \right)^3 = (1 - (-1))^3 = 8$



Calcule cada um dos seguintes limites:

5.1 $\lim_{x \rightarrow 7} (9)$;

5.2 $\lim_{x \rightarrow 2} (-3)$;

5.3 $\lim_{x \rightarrow 0} (-\pi)$;

5.4 $\lim_{h \rightarrow 0} (-2h)$;

5.5 $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 2x)$;

5.6 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 4)^2$;

5.7 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^2 - 2x)^5$;

5.8 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)(x+9)}{2x}$;

5.9 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x+3}{x}}$.

1.5 Limites e infinitos. Cálculo de limites

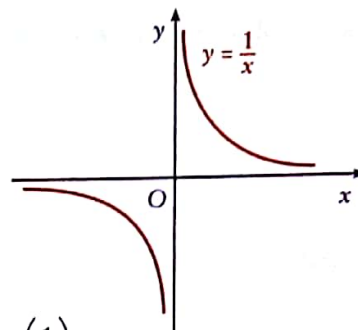
Considere a função:

$$f: x \mapsto \frac{1}{x}$$

Sabe-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$$



Quando o limite de uma função num ponto $c \in \mathbb{R}$ não é um número real o limite não existe.

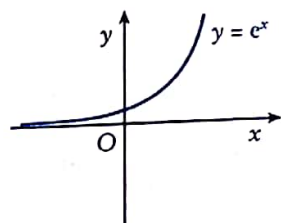
Não existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ nem $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ porque $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais.

No entanto, utiliza-se a mesma escrita para limites infinitos e para limites finitos.

De modo idêntico se interpretam os limites:

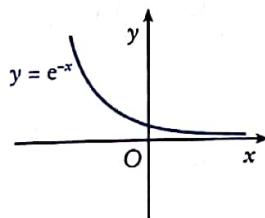
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, a função f pode tender para $+\infty$, $-\infty$, para $a \in \mathbb{R}$ ou não existir limite finito nem infinito.



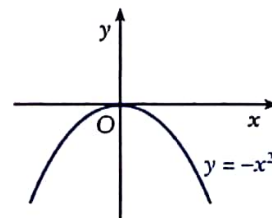
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$$

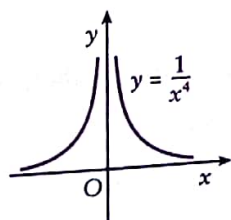
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty$$



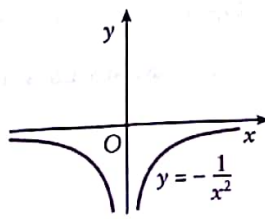
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

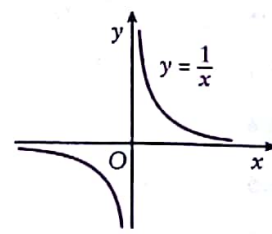
Quando $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$, a função pode tender para $+\infty$, $-\infty$, para $b \in \mathbb{R}$ ou não existir.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) \text{ não existe.}$$

Com as convenções e exceções que se indicam para cada caso, os teoremas relativos aos limites da soma, do produto e do quociente podem ser generalizados aos limites infinitos.

Limite da soma

Suponham que pretendemos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + x)$$

Aplicando o teorema do limite da soma, vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (3) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \\ &= 3 + (+\infty) = \infty \end{aligned}$$

$+\infty$ não é um número real, mas nos cálculos aplicam-se as mesmas regras operatórias.

Intuitivamente, aceita-se que a função $x \rightarrow x + 3$ tende para $+\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$, pois trata-se da soma de uma função constante com uma função que, quando $x \rightarrow +\infty$, toma valores tão grandes quanto se queira.

Também:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3000 + x) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-10\,100 + x) = +\infty.$$

Exemplo 6 Cálculo de limites

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (20 - x).$$

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (20 - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (20) - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) \\ &= 20 - (-\infty) \\ &= 20 + \infty \\ &= +\infty \end{aligned}$$



Calcule:

6.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-50 + x);$

6.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-50 + x);$

6.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x);$

6.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2000 + x);$

6.5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2);$

6.6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + x^2);$

6.7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 - x^3).$

A escrita aplicada é uma forma simbólica de expressar que a soma de um infinitamente grande com uma função constante é ainda um infinitamente grande.

De um modo geral:

As notações usadas nas sucessões também se usam nas funções:

$$+\infty + \infty = +\infty;$$

$$-\infty - \infty = -\infty;$$

$$+\infty \pm a = +\infty;$$

$$-\infty \pm a = -\infty; \quad a = \text{constante}.$$

Nos quadros seguintes sintetizaram-se as situações possíveis.

Quando se trabalha com limites infinitos são mantidas as regras dos sinais do cálculo de limites finitos.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação

Não deve memorizar os quadros apresentados. Em cada caso recorra à intuição e se tiver dúvidas atribua a x valores muito grandes ou muito pequenos, conforme:

$x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

		Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)		
Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)	$g(x) \backslash f(x)$	a	$+\infty$	$-\infty$
	b	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
	$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

		Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)		
Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)	$g(x) \backslash f(x)$	a	$+\infty$	$-\infty$
	b	$a - b$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

O ponto ? indica que não se pode tirar uma conclusão geral pois podem acontecer várias situações.

Por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x^2) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x^2) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x^2) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

Se ao efectuarmos os cálculos chegarmos à situação de $\infty - \infty$, diz-se que obtivemos uma indeterminação.

$\infty - \infty$
Indeterminação

Limite do produto de funções

Suponhamos que pretendemos determinar:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \times (x + 3)]$$

Intuitivamente, aceita-se que, quando $x \rightarrow +\infty$, as duas funções tomam valores positivos infinitamente grandes, logo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \times (x + 3)] = +\infty$$

Aplicando o teorema do limite do produto, vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

Exemplo 7 Cálculo de limites

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [-3(x + 5)]$$

Resolução

Intuitivamente, aceita-se que, quando $x \rightarrow -\infty$, se uma das funções é constante e igual a -3 e a outra toma valores negativos arbitrariamente pequenos, então o produto irá tomar valores positivos infinitamente grandes. Aplicando o teorema do limite do produto, vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [-3(x + 5)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5) \\ &= -3 \times (-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

As situações possíveis são muitas, mas a sua resolução é sempre simples. No quadro seguinte faz-se uma síntese de todos os casos possíveis.

$0 \times \infty$
Indeterminação

		Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)			
Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)	$g(x) \backslash f(x)$	$a \neq 0$	0 (por valores $\neq 0$)	$+\infty$	$-\infty$
	$b \neq 0$	$a \times b$	0	$+\infty$ se $b > 0$ $-\infty$ se $b < 0$	$-\infty$ se $b > 0$ $+\infty$ se $b < 0$
	0 (por valores $\neq 0$)	0	0	?	?
	$+\infty$	$+\infty$ se $a > 0$ $-\infty$ se $a < 0$	?	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$ se $a > 0$ $+\infty$ se $a < 0$	?	$-\infty$	$+\infty$

No cálculo do limite do produto de funções pode surgir a indeterminação:
 $0 \times \infty$



Determine:

7.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2)$;

7.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2)$;

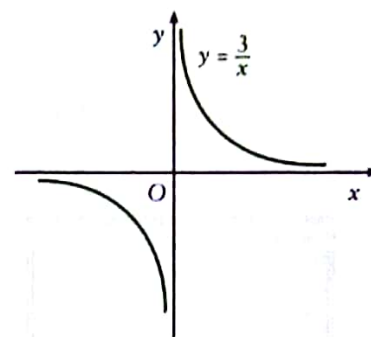
7.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(3 - x)]$;

7.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [x(3 + x)]$.

Limite do quociente

Suponhamos que pretendemos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right)$$



Observação

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, então

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ pode ser $+\infty$, $-\infty$
ou não existir.

Aplicando os teoremas sobre limites, vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Pode-se ainda escrever:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0^+$$

porque sabemos que a função tende para zero por valores positivos.

Do mesmo modo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0^-.$$

Exemplo 8 Cálculo de um limite

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x - 4}$.

Resolução

Dado que $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) = 0$ quando $x \rightarrow 2$, o quociente, em valor absoluto, irá tomar valores infinitamente grandes.

Para saber se existe o limite teremos de calcular os limites laterais.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{2x - 4} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

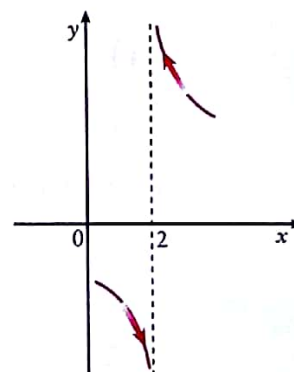
(pois $2x - 4 > 0$ quando $x > 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2x - 4} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

(pois $2x - 4 < 0$ quando $x < 2$)

Logo, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2x - 4} \right)$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{2x - 4} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2x - 4} \right)$$



Determine:

8.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x + 3}$;

8.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x + 3}$;

8.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^2 + 1}$;

8.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x + 3}$.

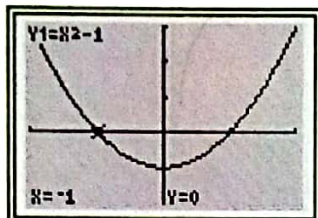
Exemplo 9 Cálculo de limites

Calcule:

9.1 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - 1}$;

9.2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2}$.

Resolução



9.1 Como $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$, vamos calcular os limites laterais, estudando o sinal do denominador.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right)$.

9.2 Como $(x - 2)^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty$



9

Calcular:

9.1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x - 1}$;

9.2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$;

9.3 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^2}$.

O quadro seguinte sintetiza os casos possíveis do cálculo do limite do quociente de funções.

		Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)			
		$a \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
Limite quando $x \rightarrow c$ (finito ou infinito)	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$	0	$+\infty$ se $b > 0$ $-\infty$ se $b < 0$	$-\infty$ se $b > 0$ $+\infty$ se $b < 0$
	0	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$	?	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$	Limites laterais $+\infty$ ou $-\infty$
	$+\infty$	0	0	?	?
	$-\infty$	0	0	?	?

No cálculo do limite do quociente de funções podem surgir as indeterminações:

$$\frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty} .$$

$$\frac{0}{0}$$

Indeterminação

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Indeterminação

1.6 Indeterminações

Indeterminação $\infty - \infty$

A estratégia para levantar a indeterminação depende do caso em estudo.

Exemplo 10 A expressão algébrica da função é uma função polinomial

Seja a função:

$$f: x \mapsto x^2 - 3x + 1$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Resolução

Aplicando os teoremas estudados somos conduzidos à indeterminação $\infty - \infty$.

Pondo em evidência a mais alta potência de x , vem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ &= (+\infty)^2 \times (1 - 0 + 0) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Calcule cada um dos seguintes limites:

10.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 + 2)$;

10.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$;

10.3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x^3 - x + \frac{1}{2} \right)$;

10.4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5 + x^4 + 2)$.

De um modo geral, temos:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 x^n) \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} \right)}_{=1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_0 x^n)$$

Se $x \rightarrow -\infty$ vem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_0 x^n)$$

Pode, então, afirmar-se que:

Uma função polinomial admite, quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$, o mesmo limite que o seu monómio de mais elevado grau.

Exemplo 11 A expressão algébrica da função é uma função irracional

Calcule:

$$11.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1});$$

$$11.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x).$$

Resolução

11.1 Aplicando os teoremas sobre limites somos conduzidos à indeterminação $\infty - \infty$.

Para levantar esta indeterminação usa-se a estratégia de multiplicar e dividir a expressão pelo «binómio conjugado».

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) & \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \times (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x-1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} & (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$11.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) \stackrel{(\infty - \infty)}{=}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \\ &= \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$



11

Calcule:

$$11.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{2};$$

$$11.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$11.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 2} - 3x);$$

$$11.4 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x} - \sqrt{2x+3}).$$

Limites de funções racionais

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

se
grau (f) < grau (g)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é finito e diferente de zero se
grau (f) = grau (g)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é infinito se
grau (f) > grau (g)

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

Começemos por estudar o limite, quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, de uma função racional.

Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n}\right)}{b_0 x^m \left(1 + \frac{b_1}{b_0 x} + \dots + \frac{b_m}{b_0 x^m}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0 x} + \dots + \frac{b_m}{b_0 x^m}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} \times 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} \end{aligned}$$

Do mesmo modo se demonstra que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$$

O valor do limite vai depender de o grau do polinômio do numerador ser igual, superior ou inferior ao grau do polinômio do denominador.

Se o grau do polinômio do numerador é igual ao grau do polinômio do denominador, o limite da função racional, quando $x \rightarrow \pm\infty$, é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

Exemplo 12

O grau do polinômio do numerador é igual ao grau do polinômio do denominador

Calcule:

$$12.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 - 3x}{5x^2 + x + 1};$$

$$12.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 - x^2}{3x^3 + 2x^2 + 1}.$$

Resolução

$$12.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 - 3x}{5x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2}{5x^2} = 2$$

$$12.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 - x^2}{3x^3 + 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3}{3x^3} = \frac{8}{3}$$



Calcule:

$$12.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{x-3};$$

$$12.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{1-3x^2};$$

$$12.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x-1} + \frac{x^2}{1-x^2} \right).$$

Se o grau do polinômio do denominador é maior do que o grau do polinômio do numerador, o limite da função racional quando $x \rightarrow \pm \infty$ é zero.

Exemplo 13 O grau do polinômio do denominador é maior do que o grau do polinômio do numerador

Calcule:

$$13.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x + 1};$$

$$13.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 3x}{x^3 + 2x + 1}.$$

Resolução

$$13.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$13.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 3x}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x} = 0$$



Calcule:

$$13.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x};$$

$$13.2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3 - x};$$

$$13.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - 3} + \frac{x}{x^2 - 1} \right).$$

Se o grau do polinômio do numerador é maior do que o grau do polinômio do denominador, o limite da função racional quando $x \rightarrow \pm \infty$ é infinito.

Exemplo 14 O grau do polinômio do numerador é maior do que o grau do polinômio do denominador

Calcule:

$$14.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 3};$$

$$14.2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 3}.$$

Resolução

$$14.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty$$

$$14.2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = -\infty$$



Calcule:

$$14.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2};$$

$$14.2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^2}{x};$$

$$14.3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - 3x^2 + x^3}{1 - x^2} \right).$$

De um modo geral, temos:

Uma função racional admite, quando $x \rightarrow \pm \infty$, o mesmo limite que o quociente dos monómios de mais alto grau.

Indeterminação $0 \times \infty$

Se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Passamos a ter uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, já estudada.

Exemplo 15 Calcular limites ($0 \times \infty$)

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times x^2 \right)$$

Resolução

Temos uma indeterminação do tipo $(0 \times \infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times x^2 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Calcule:

15.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \frac{1}{x^2} \right);$

15.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} (x^3 + 1) \right];$

15.3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^5 \times \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} \right).$

Indeterminação $\frac{0}{0}$

No caso de funções racionais, se depois de efectuarmos os cálculos possíveis obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ é porque a fracção não é irreduzível.

O valor para o qual x está a tender é raiz do numerador e do denominador.

Normalmente, consegue-se “levantar” a indeterminação simplificando a fracção.

Exemplo 16 Calcular limites $\left(\frac{0}{0}\right)$

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

Resolução

Aplicando os teoremas somos conduzidos à indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Se isto acontece é porque os polinômios do numerador e do denominador são divisíveis por $x - 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - x + 2)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2}{x - 3} = \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

	1	-2	3	-2
1		1	-1	2
	1	-1	2	0
	1	-4	3	
1		1	-3	
	1	-3	0	

**16**

Calcule:

$$16.1 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4};$$

$$16.2 \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3};$$

$$16.3 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2};$$

$$16.4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{2x^2-8x+6}.$$

Exemplo 17 Calcular limites $\left(\frac{0}{0}\right)$

Calcule:

$$17.1 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4};$$

$$17.2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x^2-x}.$$

Resolução

17.1 Aplicando os teoremas sobre limites temos a indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

17.2 Aplicando os teoremas sobre limites temos a indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x^2-x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}{(x^2-x)(\sqrt{x}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-x^2}{(x^2-x)(\sqrt{x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}+x} = -\infty \end{aligned}$$

**17**

Calcule:

$$17.1 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^2};$$

$$17.2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-\sqrt{x}};$$

$$17.3 \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+5}-1}{x+4}.$$

1.7 Limites de funções envolvendo exponenciais e logaritmos

Limites com exponenciais

Considere-se a função exponencial de base a .

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a^x, \quad a > 1$$

Como sabemos, o crescimento da função é muito rápido e tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$p \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty, \quad a > 1, \quad p \in \mathbb{R}$$

Em particular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \quad p \in \mathbb{R}$$

18

Calcule:

$$18.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 1}{x^6};$$

$$18.2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{x^3};$$

$$18.3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3^{x+1}}{x^2};$$

$$18.4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x + \frac{\pi^x}{3^{x+1}} \right];$$

$$18.5 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{5x}}{x^8} \right).$$

Exemplo 18 Cálculo de limites

Calcule:

$$18.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + x}{x^5};$$

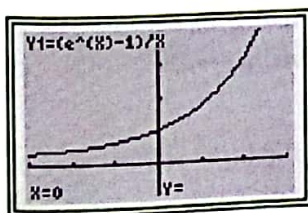
$$18.2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^x}{3^{x+2}}.$$

Resolução

$$18.1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^5} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^5} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$18.2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^x}{3^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^x}{3^x \times 3^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{3} \right)^x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{9} \right)$$

$$= +\infty \times \frac{1}{9} = +\infty \quad \frac{\pi}{3} > 1$$



Considere-se a função:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{e^x - 1}{x}$$

Aplicando os teoremas sobre limites, o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ conduz-nos à indeterminação $\frac{0}{0}$. O gráfico de f , obtido com a calculadora, sugere que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

De facto, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

O conhecimento deste limite permite calcular o limite de outras funções envolvendo exponenciais.

Exemplo 19 Calcular limites

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, sendo:

$$19.1 \quad f(x) = \frac{e^x - e^{5x}}{2x};$$

$$19.2 \quad f(x) = \frac{e^{x+1} - e}{x^3}.$$

Resolução

$$\begin{aligned} 19.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{5x}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (1 - e^{4x})}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^x (e^{4x} - 1)}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-2e^x) \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \\ &= (-2) \times 1 \times 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^x - 1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ &= +\infty \times 1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

**19**

Calcule cada um dos seguintes limites:

$$19.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1 - e^x};$$

$$19.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x};$$

$$19.3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1};$$

$$19.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{6x};$$

$$19.5 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2x - 2}.$$

Limites com logaritmos

Partindo do conhecimento de que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, vamos mostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Fazendo $y = \ln(x+1)$, quando $x \rightarrow 0$ também $y \rightarrow 0$.

Assim:

$$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$$

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Exemplo 20 Cálculo de um limite

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Resolução

Fazendo $y = x - 1$ quando $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 0$.

Assim, $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$.

Substituindo na expressão dada as variáveis, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Partindo do conhecimento de que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \quad p \in \mathbb{R}$$

podemos concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Com efeito, fazendo $y = \ln x$ tem-se $x = e^y$ e, quando $x \rightarrow +\infty$, também $y \rightarrow +\infty$.

Substituindo as variáveis na expressão dada, vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Exemplo 21 Calcular um limite

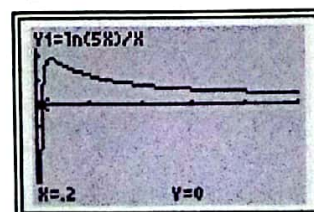
Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{x}$.

Resolução

Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 \times \frac{\ln(5x)}{5x} \right] = 5 \lim_{5x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5x)}{5x} = 5 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \\ &= 5 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Graficamente temos:

**20**

Calcule cada um dos seguintes limites:

20.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)^2}{2x}$;

20.2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^3}{3x-3}$;

20.3 $\lim_{f(x) \rightarrow 1} \frac{\ln f(x)}{f(x)-1}$;

20.4 $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\ln(5+x)}{4+x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

21

Calcule cada um dos seguintes limites:

21.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x}$;

21.2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-3x)}{x}$;

21.3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$;

21.4 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(-2x)}{x}$.

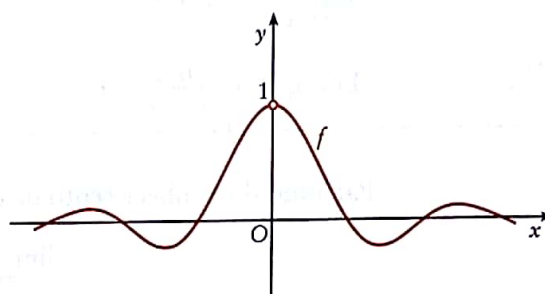
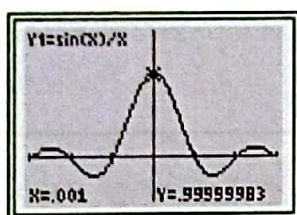
1.8 Limites de funções envolvendo funções trigonométricas

Consideremos a função f contínua, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

O cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ conduz-nos à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Observemos a representação gráfica da função:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esta representação gráfica sugere que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

De facto, prova-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Se g é uma função contínua e $y = g(x)$, este resultado pode ser generalizado para $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Exemplo 22 Cálculo de limites

22.1 Calcule:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{3x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}.$$

22.2 Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned} 22.1 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} \times \frac{\sin(4x)}{x} \right] \\ &= \frac{1}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \frac{1}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin(4x)}{4x} \\ &= \frac{1}{3} \times 4 \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \\ &= \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos(2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x \cos(2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x)} \\
 &= 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{1}{1} \\
 &= 2 \times 1 \times 1 = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$$

O cálculo deste limite conduz-nos à indeterminação $\frac{0}{0}$.

Fazendo $y = x - \frac{\pi}{2}$ temos que se $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, então $y \rightarrow 0$ e

$$y = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + y.$$

Substituindo em $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{2\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \pi} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{\pi + 2y - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{2y} \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \\
 &= -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$22.2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)}$$

Multiplicam-se os termos da fracção por $1 + \cos x$.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 0$$

22

Calcule cada um dos seguintes limites:

$$22.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x};$$

$$22.2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\operatorname{tg}(5x)};$$

$$22.3 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x};$$

$$22.4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$$

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1 Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = 5 - e^{-n}$?

(A) $-\infty$; (B) $+\infty$; (C) 0; (D) 5.

10 pontos

- 2 O valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ é:

(A) e^3 ; (B) $+\infty$; (C) $\frac{e}{2}$; (D) 1.

10 pontos

- 3 O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1}$ é:

(A) $-\infty$; (B) 0; (C) 1; (D) 2.

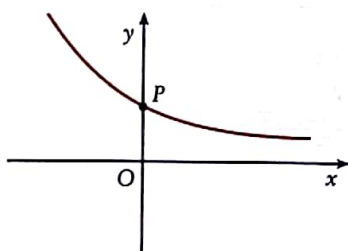
10 pontos

- 4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 e^{3x})$ é:

(A) $-\infty$; (B) $+\infty$; (C) 0; (D) 3.

10 pontos

- 5 Para um certo valor de a e para um certo valor de b , o gráfico da função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, está parcialmente representado na figura abaixo.



Sabe-se que:

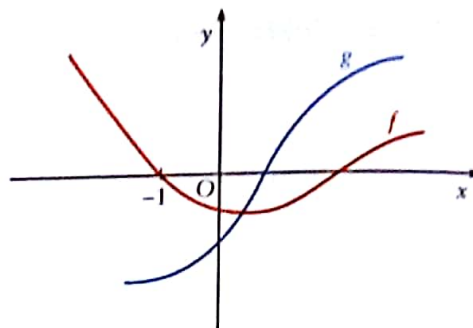
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$;
- o gráfico intersecta o eixo Oy em $P \curvearrowright (0, 3)$.

Quais podem ser os valores de a e de b ?

- (A) $a = 2$ e $b = -\ln 2$;
 (B) $a = -2$ e $b = -1$;
 (C) $a = -1$ e $b = \ln 2$;
 (D) $a = -1$ e $b = 1$.

10 pontos

- 6 Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g .



O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa -1 .

Pode afirmar-se que $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x)}{f(x)}$ é igual a:

(A) -1 ; (B) 0; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$.

10 pontos

- 7 Considere a função g definida por:

$$g(x) = \frac{1-x}{x-3}$$

O $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ é:

(A) 2; (B) 0; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$.

10 pontos

- 8 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}$ é:

(A) 1; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) 0.

10 pontos

- 9 Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g .

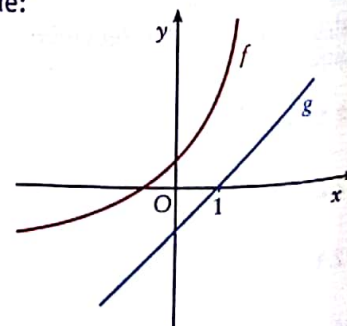
O gráfico de g intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.

Pode afirmar-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é igual a:

- (A) $+\infty$;
 (B) $-\infty$;
 (C) 1;
 (D) 0.



10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1** Considere a função f definida por:

$$f(x) = \ln \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$$

1.1 Determine o domínio da função.

1.2 Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x^2]$.

10 pontos

- 2** Considere a função f , definida em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = -1 + 5x^3 e^{-x}$$

2.1 Qual é o domínio da função?

2.2 Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

20 pontos

- 3** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

definida por $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

3.1 Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3.2 Seja g a função real de variável real definida por $g(x) = 5 + \ln(x^2 - 1)$.

a) Determine o domínio da função g .

b) Recorrendo à calculadora gráfica determine x tal que $f(x) > g(x)$.

Apresente o gráfico, ou gráficos, obtido na resolução do problema, bem como as coordenadas dos pontos considerados relevantes, com aproximação às centésimas.

20 pontos

- 4** Considere a função f , definida em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x^2+1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{e^x-1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule:

4.1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

4.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

4.3 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

20 pontos

- 5** Um recipiente contém uma certa quantidade de sal. Para dissolver o sal, enche-se o recipiente com água.

Admita que a quantidade, em gramas, de sal ainda não dissolvido, t minutos após o início do processo de dissolução, é dada por:

$$Q(t) = 250 e^{-0,05t}, \quad t \geq 0$$

Calcule e interprete o valor obtido:

5.1 $Q(0)$;

5.2 $Q(10)$;

5.3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t)$.

20 pontos

- 6** Admita que a velocidade de um móvel é dada, para um certo valor de A , por:

$$v(t) = \begin{cases} 15 + 10 \times 3^{-0,2t} & 0 \leq t < 10 \\ 5 + A \times 3^{-0,2t+2} & t \geq 10 \end{cases}$$

sendo t em segundos e v em m/s.

6.1 Calcule $v(0)$ e interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

6.2 Calcule A de modo que exista $\lim_{t \rightarrow 10} v(t)$.

6.3 A velocidade do móvel pode atingir os 4 m/s? Justifique a sua resposta.

20 pontos

Objectivos

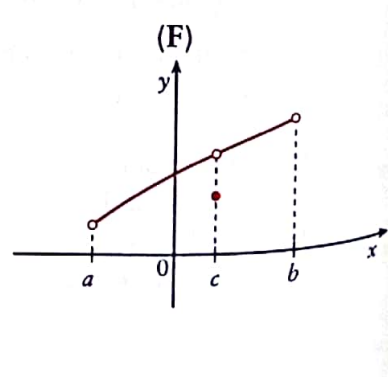
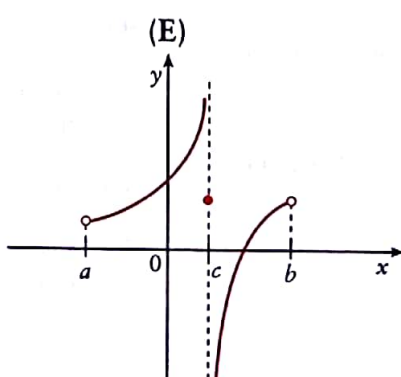
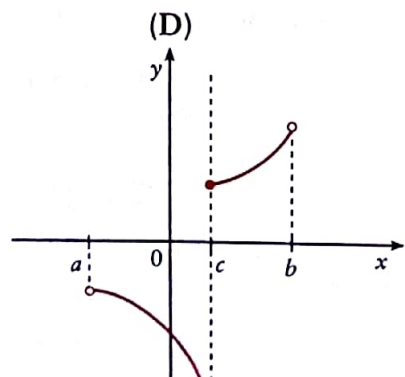
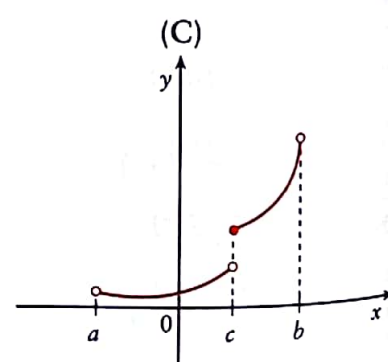
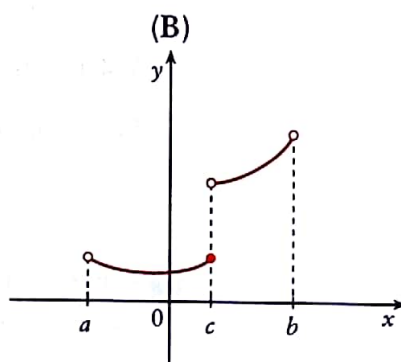
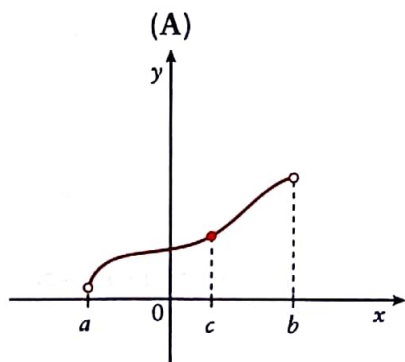
1. Estudar a continuidade de uma função num ponto.
2. Estudar a continuidade lateral de uma função num ponto.
3. Estudar a continuidade de uma função num intervalo.
4. Aplicar teoremas e propriedades sobre funções contínuas.
5. Aplicar o Teorema de Bolzano-Cauchy.
6. Determinar as assintotas do gráfico de uma função.

2. Continuidade



2.1 Continuidade de uma função num ponto

Considerem-se funções reais de variável real representadas graficamente em $]a, b[$ e seja $c \in]a, b[$.



Relativamente ao ponto c podemos observar que:

Em (A), não se verifica interrupção do gráfico. A função é contínua em c .

Em (B), (C), (D) e (E) não existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$. A função não é contínua em c .

Em (F) existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, mas $f(c)$ é diferente do valor do limite.

Em (F), a função também não é contínua em c .

Continuidade num ponto interior

Seja f uma função definida num intervalo aberto $]a, b[$, com $a \neq b$, e seja $c \in]a, b[$.

Então, f é contínua em c se e só se:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Observação

1. No estudo da continuidade, que fazemos neste livro, apenas consideramos pontos de acumulação do domínio. Em estudos mais avançados tratará da continuidade em pontos isolados do domínio.
2. Não faz sentido estudar a continuidade em pontos que não pertencem ao domínio.

Como verificar se uma função f é contínua num ponto c ?

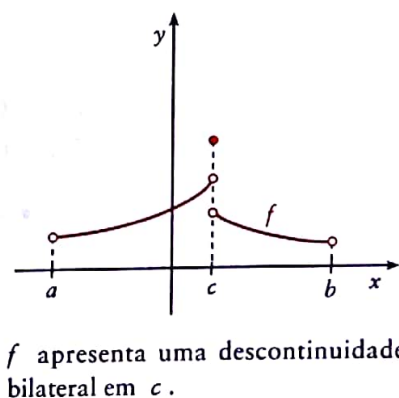
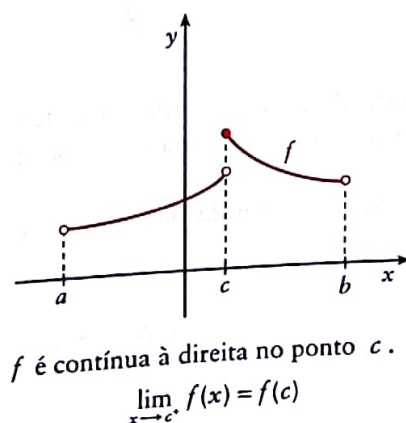
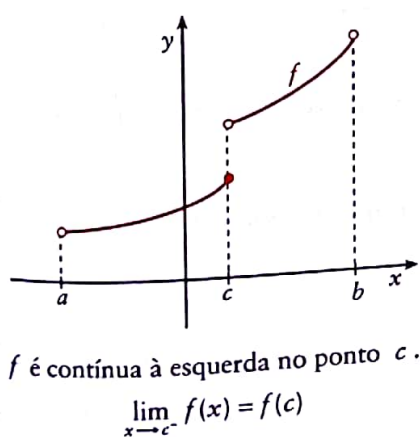
Teste de continuidade

- $f(c)$ existe ($c \in D_f$)?
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe?
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$?

2.2 Continuidade lateral

Se uma função não é contínua num ponto de acumulação do seu domínio diz-se que é descontínua nesse ponto.

Uma função pode ser descontínua num ponto c , mas pode ser contínua à esquerda ou à direita nesse ponto.



Seja f uma função definida num intervalo $]a, c]$, com $a \neq c$.

A função f é contínua à esquerda no ponto c se e só se:

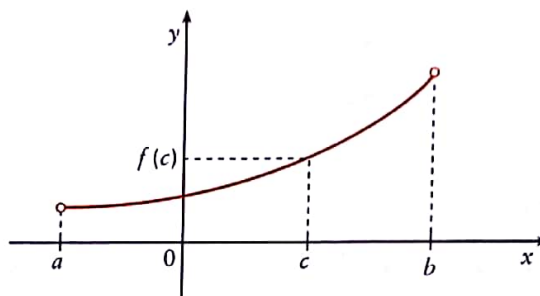
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

Seja f uma função definida num intervalo $[c, b]$, com $c \neq b$.

A função f é contínua à direita em c se e só se:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Se uma função é contínua num ponto c , é contínua à esquerda e à direita de c .

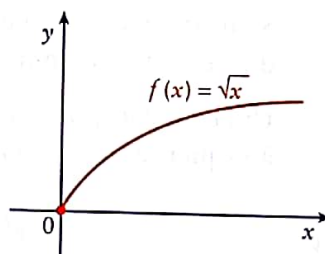


$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Por vezes, em determinados pontos do domínio de uma função, apenas tem sentido definir a continuidade à direita ou a continuidade à esquerda.

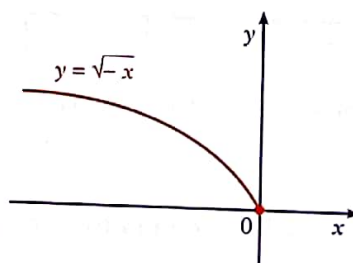
É o que acontece nos exemplos seguintes:

- A função $f: x \mapsto \sqrt{x}$ tem domínio $D = [0, +\infty[$.



O estudo de continuidade da função no ponto zero limita-se ao estudo da continuidade à direita nesse ponto.

- A função g , definida por $g(x) = \sqrt{-x}$, tem domínio $D =]-\infty, 0]$.



Como a função g é contínua à esquerda no ponto zero, então é contínua para $x = 0$.

Exemplo 1 Estudar a continuidade lateral de uma função num ponto

Seja a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > -1 \\ -3x & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Estude a continuidade da função f no ponto $x = -1$. No caso de f ser descontínua no ponto $x = -1$, verifique se é contínua à esquerda, ou à direita, nesse ponto.

Resolução

$$\bullet -1 \in D_f$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-3x) = 3$$

Como:

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ e, portanto, a função f não é contínua no ponto $x = -1$.

Para cada uma das seguintes funções, estude a continuidade à esquerda e à direita nos pontos indicados:

$$1.1 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

para $x = 0$;

$$1.2 \quad g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \geq -1 \\ 2x & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

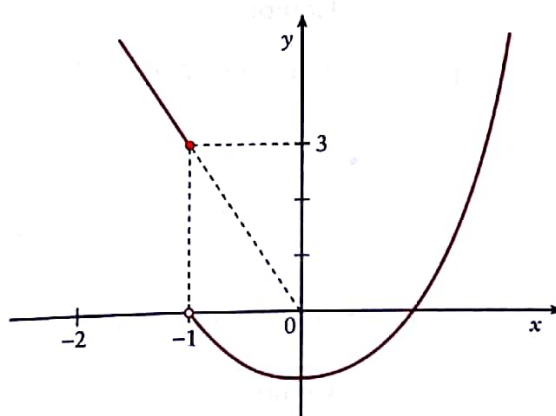
para $x = -1$;

$$1.3 \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

para $x = 1$;

$$1.4 \quad i(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \\ -1 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

para $x = -2$.



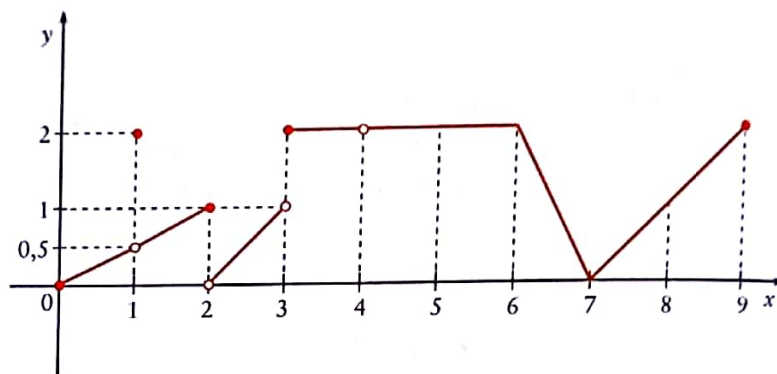
Atendendo a que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 3$$

a função f é contínua à esquerda no ponto -1 .

Exemplo 2 Continuidade de uma função num ponto

Na figura está representada graficamente uma função de domínio $D = [0, 9] \setminus \{4\}$.



O que pode dizer acerca da continuidade da função nos pontos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução

- A função é contínua nos pontos: 0, 5, 6, 7, 8 e 9.
- A função é descontínua em 1 (descontínua à esquerda e à direita).

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0,5 \quad \text{e} \quad f(1) = 2.$$

Como:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1), \text{ a função é descontínua para } x = 1.$$

- No ponto $x = 2$ a função é descontínua porque não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1, \text{ a função é contínua à esquerda no ponto } 2.$$

- No ponto $x = 3$, a função é descontínua porque não existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Como:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 2$$

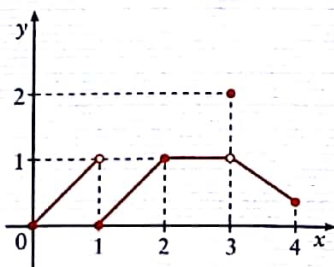
a função é contínua à direita no ponto 3.

- Embora 4 seja ponto de acumulação do domínio, não pertence ao domínio da função.



2

Observe a função g representada graficamente.

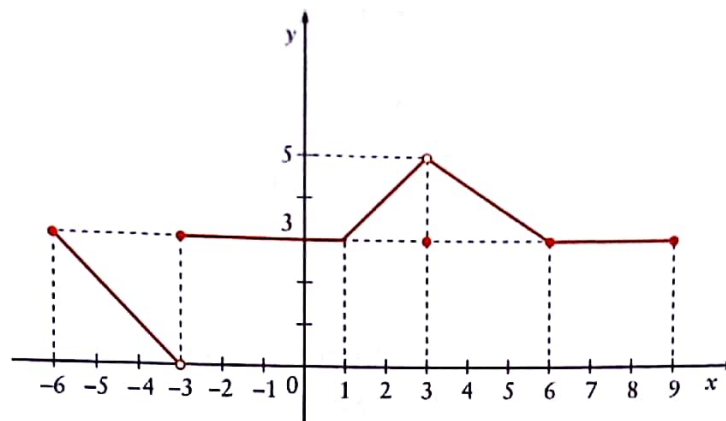


2.1 Qual é o D_g ?

2.2 O que pode dizer acerca da continuidade da função g em 0, 1, 2, 3 e 4?

2.3 Continuidade de uma função num intervalo

Observemos a representação gráfica da função f .



A função é descontínua nos pontos -3 e 3 , mas é contínua em todos os outros pontos do seu domínio.

Não podemos dizer que a função é contínua em $[-6, 0]$, porque f não é contínua em -3 .

Mas, por exemplo, podemos dizer que:

- f é contínua em $]-3, 3[$;
- f é contínua em $[6, 9]$.

Se uma função é contínua em todos os pontos de um intervalo aberto $]a, b[$, então é contínua nesse intervalo.

Uma função é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ se é contínua em $]a, b[$, então à direita de a e à esquerda de b .

Se uma função é contínua em todos os pontos do seu domínio dizemos, simplesmente, que a função é contínua.

Exemplo 3 Continuidade de uma função

Estude a continuidade das seguintes funções reais de variável real:

3.1 $f: x \mapsto x$;

3.2 $g: x \mapsto k$ ($k = \text{constante}$);

3.3 $h: x \mapsto \frac{1}{x}$.

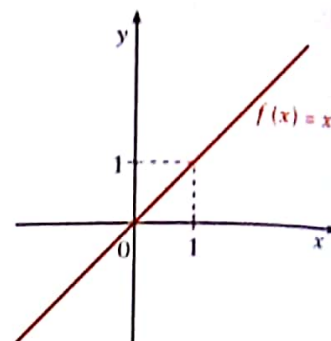
Resolução

3.1 $f(x) = x$

- $D_f = \mathbb{R}$
- Para $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$f(a) = a$$



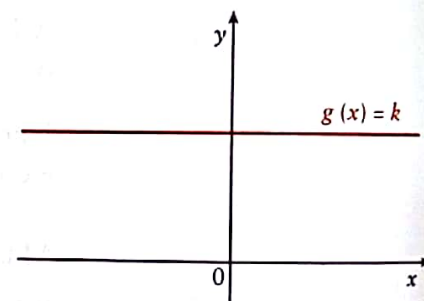
Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, a função f é contínua em todos os pontos do seu domínio e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$.

3.2 $g(x) = k$ ($k = \text{constante}$)

- $D_g = \mathbb{R}$
- Para $a \in D_g$:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k$$

$$g(a) = k$$



Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, a função g é contínua em todos os pontos do seu domínio, ou seja, a função é contínua em $\mathbb{R}$.

3.3 $h(x) = \frac{1}{x}$

- $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Para $a \in D_h$:

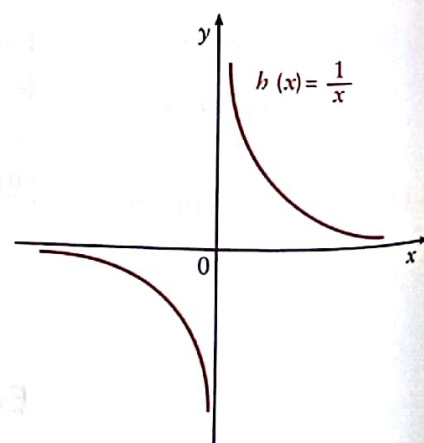
$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

$$h(a) = \frac{1}{a}$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a), \forall a \in D_h$$

A função h é contínua em todos os pontos do seu domínio, ou seja, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



3

Considere a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x > 2 \\ |x| & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

3.1 Represente graficamente a função.

3.2 Indique os intervalos em que a função é contínua.

2.4 Operações com funções contínuas

Os teoremas sobre limites de funções reais de variável real reflectem-se na continuidade das funções.

Observação

Já vimos anteriormente que as funções:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

e

$$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_a x \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

são contínuas.

Se duas funções f e g são contínuas num ponto a , então as seguintes funções são também contínuas nesse ponto a :

- $f + g$;
- $f - g$;
- $f \times g$;
- $\frac{f}{g}$ (com $g(a) \neq 0$);
- f^n , $n \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt[n]{f}$ ($n \in \mathbb{N}$ e $f(a) \geq 0$ se n é par).

Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .

As propriedades apresentadas permitem concluir que:

- as funções polinomiais são contínuas em $\mathbb{R}$;
- as funções racionais são contínuas em todos os pontos do domínio.

Exemplo 4 Continuidade de uma função racional

Estude a continuidade da função racional f , sendo $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$.

Resolução

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Como se trata de uma função racional, isto é, do quociente de duas funções polinomiais, podemos garantir que a função f é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo 5 Continuidade de uma função composta

Estude a continuidade da função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$h(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

Resolução

A função $g: x \mapsto e^x$ é contínua em $\mathbb{R}$ e a função $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \xrightarrow{g} e^{\frac{1}{x}} \\ \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad g \circ f \end{array}$$

$$(g \circ f)(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

A função h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser a composta de duas funções contínuas.

Considere a função real de variável real definida por:

$$h(x) = x^2 + 2x$$

4.1 Defina as funções f e g de modo que $(f \circ g)(x) = h(x)$.

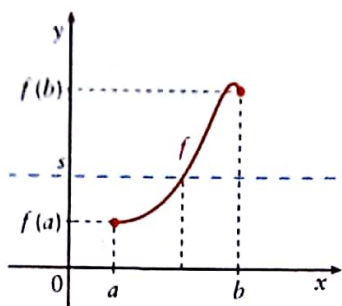
4.2 A função h é contínua? Justifique.

Estude a continuidade da função f definida em $\mathbb{R}^+$ por:

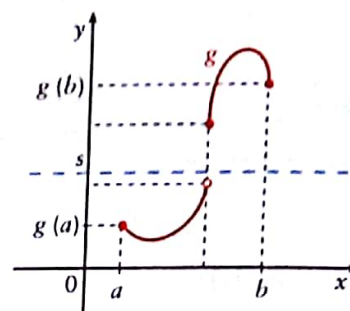
$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.5 Teorema de Bolzano-Cauchy

Observemos os seguintes gráficos.



A função f é contínua em $[a, b]$. Se desenharmos uma recta horizontal que intersecte o eixo Oy em qualquer ponto de $]f(a), f(b)[$, esta recta vai intersectar o gráfico de f pelo menos num ponto.



A função g não é contínua em $[a, b]$. Pode existir uma recta horizontal que intersecte o eixo Oy num ponto de $]g(a), g(b)[$ e não intersecte o gráfico de g .

O Teorema de Bolzano-Cauchy ou Teorema do Valor Intermédio diz-nos que uma função contínua num intervalo não passa de um valor para outro sem que passe por todos os valores intermédios.

Observação

Se a função é contínua apenas no intervalo aberto $]a, b[$, o Teorema de Bolzano continua a ser aplicável considerando $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ em vez de $f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ em vez de $f(b)$.

Teorema de Bolzano-Cauchy (ou Teorema do Valor Intermédio)

Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

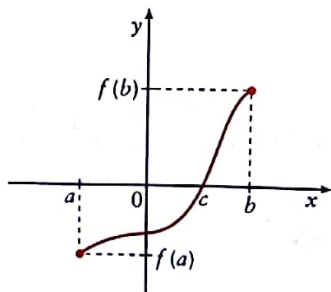
Se s é um ponto do intervalo aberto de extremos $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = s$.

Este teorema tem particular interesse se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, ou seja, se $f(a) \times f(b) < 0$.

Neste caso, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a, b[$.

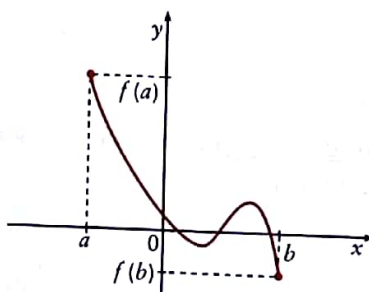
Corolário do Teorema de Bolzano

Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então existe pelo menos um zero da função f no intervalo $]a, b[$.

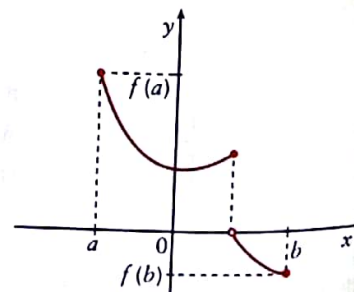


f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$.

Logo, a função f tem pelo menos um zero em $]a, b[$.



$f(a) \times f(b) < 0$ e f tem três zeros em $]a, b[$.



$f(a) \times f(b) < 0$ e f não tem zeros em $]a, b[$.

Este exemplo não contradiz o Teorema de Bolzano, porque f não é contínua em $[a, b]$.

2.6 Determinação das assíntotas do gráfico de uma função

Assíntotas

Assíntotas do gráfico de uma função são linhas rectas que orientam o traçado do gráfico de modo que o gráfico ou parte dele se aproxima cada vez mais dessas linhas.

No estudo das funções racionais referimo-nos a assíntotas verticais, horizontais e oblíquas.

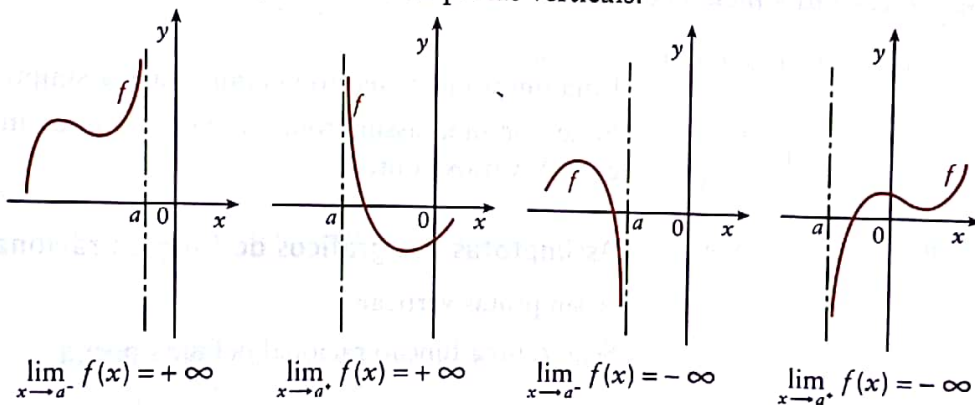
Assíntota vertical

A recta da equação $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f se e só se:

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ ou } f(x) \rightarrow -\infty$$

quando x tende para a pela direita ou pela esquerda.

As rectas a tracejado são assíntotas verticais.



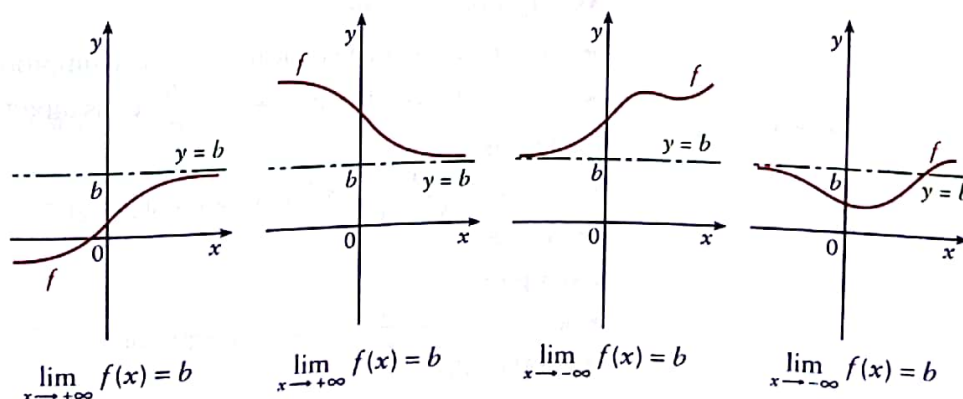
Assíntota horizontal

A recta da equação $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se e só se:

$$f(x) \rightarrow b$$

quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$.

As rectas a tracejado são assíntotas horizontais.

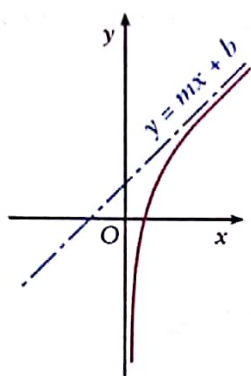


Assíntota oblíqua

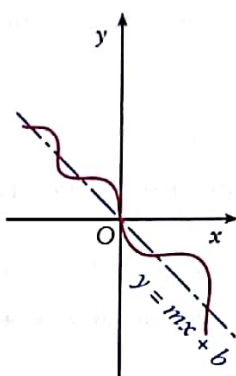
A recta da equação $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f se e só se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

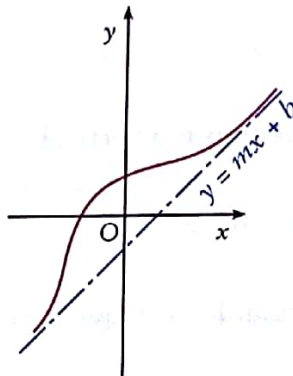
As rectas a tracejado são assíntotas oblíquas.



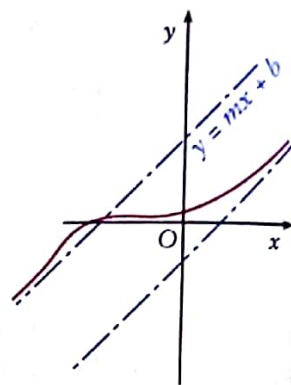
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Uma função pode ter no máximo duas assíntotas não verticais.

Note que uma assíntota não-vertical pode intersectar o gráfico da função em vários pontos.

Assíntotas dos gráficos de funções racionais

Assíntotas verticais

Seja f uma função racional definida por:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

Admitindo que $p(x)$ e $q(x)$ não têm factores comuns, o gráfico da função terá tantas assíntotas verticais quantos os zeros do denominador.

Exemplo:

Se $f(x) = \frac{x-1}{(x-3)(x+5)}$, as rectas das equações $x = 3$ e $x = -5$ são assíntotas verticais do gráfico de f .

Assíntotas horizontais

Se $m > n$, a recta da equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

Se $m = n$, a recta da equação $y = \frac{a_0}{b_0}$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

Exemplos:

• Se $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, a recta da equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

Exemplo:

• Se $f(x) = \frac{2-3x}{1-x}$, a recta da equação $y = \frac{-3}{-1} = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

Assíntotas oblíquas

O gráfico da função f , definida por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$, tem uma assíntota oblíqua.

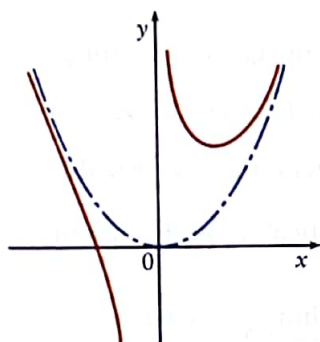
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \text{ ou } f(x) = x - \frac{1}{x}$$

A recta da equação $y = x$ é uma assíntota oblíqua do gráfico da função f .

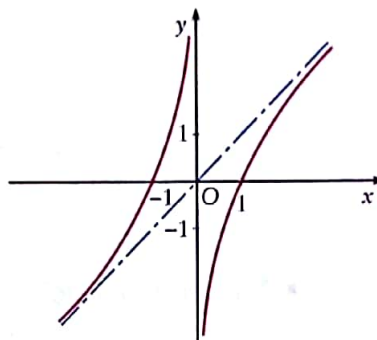
Observação

Seja:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x} \text{ ou } f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$



Neste caso, o gráfico terá uma assíntota parabólica.



Se $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e o grau do polinómio do numerador é maior, em uma unidade, do que o grau do polinómio do denominador, a função pode escrever-se na forma:

$$f(x) = mx + b + \frac{r(x)}{q(x)} \text{ sendo } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0.$$

A recta da equação $y = mx + b$ é assíntota oblíqua do gráfico da função.

Exemplo 6 Assíntota do gráfico de uma função racional

Escreva uma equação para cada uma das assíntotas do gráfico da função racional f , definida por:

$$6.1 \ f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^3 + 3}; \quad 6.2 \ f(x) = \frac{1 - x}{2 + 3x}; \quad 6.3 \ f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}.$$

Resolução

$$6.1 \ f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^3 + 3};$$

assíntota: $y = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1; \\ 3x^3 + 3 = 0 &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$6.2 \ f(x) = \frac{1 - x}{2 + 3x}; \text{ assíntotas: } x = -\frac{2}{3}; \ y = -\frac{1}{3}.$$

$$6.3 \ f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1};$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x - 1};$$

assíntotas: $x = 1$ e $y = 2x + 2$.

Cálculo auxiliar		
$2x^2$	-1	$ x-1 $
$-2x^2 + 2x$		$2x + 2$
	$2x - 1$	
	$-2x + 2$	
	1	

Escreva uma equação para cada uma das assíntotas dos gráficos das funções:

$$6.1 \ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x};$$

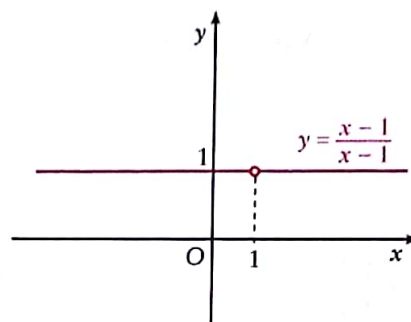
$$6.2 \ f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1};$$

$$6.3 \ f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}.$$

Assíntotas verticais do gráfico de outras funções

Repare que:

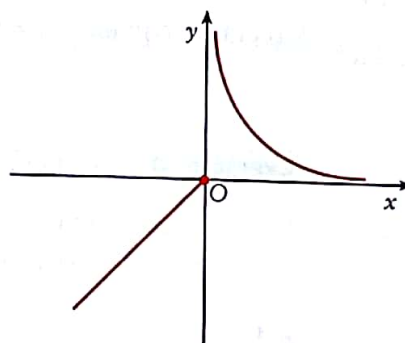
- A recta da equação $x = 1$ não é assíntota do gráfico da função $f: x \mapsto \frac{x-1}{x-1}$ porque $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.



- A recta da equação $x = 1$ não é assíntota do gráfico da função f , definida por $f(x) = \frac{\log(x-2)}{x-1}$, porque, sendo $D_f =]2, +\infty[$, 1 não pertence ao domínio da função nem é ponto de acumulação desse domínio.

- A recta da equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \text{ dado que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$



Como procurar as assíntotas verticais do gráfico de uma função?

Para encontrar as equações das assíntotas verticais do gráfico de uma função f determina-se:

- D_f ;
- os pontos de abscissa a em que $a \notin D_f$, mas é ponto de acumulação de D_f ;
ou
os pontos de abscissa a tais que $a \in D_f$ e f é descontínua em a ;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Se alguns destes limites for $+\infty$ ou $-\infty$, a recta da equação $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Se ambos os limites são infinitos, a recta da equação $x = a$ é assíntota vertical bilateral do gráfico de f .

Assíntotas oblíquas do gráfico de outras funções

No caso das funções racionais, a determinação de assíntotas oblíquas é facilitada pela escrita da função.

Se $y(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-3}$ então a recta da equação $y = 2x + 1$ é assíntota do gráfico da função.

Para outras funções, vejamos como proceder:

A recta $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f , se existirem m e b reais tais que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Considere-se o caso de $x \rightarrow +\infty$.

• Determinação de m

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Dividindo por x , vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - b}{x} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x}}_{=0} = 0$$

Logo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

• Determinação de b

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b = b$$

Logo:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

De igual modo se determinam m e b , quando $x \rightarrow -\infty$.

Se $x \rightarrow -\infty$, pode-se obter os mesmos valores de m e b ou não.

Se m e b existem e são diferentes, quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, então existem duas assíntotas não verticais.

Se $m = 0$, a assíntota, se existir, é uma recta horizontal.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 De uma função h , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $h(2) = -5$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$
- A recta da equação $y = 5$ é assíntota horizontal.
- h é estritamente crescente no intervalo $[2, +\infty[$ e estritamente decrescente em $] -\infty, 2]$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) h tem um único zero.
- (B) O contradomínio de h é $[-5, 5]$.
- (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.
- (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 5$.

10 pontos

2 Considere a função h , contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, tal que:

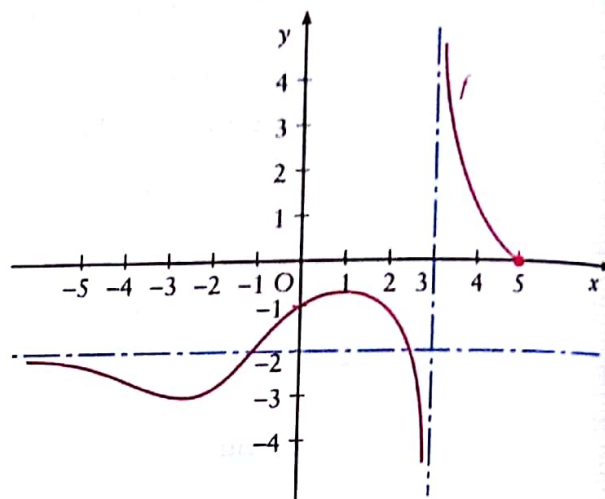
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A função não tem zeros.
- (B) O gráfico de h não tem assíntotas verticais.
- (C) O gráfico de h não tem assíntotas horizontais.
- (D) A equação $f(x) = -1$ tem, pelo menos, uma solução.

10 pontos

3 Na figura está representada parte do gráfico da função f de domínio $] -\infty, 5] \setminus \{3\}$.



As rectas das equações $x = 3$ e $y = -2$ são assíntotas do gráfico de f .

Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + f(x)}{1 - e^x}$.

- (A) $-\infty$; (B) 1;
- (C) 2; (D) 0.

10 pontos

4 De uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a recta da equação $y = -5$ é assíntota do seu gráfico.

Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{-3e^{-x}}$?

- (A) $-\infty$; (B) $+\infty$;
- (C) $\frac{5}{3}$; (D) $-\frac{5}{3}$.

10 pontos

5 De uma função f , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é estritamente decrescente;
- $f(0) = -1$;
- o eixo Ox e a bissectriz dos quadrantes pares são assíntotas do gráfico de f .

Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $[-1, +\infty[$; (B) $] -\infty, -1]$;
- (C) $] -\infty, 0]$; (D) $] -\infty, 0[$.

10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

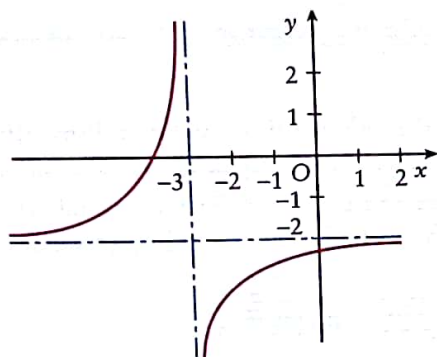
- 1 Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que o gráfico de h tem uma assíntota oblíqua à qual pertence o ponto de coordenadas $(0, 3)$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + h(x)} = -\frac{1}{3}$.

Escreva uma equação da assíntota oblíqua do gráfico da função.

25 pontos

- 2 Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função h , cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.



As rectas das equações $y = -2$ e $x = -3$ são assíntotas do gráfico da função.

Seja (a_n) a sucessão de termo geral:

$$a_n = 1 - n + 3n^2$$

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n)$?

Justifique a sua resposta.

25 pontos

- 3 Para um certo valor de k , a função h é contínua em $\mathbb{R}$, e é definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ k + e^x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

20 pontos

- 4 De uma função f , contínua no intervalo $[0, 3]$, sabe-se que $f(0) = 10$ e $f(3) = 0$.
Mostre que a equação $f(x) = 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 3[$.

20 pontos

- 5 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x) + x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.1 Estude a função f quanto à continuidade.

5.2 A equação $f(x) = |x|$ tem uma solução inteira.

Recorrendo à calculadora gráfica determine essa solução.

30 pontos

- 6 Um pára-quedista salta de um avião e, ao fim de 6 segundos, o pára-quedas abre.

Admita que a velocidade do pára-quedista, em metros por segundo, t segundos após ele ter saltado do avião, é dada, para um certo valor de k , por:

$$v(t) = \begin{cases} 40(1 - e^{kt}) & \text{se } t < 6 \\ 5 + 15e^{-1,2t + 7,2} & \text{se } t \geq 6 \end{cases}$$

6.1 Sabendo que a função v é contínua, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às centésimas).

6.2 Represente graficamente a função, sabendo que o pára-quedista atingiu o solo 120 segundos após ter saltado do avião.

Descreva o que aconteceu à velocidade do pára-quedista durante o salto, indicando no respectivo gráfico as coordenadas dos pontos que considerar relevantes para explicitar melhor o seu raciocínio.

30 pontos

Um olhar sobre a História

O cálculo infinitesimal, que engloba os cálculos diferencial e integral, por muitos considerado a mais importante conquista da inteligência humana, desenvolveu-se a partir de alguns problemas originários da Antiguidade.

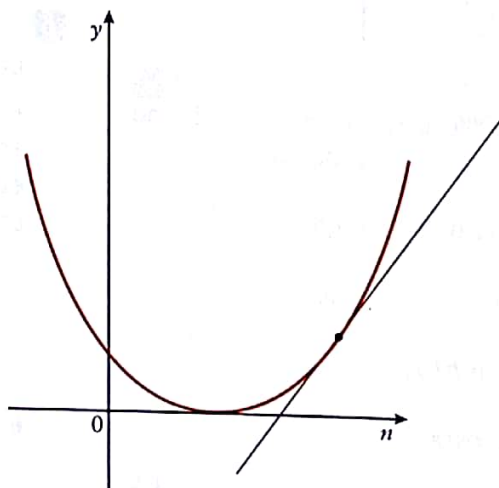
Como determinar o volume de um sólido, por exemplo, de uma esfera? Como obter a tangente a uma dada curva num ponto? Como calcular a área de uma figura plana?

Estes problemas foram abordados pelos antigos gregos, que, se bem que fossem muito engenhosos, não conseguiram produzir uma teoria unificadora que os enquadrasse, o que só veio a suceder no século XVII. Os problemas de áreas e volumes conduziram ao cálculo integral e os problemas das tangentes conduziram ao cálculo diferencial.

A dificuldade de obtenção de tangentes revelou-se intimamente relacionada com a da determinação de áreas.

Esta relação foi compreendida por Leibniz e Newton que são considerados os "pais" do cálculo infinitesimal.

A derivada, que é o conceito básico do cálculo diferencial, é hoje apresentada como o limite da variação média ou o declive da recta tangente a uma curva (ver figura em baixo). Mas para dispor destes conceitos na forma actual, conceptualmente consistente, foi preciso esperar pelos trabalhos de Cauchy, no século XIX.



Gottfried von Leibniz
(1646-1716)



Sir Isaac Newton
(1643-1727)



Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

6

Cálculo diferencial. Aplicações das derivadas

1 Derivadas

2 Aplicações das derivadas

Material:
Lápis e papel

Actividades de investigação

O Sr. Atikin vai de Labutes a Latrum e regressa a Labutes. A sua velocidade é de 4 km/h em terreno plano, 3 km/h nas subidas e 6 km/h nas descidas. Partiu às 9:00 e regressou a casa às 13:00.

Será que se pode deduzir a distância entre Latrum e Labutes?



Objectivos

1. Definir derivada de uma função num ponto.
2. Interpretar geometricamente o valor da derivada de uma função num ponto.
3. Determinar as derivadas laterais de uma função num ponto.
4. Interpretar derivadas infinitas.
5. Relacionar os conceitos de derivabilidade e de continuidade de uma função num ponto.
6. Conhecer o significado de função derivada de uma função.
7. Demonstrar regras de derivação (derivada da função constante, derivada da função afim, derivada do produto de uma constante por uma função, derivada da soma e do produto de funções).
8. Aplicar regras de derivação.
9. Calcular a segunda derivada de uma função.
10. Interpretar a derivada como velocidade ou aceleração de um móvel num ponto.

1. Derivadas



Ponta do Ouro, Moçambique

1.1 Definição de derivada de uma função num ponto. Significado geométrico

Considere-se uma função real de variável real f definida num intervalo $]a, b[$, com $a < b$, e seja x_0 um ponto desse intervalo.

Chama-se derivada da função f no ponto x_0 ao limite, quando existir, da razão:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quando h tende para zero.

Esta derivada denota-se por:

$$f'(x_0), \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \text{ ou } Df_{x=x_0}.$$

Então:

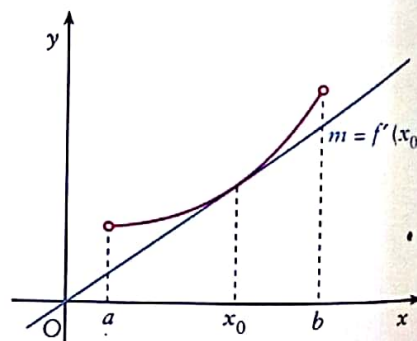
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se $h = x - x_0$, dizer que h tende para zero é o mesmo que dizer que x tende para x_0 e a expressão $f'(x_0)$ pode apresentar a seguinte forma:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Geometricamente, tem-se que:

A derivada de uma função f num ponto x_0 é numericamente igual ao declive m da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa x_0 .



Observação

A notação $f'(x_0)$ foi usada pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

As outras notações para a derivada foram introduzidas mais tarde.

1.2 Derivadas laterais

Considere-se a função real de variável real f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

A representação gráfica da função f encontra-se na figura ao lado.

Existirá a derivada da função f no ponto $x = 1$?

A derivada de uma função num ponto é um limite. Por isso, para respondermos à questão procuremos esse limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Ora, este limite só existe se existirem e forem iguais os limites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

É a estes limites laterais que se chama, respectivamente, derivada à direita no ponto $x = 1$ ($f'(1^+)$) e derivada à esquerda no ponto 1 ($f'(1^-)$).

Calculando estes limites, vem:

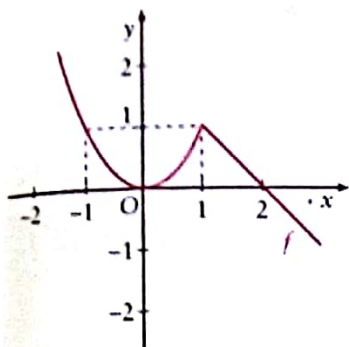
$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x + 2 - 1^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x + 1}{x - 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \end{aligned}$$

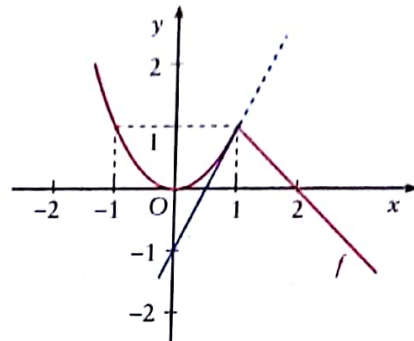
Os limites laterais são diferentes e, portanto, não existe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

A função não tem derivada no ponto $x = 1$.



O resultado era esperado. Observando o gráfico constata-se que não é possível desenhar uma recta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa $x = 1$.



Seja f uma função real de variável real e x_0 um ponto do domínio de f . Diz-se que:

- f é derivável à esquerda em x_0 se existe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

a que se chama derivada lateral à esquerda em x_0 e se representa por $f'(x_0^-)$;

- f é derivável à direita em x_0 se existe:

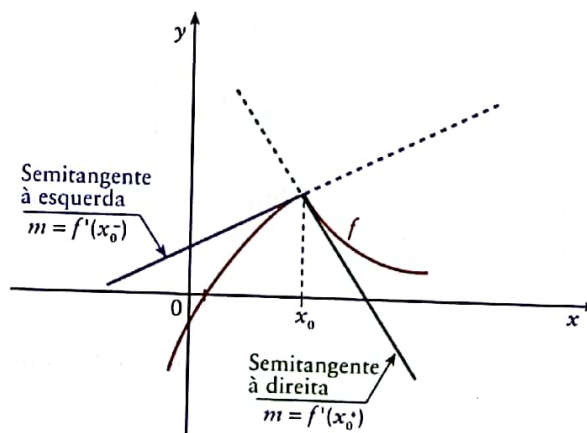
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

a que se chama derivada lateral à direita em x_0 e se representa por $f'(x_0^+)$;

- existindo e sendo iguais as derivadas laterais no ponto x_0 , então a função é derivável nesse ponto e o valor desta derivada é igual ao valor comum das derivadas laterais:

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Geometricamente, a derivada à esquerda em x_0 representa o declive da semitangente à esquerda e a derivada à direita em x_0 representa o declive da semitangente à direita no ponto do gráfico de abscissa x_0 .



Para que exista derivada de f em $x = x_0$ as semitangentes em $x = x_0$ devem estar no prolongamento uma da outra.

1.3 Referências a pontos nos quais uma função não é derivável

Função derivável

Uma função diz-se derivável num ponto x_0 se tem nesse ponto derivada finita.

Dada uma função f , real de variável real, nem sempre é possível garantir a existência de derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Do ponto de vista gráfico, significa que há pontos do gráfico em que não é possível traçar a recta tangente ao gráfico nesses pontos ou a recta tangente é uma recta vertical.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1 A função é contínua mas não é derivável em $x = x_0$

Considere as funções definidas por:

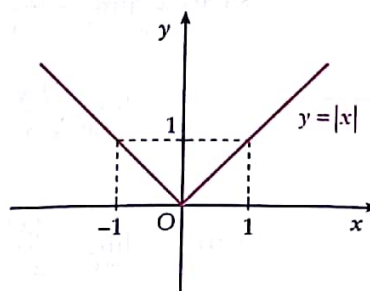
$$f(x) = |x| ; \quad g(x) = \sqrt[3]{x} ; \quad h(x) = \sqrt[3]{|x|} .$$

Serão as funções deriváveis em todos os pontos do seu domínio?

Resolução

$$\bullet f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observando o gráfico imediatamente concluímos que não existe $f'(0)$, pois não é possível traçar uma única tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa $x = 0$.



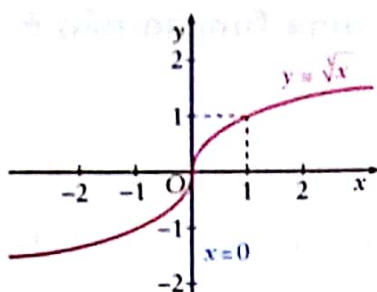
Analiticamente, tem-se:

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1$$

$$f'(0^+) \neq f'(0^-)$$

Não existe $f'(0)$. f não é derivável no ponto 0.



A recta da equação $x = 0$ é tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $x = 0$.

• Considere-se a função g definida por $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned} g'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty \end{aligned}$$

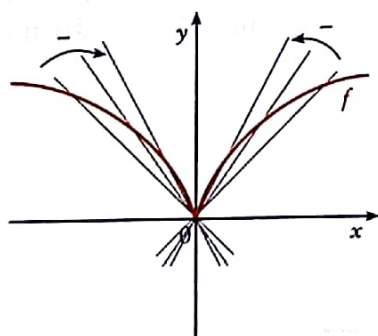
$$g'(0) = +\infty$$

A derivada de g para $x = 0$ não existe porque $+\infty$ não é um número real.

A recta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa zero é uma recta vertical e escreve-se:

$$g'(0) = +\infty$$

Portanto, g não é derivável em $x = 0$.



• Considere-se a função f definida por $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$.

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{|x|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{|x|}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{|x|}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{-x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{\frac{-1}{x^2}} = -\infty \end{aligned}$$

Não existe $f'(0)$.

As derivadas laterais no ponto 0 são diferentes (e infinitas).

f não é derivável no ponto 0.



Considere as funções contínuas em $\mathbb{R}$, definidas por:

- $f(x) = |x - 3|$;
- $s(x) = \sqrt{|x|}$;
- $h(x) = \sqrt{x^2}$.

Serão as funções deriváveis em todos os pontos do seu domínio?

1.4 Derivabilidade e continuidade

Teorema

Toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

Hipótese: Existe $f'(x_0)$.

Tese: f é contínua em x_0 .

Demonstração:

Suponhamos que a função f tem derivada finita no ponto $x = x_0$.

Tem-se que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0), \quad x \neq x_0$$

Aplicando limites e como $f'(x_0)$ existe, vem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \times 0$$

Como $f'(x_0)$ é finita, tem-se $f'(x_0) \times 0 = 0$ e, portanto:

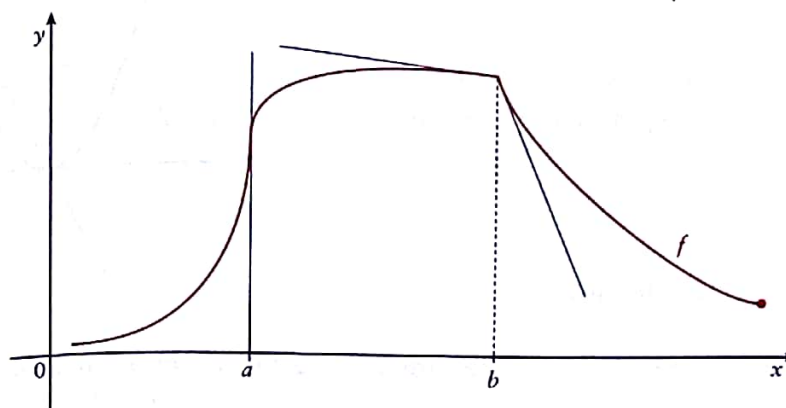
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

O que prova que f é contínua em x_0 .

Note que o recíproco deste teorema não é verdadeiro. Há funções contínuas num ponto que não têm derivada finita nesse ponto.



f é contínua e não tem derivada finita em a (a tangente à curva em $x = a$ é uma recta vertical) nem em b (onde as semitangentes não estão no prolongamento uma da outra).

Observação

De acordo com o programa a demonstração é facultativa.

1.5 Função derivada

Aplicando a definição de derivada, pode determinar-se a derivada de uma função num ponto $x = x_0$.

Exemplo 2 Determinação da função derivada

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

Determine $f'(0)$, $f'(1)$ e $f'(x_0)$.

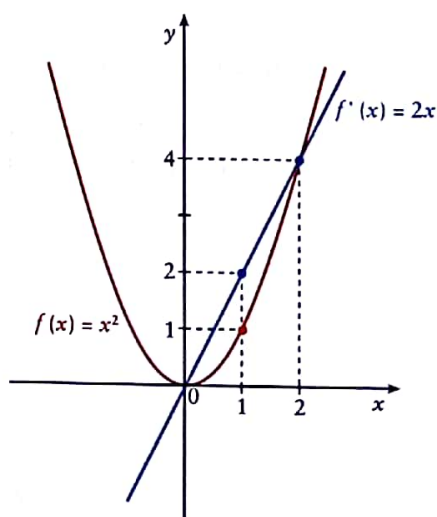
Resolução

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = 2x_0 \end{aligned}$$

Se $x_0 = x$, então $f'(x) = 2x$.



Dada a função real de variável real:

$$f: x \mapsto -2x + 3$$

2.1 Determine $f'(x_0)$, sendo x_0 um número real qualquer.

2.2 Caracterize a função f' , derivada da função f .

De um modo geral, sendo f uma função real de variável real, f' é uma nova função de x , que se chama **função derivada** de f , cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f tem derivada finita e que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função f nesse ponto.

1.6 Derivada de uma função constante

Considere-se a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = c \quad (c \text{ é constante})$$

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto x_0 , vem:

$$\bullet f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\bullet f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



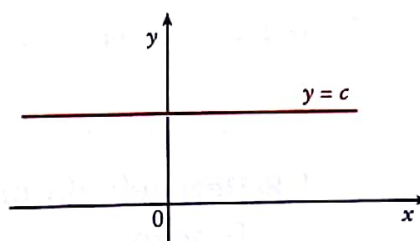
Então:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A derivada de uma função constante é igual a zero.

$$y = c \Rightarrow y' = 0$$

Geometricamente:



O declive da recta tangente ao gráfico da função em qualquer ponto é igual ao declive da própria recta horizontal $y = c$ e, portanto, é igual a zero.

Exemplo 3 Determinação da derivada de uma constante

Determine $s'(x)$, sabendo que $s(x) = e^\pi$.

Resolução

$$s(x) = e^\pi; \quad s'(x) = 0 \quad (e^\pi \text{ é uma constante})$$

Para cada uma das funções indique a função derivada.

3.1 $s(x) = -3$;

3.2 $t(x) = -\frac{1}{3}$;

3.3 $f(x) = 2\sqrt{2}$.

1.7 Derivada de uma função afim

Considere-se a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = ax + b, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto, vem:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a = a$$

Então:

$$\text{se } f(x) = ax + b, \quad f'(x) = a.$$



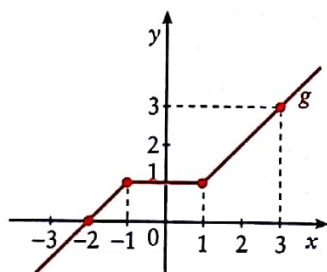
Represente graficamente a função derivada de cada uma das seguintes funções:

4.1 $f(x) = -x + 3$;

4.2 $s(x) = 1 - 2x$;

4.3 $t(x) = -4 + x$.

4.4 g representada graficamente por:



A derivada da função afim é igual ao declive da recta que representa graficamente a função.

$$y = ax + b \Rightarrow y' = a$$

Exemplo 4 Derivada de uma função afim

Determine y' sabendo que:

4.1 $y = 2x + 3$;

4.2 $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

Resolução

4.1 $y = 2x + 3$; $y' = 2$

4.2 $y = -\frac{1}{3}x - 1$; $y' = -\frac{1}{3}$

1.8 Derivada do produto de uma constante por uma função

Seja f uma função derivável em x_0 e g a função definida por $g(x) = c f(x)$, sendo c uma constante real.

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned} (cf)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x_0 + h) - cf(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = cf'(x_0) \end{aligned}$$

Se a função f tem derivada em $]a, b[$ e c é uma constante real, então a função definida por $cf(x)$ tem derivada em $]a, b[$ e:

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

1.9 Derivada da soma e da diferença de duas funções

Se as funções f e g são deriváveis num ponto x_0 , então $f + g$ é derivável em x_0 , e:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Esta conclusão pode ser obtida usando a definição de derivada de uma função num ponto.

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - [f(x_0) + g(x_0)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Derivada da soma

Se duas funções f e g são deriváveis em $]a, b[$, a função $f + g$ é derivável em $]a, b[$ e:

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= [f(x) + g(x)]' \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

De modo idêntico se concluiria que:

Derivada da diferença

Se duas funções f e g são deriváveis em $]a, b[$, a função $f - g$ é derivável em $]a, b[$ e:

$$\begin{aligned} (f - g)'(x) &= [f(x) - g(x)]' \\ &= f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

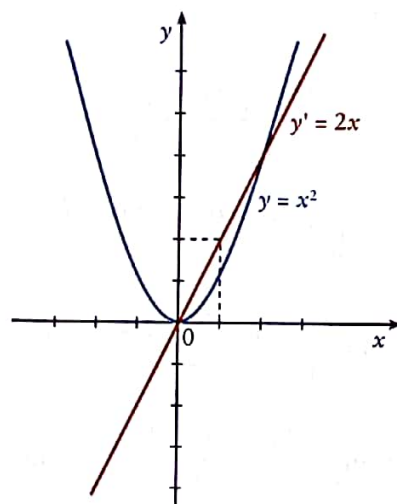
$$(u - v)' = u' - v'$$

1.10 Derivada de uma potência

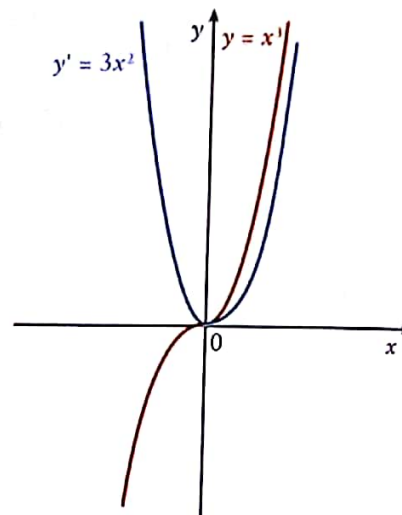
Para qualquer número real n , tem-se:

$$\frac{d}{dx} (x^n) = n x^{n-1} \quad \text{ou} \quad (x^n)' = n x^{n-1}.$$

$$(x^2)' = 2x$$



$$(x^3)' = 3x^2$$



Exemplo 5 Usar a regra da potência

Use a regra de derivação de uma potência de x para determinar a derivada de:

$$5.1 \quad y = \frac{1}{x^4};$$

$$5.2 \quad y = x^{\frac{1}{2}};$$

$$5.3 \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Resolução

$$5.1 \quad \left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

$$5.2 \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$5.3 \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \\ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$



Determine y' , sendo:

$$5.1 \quad y = \frac{1}{x^2};$$

$$5.2 \quad y = x^{\frac{1}{3}};$$

$$5.3 \quad y = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$5.4 \quad y = -\frac{x}{2\sqrt{x}}.$$

1.11 Derivada de funções polinomiais

Aplicando os conhecimentos seguintes:

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}, n \in \mathbb{R}$
- $f(x) = a x^n \Rightarrow f'(x) = a n x^{n-1}, n \in \mathbb{R}$
- $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

calcula-se a derivada de qualquer função polinomial.

Exemplo 6 Derivadas de funções polinomiais

Determine uma expressão da derivada da função f , sendo:

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

Resolução

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 2x + 1)' \\ &= (3x^2)' + (2x)' + (1)' \\ &= 6x + 2 + 0 \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$

As mesmas regras que permitem calcular a derivada de uma função polinomial permitem calcular a derivada de algumas funções racionais e irracionais.

Exemplo 7 Derivada de funções irracionais

Determine uma expressão da derivada da função g , sendo:

$$g(x) = x^{\sqrt{2}} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

Resolução

$$g(x) = x^{\sqrt{2}} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3 \times x^{\frac{1}{2}}} = x^{\sqrt{2}} - 3x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} - 3 \times (-2) x^{-2-1} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} + 6x^{-3} - \frac{1}{6} x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{6\sqrt{x^3}} \\ &= \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1} + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{6x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

6 Determine y' , sendo:

6.1 $y = 3x^2$;

6.2 $y = 5x^3 + x^2$;

6.3 $y = -2x^2 + 3\pi$;

6.4 $y = -6x^2 + 2x + 7$;

6.5 $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$;

6.6 $y = -x^4 + x^3 - 3x^2 + \frac{x}{2} + 5$.

7 Determine y' , sendo:

7.1 $y = x^{\sqrt{3}} - 1$;

7.2 $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}$;

7.3 $y = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$;

7.4 $y = x\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right)$;

7.5 $y = 3x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}} - 2x^{-1}$;

7.6 $y = \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{x}$;

7.7 $y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^4}$.

1.12 Derivada do produto de funções

Se as funções f e g têm derivada finita num ponto x_0 , então $f \times g$ é derivável em x_0 e:

$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0) \times f(x_0)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (f \times g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \times g)(x_0 + h) - (f \times g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \times g(x_0 + h) - f(x_0) \times g(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador $f(x_0 + h) \times g(x_0)$ vem:

$$\begin{aligned} (f \times g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \times g(x_0 + h) + f(x_0 + h) \times g(x_0) - f(x_0 + h) \times g(x_0) - f(x_0) \times g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) \times [f(x_0 + h) - f(x_0)] + f(x_0 + h) \times [g(x_0 + h) - g(x_0)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) \times [f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \times [g(x_0 + h) - g(x_0)]}{h} \\ &= g(x_0) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x_0 + h) - g(x_0)]}{h} \\ &= g(x_0) \times f'(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0) \end{aligned}$$

Portanto,

$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$$

ou

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

Se f e g têm derivada em todos os pontos do intervalo $]a, b[$, então $f \times g$ é derivável em $]a, b[$ e:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

Considerando três funções com derivada finita num determinado ponto x , temos:

$$\begin{aligned}(f \times g \times h)'(x) &= [(f \times g) \times h]'(x) \\ &= (f \times g)'(x) \times h(x) + (f \times g)(x) \times h'(x) \\ &= f'(x) \times g(x) \times h(x) + f(x) \times g'(x) \times h(x) + f(x) \times g(x) \times h'(x)\end{aligned}$$

De um modo geral:

$$(f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n)' = f_1' \times f_2 \times \dots \times f_n + f_1 \times f_2' \times \dots \times f_n + \dots + f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n'$$

Exemplo 8 Derivada de um produto

Determine uma expressão da derivada da função h , sendo:

8.1 $h(x) = (2 - 3x)(5 + 8x)$;

8.2 $h(x) = (2 - 3x)x^3$.

Resolução

8.1 $h(x) = (2 + 3x)(5 + 8x)$

Aplicando a regra da derivada do produto de funções:

$$\begin{aligned}h'(x) &= (2 + 3x)'(5 + 8x) + (2 + 3x)(5 + 8x)' \\ &= 3(5 + 8x) + (2 + 3x)8 \\ &= 15 + 24x + 16 + 24x \\ &= 48x + 31\end{aligned}$$

8.2 $h(x) = (2 - 3x)x^3$

Aplicando a regra da derivada do produto de funções:

$$\begin{aligned}h'(x) &= (2 - 3x)'x^3 + (2 - 3x)(x^3)' \\ &= -3x^3 + (2 - 3x)(3x^2) \\ &= -3x^3 + 6x^2 - 9x^3 \\ &= -12x^3 + 6x^2\end{aligned}$$

8.1 Determine:

$$[x(x - 1)(2x - 3)]'$$

8.2 Sendo:

• $f(x) = x$;

• $g(x) = 4x$;

• $h(x) = 3x - 1$;

• $j(x) = 2 - 3x$;

determine:

$$(f \times g \times h \times j)'(0)$$

1.13 Derivada do quociente de funções

Se as funções f e g têm derivada num intervalo $]a, b[$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em $]a, b[$ e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$



Determine y' , sendo:

$$9.1 \ y = \frac{1}{x+3};$$

$$9.2 \ y = \frac{x}{2x^2+1};$$

$$9.3 \ y = \frac{x}{x^2+2x+1};$$

$$9.4 \ y = \frac{2x+3}{x^2-1};$$

$$9.5 \ y = \frac{x^2+1}{1-3x^3};$$

$$9.6 \ y = \frac{x^2+2x+\pi}{1-\frac{x^2}{2}}.$$

Exemplo 9 Derivada de funções racionais

Determine y' , sendo:

$$9.1 \ y = \frac{x}{2x+1};$$

$$9.2 \ y = \frac{x^2+3}{1-2x}.$$

Resolução

$$9.1 \ y = \frac{x}{2x+1}$$

$$\left\{ y' = \frac{(x)' \times (2x+1) - x \times (2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{1(2x+1) - 2(x)}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2} \right.$$

$$9.2 \ y = \frac{x^2+3}{1-2x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2+3)'(1-2x) - (x^2+3)(1-2x)'}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{2x(1-2x) - (x^2+3)(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^2 + 6}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

1.14 Derivada da função composta

Seja $h = f \circ g$ a função composta das funções f e g .

Se g tem derivada num ponto x_0 e se f tem derivada em $g(x_0)$, então $f \circ g$ é derivável em x_0 e:

$$h'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \times g'(x_0)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ou

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

Exemplo 10 Derivada da função composta

Considerando que h é a composta de duas funções, determine $h'(x)$, sendo:

$$10.1 \ h(x) = (2x^2+3)^8;$$

$$10.2 \ h(x) = \sqrt{2x^2+1}.$$

Resolução

$$10.1 \ h(x) = (f \circ g)(x), \text{ sendo } g(x) = 2x^2+3 \text{ e } f(x) = x^8.$$

$$(f \circ g)(x) = f(2x^2+3) = (2x^2+3)^8$$

$$g'(x) = 4x \text{ e } f'(x) = 8x^7.$$

Aplicando a regra de derivação composta, vem:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(2x^2+3) \times 4x \\ &= 8(2x^2+3)^7 \times 4x = 32x(2x^2+3)^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u^n)' &= nu^{n-1}u' \\ (n \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

10

Determine y' , sendo:

10.1 $y = (-2x + 1)^5$;

10.2 $y = (-x^2 + 3)^{\frac{1}{2}}$;

10.3 $y = \sqrt[3]{-x^3 + 2}$;

10.4 $y = \frac{(x-2)^2}{x}$;

10.5 $y = \frac{(x-3)^2}{x+3}$;

10.6 $y = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3$;

10.7 $y = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)^2$;

10.8 $y = \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3$.

Este resultado pode generalizar-se:

A derivada de uma função definida por $(f(x))^p$, em qualquer ponto onde exista e seja finita, é dada por:

$$[(f(x))^p]' = p \times (f(x))^{p-1} \times f'(x) \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} 10.2 \quad h'(x) &= \left[(2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} (2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} (2x^2 + 1)' \\ &= \frac{1}{2} (2x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (4x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} \end{aligned}$$

1.15 Derivada da função inversa

Seja f uma função definida num intervalo $]a, b[$.Se a função f admite inversa e se tem derivada não nula num ponto $x_0 \in]a, b[$, a função inversa f^{-1} tem derivada no ponto $y_0 = f(x_0)$, sendo:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Escrevendo $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, a igualdade anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Exemplo 11 Derivada da inversa

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.Mostre, usando a derivada da função inversa, que a derivada da função f se pode exprimir por $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resolução

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = y \Leftrightarrow x = y^3$$

A função f é a função inversa da função f^{-1} definida por $f^{-1}(y) = y^3$.

$$(f^{-1})'(y) = (y^3)' = 3y^2$$

$$(f^{-1})'(y) = 0 \Leftrightarrow 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{3y^2}$$

$$\text{Como } y = \sqrt[3]{x}, \text{ temos } f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

11

Considere a função f , estritamente crescente em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = (2x - 1)^5$$

Verifique que $f(0) = -1$ e determine $(f^{-1})'(-1)$.

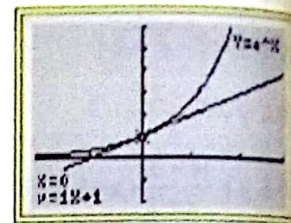
1.16 Derivada de funções exponenciais e logarítmicas

Definição do número e

O número de Neper, e , é o número tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geometricamente significa que a tangente ao gráfico da função f definida por $f(x) = e^x$, no ponto de abscissa zero, tem declive 1.



Derivada de $y = e^x$

Seja f a função definida por $f(x) = e^x$.

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto, vem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \times 1 = e^x \end{aligned}$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

A função $y = e^x$ é igual à sua derivada.

Logo:

$$\text{Se } y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Aplicando a regra da derivada da função composta vem:

$$y = e^u$$

$$y' = u' e^u$$

$$\text{Se } y = e^u, \quad y' = u' e^u.$$

Exemplo 12 Derivada de uma função exponencial

Determine y' , sendo $y = e^{2x-3}$.

Resolução

$$y = e^{2x-3}$$

$$y' = (2x-3)' \times e^{2x-3}$$

Logo:

$$y' = 2 e^{2x-3}$$



12

Determine y' , sendo:

12.1 $y = e^{-\frac{x}{3}}$;

12.2 $y = e^{-x+\frac{1}{3}}$.

Derivada de $y = a^x$, $a > 0$ Seja $y = a^x$.

$$y = a^x \Leftrightarrow y = e^{x \ln a} \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

$$y' = (e^{x \ln a})' = (x \ln a)' \times e^{x \ln a}$$

$$= \ln a \times e^{x \ln a}$$

$$= (\ln a) a^x$$

Logo:

$$y = a^u$$

$$y' = u' \times a^u \times \ln a$$

$$\text{Se } y = a^x, \quad y' = a^x \ln a$$

$$\text{Se } y = a^u, \quad y' = u' a^u \ln a$$

Exemplo 13 Derivada de uma função exponencialDetermine y' , sendo $y = 3^{x^2 - 2x}$.**Resolução**

$$y' = \ln 3 \times (x^2 - 2x)' \times 3^{x^2 - 2x}$$

Logo:

$$y' = (2x - 2) \times 3^{x^2 - 2x} \times \ln 3$$

Derivada de $y = \ln x$ Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln x$.

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto, vem:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x \frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{h}{x} + 1\right)}{\frac{h}{x}}$$

Fazendo $y = \frac{h}{x}$, $h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

Logo:

$$\text{Se } y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

$$y = \ln u$$

$$y' = \frac{u'}{u}$$

Aplicando a regra da derivada da função composta, vem:

$$\text{Se } y = \ln u, \quad y' = \frac{u'}{u}.$$

Exemplo 14 Derivada de funções logarítmicas

Determine y' , sendo:

$$14.1 \quad y = \ln(x^2 - 3);$$

$$14.2 \quad y = \sqrt{x} \ln \sqrt{x}.$$

Resolução

$$14.1 \quad y = \ln(x^2 - 3)$$

$$y' = \frac{(x^2 - 3)'}{x^2 - 3}$$

Logo:

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

$$14.2 \quad y = \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$$

$$y' = (\sqrt{x})' \times \ln \sqrt{x} + \sqrt{x} \times (\ln \sqrt{x})'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \ln \sqrt{x} + \sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Logo:

$$y' = \frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1 + \ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$



14

Determine y' , sendo:

$$14.1 \quad y = \ln(3x);$$

$$14.2 \quad y = \ln(-3x);$$

$$14.3 \quad y = \ln|3x|.$$

Derivada de $y = \log_a x$

$$\text{Seja } y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Então:

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \log_a u$$

$$y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

Logo:

$$\text{Se } y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x \ln a}.$$

$$\text{Se } y = \log_a u, \quad y' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

Exemplo 15 Derivada de funções logarítmicas

Determine y' , sendo $y = \log_2 (2x - 3)$.

Resolução

$$y' = \frac{(2x - 3)'}{(2x - 3) \times \ln 2}$$

Logo:

$$y' = \frac{2}{(2x - 3) \times \ln 2}.$$

Determine y' , sendo:

15.1 $y = \log_3 (x^2 - 3)$;

15.2 $y = \log_2 (\sqrt{x})$;

15.3 $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{-3}{x^2 - 1} \right)$.

1.17 Derivada de funções trigonométricas

Derivada da função seno

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$.

Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto, temos para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \quad \text{Definição de derivada.}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \times 0 + \cos x \times 1$$

Assim, se $y = \sin x$, então $y' = \cos x$.

Se $u = g(x)$ e $y = \sin u$, então $y' = u' \cos u$.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\sin u)' &= u' \cos u \end{aligned}$$

Aplica-se a fórmula:
 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Associam-se os 1.º e 3.º termos e põe-se $\sin x$ em evidência.

Separam-se os termos e aplicam-se as fórmulas:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (a+b) = \lim_{h \rightarrow 0} a + \lim_{h \rightarrow 0} b = c$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} k f(h) = k \lim_{h \rightarrow 0} f(h), \text{ onde}$$

k é uma constante.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad (\text{pág. 177});$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

**16**

Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

16.1 $y = \sin(-3x + 1)$;

16.2 $y = \sin^3(3x)$;

16.3 $y = 3 \sin^2(x + 1)$;

16.4 $y = 3 \sin(x + 1)^2$;

16.5 $y = x \sin x^3 + 2 \sin(3x)$.

Exemplo 16 Calcular a derivada

Determine a função derivada de cada uma das funções:

16.1 $y = \sin(3x)$;

16.2 $y = \sin^2(5x - 1)$.

Resolução

16.1 $y = \sin(3x)$; $y' = (3x)' \times \cos(3x)$

Logo, $y' = 3 \cos(3x)$.

16.2 $y = \sin^2(5x - 1)$

$(u^n)' = nu^{n-1} u'$

$$y' = 2 \sin(5x - 1) \times [\sin(5x - 1)]'$$

$$= 2 \sin(5x - 1) \times (5x - 1)' \times \cos(5x - 1)$$

Logo, $y' = 10 \sin(5x - 1) \cos(5x - 1)$ ou

$y' = 5 \sin(10x - 2)$.

Derivada da função co-seno

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]'$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -1 \times \sin x$$

$$= -\sin x$$

Assim, $(\cos x)' = -\sin x$.

E se $u = g(x)$ e $y = \cos u$,

então $y' = -u' \sin u$.

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

**17**

Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

17.1 $y = \cos(5x^2 - 7)$;

17.2 $y = -\cos^2 x$;

17.3 $y = -\cos^3 x^3$;

17.4 $y = \sin x \cos x$;

17.5 $y = 3 \cos(x-3)^2 + \sin^2(x-3)$.

Exemplo 17 Calcular a derivada

Determine a derivada da função $y = \cos(x^2 - 3x)$.

Resolução

$$y = \cos(x^2 - 3x)$$

$$y' = -(x^2 - 3x)' \times \sin(x^2 - 3x)$$

Logo, $y' = (-2x + 3) \sin(x^2 - 3x)$.

1.18 Função segunda derivada

A função segunda derivada (ou função derivada de ordem 2) de uma função f é uma nova função:

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f' tem derivada;
- que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função f' nesse ponto.

Representa-se por:

$$f''(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad D^2f$$

Exemplo 18 Velocidade e aceleração

A posição de um corpo, em metros, é dada como função do tempo, em segundos, por:

$$s(t) = -4,9t^2 + 5t + 10$$



Calcule a velocidade e a aceleração do corpo no tempo t .

Resolução

A velocidade v é a derivada da função s .

$$v(t) = s'(t) = (-4,9t^2 + 5t + 10)'$$

$$v(t) = -9,8t + 5$$

A aceleração a é a taxa de variação da velocidade

$$a(t) = v'(t) = (-9,8t + 5)'$$

$$a(t) = -9,8$$

Note que a velocidade v é dada em m/s e a aceleração a é dada em m/s².

✓ 18

A posição de um corpo, em metros, é dada como função do tempo, em segundos, por:

$$s(t) = -4,9t^2 + 2t + 5$$

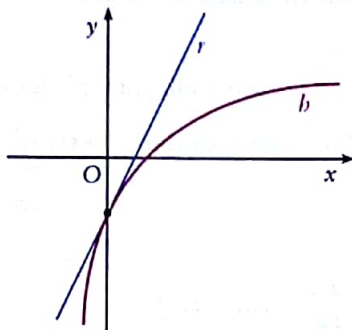
18.1 Determine a velocidade do corpo no tempo t .

18.2 Determine a aceleração do corpo no tempo t .

18.3 Determine a velocidade e a aceleração do corpo para $t = 3$ s.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1** Seja $h :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = -2 + 2 \ln(x+1)$.



A recta r é tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa 0.

Indique o declive da recta r :

- (A) $\frac{1}{2}$; (B) 0; (C) 1; (D) 2.

10 pontos

- 2** Seja h uma função tal que a sua derivada, no ponto 2, é igual a $\frac{5}{2}$.

Indique o valor de:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x^2 + x - 6}$$

- (A) 2; (B) $\frac{5}{2}$; (C) $\frac{2}{5}$; (D) $\frac{1}{2}$.

10 pontos

- 3** Um projectil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admita que a altitude h (em metros), t segundos após o lançamento, é dada pela função:

$$h(t) = 220t - 5t^2$$

Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projectil, 10 segundos após o lançamento?

- (A) 120; (B) 220; (C) 100; (D) -100.

10 pontos

- 4** Seja f a função definida por:

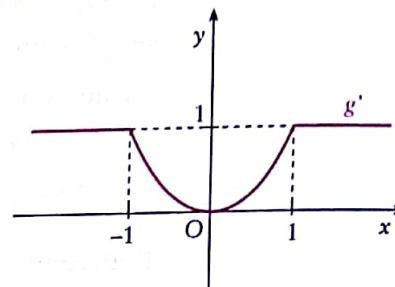
$$f(x) = x^{\pi - e}$$

A expressão de f' é:

- (A) $x^{\pi - e}$; (B) $x^{\pi - e - 1}$;
(C) $(\pi - e)x^{\pi - (e+1)}$; (D) $\pi x^{\pi - e}$.

10 pontos

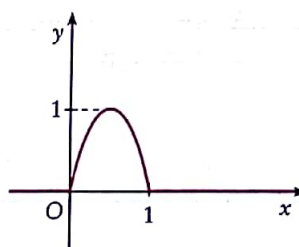
- 5** Na figura seguinte está a representação gráfica de g' , derivada de uma certa função g .



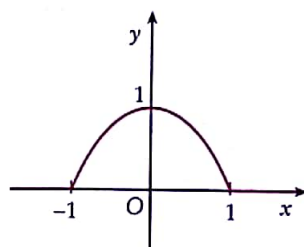
A função f é definida por $f(x) = -g(x) - 1$.

Nestas condições, uma representação gráfica de f' , derivada de f , pode ser:

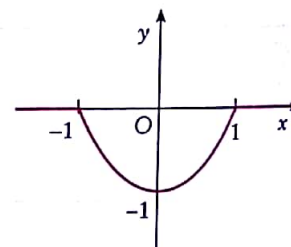
(A)



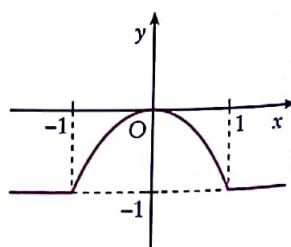
(C)



(B)



(D)



10 pontos

- 6** Na figura, t é a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 3)$. O ponto $(-2, 0)$ pertence à recta t .

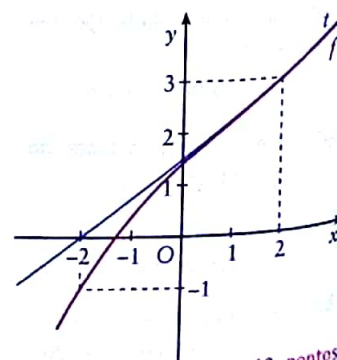
Qual das expressões seguintes pode definir f' , derivada de f ?

(A) $1 - \frac{x}{8}$;

(B) $2 - \frac{3}{x}$;

(C) $1 - \frac{x}{4}$;

(D) $1 - \frac{4}{x}$.



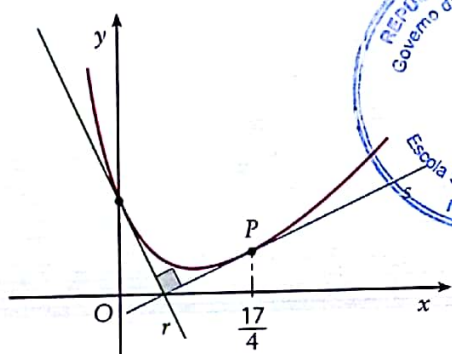
10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1 Na figura estão representados:

- o gráfico de uma função f ;
- a recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0 e da equação $y = -4x + 7$;
- a recta s , tangente ao gráfico de f no ponto P de abscissa $\frac{17}{4}$.

As rectas r e s são perpendiculares.

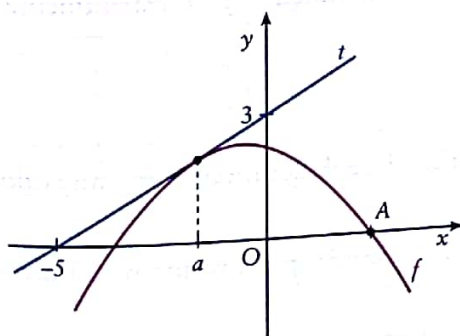


1.1 Indique o valor de $f'(\frac{17}{4})$. Justifique a resposta.

1.2 Sabendo que a ordenada de P é 3, escreva a equação reduzida da recta s .

30 pontos

2 Na figura está a representação gráfica de uma função f e de uma recta t , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a . A recta t passa pelos pontos de coordenadas $(-5, 0)$ e $(0, 3)$.



2.1 Indique, justificando, qual é o valor de $f'(a)$.

2.2 Escreva uma equação da recta que passa pelo ponto de coordenadas $(4, 0)$ e é perpendicular à recta t .

30 pontos

3 De uma função $f:]-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, sabe-se que:

- $f(-1) = 0$;
- a sua derivada f' é definida por:

$$f'(x) = \frac{1 + \ln(x+2)}{x+2}$$

3.1 Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -1 .

3.2 Poderá concluir-se que a função f é contínua para $x = -1$? Justifique a resposta.

3.3 Determine $f''(2)$.

40 pontos

4 A quantidade Q , de qualquer substância radioactiva, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão:

$$Q(t) = A \times e^{-Bt}, \quad t \geq 0$$

em que A e B são constantes reais positivas específicas de cada substância e t em anos.

4.1 Determine $Q(0)$ e explique o significado do valor encontrado.

4.2 Mostre que o gráfico de Q tem uma assíntota horizontal e explique o seu significado.

4.3 Designando por Q' a derivada de Q , mostre que Q e Q' são directamente proporcionais.

4.4 Mostre que o tempo necessário para que a quantidade de Q reduza o seu valor inicial para metade é $\frac{\ln 2}{B}$.

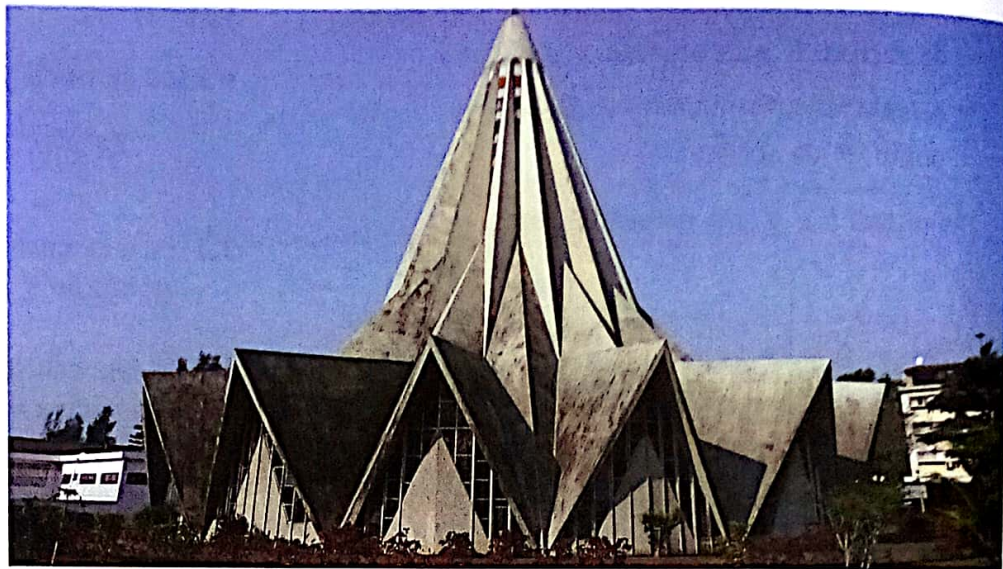
4.5 Sabendo que o valor inicial de Q de uma certa substância era de 200 g e que 10 anos depois a quantidade era de 50 g, determine as constantes A e B para essa substância.

40 pontos

Objectivos

1. Determinar os extremos de uma função aplicando o conceito de derivada.
2. Estudar a monotonia de uma função usando o conceito de derivada.
3. Estudar o sentido das concavidades do gráfico de uma função usando a segunda derivada da função.
4. Estudar analiticamente uma função (a calculadora é usada apenas para confirmação de resultados).
5. Escrever o modelo matemático correspondente a uma situação real.
6. Resolver problemas de optimização.

2. Aplicações das derivadas

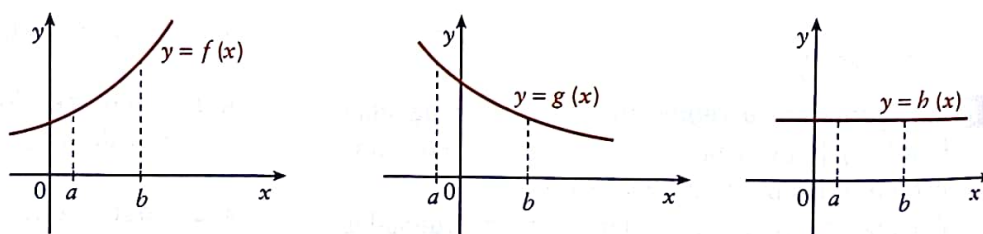


Igreja da Polana, Maputo

Igreja da Polana, Maputo

2.1 Função estritamente crescente e função estritamente decrescente (revisão)

Começamos por recordar as definições ligadas à monotonia de uma função. Na figura estão representadas graficamente as funções f , g e h .



A função f é estritamente crescente; a função g é estritamente decrescente e a função h é constante.

Seja f uma função real de variável real definida num intervalo E e sejam a e b elementos de E .

- f é estritamente crescente em E quando para todos os números reais a e b de E :

$$\text{se } a < b, \text{ então } f(a) < f(b).$$

- f é estritamente decrescente em E quando para todos os números reais a , b de E :

$$\text{se } a < b, \text{ então } f(a) > f(b).$$

- f é constante em E quando para todos os números reais a e b de E :

$$f(a) = f(b).$$

Exemplo 1 Monotonia de uma função

Estude a monotonia das funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = x^2 \text{ e } g(x) = 2x.$$

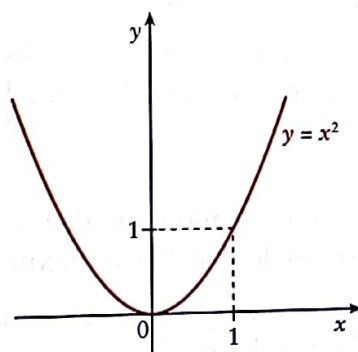
Resolução

A função

$$f: x \mapsto x^2$$

é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$

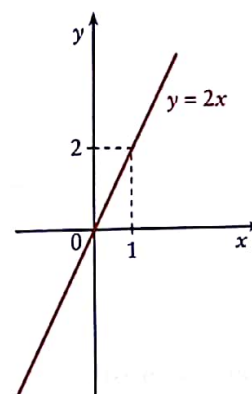
e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.



A função

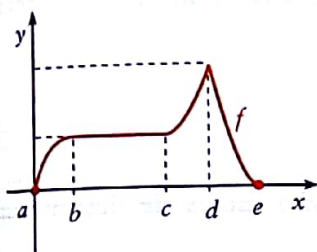
$$f: x \mapsto 2x$$

é estritamente crescente porque é estritamente crescente em todo o seu domínio.



1.1 Justifique que uma função constante num intervalo é crescente e decrescente nesse intervalo.

1.2 Observe o gráfico da função f .

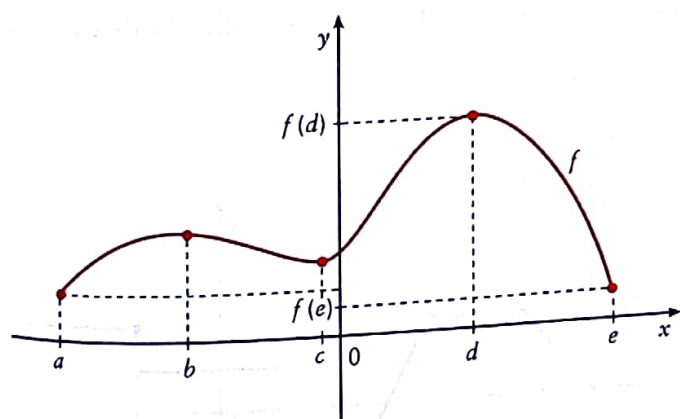


Indique os intervalos em que a função f é:

- crescente;
- estritamente crescente;
- decrescente;
- constante.

2.2 Extremos de uma função (revisão)

Observe-se a representação gráfica da função f .

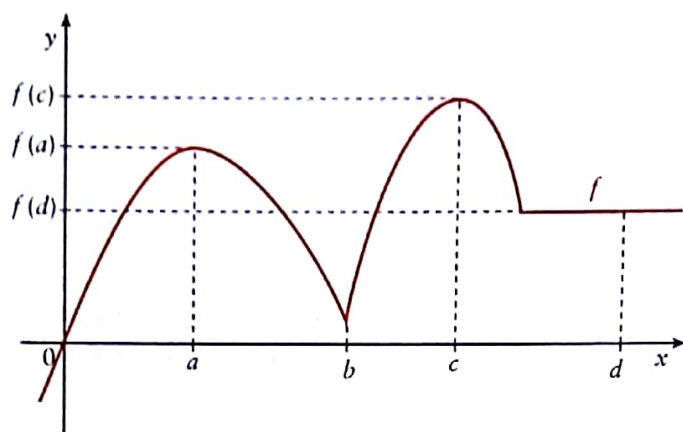


- $f(d)$ é o máximo absoluto de f .
- $f(e)$ é o mínimo absoluto de f .
- $f(b)$ é um máximo relativo de f .
- $f(c)$ e $f(a)$ são mínimos relativos de f .

Seja f uma função de domínio D .

- $f(a)$ é o máximo absoluto de f se, para todo x de D : $f(a) \geq f(x)$
- $f(b)$ é o mínimo absoluto de f se, para todo x de D : $f(b) \leq f(x)$
- $f(a)$ é um máximo relativo de f se existir um intervalo aberto E contendo a tal que $f(a) \geq f(x)$, qualquer que seja $x \in E \cap D$.
- $f(b)$ é um mínimo relativo de f se existir um intervalo aberto F contendo b tal que $f(b) \leq f(x)$, qualquer que seja $x \in F \cap D$.

Observe-se a representação gráfica da função f .



- $f(a)$ é um máximo relativo.
- $f(b)$ é um mínimo relativo.
- $f(c)$ é um máximo relativo e é o máximo absoluto.
- $f(d)$ é um máximo relativo e um mínimo relativo.

A função f não tem mínimo absoluto.

Os extremos da função (extremos absolutos) são fáceis de determinar desde que se conheça o contradomínio da função.

$$D_f' =]-\infty, f(c)]$$

Por exemplo, se o contradomínio de uma função f é $[2, 9]$, então 2 é o mínimo absoluto de f e 9 é o máximo absoluto dessa função.

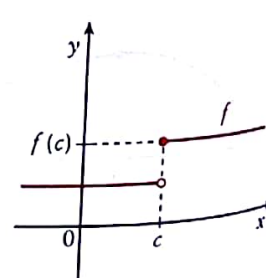
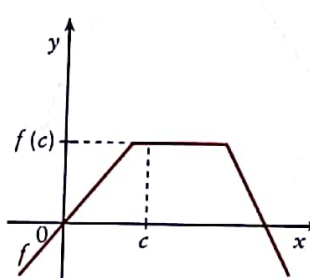
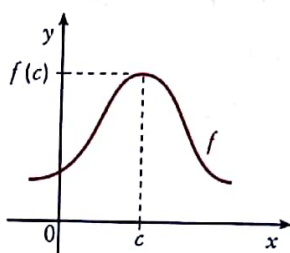
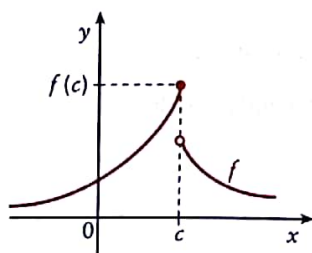
Sempre que se pretende falar dos extremos relativos deve-se referir a palavra "relativo" ou "relativos".

Por vezes, diz-se apenas máximo da função ou mínimo da função para referir o máximo absoluto ou o mínimo absoluto.

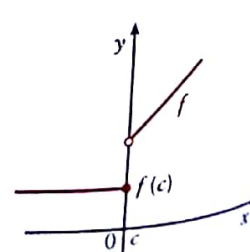
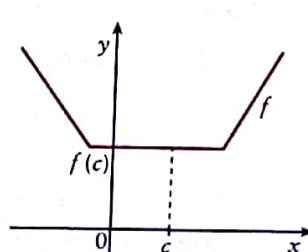
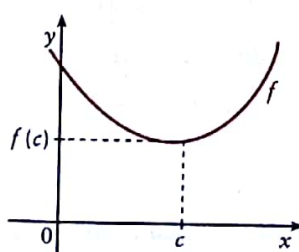
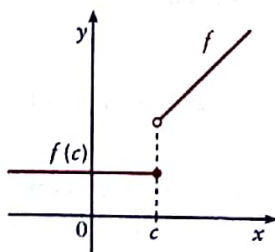
Aos máximos e mínimos da função também se chamam extremos da função.

Com os gráficos seguintes pretende-se esclarecer o significado de extremo relativo de uma função.

• $f(c)$ é máximo

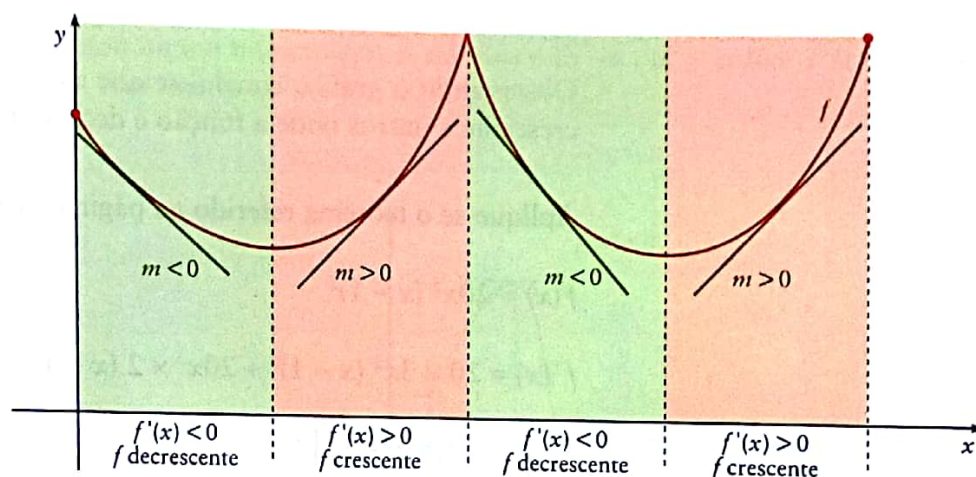


• $f(c)$ é mínimo



2.3 Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Na figura seguinte está representada graficamente a função f .



Intuitivamente, verifica-se que a monotonia da função está relacionada com o sinal da 1.ª derivada.

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

Exemplo 2 Intervalos de monotonia

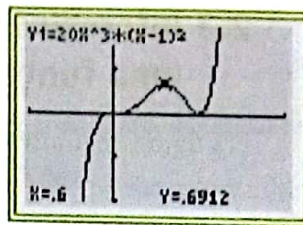
Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 20x^3(x-1)^2$$

Determine os intervalos onde a função é estritamente crescente e os intervalos onde a função é estritamente decrescente.

Resolução

Com a ajuda da calculadora gráfica vamos obter uma representação gráfica da função f .



Observando o gráfico conclui-se que existem intervalos onde a função é crescente e outros onde a função é decrescente.

Aplique-se o teorema referido na página anterior para os determinar.

$$f(x) = 20x^3 (x - 1)^2$$

$$f'(x) = 20 \times 3x^2 (x - 1)^2 + 20x^3 \times 2 (x - 1)$$

$$f'(x) = 20x^2 (x - 1) [3(x - 1) + 2x]$$

$$f'(x) = 20x^2 (x - 1) (5x - 3)$$

$$f'(x) = 0, \text{ se } x = 0, x = 1 \text{ ou } x = \frac{3}{5}.$$

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{5}$		1	$+\infty$
f'	+	0	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{432}{625}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

• f é estritamente crescente em $\left] -\infty, \frac{3}{5} \right]$ e em $[1, +\infty[$;

• f é estritamente decrescente em $\left[\frac{3}{5}, 1 \right]$.



Estude a monotonia de cada uma das seguintes funções:

2.1 $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x$;

2.2 $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$;

2.3 $f(x) = x e^{-x}$;

2.4 $f(x) = x \ln x$.

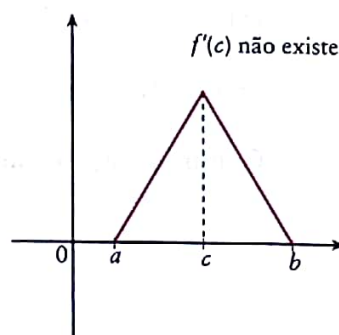
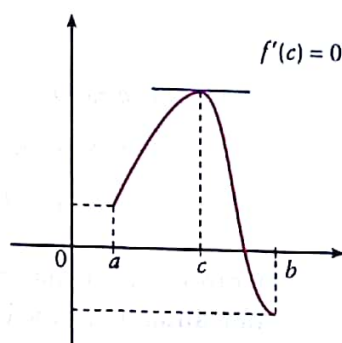
Para determinar o sinal de f' nos intervalos referidos no quadro, pode usar-se a factorização:

$$f'(x) = 20x^2 (x - 1) (5x - 3)$$

2.4 Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Se uma função f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.



Um elemento c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se $f'(c) = 0$ ou se $f'(c)$ não existe.

Aplicando o teorema referido e a definição de ponto crítico, sugere-se o seguinte procedimento para determinar os máximos e os mínimos de uma função num intervalo $[a, b]$.

Observação

É importante não confundir o máximo valor da função com o maximizante.

Se o maximizante é c , o máximo é $f(c)$.

Do mesmo modo, se o minimizante é c , o mínimo é $f(c)$.

(1) Determinar os pontos críticos de f em $]a, b[$.

(2) Calcular $f(c)$ para cada ponto crítico c , determinado em (1).

(3) Calcular $f(a)$ e $f(b)$.

(4) O máximo e o mínimo de f em $[a, b]$ são o maior e o menor dos valores calculados em (2) e (3).

Exemplo 3 Máximos e mínimos num intervalo

Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f , no intervalo $[-1, 1; 3]$, sendo f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 3x^3 - 9x$$

Resolução

f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $[-1, 1; 3]$.

Determinação dos pontos críticos:

$$f(x) = 3x^3 - 9x; \quad f'(x) = 9x^2 - 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

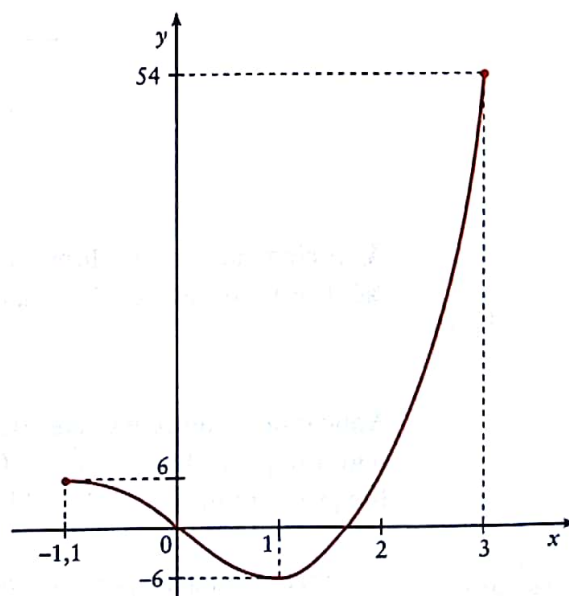
Como a derivada existe para $x \in \mathbb{R}$, os únicos pontos críticos são os que anulam a função derivada: 1 e -1.

Calcule-se $f(1)$, $f(-1)$, $f(-1, 1)$ e $f(3)$.

$$f(1) = -6; \quad f(-1) = 6; \quad f(-1, 1) = 5,907; \quad f(3) = 54$$

O máximo é 54 e o mínimo é -6.

Confirme-se graficamente.



Determine os extremos de cada uma das funções no intervalo indicado:

3.1 $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$
em $[-1, 4]$;

3.2 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
em $[0, 6[$;

3.3 $f(x) = x e^{-x}$ em $[-1, e]$;

3.4 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ em $[2, e]$.

No exemplo anterior os pontos críticos da função coincidiam com os zeros da primeira derivada, mas nem sempre assim acontece.

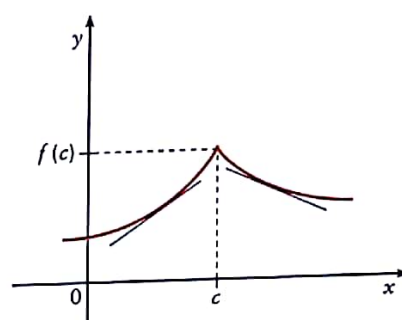
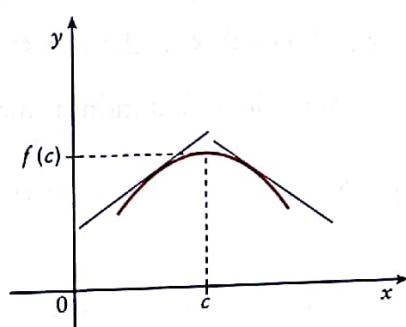
2.5 Extremos relativos e primeira derivada de uma função

A primeira derivada de uma função também pode ajudar a encontrar os extremos relativos.

Seja c um ponto crítico de f e suponha-se que f é contínua em c e derivável num intervalo aberto E contendo c , com a possível exceção de poder não ser derivável em c .

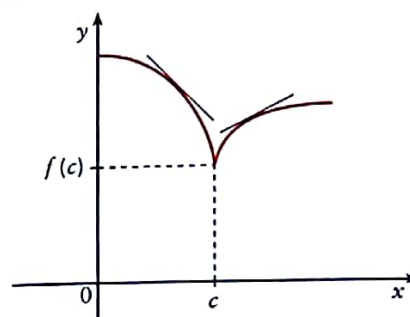
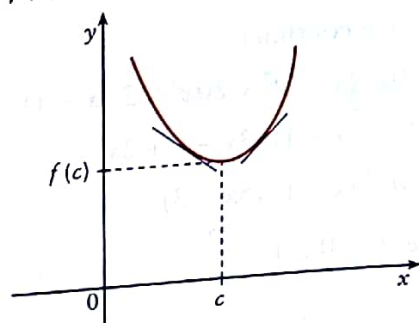
- Se o sinal de f' muda de positivo para negativo em c , então $f(c)$ é um máximo relativo.

$f(c)$ é máximo relativo



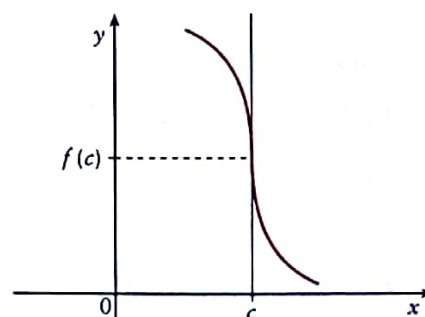
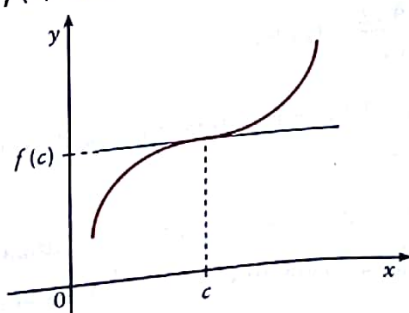
- Se o sinal de f' muda de negativo para positivo em c , então $f(c)$ é um mínimo relativo.

$f(c)$ é mínimo relativo



- Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo o x do intervalo E , excepto para $x = c$, então $f(c)$ não é um extremo relativo de f .

$f(c)$ não é extremo



Exemplo 4 Extremos relativos da função

Determine os extremos relativos de cada uma das funções, de domínio $\mathbb{R}$, a seguir definidas:

4.1 $f(x) = x^2 - 1$;

4.2 $f(x) = 20x^3(x-1)^2$;

4.3 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-9)$;

4.4 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

Resolução

4.1 $f(x) = x^2 - 1$

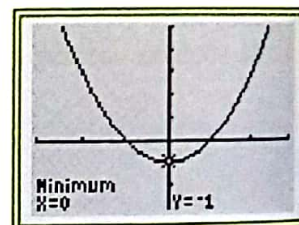
$D_f = \mathbb{R}$; f é contínua.

Calcule-se os zeros de f' :

$$f'(x) = 2x; f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$$

Estude-se o sinal de f' e a monotonia de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$



$f(0) = -1$ é um mínimo de f .

Confirme-se graficamente (ver figura acima).

4.2 $f(x) = 20x^3(x-1)^2$

$D_f = \mathbb{R}$; f é contínua.

$$f'(x) = 60x^2(x-1)^2 + 20x^3 \times 2(x-1)$$

$$f'(x) = 20x^2(x-1)(3x-3+2x)$$

$$f'(x) = 20x^2(x-1)(5x-3)$$

Zeros de f' : 0, 1 e $\frac{3}{5}$

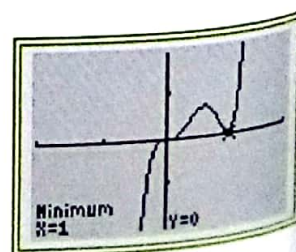
x	$-\infty$	0		$\frac{3}{5}$		1	$+\infty$
f'	+	0	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{432}{625} = 0,6912$$

$f\left(\frac{3}{5}\right) = 0,6912$ é um máximo relativo da função.

$f(1) = 0$ é um mínimo relativo da função.

Confirme-se graficamente (ver figura acima).



4.3 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-9)$

$D_f = \mathbb{R}$; f é contínua.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}(x-9) + x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{3}x^{-1}(x-9) + 1 \right]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = 0 \vee \frac{1}{3x}(x-9) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x-9+3x=0) \wedge x \neq 0$$

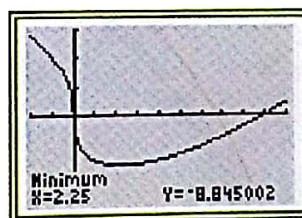
$$\Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=\frac{9}{4} \right) \wedge x \neq 0$$

x	$-\infty$	0		$\frac{9}{4}$	$+\infty$
f'	-	S.S.	-	0	+
f	$\searrow$		$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A função tem um único extremo relativo.

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{27}{4} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \text{ é o mínimo da função.}$$

Confirme-se graficamente:



4.4 $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

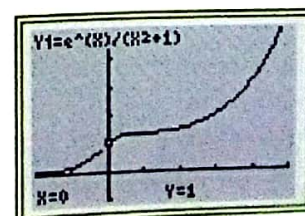
$D_f = \mathbb{R}$; f é contínua.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	+
f	$\nearrow$		$\nearrow$

Confirme-se graficamente:



A função f não tem extremos relativos.

Usando processos analíticos, determine os extremos relativos de cada uma das funções:

4.1 $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;

4.2 $g(t) = 4 - 20t + t^2 + 2t^3$;

4.3 $f(t) = t^3(t-2)$;

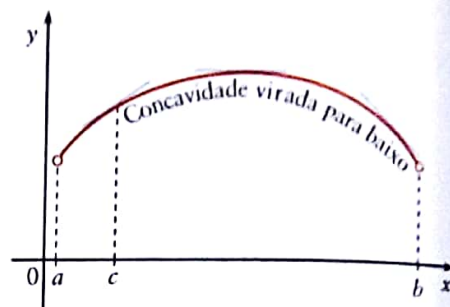
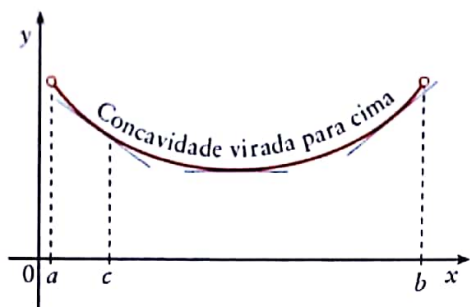
4.4 $f(x) = x^2 e^{-2x}$;

4.5 $f(t) = \frac{\ln t}{t}$.

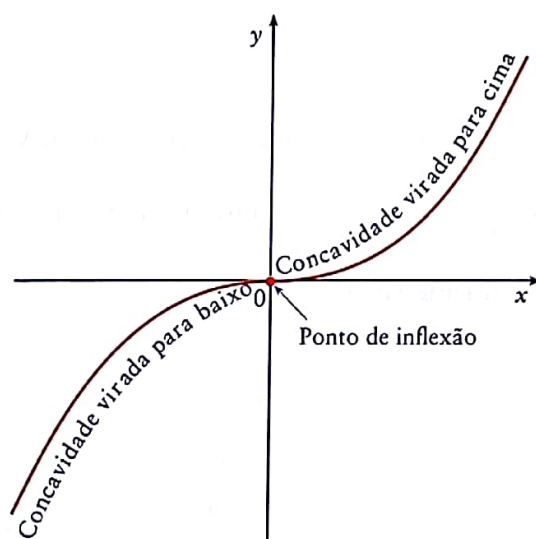
Confirme as suas respostas usando a calculadora gráfica.

2.6 Concavidade e segunda derivada de uma função

Uma função f tem em $]a, b[\subset D_f$ a concavidade virada para cima (baixo) se o seu gráfico se encontra para cima (baixo) da tangente ao gráfico em qualquer ponto de abscissa $c \in]a, b[$.



Seja $f: x \mapsto x^3$.

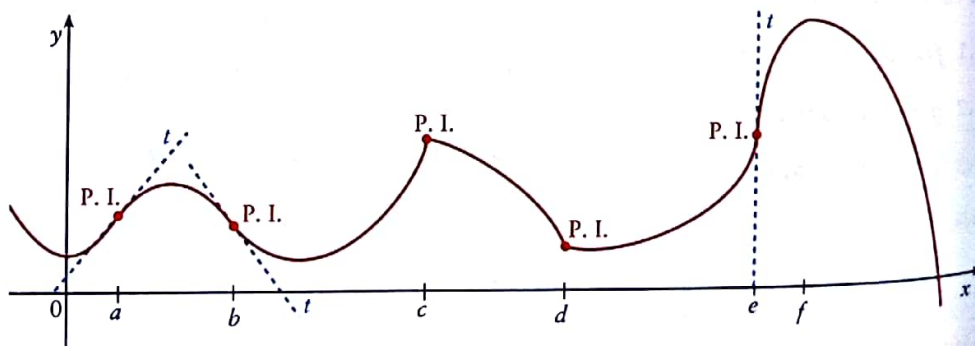


Em $]-\infty, 0]$ o gráfico de f tem a concavidade virada para baixo e em $[0, +\infty[$ o gráfico de f tem a concavidade virada para cima.

O ponto $(0, 0)$ separa, na função contínua f , a concavidade virada para cima da concavidade virada para baixo.

Ao ponto $(0, 0)$ chama-se **ponto de inflexão**.

Por vezes, o gráfico de uma função tem vários pontos de inflexão.



Observação

Alguns autores não consideram na figura anterior os pontos $(c, f(c))$ e $(d, f(d))$ pontos de inflexão pelo facto de neles o gráfico da função não ter tangente.

Por exemplo, na função f representada graficamente tem-se:

- Concavidade virada para baixo em:
 $[a, b]; [c, d]; [e, +\infty[$
- Concavidade virada para cima em:
 $] -\infty, a]; [b, c]; [d, e]$
- Pontos de inflexão (P. I.):
 $(a, f(a)); (b, f(b)); (c, f(c)); (d, f(d)); (e, f(e))$

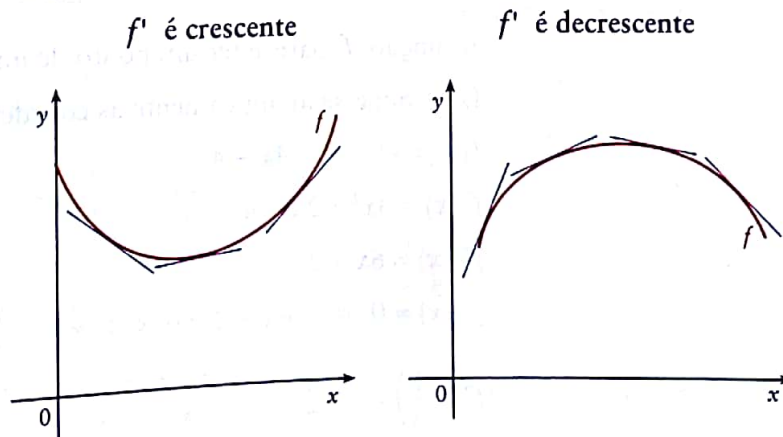
O ponto $(c, f(c))$ do gráfico de uma função f é um ponto de inflexão se são verificadas as seguintes condições:

- f é contínua em c ;
- existe um intervalo aberto $]a, b[$ contendo c de tal modo que o gráfico de f tem concavidade virada para baixo em $]a, c[$ e a concavidade virada para cima em $]c, b[$ ou vice-versa.

Por observação do gráfico pode-se prever quantos pontos de inflexão tem o gráfico de uma função.

Agora, vamos estudar como determinar o sentido de concavidade e os pontos de inflexão usando a segunda derivada.

Observe que:



Seja f uma função derivável em $]a, b[$. O gráfico f tem:

- a concavidade virada para cima se f' é crescente;
- a concavidade virada para baixo se f' é decrescente.

A monotonia de uma função f , num intervalo em que f é derivável, está relacionada com o sinal de f' nesse intervalo e a monotonia de f' está relacionada com o sinal de f'' .

Se a segunda derivada f'' de f existe num intervalo aberto $E =]a, b[$, então o gráfico de f :

- tem a concavidade virada para cima em E se f'' é maior do que 0 em E ;
- tem a concavidade virada para baixo em E se f'' é menor do que 0 em E .

Exemplo 5 Sentido da concavidade e pontos de inflexão

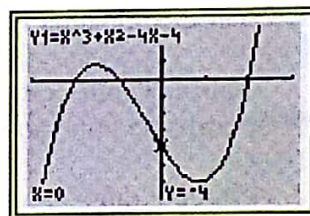
Seja $f: x \mapsto x^3 + x^2 - 4x - 4$.

Estude o sentido de concavidade do gráfico de f e determine, se existirem, os pontos de inflexão.

Resolução

$D_f = \mathbb{R}$; f é contínua.

Em primeiro lugar, vamos obter o gráfico de f com a calculadora gráfica e prever a existência ou não de pontos de inflexão.



A função f parece ter um ponto de inflexão.

Determine-se analiticamente as coordenadas do ponto de inflexão.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

$$f''(x) = 0 \iff 6x + 2 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{70}{27}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P. I.	$\cup$

O gráfico de f tem concavidade virada para baixo em $]-\infty, -\frac{1}{3}[$ e concavidade virada para cima em $]-\frac{1}{3}, +\infty[$.

O ponto $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{70}{27}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f .



Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = e^x (x^2 - x)$$

Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Pontos de inflexão e segunda derivada

No estudo do exemplo anterior, a função f tinha primeira e segunda derivadas no ponto $-\frac{1}{3}$ e $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ era um ponto de inflexão.

Pode existir um ponto de inflexão $(x_0, f(x_0))$ e a função não ter derivada em x_0 .

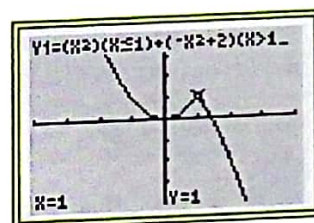
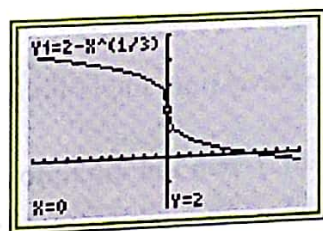
Exemplo 6

Estude as funções f e g definidas por:

$$f(x) = 2 - x^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

quanto à existência de pontos de inflexão dos respectivos gráficos.

Resolução



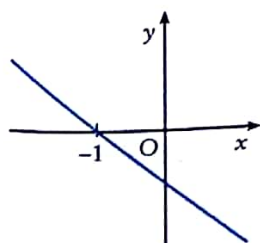
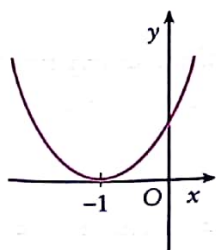
- 6.1 De uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a sua derivada f' é definida por:

$$f'(x) = \frac{1 + \ln x}{2x}$$

Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

- 6.2 Seja f uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abscissa -1 .

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da segunda derivada de f ?



f é contínua.

$$f'(x) = -\frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times x^{\frac{1}{3}-2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	S. S.	+
f	⌒	P. I.	⌒

O ponto $(0, 2)$ é ponto de inflexão do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$$

g é contínua.

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1 \\ -2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ -2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$g''(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

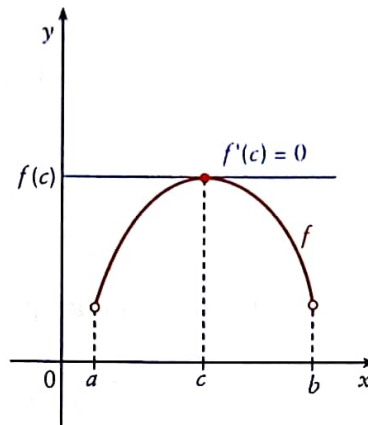
x	$-\infty$	1	$+\infty$
g''	+	S. S.	-
g	⌒	P. I.	⌒

O ponto $(1, 1)$ é ponto de inflexão do gráfico de f .

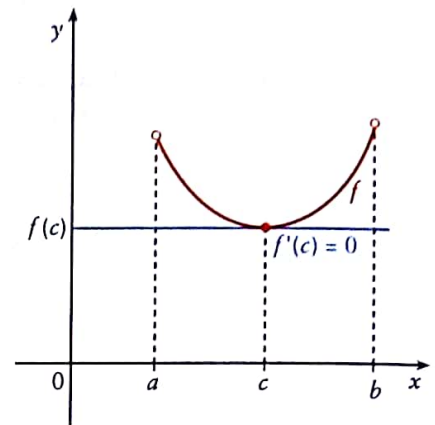
Justifique a resposta.

2.7 Teste da segunda derivada

Observem-se as seguintes representações gráficas.



$$\begin{aligned} f'(c) &= 0 \\ f''(c) &< 0 \\ f(c) &\text{ é máximo relativo.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f'(c) &= 0 \\ f''(c) &> 0 \\ f(c) &\text{ é mínimo relativo.} \end{aligned}$$



Supondo que f é derivável num intervalo aberto $E =]a, b[$ contendo c e $f'(c) = 0$:

- se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo relativo em c ;
- se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo relativo em c .

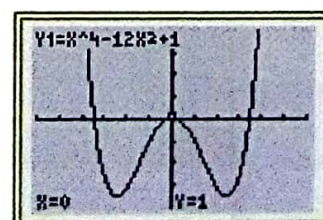
Exemplo 7 Teste da segunda derivada

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 - 12x^2 + 1$.

- 7.1 Use o teste da segunda derivada para determinar os extremos relativos de f .
- 7.2 Estude a concavidade do gráfico de f e determine, se existirem, os pontos de inflexão.

Resolução

Em primeiro lugar, vamos obter o gráfico de f com a calculadora gráfica para percebermos o que irá acontecer ao longo da resolução analítica do problema.



O gráfico da função terá dois pontos de inflexão.

7.1 $f(x) = x^4 - 12x^2 + 1$

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24$$

Usa-se f' para encontrar os pontos críticos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 24) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

Estude-se o sinal da segunda derivada:

$$f''(0) < 0; f''(\sqrt{6}) > 0; f''(-\sqrt{6}) > 0$$

Calcule-se o valor da função f em cada um dos pontos críticos:

$$f(0) = 1; f(\sqrt{6}) = -35; f(-\sqrt{6}) = -35$$

Resumindo num quadro os resultados obtidos:

Ponto crítico c	$f''(c)$	Sinal de $f''(c)$	$f(c)$	Conclusão
$-\sqrt{6}$	48	+	-35	-35 é um mínimo relativo de f .
0	-24	-	1	1 é um máximo relativo de f .
$\sqrt{6}$	48	+	-35	-35 é um mínimo relativo de f .

A função tem um máximo relativo para $x = 0$, que é 1.

A função tem um mínimo relativo para $x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$ que é -35.

7.2 Para procurar os possíveis pontos de inflexão usa-se a segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 24$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
f''	+	0	-	0	+
f	⌋	P. I.	⌋	P. I.	⌋

$$f(-\sqrt{2}) = -19; f(\sqrt{2}) = -19$$

Os pontos $(-\sqrt{2}, -19)$ e $(\sqrt{2}, -19)$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

O gráfico da função tem a concavidade virada para cima em:

$$]-\infty, -\sqrt{2}] \text{ e } [\sqrt{2}, +\infty[.$$

A concavidade do gráfico de f é virada para baixo em:

$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = 2x - 3 \ln x$$

Determine, por processos analíticos, os extremos da função.

2.8 Estudo de funções

Muitos dos problemas do cálculo centram-se no estudo do comportamento de uma função.

Uma forma de avaliar o comportamento de uma função é obter o seu gráfico.

A tecnologia gráfica hoje ao nosso dispor constitui uma ajuda preciosa nesta matéria. No entanto, por vezes é necessário clarificar o comportamento de uma função num ponto e quantificar com rigor esse comportamento. Os métodos analíticos são, por isso, indispensáveis no estudo das funções. Também é evidente que não conhecendo e dominando tais processos não é possível de uma forma consciente e crítica interpretar os resultados obtidos pela tecnologia.

Neste ponto – *Estudo de funções* –, não se trata de ensinar matérias novas, mas de apresentar uma síntese do que anteriormente foi dito e uma sequência de procedimentos que conduzem, de uma forma abrangente, ao estudo teórico de uma função. Para cada problema concreto, provavelmente, apenas alguns destes pontos serão suficientes para dar resposta às situações apresentadas.

Estudo de uma função

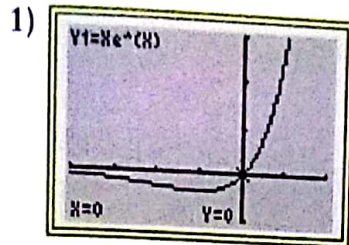
- 1) Obter o gráfico usando a calculadora gráfica.
A imagem obtida vai ajudar a compreender e a dar sentido aos valores que se obtêm analiticamente.
- 2) Determinar o domínio da função, se não for dado.
- 3) Estudar a continuidade da função.
- 4) Determinar as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da função com os eixos coordenados.
- 5) Estudar a simetria do gráfico da função.
- 6) Determinar os extremos e estudar a monotonia da função.
- 7) Estudar o sentido da concavidade do gráfico da função.
- 8) Determinar as equações das assíntotas do gráfico da função, caso existam.
- 9) Confrontar os dados obtidos analiticamente com o gráfico obtido com a calculadora gráfica e indicar o contradomínio.

Utilizaremos esta sequência de procedimentos no estudo de alguns exemplos de funções.

Exemplo 8 Estudo de uma função exponencial

Estude a função real de variável real:

$$f: x \mapsto x e^x$$

Resolução

2) Domínio

$$D_f = \mathbb{R}$$

3) Continuidade

A função é contínua em $\mathbb{R}$.

4) Intersecção com os eixos

Intersecção do gráfico com o eixo Ox :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$A \mapsto (0, 0)$$

Intersecção do gráfico com o eixo Oy :

$$f(0) = 0$$

$$B \mapsto (0, 0)$$

5) Simetria do gráfico

$$f(-x) = -x e^{-x}$$

A função não é par nem ímpar.

Não há simetrias no gráfico da função f .

6) Intervalos de monotonia e extremos

$$f(x) = x e^x; f'(x) = e^x + x e^x = e^x (1 + x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}. \text{ O mínimo da função é } -\frac{1}{e}.$$

A função é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente crescente em $[-1, +\infty[$.

7) Concavidades e pontos de inflexão

$$f(x) = x e^x; \quad f'(x) = e^x (1 + x)$$

$$f''(x) = e^x (1 + x) + e^x$$

$$f''(x) = e^x (2 + x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f(-2) = -2 e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f		P. I.	

O ponto $P \curvearrowright \left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f .

8) Assíntotas

O gráfico da função não tem assíntotas verticais.

Não-verticais: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx].$$

• Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$$

Como $m \notin \mathbb{R}$, não existe assíntota quando $x \rightarrow +\infty$.

• Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$$

Se $m = 0$, vem:

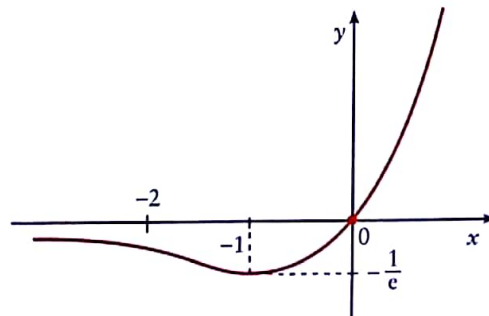
$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

$$\begin{aligned} y = -x &\Leftrightarrow x = -y \\ x \rightarrow -\infty &\Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

A recta da equação $y = 0$ é assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$.

9) Gráfico e contradomínio



$$D_f' = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$$

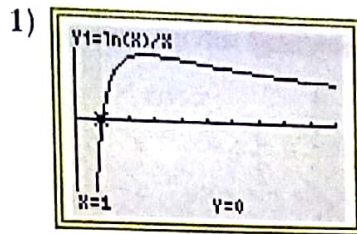


Estude, por processos analíticos, a função f definida por:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

Exemplo 9 Estudo de uma função logarítmicaEstude a função f definida por:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Resolução

2) Domínio

$$D_f =]0, +\infty[$$

3) Continuidade

A função é contínua em todo o seu domínio.

4) Intersecção com os eixos

Intersecção do gráfico com o eixo Ox :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$A \curvearrowright (1, 0)$$

O domínio de função é $\mathbb{R}^+$, por isso não é possível a intersecção do gráfico com o eixo Oy .

5) Simetria do gráfico

O domínio é $\mathbb{R}^+$. A função não é par nem é ímpar.

6) Intervalos de monotonia e extremos

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

x	0		e	$+\infty$
f'		+	0	-
f		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

 $f(e) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e}$ é um máximo relativo da função f .

7) Concavidades e pontos de inflexão

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff x = e^{\frac{3}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''		-	0	+
f		⤿	P. I.	⤿

A concavidade do gráfico de f é virada para baixo em $\left]0, e^{\frac{3}{2}}\right]$ e virada para cima em $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$

$P \curvearrowleft \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}\right)$ é o único ponto de inflexão do gráfico de f .

8) Assíntotas

Verticais

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

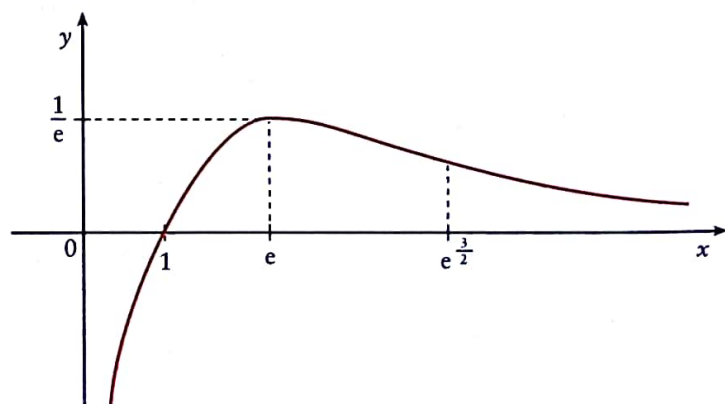
A recta da equação $x = 0$ é assíntota vertical.

Não-verticais

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

A recta da equação $y = 0$ é assíntota horizontal.

9) Gráfico e contradomínio



Estude, por processos analíticos, a função f definida por:

$$f(x) = x - \ln x$$

$$D_f' = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right]$$

Exemplo 10 Estudo de uma função utilizando métodos analíticos

Seja f a função, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = e^{-x} \cos x$.
Determine os extremos, os pontos de inflexão e faça um esboço do gráfico de f .

Resolução**Determinação dos extremos da função**

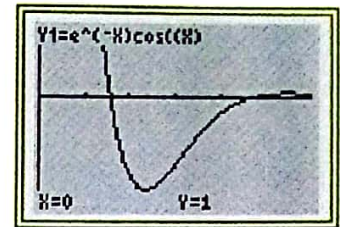
$$f(x) = e^{-x} \cos x$$

$$f'(x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

$$f'(x) = -e^{-x} (\cos x + \sin x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x. \quad e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, vem: $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.



x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
f'		-	0	+	0	-	0
f	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$e^{-2\pi}$
	Máx.		Mín.		Máx.		Mín.

$$f(0) = 1; f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}}; f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7\pi}{4}}; f(2\pi) = e^{-2\pi}$$

$$f(0) = 1 \text{ e } f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7\pi}{4}} \text{ são máximos relativos de } f.$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \text{ e } f(2\pi) = e^{-2\pi} \text{ são mínimos relativos de } f.$$

Determinação dos pontos de inflexão

$$f''(x) = e^{-x} (\cos x + \sin x + \sin x - \cos x) = 2e^{-x} \sin x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi \vee x = 2\pi$$

x	0		π		2π
f''		+	0	-	
f		$\cup$	P. I.	$\cap$	

O gráfico da função f tem um ponto de inflexão:

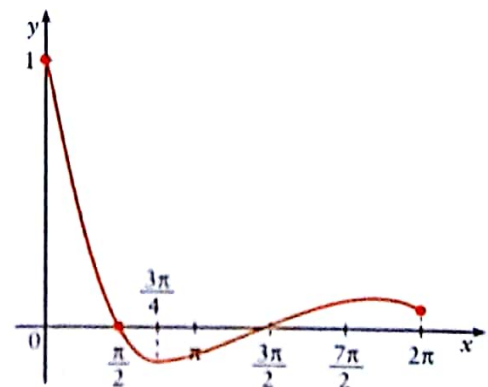
$$A \curvearrowright (\pi, -e^{-\pi})$$

Esboço do gráfico da função

Para representar o gráfico da função vamos ainda determinar os zeros e $f(0)$.

$$f(0) = e^{-0} \times \cos 0 = 1$$

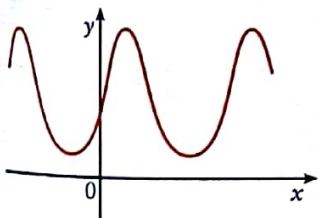
$$\begin{aligned} \text{Zeros: } f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$



10

10.1 O gráfico seguinte representa a função:

$$f(x) = e^{\sin x}$$



Usando processos analíticos, determine:

- os extremos em $[0, 2\pi]$;
- o contradomínio da função.

10.2 Seja a função:

$$f(x) = e^x \cos x$$

definida em $\left[-2\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Usando processos analíticos:

- determine os extremos;
- determine os pontos de inflexão;
- esboce o gráfico de f .

2.9 Problemas de otimização

Muitos fenómenos da Física, Economia, Sociologia e outras ciências têm como modelo matemático uma função:

$$f: x \mapsto f(x)$$

As questões que na realidade se colocam estão muitas vezes relacionadas com a determinação de valores óptimos (maximizar o lucro, minimizar o material a utilizar...).

Para responder a algumas destas questões aplica-se o conceito de derivada e em particular a determinação dos extremos da função no domínio da variável independente.

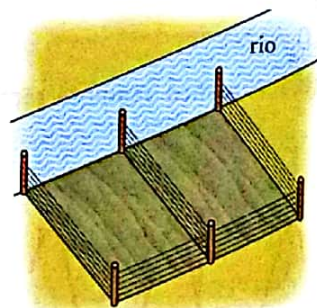
Nos exemplos seguintes encontraremos diferentes tipos de funções como modelos matemáticos: funções polinomiais, funções racionais, funções irracionais, funções exponenciais e funções logarítmicas.

Exemplo 11 O modelo é uma função polinomial

Um agricultor tem 810 meticais para gastar na vedação de duas cercas contíguas, rectangulares e iguais, junto a um rio, como se mostra na figura ao lado.

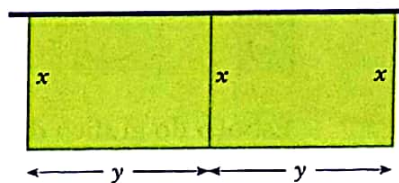
A vedação dos três lados perpendiculares ao rio custa 9 meticais o metro, enquanto que vedar o lado paralelo ao rio custa 8 meticais o metro.

Quais devem ser as dimensões das cercas de modo que a área destas seja máxima?



Resolução

Pretende-se otimizar a área das cercas.



Comecemos por fazer um desenho e identificar as variáveis independentes.

Sejam:

- x : comprimento de um lado perpendicular ao rio;
- y : comprimento do lado, de uma cerca, paralelo ao rio.

Estamos condicionados pelo custo da vedação e pelo dinheiro disponível.

$$3x \times 9 + 2y \times 8 = 810$$

Valor disponível
Custo da vedação do lado paralelo ao rio
Custo da vedação dos lados perpendiculares ao rio

ou seja:

$$y = \frac{810 - 27x}{16}$$

A área A é dada por $A = 2xy$; escrevendo a área em função de x , vem:

$$A(x) = 2x \times \frac{810 - 27x}{16} \quad \text{ou} \quad A(x) = \frac{810x - 27x^2}{8}.$$

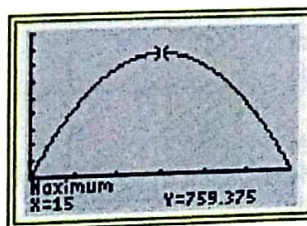
Calculando $A'(x)$, vem:

$$A'(x) = \frac{1}{8} (810 - 54x); \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

Estudemos a variação da função área A .

x	0		15	
A'		+	0	-
A		↗	Máx. 759,375	↘

Verificação com a calculadora:



$$x = 15; \quad y = \frac{810 - 27 \times 15}{16} = 25,3125$$

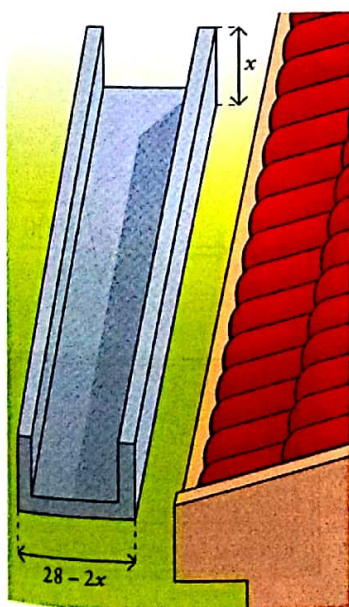
Verificação

$$3 \times 15 \times 9 + 2 \times 25,3125 \times 8 = 810$$

Logo, as dimensões da cerca que conduzem à área máxima são $x = 15$ m e $y \approx 25,3$ m.

11

Uma folha rectangular de metal com 28 cm de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.



Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo que a capacidade da caleira seja máxima.

Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado?

Resolva o problema usando processos analíticos.

Use a calculadora para confirmar a sua resposta.

Exemplo 12 O modelo é uma função racional

Pretende-se minimizar o custo C dos materiais usados na produção de recipientes cilíndricos fechados com 1 litro de capacidade.

A superfície lateral dos cilindros é feita de um material que custa 2 meticais por centímetro quadrado.

A superfície das bases é feita de outro material cujo custo é 1,5 metical por centímetro quadrado.

Quais devem ser as dimensões dos cilindros (raio de base e altura), de modo a minimizar o custo dos materiais utilizados no seu fabrico?

Resolução

Sejam:

- r : raio de base do cilindro, em cm
- h : altura do cilindro, em cm
- Área da base: $A_b = \pi r^2$, em cm^2
- Área da superfície lateral: $A_l = 2\pi r \times h$, em cm^2
- Volume do cilindro: $V = \pi r^2 h$, em cm^3

Sabemos que: $V = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

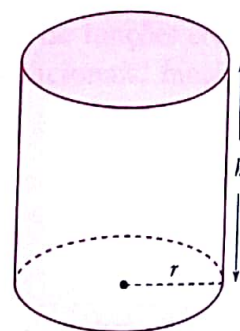
$$\text{Então: } 1000 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \text{ (em cm)}$$

O custo C em função de r é dado, em euros, por:

$$C(r) = 2 \times \pi r^2 \times 1,5 + 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} \times 2$$

ou

$$C(r) = 3\pi r^2 + \frac{4000}{r}; \quad C'(r) = 6\pi r - \frac{4000}{r^2}; \quad C'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{4000}{6\pi}}$$

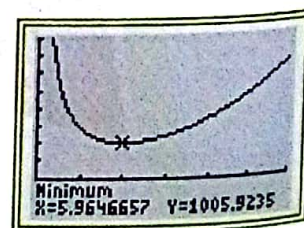


Uma fábrica de frascos destinados a produtos de conserva pretende o seguinte:

- construir uma embalagem cilíndrica com a capacidade de $48\pi \text{ cm}^3$;
- a base inferior do cilindro do mesmo material da superfície lateral, que custa 2 meticais por m^2 ;
- a base superior do cilindro de um material mais caro, que custa 3 meticais por m^2 .

Supondo que não haverá perdas de material, determine, com aproximação às centésimas, a altura e o raio da base do cilindro de modo a minimizar o custo do material gasto.

r	0		$\sqrt[3]{\frac{4000}{6\pi}}$	
C'		-	0	+
C		$\searrow$	Mín.	$\nearrow$



$$r = \sqrt[3]{\frac{4000}{6\pi}} \approx 5,96 \text{ cm}$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \approx 8,95 \text{ cm}$$

Verificação

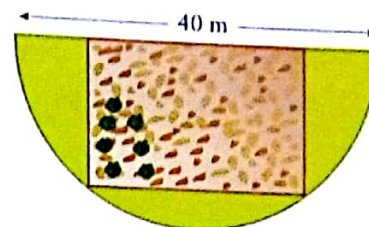
$$V = (\pi \times 5,965^2 \times 8,947) \text{ cm}^3 \approx 1000 \text{ cm}^3$$

Logo, o custo mínimo dos materiais para a construção dos recipientes obtém-se para cilindros com 5,96 cm de raio e 8,95 cm de altura.

Exemplo 13 O modelo é uma função irracional

Um terreno tem a forma de um semicírculo de raio 20 m.

Pretende-se fazer um jardim com a forma de um rectângulo, em que um dos lados está sobre o diâmetro do semicírculo e os vértices do lado oposto pertencem à circunferência.



13.1 Determine as dimensões do jardim de modo que a sua área seja máxima.

13.2 Qual é a área máxima do jardim?

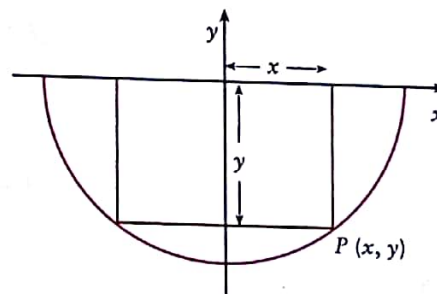
Resolução

Começamos por desenhar um sistema cartesiano com origem no centro do semicírculo.

Consideremos y e x , respectivamente, a largura e o comprimento do rectângulo.

$P(x, y)$ pertence à circunferência da equação $x^2 + y^2 = 20^2$, de onde se conclui que:

$$y = \sqrt{400 - x^2}$$



Por outro lado, a área do rectângulo A é dada, em m^2 , em função de x por:

$$A(x) = 2xy$$

Substituindo y em $A(x)$, vem:

$$A(x) = 2x\sqrt{400 - x^2}$$

Calculando $A'(x)$, vem:

$$A'(x) = 2\sqrt{400 - x^2} + 2x \times \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}}$$

ou

$$A'(x) = \frac{4(200 - x^2)}{\sqrt{400 - x^2}}; A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2} \vee x = -10\sqrt{2}$$

Como $x > 0$, vem: $x = 10\sqrt{2}$.

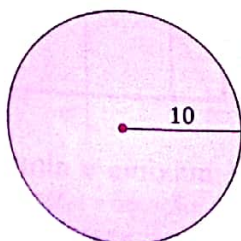
x	0		$10\sqrt{2}$	
A'		+	0	-
A			Máx. 400	

Logo, as dimensões do jardim são $x = 10\sqrt{2}$ m e $y = 20\sqrt{2}$ m.

A área máxima do jardim é $400 m^2$.

13

Um triângulo rectângulo está inscrito num círculo de raio 10 cm.



Determine as dimensões do triângulo rectângulo de área máxima que se pode inscrever no círculo e classifique-o quanto aos lados.

Exemplo 14 O modelo é uma função exponencial

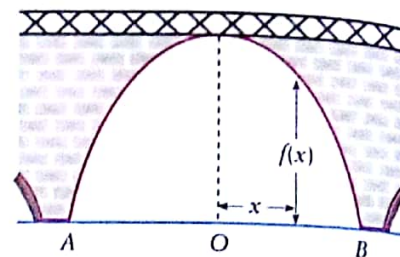
A figura representa o arco de uma ponte.

Sejam A e B os pontos de intersecção do arco central da ponte com o nível da água do rio e seja O o ponto médio de $[AB]$.

Admita que a recta AB é um eixo orientado de origem O e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto, situado entre A e B , de abscissa x , a altura do arco, em metros, é dada por:

$$f(x) = 20 - 6(e^{0,09x} + e^{-0,09x})$$



14.1 Recorrendo ao estudo da derivada da função f , mostre que, tal como a figura sugere, é no ponto de abscissa zero que a altura do arco é máxima.

14.2 Explique como determinar a distância entre A e B .

Resolução

$$\begin{aligned} 14.1 \quad f'(x) &= -6[(e^{0,09x})' + (e^{-0,09x})'] \\ &= -6(0,09e^{0,09x} - 0,09e^{-0,09x}) \\ &= -0,54e^{0,09x} + 0,54e^{-0,09x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -0,54e^{0,09x} + 0,54e^{-0,09x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{0,09x} = e^{-0,09x} \\ &\Leftrightarrow 0,09x = -0,09x \\ &\Leftrightarrow 0,18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x		0	
f'	+	0	-
f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

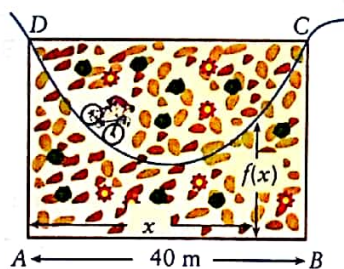
Conclusão: É no ponto de abscissa zero que é máxima a altura do arco.

14.2 Determina-se a distância entre A e B calculando os zeros da função.

A distância entre A e B é igual à soma dos valores absolutos dos zeros da função.

14

A figura representa um jardim rectangular $[ABCD]$, com um caminho representado na figura pela linha curva CD , dada pela função:



$$f(x) = 9(e^{2-0,1x} + e^{0,1x-2})$$

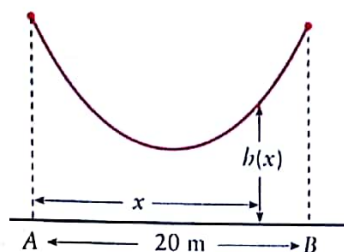
onde $f(x)$ é a distância a AB , em metros, do ponto da curva DC , que se situa a x metros à direita do ponto A .

14.1 Recorrendo ao estudo da derivada da função f , determine x de modo que $f(x)$ seja mínima. Interprete o resultado no contexto do problema.

14.2 Mostre que $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Exemplo 15 O modelo é uma função logarítmica

Dois postes A e B estão distanciados 20 m e suportam um cabo rígido, como se mostra na figura.



Considere a função h definida por:

$$h(x) = 20 - 3 \ln(-x^2 + 20x + 13)$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Admita que h é a altura, em metros, do ponto do cabo suspenso situado x metros à direita do ponto A .

15.1 Qual é a altura do ponto A ? E do ponto B ?

15.2 Sem recorrer à calculadora, estude a função h quanto à monotonia e conclua que é num ponto equidistante dos postes que se encontra o ponto do cabo mais próximo do solo.

Resolução

15.1 Com a ajuda da calculadora tem-se que:

$$x = 0; h(0) \approx 12,3 \text{ m}$$

$$x = 20; h(20) \approx 12,3 \text{ m}$$

Logo, a altura dos postes é 12,3 m com uma casa decimal.

$Y_1(0)$ 12.30515193
 $Y_1(20)$ 12.30515193

15.2 $h'(x) = -3 \times \frac{-2x + 20}{-x^2 + 20x + 13}, 0 \leq x \leq 20$

x	0		10		20
h'		-	0	+	
h		↘	Mín.	↗	

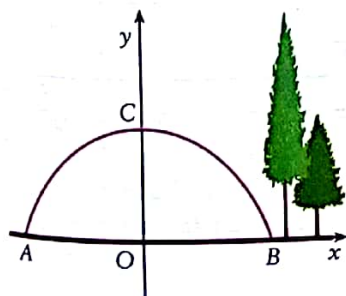
No intervalo $[0, 20]$ a função tem um mínimo para $x = 10$.

Como os postes distam 20 m e $20 : 2 = 10$, a distância mínima do cabo ao solo obtém-se no ponto do cabo que dista igualmente dos dois postes.

15

O modelo matemático encontrado para descrever o arco de entrada num túnel, representado no sistema cartesiano o. n. xOy , é dado pela função:

$$f(x) = \ln(16 - x^2)$$

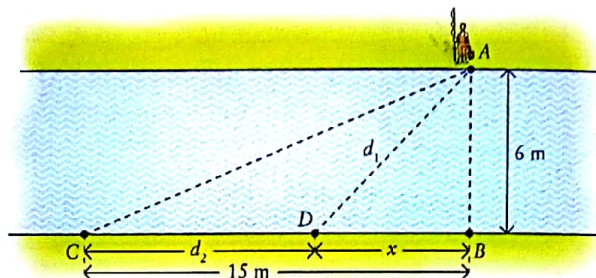


15.1 Resolva a equação $f'(x) = 0$ e interprete o valor encontrado no contexto do problema.

15.2 Determine a distância $\overline{AB}$ (a largura da entrada no túnel).

Exemplo 16 A travessia do rio

Um rio tem 6 metros de largura.



Um pescador encontra-se no local A , numa margem do rio, e pretende ir para C , na outra margem, demorando o menos possível.

A distância de C ao local B , oposto a A , é de 15 m.

A velocidade do pescador na água é de 2 km/h e em terra é de 6 km/h.

Como deve proceder o pescador?

Resolução

De acordo com a figura, o pescador terá de percorrer a distância $d_1 + d_2$ no menor tempo possível.

$$d_1 = \sqrt{36 + x^2}; \quad d_2 = 15 - x$$

O tempo T de viagem é dado por:

$$T(x) = \frac{\sqrt{36 + x^2}}{2000} + \frac{15 - x}{6000}$$

$$2 \text{ km/h} = 2000 \text{ m/h}$$

$$6 \text{ km/h} = 6000 \text{ m/h}$$

Calcule-se a derivada da função:

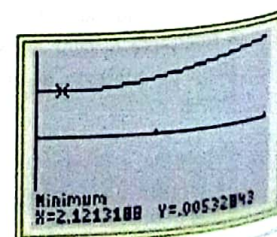
$$T'(x) = \frac{x}{2000 \sqrt{36 + x^2}} - \frac{1}{6000}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \sqrt{36 + x^2} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

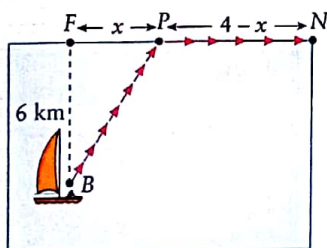
x	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	15
T'	-	0	+
T	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

A única solução possível seria o pescador dirigir-se ao ponto D , que dista $\frac{3}{\sqrt{2}}$ m ($\approx 2,1$ m) do ponto B e, em seguida, dirigir-se por terra para o ponto C .

Com a calculadora gráfica confirmou-se a solução do problema.

**16**

Observe a figura.



O João encontra-se num barco, no ponto B , em frente ao farol, no ponto F .

Sabe-se que:

- $\overline{BF} = 6 \text{ km}$
- $\overline{FN} = 4 \text{ km}$

Pretende deslocar-se para N , onde, na mesma praia, se encontram os nadadores-salvadores.

No mar, o João desloca-se a 4 km/h e na praia a 8 km/h.

Determine a localização do ponto P de modo que o João chegue a N , passando por P , no menor tempo possível.

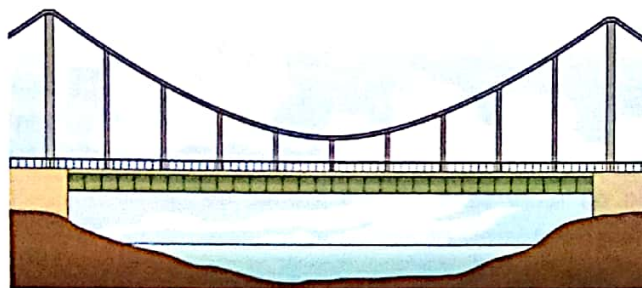
Apresente o resultado indicando a distância de P a F , em quilómetros, com duas casas decimais.

Exemplo 17 O cabo preso a dois postes

Em certas condições, um cabo preso a dois postes toma a forma do gráfico da função:

$$f(x) = 4e^x + e^{-x}$$

sendo $f(x)$ a distância ao tabuleiro da ponte do ponto do cabo situado x metros à direita de um determinado ponto tomado como origem do sistema cartesiano.



Determine a distância mínima do cabo ao tabuleiro da ponte.

Resolução

Pretendemos determinar o mínimo da função.

Temos que:

$$f(x) = 4e^x + e^{-x}; \quad f'(x) = 4e^x - e^{-x}$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x - e^{-x} = 0.$$

Fazendo $e^x = t$, vem:

$$4t - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2}$$

$t = -\frac{1}{2}$ é impossível porque $e^x > 0, \forall x$.

$$\text{Para } t = \frac{1}{2}, \text{ vem } e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	$\ln \frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

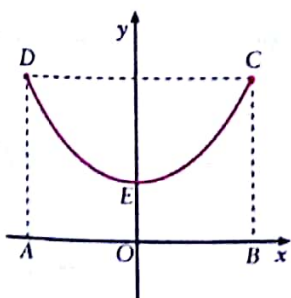
$f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$: mínimo da função.

$$\begin{aligned} f\left(\ln \frac{1}{2}\right) &= 4e^{\ln \frac{1}{2}} + e^{-\ln \frac{1}{2}} \\ &= 4e^{\ln \frac{1}{2}} + e^{\ln 2} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 4 \end{aligned}$$

Logo, a distância mínima do cabo ao tabuleiro da ponte é 4 m.



A figura representa uma rampa para a prática de desporto.

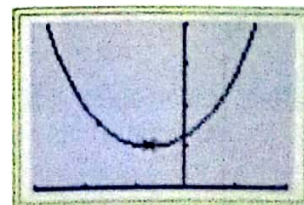


A linha curva CD tem como modelo matemático a função definida por:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

17.1 Calcule a distância mínima da rampa ao solo representada na figura pelo eixo das abscissas.

17.2 Se $AB = 4$ m, determine AD .



QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1** A área máxima de um triângulo isósceles com 60 cm de perímetro é aproximadamente:

(A) 364 cm^2 ;
 (B) 173 cm^2 ;
 (C) 100 cm^2 ;
 (D) 203 cm^2 .

10 pontos

- 2** Dada a função $f: [1, 2e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

a equação da recta tangente ao gráfico de f que tem declive máximo é:

(A) $y = \frac{1}{4}x + \ln 2$;
 (B) $y = 2,5x + \frac{9}{2}$;
 (C) $y = 2,5x + \ln 2 - \frac{9}{2}$;
 (D) $y = 2,5x - \ln 2 + \frac{9}{2}$.

10 pontos

- 3** Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Na figura 1 está parte da representação gráfica da função g' e na figura 2 parte da representação gráfica de g'' , respectivamente primeira e segunda derivadas de g .

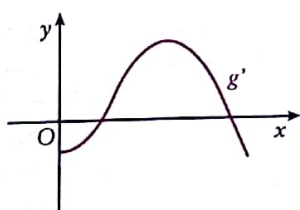


Figura 1

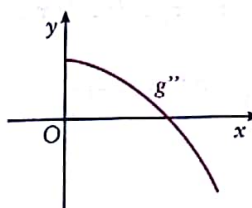
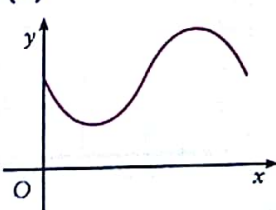


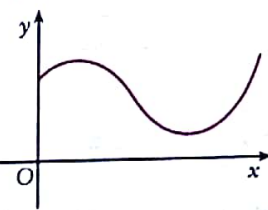
Figura 2

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de g ?

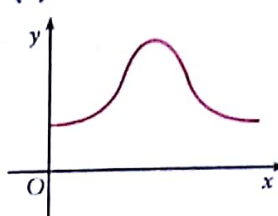
(A)



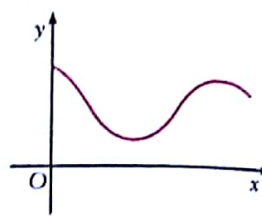
(B)



(C)



(D)



10 pontos

- 4** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e c um ponto do domínio de f tal que $f'(c)$ não existe.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) c é zero de f .
 (B) $f(c)$ é extremo relativo de f .
 (C) f não é contínua em c .
 (D) c é ponto de acumulação do domínio de f .

10 pontos

- 5** Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que a sua derivada f' é tal que:

$$f'(x) = -x + 1$$

Relativamente à função f , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico tem a concavidade virada para cima.
 (B) f é decrescente em $\mathbb{R}$.
 (C) f tem um mínimo para $x = 1$.
 (D) f tem um máximo para $x = 1$.

10 pontos

- 6** De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada é $f'(x) = -e^x - 1$.

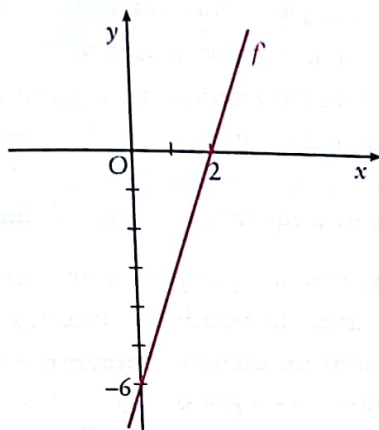
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) f tem um máximo absoluto.
 (B) f tem um mínimo absoluto.
 (C) f é estritamente decrescente.
 (D) f tem a concavidade do gráfico virada para cima.

10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

- 1 O gráfico corresponde à função derivada f' de uma função f .



- 1.1 Estude a monotonia da função f e diga se tem máximo ou mínimo.
- 1.2 A função f tem algum ponto de inflexão? Justifique.
- 1.3 Qual é o sentido da concavidade do gráfico da função f ? Justifique a resposta.

20 pontos

- 2 Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

Determine o domínio, as assíntotas do gráfico de f , os extremos e os pontos de inflexão do gráfico da função.

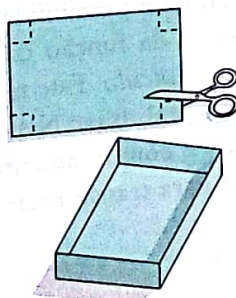
20 pontos

- 3 Uma caixa aberta, com base rectangular, vai ser construída a partir de uma folha com 25 por 30 cm.

Na folha serão cortados quatro cantos com a forma de um quadrado.

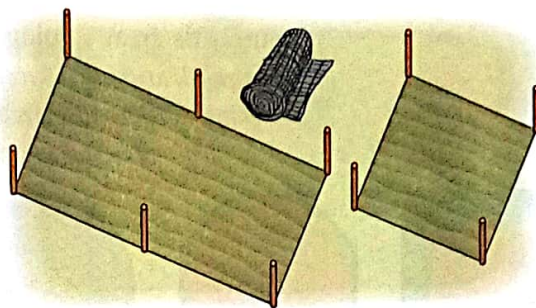
Determine, com aproximação às centésimas, as dimensões dos cantos a cortar de modo a obter-se uma caixa de capacidade máxima.

(Use a calculadora apenas para efectuar cálculos.)



20 pontos

- 4 Um agricultor tem 1680 metros de rede para vedar dois terrenos: um rectangular em que o comprimento é o dobro da largura e o outro quadrado, como se mostra na figura seguinte.



Determine as dimensões dos terrenos de modo a minimizar a área dos dois espaços.

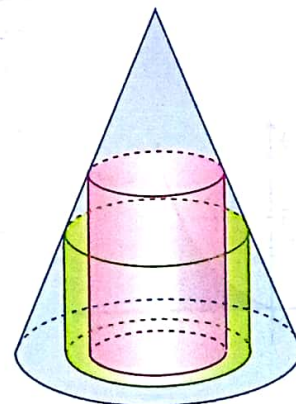
20 pontos

- 5 Observe a figura.

Os cilindros e o cone têm a base assente no mesmo plano e as respectivas alturas estão contidas na mesma recta.

O cone tem de altura 60 cm e de raio da base 10 cm.

Determine o volume máximo do cilindro que se pode inscrever no cone.



30 pontos

- 6 O proprietário de um restaurante tem 30 lugares disponíveis para cada refeição e por cada almoço ou jantar cobra 200 meticais.

Por cada 10 meticais que aumenta ao preço da refeição perde um cliente, que se desloca para outro restaurante mais económico.

Qual deve ser o custo da refeição que mais receita traz ao proprietário do restaurante?

30 pontos

Um olhar sobre a História

A ideia básica do conceito de integral já estava presente no método de exaustão atribuído a Eudoxo (408-355 a. C.), desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a. C.). O método de exaustão consiste em exaurir uma figura por meio de outras de áreas e volumes conhecidos. O caso mais conhecido é o famoso problema da *quadratura do círculo*, isto é, o problema de construir um quadrado com a mesma área de um círculo de raio r utilizando somente uma régua e um compasso.

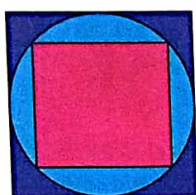


Figura 1

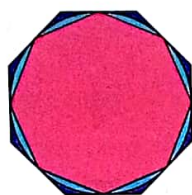


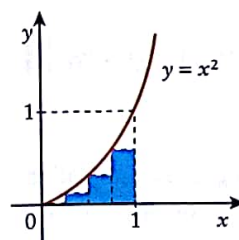
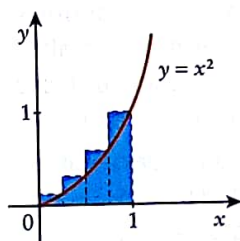
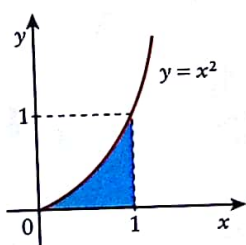
Figura 2



Figura 3

Uma primeira aproximação para a área de um círculo foi dada pela área do quadrado inscrito no círculo. Com o acréscimo de quatro triângulos isósceles (ver Fig. 2), obtemos o octógono regular inscrito no círculo, cuja área representa uma melhor aproximação da área do círculo. Continuando com este processo, obtêm-se, cada vez mais, melhores aproximações da área do círculo, através de polígonos regulares inscritos de 2^n lados.

Usando um procedimento similar a este, com polígonos inscritos e circunscritos a um círculo, Arquimedes calculou um valor aproximado da área do círculo de raio 1 e obteve uma das primeiras aproximações para o número π .



No século XVI deu-se o desenvolvimento do simbolismo algébrico e com ele foi aperfeiçoado o método do cálculo das áreas. O que permitiu a passagem do método de exaustão para o conceito de integral foi a percepção que, em certos

casos, a área da região pode ser calculada sempre com o mesmo tipo de aproximação por rectângulos. Esta foi uma descoberta conceptual importante, mas, em termos práticos, a descoberta fundamental foi a possibilidade de exprimir o integral de uma função em termos de uma primitiva da função dada e este facto é conhecido pelo nome de *Teorema Fundamental do Cálculo*. Este teorema estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Isaac Newton percebeu que a derivação e a integração são processos inversos e conjuntamente com Leibniz, no século XVII, explorou essa relação e utilizou-a para transformar o cálculo num método matemático sistemático.



Newton
(1643-1727)



Leibniz
(1646-1716)

7 Primitiva de uma função

1 Cálculo integral

Material:
Lápis e papel

Actividades de investigação

A integração é uma operação matemática com uma história muito longa. Arquimedes (287 a. C.-212 a. C.) foi um dos seus precursores ilustres. Os seus métodos permitiram-lhe obter uma boa aproximação de π , bem como certas áreas e volumes.

Faça uma pesquisa sobre a história da integração em particular e do cálculo infinitesimal em geral.



Arquimedes pensando,
por Fetti (1620)

Objectivos

1. Definir primitiva de uma função.
2. Estabelecer as propriedades da primitiva da soma e do produto por constante.
3. Calcular e identificar primitivas imediatas.
4. Identificar casos adequados à utilização de primitivação por partes.
5. Calcular primitivas por partes.

1. Cálculo integral



Praia de Pangane, Moçambique

1.1 Noção de primitiva de uma função. Integral indefinido

Dada uma função contínua, por exemplo $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$, é possível encontrar outra função $F(x)$, cuja derivada $F'(x)$ seja $f(x)$.

Assim, para $f(x) = 3x^2 + 8x + 5$, vem, por exemplo:

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7, \text{ uma vez que:}$$

$$F'(x) = 3x^2 + 8x + 5$$

Diz-se que a derivada da função $F(x)$ é a função $f(x)$ ou que uma primitiva da função $f(x)$ é a função $F(x)$.

Primitiva de uma função

$F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$ se e só se $F'(x) = f(x)$.

Repare que existe uma infinidade de primitivas para a função $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$, por exemplo:

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + \sqrt{2} \text{ ou } F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 100.$$

De um modo geral, se $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x)$, também $F(x) + C$ é uma primitiva dessa função, uma vez que:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

Integral indefinido

Ao conjunto de todas as primitivas possíveis de uma função $f(x)$ chama-se integral indefinido de $f(x)$ e escreve-se como:

$$\int f(x) dx$$

$\int f(x) dx$ lê-se “integral de $f(x)$ diferencial de x .”
Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

A constante C chama-se constante de integração.

O diferencial de x , dx , indica a variável a respeito da qual se refere o integral.

A função f que se integra chama-se integrando.

Exemplo 1

Determine a primitiva da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

cujo valor em $x = 9$ seja 5.

Resolução

Como $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, as primitivas de $f(x)$ são da forma:

$$F(x) = 2\sqrt{x} + C$$

Como $F(9) = 5$, vem $2\sqrt{9} + C = 5 \Leftrightarrow 6 + C = 5 \Leftrightarrow C = -1$

Logo, a primitiva pedida é:

$$F(x) = 2\sqrt{x} - 1$$

Determine a primitiva de $\frac{1}{\sqrt{x}}$,
cujo valor em $x = 4$ seja 4.

1.2 Propriedades do integral indefinido

As regras de primitivação obtêm-se através das regras de derivação:

- Temos que $(kx)' = k$ (k = constante).

Logo, $\int k dx = kx + C$

- Temos que $(ku)' = ku'$.

Logo, $\int ku dx = k \int u dx$

- Temos que $\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1} \times u^n \times u' = u^n \times u' \quad (n \neq -1)$.

Logo, $\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

Esta regra aplica-se também a expoentes não naturais.

- Temos que $(u + v)' = u' + v'$.

Logo, $\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$

Exemplo 2 Determinar

Determine:

2.1 $\int (-8) dx$;

2.2 $\int dx$;

2.3 $\int 3x dx$;

2.4 $\int (-x) dx$;

2.5 $\int x^2 dx$;

2.6 $\int \sqrt{x} dx$;

2.7 $\int (x^2 + x) dx$;

2.8 $\int \left(2x^2 - \frac{1}{3}x + 5\right) dx$.

Resolução

2.1 $\int (-8) dx = -8x + C$

2.2 $\int dx = \int 1 dx = x + C$

2.3 $\int 3x dx = 3 \int x dx = \frac{3x^2}{2} + C$

2.4 $\int (-x) dx = - \int x dx = -\frac{x^2}{2} + C$

2.5 $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2.6 $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx =$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

2.7 $\int (x^2 + x) dx =$

$$= \int x^2 dx + \int x dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

2.8 $\int \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x + 5\right) dx =$

$$= -2 \int x^2 dx - \frac{1}{3} \int x dx + 5 \int dx =$$

$$= -2 \times \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} + 5x + C =$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{6} + 5x + C$$



Determine:

2.1 $\int (-7) dx$;

2.2 $\int \left(-\frac{2}{3}\right) dx$;

2.3 $\int \sqrt{2} dx$;

2.4 $\int (-7x) dx$;

2.5 $\int \left(\frac{7}{5}x\right) dx$;

2.6 $\int x^3 dx$;

2.7 $\int x^{80} dx$;

2.8 $\int \sqrt[3]{x} dx$;

2.9 $\int x^{-10} dx$;

2.10 $\int (x^5 + x^4) dx$;

2.11 $\int \left(8x^2 - 7x + \frac{1}{2}\right) dx$.

1.3 Integrais imediatos

$\int k \, dx = kx + C$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \, n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \, \text{se } a > 0 \text{ e } a \neq 1$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Exemplo 3 Determinar

Determine:

$$3.1 \int \left(\frac{3}{x} + 5 \right) dx ;$$

$$3.2 \int \left(\frac{x^3 + 2x^2}{x^3} \right) dx ;$$

$$3.3 \int \frac{2x + \sqrt{2x}}{x^2} dx ;$$

$$3.4 \int (2^x + \sin x) dx .$$

Resolução

$$3.1 \int \left(\frac{3}{x} + 5 \right) dx = 3 \int \frac{1}{x} \, dx + 5 \int dx \\ = 3 \ln|x| + 5x + C$$

$$3.2 \int \left(\frac{x^3 + 2x^2}{x^3} \right) dx = \int \left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} \right) dx \\ = \int \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx \\ = \int dx + 2 \int \frac{1}{x} \, dx \\ = x + 2 \ln|x| + C$$

$$\begin{aligned}
3.3 \int \frac{2x + \sqrt{2x}}{x^2} dx &= \int \frac{2x}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{2} \sqrt{x}}{x^2} dx \\
&= 2 \int \frac{1}{x} dx + \sqrt{2} \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx \\
&= 2 \int \frac{1}{x} dx + \sqrt{2} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx \\
&= 2 \int \frac{1}{x} dx + \sqrt{2} \int x^{\frac{1}{2}-2} dx \\
&= 2 \int \frac{1}{x} dx + \sqrt{2} \int x^{-\frac{3}{2}} dx \\
&= 2 \ln|x| + \sqrt{2} \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C \\
&= 2 \ln|x| + \sqrt{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C \\
&= 2 \ln|x| + \sqrt{2} \times (-2) \times \frac{1}{\sqrt{x}} + C \\
&= 2 \ln|x| - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}} + C
\end{aligned}$$



Determine:

3.1 $\int x^{10} dx$;

3.2 $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$;

3.3 $\int \frac{5}{\sqrt{5x^3}} dx$;

3.4 $\int (e^x + 3^x - \sin x + 3) dx$.

$$\begin{aligned}
3.4 \int (2^x + \sin x) dx &= \int 2^x dx + \int \sin x dx \\
&= \frac{2^x}{\ln 2} - \cos x + C
\end{aligned}$$

1.4 Integração por partes

Sejam u e v duas funções deriváveis, tais que:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

logo:

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Integrando ambos os membros, vem:

$$\int uv' = \int [(uv)' - u'v]$$

$$\int uv' = \int (uv)' - \int u'v$$

ou

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Esta é a fórmula de integração por partes.

Exemplo 4 Calcular

Determine:

4.1 $\int \ln x \, dx$;

4.2 $\int \frac{x}{e^x} \, dx$;

4.3 $\int e^x \sin x \, dx$.

Resolução

4.1 $\int \ln x \, dx$

Seja: $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \end{aligned}$$

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

4.2 $\int \frac{x}{e^x} \, dx = \int x e^{-x} \, dx$

Seja: $\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \int \frac{x}{e^x} \, dx &= \int x e^{-x} \, dx \\ &= -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) \, dx = \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} \, dx = \\ &= -x e^{-x} + (-e^{-x}) + C = -x e^{-x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

4.3 $\int e^x \sin x \, dx$

Seja: $\begin{cases} u = \sin x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \cos x \\ v = e^x \end{cases}$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Seja: $\begin{cases} u = \cos x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\sin x \\ v = e^x \end{cases}$

Assim:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - [e^x \cos x - \int (-e^x \sin x) \, dx] = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Considerando $I = \int e^x \sin x \, dx$, vem:

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I, \text{ ou seja,}$$

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x$$

Logo:

$$I = \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x - e^x \cos x) + C$$

Determine:

4.1 $\int x \ln x \, dx$;

4.2 $\int x e^{2x} \, dx$;

4.3 $\int e^x \cos x \, dx$.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 $\int 3x^5 dx$ é igual a:

- (A) $\frac{1}{2}x^6 + C$;
- (B) $2x^6 + C$;
- (C) $\frac{1}{2}x^4 + C$;
- (D) $2x^4 + C$.

6 pontos

2 $\int (3x^3 - 5x^2 + 3) dx$ é igual a:

- (A) $x^4 + x^3 + 3x + C$;
- (B) $\frac{4}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x + C$;
- (C) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x + C$;
- (D) $\frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + 3x + C$.

6 pontos

3 $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}} dx$ é igual a:

- (A) $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt[6]{x^7}}{\sqrt[3]{5}} + C$;
- (B) $\frac{6\sqrt{2} \times \sqrt[6]{x^7}}{7\sqrt[3]{5}} + C$;
- (C) $\frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{x^7}}{7\sqrt{5}} + C$;
- (D) $\frac{-6\sqrt{2} \times \sqrt[6]{x^7}}{7\sqrt[3]{6}} + C$.

6 pontos

4 $\int \left(2^x - \frac{1}{x}\right) dx$ é igual a:

- (A) $2^x \ln 2 + \frac{1}{x^2} + C$;
- (B) $2^x - \ln |x| + C$;
- (C) $\frac{2^x}{\ln 2} - \ln |x| + C$;
- (D) $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

6 pontos

5 $\int \sqrt{e^x} dx$ é igual a:

- (A) $\sqrt{e^x} + C$;
- (B) $2\sqrt{e^x} + C$;
- (C) $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} + C$;
- (D) $2e^x + C$.

6 pontos

6 $\int x^2 e^{2x} dx$ é igual a:

- (A) $e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) + C$;
- (B) $-e^{2x} \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + C$;
- (C) $e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + C$;
- (D) $e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + C$.

6 pontos

7 $\int x^2 \sin x dx$ é igual a:

- (A) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$;
- (B) $x^2 \cos x - 2x \sin x + 2 \cos x + C$;
- (C) $x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$;
- (D) $-x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x + C$.

6 pontos

8 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ é igual a:

- (A) $-\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$;
- (B) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$;
- (C) $\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$;
- (D) $\ln x + \frac{1}{x} + C$.

6 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1 Determine:

1.1 $\int x^2 dx$;

1.2 $\int x^7 dx$;

1.3 $\int x dx$;

1.4 $\int \sqrt{x} dx$;

1.5 $\int (3x^5) dx$;

1.6 $\int \frac{7}{x^3} dx$;

1.7 $\int \sqrt{x^3} dx$;

1.8 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

1.9 $\int \frac{5x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 4}{x^2} dx$;

1.10 $\int \sin x dx$;

1.11 $\int \cos x dx$;

1.12 $\int \frac{1+x}{x} dx$;

1.13 $\int e^x dx$;

1.14 $\int a^x dx$;

1.15 $\int 2^x dx$;

1.16 $\int \left(x^2 + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$;

1.17 $\int \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{x} \right)^2 dx$;

1.18 $\int \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x\sqrt{x}} \right) dx$;

1.19 $\int \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x})^2}{\sqrt{2x}} dx$;

1.20 $\int e^{2x} dx$;

1.21 $\int (e^x + 1)^2 dx$;

1.22 $\int 2^{3x} dx$;

1.23 $\int (3^x + 1)^2 dx$;

1.24 $\int \cos(2x) dx$;

1.25 $\int \sin(2x) dx$;

1.26 $\int (1 + \cos(2x - 1)) dx$;

1.27 $\int (\sqrt{x} + \sin(3x + 2)) dx$;

1.28 $\int \frac{2 + x \sin x}{x} dx$;

1.29 $\int \sin x \cos x dx$;

Sugestão: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

1.30 $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$.

30 × 3 = 90 pontos

2 Determine, integrando por partes.

2.1 $\int x e^x dx$;

2.2 $\int x(x + 3)^3 dx$;

2.3 $\int x^3 \ln x dx$;

2.4 $\int x^2 \ln x dx$;

2.5 $\int x \sin x dx$;

2.6 $\int x \cos x dx$;

2.7 $\int \frac{\ln x}{x} dx$;

2.8 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$;

2.9 $\int x^2 e^x dx$;

2.10 $\int \frac{x}{3^x} dx$;

2.11 $\int (\ln x)^2 dx$;

2.12 $\int e^{-x} \cos x dx$.

10 × 5 = 50 pontos

2 × 6 = 12 pontos

Um olhar sobre a História

A raiz quadrada de números negativos não surgiu, historicamente, associada à resolução de equações do segundo grau.

A equação $x^2 + 1 = 0$, a que hoje atribuímos as soluções i e $-i$, seria considerada impossível por qualquer matemático anterior ao século XVI. Encontrar soluções para tal problema estava completamente fora das suas preocupações.

Contudo, certos problemas deram origem a expressões que, contendo raízes quadradas de números negativos, admitiam soluções “normais”.

Vejamos um exemplo.

No *Ars Magna*, de Cardano (1501-1576), surge a seguinte questão:

Determinar dois números cuja soma seja 10 e cujo produto seja 40.

A sua resolução conduziu Cardano às expressões:

$$5 - \sqrt{-15} \quad \text{e} \quad 5 + \sqrt{-15}.$$

“Pondo de lado a tortura mental envolvida, multiplique-se $5 - \sqrt{-15}$ por $5 + \sqrt{-15}$ obtendo $25 - (-15) = 40$ ”.

É na resolução da equação do terceiro grau, que Cardano expõe no *Ars Magna*, que surgem raízes de números negativos em expressões que, quando abordadas com as regras operatórias vulgares, dão origem a números insuspeitos.

Por exemplo, a equação, considerada por Bombelli (1526-1573), $x^3 = 15x + 4$, tem solução, dada pelo método de Cardano:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Esta expressão é muito surpreendente, porque as três raízes da equação são todas reais...

O ponto de vista mais produtivo foi adoptado por Euler (1707-1783), que introduziu $\sqrt{-1}$ como um novo número, que não se compara com os que já conhecíamos.

Nas suas palavras:

“Somos conduzidos à ideia de números que são, por natureza, impossíveis. Podemos chamar-lhes imaginários porque existem somente na nossa imaginação. [...] nada nos impede de os usar nos cálculos”.



Girolamo Cardano
(1501-1576)



Leonhard Euler
(1707-1783)

8

Números complexos

1 Estudo dos números complexos

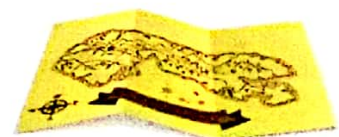
Material:
Lápis e papel

Actividades de investigação

O Eduardo herdou do bisavô um mapa de tesouro. Esse mapa mostra uma ilha e as instruções para encontrar o local exacto onde está enterrado. O jovem deve encontrar uma cabana e, a partir desta, dirigir-se a uma palmeira, virar à direita e andar tantos passos quantos os que andou desde a cabana. Aí deve colocar uma estaca. Depois, deve voltar à cabana e, a partir desta, deve dirigir-se ao sândalo, virar à esquerda e andar o mesmo número de passos que andou desde a cabana. Aí deve colocar a segunda estaca.

O tesouro está enterrado a meio caminho entre as duas estacas. O Eduardo encontrou a ilha e nesta a palmeira e o sândalo, mas a cabana já não existe...

Deve perder a esperança de encontrar o tesouro?



Objectivos

1. Identificar números complexos.
2. Identificar a relação entre os diversos universos numéricos.
3. Operar com números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica.
4. Interpretar geometricamente as operações com números complexos.

1. Estudo dos números complexos



Ilha de Moçambique, Nampula

1.1 Evolução do conceito de número. O conjunto dos números complexos

Qual é o número cujo quadrado é -1 ?

$$x^2 = -1$$

Para que a equação tenha solução foi necessário criar novos números: os números imaginários.

Definiu-se um novo número, i , que verifica $i^2 = -1$.

O número cujo quadrado é igual a -1 representa-se por i :

$$i^2 = -1 \quad \text{e} \quad i = \sqrt{-1}$$

Ao número i chama-se **unidade imaginária**.

A equação $x^2 = -1$ tem agora duas soluções:

$$\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad -\sqrt{-1}, \quad \text{ou seja, } i \quad \text{e} \quad -i.$$

A partir deste conhecimento, pode afirmar-se que todas as equações do 2.º grau são possíveis.

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = i \vee x = -i$$

$$x^2 = -5 \Leftrightarrow x = \sqrt{-1 \times 5} \vee x = -\sqrt{-1 \times 5} \quad \sqrt{-1 \times 5} = \sqrt{-1} \times \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{-1} \times \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{-1} \times \sqrt{5} \quad \sqrt{-1} = i$$

$$\Leftrightarrow x = i\sqrt{5} \vee x = -i\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1-2} \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{-1} \\
 &\Leftrightarrow x = -1 + i \vee x = -1 - i
 \end{aligned}$$

As soluções destas equações são números complexos.

Número complexo

Um número complexo é qualquer número que tem a forma $a + bi$, onde $i^2 = -1$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

O conjunto dos números complexos representa-se, normalmente, pela letra $\mathbb{C}$.

Números complexos		
Números reais		Números não reais
Racionais	Irracionais	
$\frac{1}{2}, 3$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}i, -i$
$-5, 0$	e	$-3 + \frac{1}{2}i$
$-0,2$	π	$\frac{1}{3} - i\sqrt{3}$
	$\sqrt[3]{9}$	

1.2 Representação geométrica de um número complexo. Complexos conjugados e complexos simétricos

Os números complexos podem escrever-se na forma $a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Sendo $z = a + bi$ um número complexo, tem-se:

- $a \rightarrow$ é a parte real e escreve-se: $a = \text{Re}(z)$;
- $b \rightarrow$ é a parte imaginária e escreve-se: $b = \text{Im}(z)$;
- se $b = 0$, o número complexo z é um número real;
- se $a = 0$, o número complexo z é imaginário puro.

Considere-se, no plano, o sistema cartesiano xOy .

A cada ponto do plano de coordenadas (a, b) corresponde o número complexo $z = a + bi$.

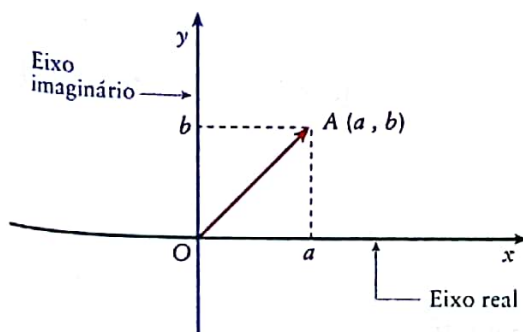
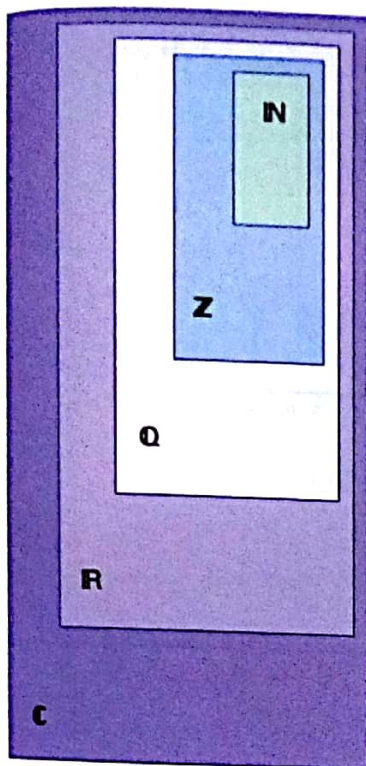
Ao ponto A chama-se **afixo** ou **imagem geométrica do complexo z** .

Ao plano chama-se **plano de Argand** ou **plano complexo**.

Ao vector $\overrightarrow{OA}$ chama-se **imagem vectorial do número complexo z** .

Todo o número real fica representado no eixo das abcissas, por isso, este eixo é chamado **eixo real**.

Todo o número imaginário puro fica representado no eixo das ordenadas, que, por isso, é chamado **eixo imaginário**.

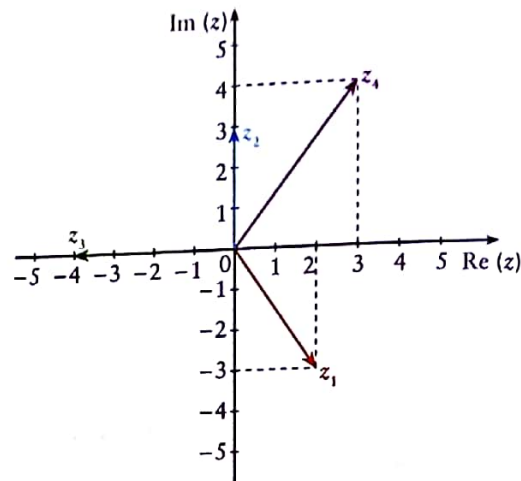


Exemplo 1 Representar no plano complexo

Represente geométrica e vectorialmente os complexos:

$$z_1 = 2 - 3i; \quad z_2 = 3i; \quad z_3 = -4; \quad z_4 = 3 + 4i.$$

Resolução

**1.1** Represente geometricamente:

$$z_1 = 2 - 4i; \quad z_2 = -2i;$$

$$z_3 = -3 - 2i; \quad z_4 = 3.$$

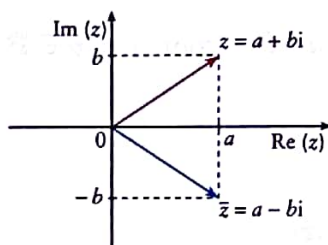
1.2 Represente no mesmo plano complexo:

a) $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 2 - 3i$.
O que observou?

b) $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -2 - 3i$.
O que observou?

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem-se conjugados quando têm partes reais iguais e partes imaginárias simétricas.

O conjugado de z representa-se por $\bar{z}$.

Exemplos:

O conjugado de $2 + 3i$ é $2 - 3i$.O conjugado de $-5 - 8i$ é $-5 + 8i$.O conjugado de $a + bi$ é $a - bi$.Sendo $z = 1 + i$; $\bar{z} = 1 - i$.

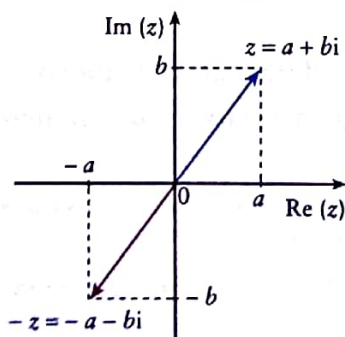
$$z = 3i; \quad \bar{z} = -3i.$$

$$z = a + bi; \quad \bar{z} = a - bi.$$

$$z = 3; \quad \bar{z} = 3.$$

A imagem geométrica do conjugado de z obtém-se da imagem geométrica de z por uma reflexão relativamente ao eixo real.**Números complexos simétricos**

Dois números complexos dizem-se simétricos quando têm partes reais e partes imaginárias simétricas.

O simétrico de z é $-z$.

Exemplos:

O simétrico de $2 - 3i$ é $-2 + 3i$.O simétrico de $z = a + bi$ é $-z = -a - bi$.A imagem geométrica do simétrico de z obtém-se da imagem geométrica de z por uma rotação de centro na origem e amplitude de 180° .

Igualdade de dois números complexos

Dois números complexos são iguais se e só se são iguais as suas partes reais e as suas partes imaginárias, ou seja:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Exemplo:

Se $a + bi = 2 - 8i$, então $a = 2$ e $b = -8$.

1.3 Operações com números complexos

As operações de adição e multiplicação de números complexos são extensões das operações com o mesmo nome em $\mathbb{R}$.

Adição e subtração de números complexos

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo 2 Adição e subtração de números complexos

Calcule e represente geometricamente:

2.1 $(2 + 3i) + (8 - 5i)$;

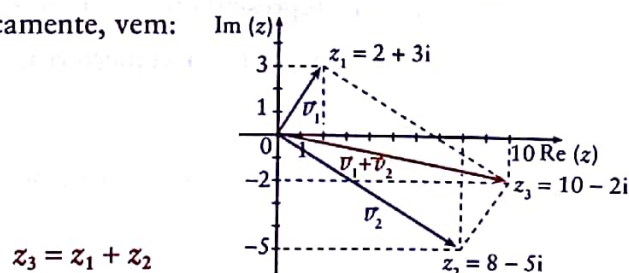
2.2 $(2 + 3i) - (8 - 5i)$.

Resolução

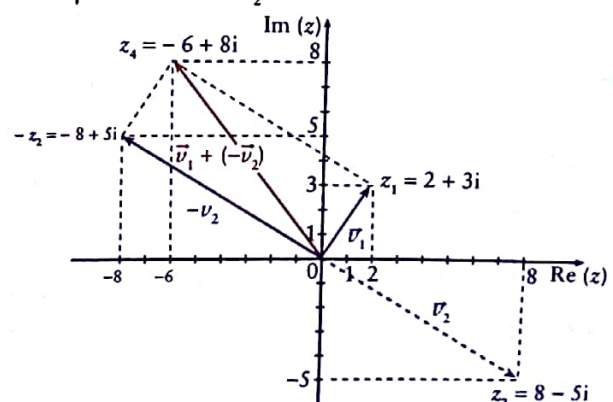
2.1 $(2 + 3i) + (8 - 5i) = 2 + 3i + 8 - 5i = 10 - 2i$

2.2 $(2 + 3i) - (8 - 5i) = 2 + 3i - 8 + 5i = -6 + 8i$

Geometricamente, vem:



$$z_3 = z_1 + z_2$$



$$z_4 = z_1 - z_2$$

2.1 Calcule:

a) $(2 - 3i) + (4 - i)$

b) $(-1 + i) - (2 - 3i)$

c) $(2 + i) - 3i$

d) $\left(\frac{3}{2} + i\right) - \left(\frac{3}{4} - i\right)$

e) $\left(\frac{1}{2} - 2i\right) + \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)$

2.2 Calcule:

$z_1 + z_2$, sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

2.3 Considere:

$z_1 = -2 + 3i$ e $z_2 = -1 + 2i$.

Calcule e represente geometricamente:

a) $z_1 + z_2$;

b) $z_1 - z_2$.

Multiplicação de números complexos

Multiplicam-se números complexos como se de números reais se tratasse. No fim, substitui-se i^2 por -1 e escreve-se o resultado na forma $a + bi$.



3

3.1 Calcule:

a) $(2 + i)i$;

b) $i(1 - 5i)$;

c) $(2 - i)\left(3 + \frac{5}{2}i\right)$;

d) $(-3 + i)\left(-\frac{1}{2} - i\right)$.

3.2 Calcule:

$(a + bi)(c + di)$

Exemplo 3 Multiplicação de números complexos

Calcule o produto de $(2 + 3i)$ por $(8 - 5i)$ e de $(2 - 3i)$ por $(2 + 3i)$.

Resolução

$$\begin{aligned} \bullet (2 + 3i) \times (8 - 5i) &= 16 - 10i + 24i - 15i^2 & (i^2 = -1) \\ &= 16 - 10i + 24i + 15 \\ &= 31 + 14i \end{aligned}$$

$$\bullet (2 - 3i) \times (2 + 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 + 9 = 13$$

Repare que se multiplicarmos um número complexo pelo seu conjugado obtemos um número real.

Exemplo 4 Multiplicação de números complexos conjugados

Mostre que o produto de dois números complexos conjugados é um número real.

Demonstração

Sejam $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$.

$$\begin{aligned} z \times \bar{z} &= (a + bi) \times (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$a^2 + b^2$ representa um número real.

Logo, $z \times \bar{z}$ é um número real, c. q. m.



4

Calcule:

4.1 $(2 - 3i)(2 + 3i)$;

4.2 $(1 - i)(1 + i)$;

4.3 $(-1 + i)(i + 1)$.

Exemplo 5 Cálculo do quadrado de um número complexo

Calcule:

5.1 $(2 - 3i)^2$;

5.2 $(-1 - 5i)^2$.

Resolução

$$\begin{aligned} 5.1 (2 - 3i)^2 &= 4 - 12i + 9i^2 \\ &= 4 - 12i - 9 \\ &= -5 - 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.2 (-1 - 5i)^2 &= 1 + 25i^2 + 10i \\ &= 1 - 25 + 10i \\ &= -24 + 10i \end{aligned}$$



5

Calcule:

5.1 $(-2 + 3i)^2$;

5.2 $\left(-1 - \frac{1}{2}i\right)^2$;

5.3 $(-1 + i)^3$;

5.4 $(a + bi)^2$.

Divisão de dois números complexos

Para dividir dois números complexos multiplica-se o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor.

O problema reduz-se, assim, à divisão de um número complexo por um número real.

Exemplo 6 Divisão de dois números complexos

Calcule $\frac{2+3i}{8-5i}$.

Resolução

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{8-5i} &= \frac{(2+3i)(8+5i)}{(8-5i)(8+5i)} \\ &= \frac{16+10i+24i-15}{64-(5i)^2} \\ &= \frac{1+34i}{89} \\ &= \frac{1}{89} + \frac{34}{89}i\end{aligned}$$

Multiplicam-se os termos da fracção pelo conjugado do denominador.

Efectuam-se os cálculos no numerador e no denominador.

Apresenta-se o quociente na forma $a+bi$.

Outro método para calcular a divisão de dois complexos seria usar a igualdade entre complexos.

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{8-5i} &= a+bi \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=cb \\ \Leftrightarrow 2+3i &= 8a+8bi-5ai-5bi^2 && \text{Efectuam-se os cálculos.} \\ \Leftrightarrow 2+3i &= (8a+5b) + (8b-5a)i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+5b=2 \\ -5a+8b=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 40a+25b=10 \\ -40a+64b=24 \end{cases} && \text{Igualam-se as partes reais e os} \\ &&& \text{coeficientes das partes imaginárias.}\end{aligned}$$

Adicionando, membro a membro, vem:

$$89b = 34 \Leftrightarrow b = \frac{34}{89}$$

Retomando o sistema inicial, tem-se:

$$\begin{aligned}(\times (-8)) \begin{cases} 8a+5b=2 \\ -5a+8b=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -64a-40b=-16 \\ -25a+40b=15 \end{cases}\end{aligned}$$

Adicionando membro a membro, vem:

$$-89a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{89}$$

Portanto:

$$\frac{2+3i}{8-5i} = \frac{1}{89} + \frac{34}{89}i$$

Calcule:

6.1 $\frac{1-2i}{i}$;

6.2 $\frac{1-3i}{1+i}$;

6.3 $\frac{3}{-1+2i}$;

6.4 $(2-3i)^{-1}$;

6.5 z , sendo $\frac{2+3i}{z} = 1-5i$;

6.6 $\frac{a+bi}{c+di}$.

Potências de i

Já sabemos que $i^2 = -1$. Admitindo que $i^0 = 1$ e que $i^1 = i$, encontramos uma certa periodicidade ao calcularmos as potências do tipo i^n , com $n \in \mathbb{N}_0$.

Vejamos qual é:

i^3	$-i$
i^4	1
i^5	i

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \times i = i$$

$$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$$

Qualquer potência de i de expoente natural é igual a 1 , -1 , i ou $-i$. A forma mais simples de encontrarmos uma potência de i , de expoente natural, é usar o conhecimento de:

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$$

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$
$i^4 = 1$	$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$
$i^8 = 1$	$i^9 = i$	$i^{10} = -1$	$i^{11} = -i$
...	...	...	...
$i^{4n} = 1$	$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$

$$i^n = i^r \text{ sendo } r \text{ o resto da divisão inteira de } n \text{ por } 4 \text{ } (n \in \mathbb{N}_0)$$

Exemplo 7 Potências da unidade imaginária

Calcule $i^{76} + i^{82}$.

Resolução

$$i^{76} = (i^4)^{19} = i^0 = 1$$

$$i^{82} = (i^4)^{20} \times i^2 = i^2 = -1$$

$$\text{Logo, } i^{76} + i^{82} = 1 + (-1) = 0.$$

Cálculo auxiliar

76	<u>4</u>
36	19
0	
82	<u>4</u>
02	20

Raiz quadrada de um número complexo

A igualdade de números complexos também pode ser utilizada para calcular a raiz quadrada de um número complexo.



7

Calcule:

7.1 i^{39} ;

7.2 $i^{37} + i^{999} - 2i^{25}$.

Exemplo 8 Raiz quadrada de um número complexo

Calcule a raiz quadrada do número complexo $3 + 4i$.

Resolução

Consideremos que $a + bi$ é uma raiz quadrada de $3 + 4i$.

Então:

$$3 + 4i = (a + bi)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 + 2abi - b^2$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2 \\ 4 = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \\ b = \frac{2}{a}, a \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Resolvendo a equação } 3 = a^2 - \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0, a \neq 0$$

Substituindo $a^2 = t$, vem

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = -1$$

$t = -1$ é impossível, pois $t = a^2$ e $a \in \mathbb{R}$.

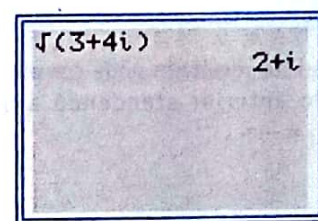
$$t = 4 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$$

Se $a = 2$: Se $a = -2$:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Logo, as raízes quadradas de $3 + 4i$ são $2 + i$ e $-2 - i$.

Repare que as raízes quadradas de um número complexo são sempre dois números complexos simétricos (semelhante ao que já sucedia em $\mathbb{R}$).



8

Calcule as raízes quadradas de $-3 + 4i$.

1.4 O número i como operador da rotação de 90°

Exemplo 9 Multiplicar por i

Represente, geometricamente, os números complexos:

$3 + 2i$, $i(3 + 2i)$ e $-i(3 + 2i)$.

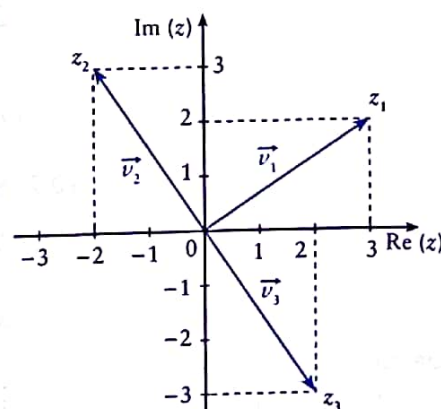
Resolução

Temos:

$$z_1 = 3 + 2i$$

$$z_2 = i(3 + 2i) = -2 + 3i$$

$$z_3 = -i(3 + 2i) = 2 - 3i$$



9

Represente geometricamente:

- $z_1 = 3 - 2i$;
- $z_2 = i(3 - 2i)$;
- $z_3 = -i(3 - 2i)$.

Defina uma transformação geométrica que transforma os afixos de:

9.1 z_1 em z_2 ;

9.2 z_1 em z_3 .

No **Exemplo 9**, observamos que:

- os vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ têm todos a mesma norma:

$$||\vec{v}_1|| = ||\vec{v}_2|| = ||\vec{v}_3|| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

- $(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1) = 90^\circ$ e $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3) = 90^\circ$;
- $\vec{v}_2$ poder-se-ia obter de $\vec{v}_1$ por uma rotação de centro na origem e ângulo de $+90^\circ$;
- $\vec{v}_3$ poder-se-ia obter de $\vec{v}_1$ por uma rotação de centro na origem e ângulo de -90° .

De um modo geral:

Se $z = a + bi$ tem imagem geométrica P , então $z_1 = i(a + bi)$ tem imagem geométrica P' , que se obtém de P por uma rotação de centro na origem e ângulo $+90^\circ$.

Observação

* Este resultado pode ser obtido do anterior atendendo a que $z_2 = -z_1$.

Se $z = a + bi$ tem imagem geométrica P , então $z_1 = -i(a + bi)$ tem imagem geométrica P'' , que se obtém de P por uma rotação de centro na origem e ângulo -90° .*

Exemplo 10 Para mostrar

Mostre que:

$$10.1 \quad \overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}; \quad 10.2 \quad \frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_1 - \overline{z_1}} \times \frac{y}{x} i = 1, \text{ sendo } z_1 = x + yi, x \neq 0 \text{ e } y \neq 0.$$

Resolução

10.1 Temos que se $z = a + bi$ então $\overline{z} = a - bi$.

Pretendemos mostrar que $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$, ou seja, que o conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos conjugados dos factores.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

$$\begin{aligned} 1.^\circ \text{ membro: } \overline{z_1 \times z_2} &= \overline{(a + bi) \times (c + di)} = \overline{ac + adi + bci - bd} \\ &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.^\circ \text{ membro: } \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (a - bi) \times (c - di) = ac - adi - bci - bd \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = 1.^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

Logo, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$, c.q.m.

10.2 Seja $z_1 = x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{z_1 + \overline{z_1}}{z_1 - \overline{z_1}} \times \frac{y}{x} i$$

Substituindo na expressão dada $z_1 = x + yi$, vem:

$$\frac{(x + yi) + (x - yi)}{(x + yi) - (x - yi)} \times \frac{y}{x} i = \frac{2x}{2yi} \times \frac{y}{x} i = 1, \text{ c.q.m.}$$



Mostre que:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

1.5 Raiz quadrada de um número real negativo

Se a é um número real positivo então $-a$ é um número real negativo e tem-se:

- $(i\sqrt{a})^2 = i^2 \times (\sqrt{a})^2 = -1 \times a = -a$
- $(-i\sqrt{a})^2 = (-i)^2 \times (\sqrt{a})^2 = -1 \times a = -a$

o que mostra que $i\sqrt{a}$ e $-i\sqrt{a}$ são as raízes quadradas de $-a$.

$$\text{Se } a \in \mathbb{R}^+, \sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}.$$

Daqui resulta que:

- todo o número real negativo tem duas raízes quadradas que são imaginários puros simétricos;
- toda a equação do 2.º grau, $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, tem uma ou duas raízes reais se $b^2 - 4ac \geq 0$ ou tem duas soluções que são números complexos conjugados se $b^2 - 4ac < 0$.

Exemplo 11 Resolver equações

Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

11.1 $z^2 + 2z + 17 = 0$;

11.2 $z^3 + 6iz^2 = 8z$.

Resolução

11.1 $z^2 + 2z + 17 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 17}}{2}$

Aplica-se a fórmula resolvente.

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm i\sqrt{64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 \pm 8i}{2} \Leftrightarrow z = -1 - 4i \vee z = -1 + 4i$$

11.2 $z^3 + 6iz^2 = 8z \Leftrightarrow z^3 + 6iz^2 - 8z = 0$

$$\Leftrightarrow z(z^2 + 6iz - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 6iz - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-6i \pm \sqrt{-36 + 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-6i \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \frac{-6i \pm 2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = -4i \vee z = -2i$$



11

Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:

11.1 $z^2 + 4 = 0$;

11.2 $z^2 + 10z + 26 = 0$;

11.3 $16z^2 + 8z + 5 = 0$;

11.4 $z^3 + 16z = 0$;

11.5 $z^3 + 6z^2 + 13z = 0$;

11.6 $z^2 - 2iz - 5 = 0$;

11.7 $z^3 + 6iz^2 = 10z$.

1.6 Módulo e argumento de um número complexo

Ao número complexo $z = a + bi$ corresponde, no plano complexo, um ponto $P \curvearrowright (a, b)$ e um vector $\vec{v} = (a, b)$.

Módulo de um número complexo

Chama-se **módulo** do número complexo $z = a + bi$, e representa-se por $|z|$, ao comprimento do vector $\vec{v} = (a, b)$.

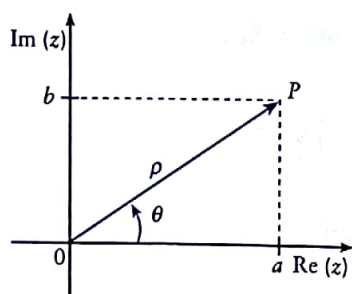
Assim:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No plano complexo, o módulo do número complexo z é igual à distância da sua imagem geométrica à origem do plano complexo. É frequente usar-se a letra grega ρ para representar o módulo de um número complexo.

Argumento de um número complexo

Chama-se **argumento** do número complexo $z = a + bi$ à amplitude, em radianos, do ângulo θ que o vector $\vec{v} = (a, b)$ faz com a parte positiva do eixo real.



Sendo θ um argumento de z , também é um argumento de z qualquer número da forma $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chama-se **argumento principal** (ou simplesmente **argumento**) a θ , sendo:

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

O complexo $0 + 0i$ tem módulo nulo e argumento indeterminado.

Normalmente usa-se a simbologia $\arg z$ para representar o argumento de z .

```
abs(-1-√(3)i)
angle(-1-√(3)i)
-2.094395102
-2π/3
-2.094395102
```

Exemplo 12 Módulo e argumento de um complexo

Calcule o módulo e o argumento principal de:

12.1 $z_1 = 1 + i$;

12.2 $z_2 = -3\sqrt{3} + 3i$;

12.3 $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$.

Resolução

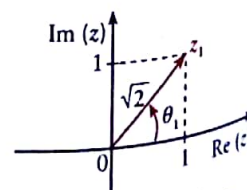
12.1 $z_1 = 1 + i$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Seja θ_1 um argumento de z_1 .

Como $(1, 1) \in 1.^\circ Q$ e $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{1} = 1$, $\frac{\pi}{4}$ é um argumento de z_1 .

Logo, $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$.



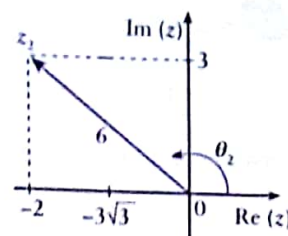
$$12.2 \quad z_2 = -3\sqrt{3} + 3i$$

$$|z_2| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = 6$$

Seja θ_2 um argumento de z_2 :

$$\begin{cases} (-3\sqrt{3}, 3) \in 2.^\circ Q \\ \operatorname{tg} \theta_3 = \frac{3}{-3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \text{ é um argumento de } z_2.$$

$$\text{Logo, } \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6}.$$



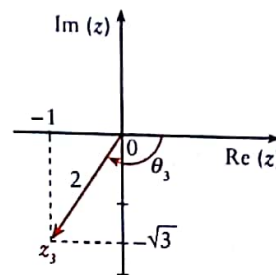
$$12.3 \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Seja θ_3 um argumento de z_3 :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta_3 = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \\ \theta_3 \in 3.^\circ Q \end{cases} \Rightarrow -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \text{ é um argumento de } z_3.$$

$$\text{Logo, } \arg(z_3) = \frac{2\pi}{3}.$$



Calcule o módulo e o argumento de cada um dos números complexos.

$$12.1 \quad z_1 = 3;$$

$$12.2 \quad z_2 = 2 + 2i;$$

$$12.3 \quad z_3 = 5i;$$

$$12.4 \quad z_4 = -3 + \sqrt{3}i;$$

$$12.5 \quad z_5 = -2;$$

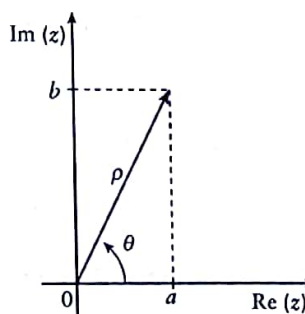
$$12.6 \quad z_6 = -\sqrt{2}i;$$

$$12.7 \quad z_7 = 1 - \sqrt{3}i.$$

1.7 Forma trigonométrica de um número complexo

Na forma algébrica um complexo z representa-se por:

$$z = a + bi$$



Seja θ um argumento de z .

Observando a figura, vem:

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{b}{\rho}$$

ou

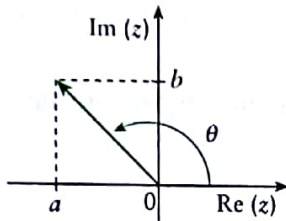
$$a = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad b = \rho \sin \theta$$



Observação

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

módulo de z argumento de z



Então, o complexo $z = a + bi$ pode ser escrito na forma

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta),$$

que se designa por representação trigonométrica de z .

A expressão $\cos \theta + i \sin \theta$ representa-se abreviadamente por $\text{cis } \theta$ ou $E(\theta)$.

Logo:

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \Leftrightarrow z = \rho \text{cis } \theta \Leftrightarrow z = \rho E(\theta)$$

Neste livro usa-se $z = \rho \text{cis } \theta$.

Exemplo 13 Representação trigonométrica

Represente na forma trigonométrica:

13.1 i ;

13.2 -3 ;

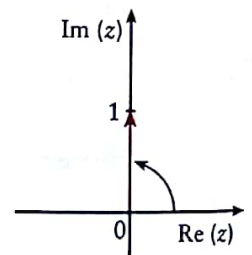
13.3 $-1 - i$.

Resolução

13.1 $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

ou

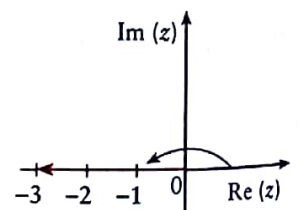
$$i = \text{cis } \frac{\pi}{2}$$



13.2 $-3 = 3 (\cos \pi + i \sin \pi)$

ou

$$-3 = 3 \text{cis } \pi$$



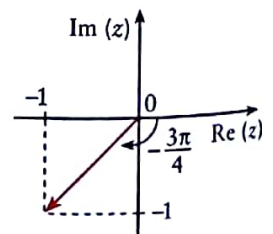
13.3 Seja $z = -1 - i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de z :

$$\begin{cases} \text{tg } \theta = \frac{-1}{-1} = 1 \\ \theta \in 3.^\circ Q \end{cases} \Rightarrow -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \text{ é um argumento de } z.$$

$$\text{Logo, } z = -1 - i = \sqrt{2} \text{cis } \left(-\frac{3\pi}{4} \right).$$



13

Represente na forma trigonométrica cada um dos números complexos.

13.1 $z_1 = 3$;

13.2 $z_2 = \sqrt{3} + i$;

13.3 $z_3 = 4i$;

13.4 $z_4 = -4 - 4i$;

13.5 $z_5 = -2i$.

Exemplo 14 Representação algébrica

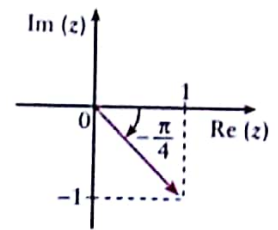
Seendo $z_1 = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$, represente $\bar{z}_1$ na forma algébrica.

Resolução

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow z_1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} i$$



Escreva na forma algébrica:

14.1 $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$;

14.2 $z = 5 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$.

Logo, $\bar{z}_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$.

1.8 Operações com números complexos na forma trigonométrica

Calculamos na forma algébrica a soma, a diferença, o produto, o quociente, a potência e a raiz quadrada de um número complexo.

Se os números complexos estiverem escritos na forma trigonométrica é muito fácil calcular o produto, o quociente, a potência e as raízes de índice n .

Para isso vamos deduzir um conjunto de fórmulas que nos permitem efectuar essas operações.

Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Sejam os complexos:

$$z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2.$$

O seu produto será:

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \times r_2 \operatorname{cis} \theta_2 \\ &= r_1 \times r_2 \operatorname{cis} \theta_1 \times \operatorname{cis} \theta_2 \\ &= r_1 \times r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 \times r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r_1 \times r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 \times r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Logo:

$$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2)$$

Para um número finito de factores, temos:

$$z_1 \times z_2 \times \dots \times z_n = r_1 \times r_2 \times \dots \times r_n \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

Exemplo 15 Produto de números complexos na forma trigonométrica

15.1 Represente graficamente $z_1 \times z_2$, sendo $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ e $z_2 = -3$.

15.2 Sendo $z_1 = 2i$; $z_2 = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ e $z_3 = 5$, calcule na forma trigonométrica e na forma algébrica $z_1 \times z_2 \times z_3$.

Resolução

15.1 $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ e $z_2 = -3$.

Começemos por escrever z_2 na forma trigonométrica.

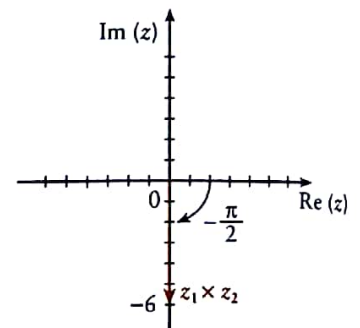
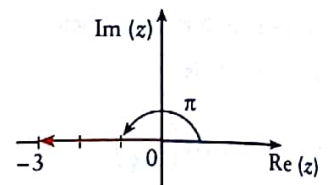
$$z_2 = 3 \operatorname{cis} \pi$$

$$z_1 \times z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \times 3 \operatorname{cis} \pi$$

$$= 6 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$$

$$= 6 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

A cor está geometricamente representado o complexo $z_1 \times z_2$.



15.2 Passemos à forma trigonométrica os números complexos z_1 e z_3 .

$$z_1 = 2i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$$

$$z_3 = 5 = 5 \operatorname{cis} 0$$

Aplicando a fórmula referida, vem:

$$z_1 \times z_2 \times z_3 = 2 \times \frac{1}{2} \times 5 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 0\right)$$

$$z_1 \times z_2 \times z_3 = 5 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \rightarrow \text{Produto na forma trigonométrica}$$

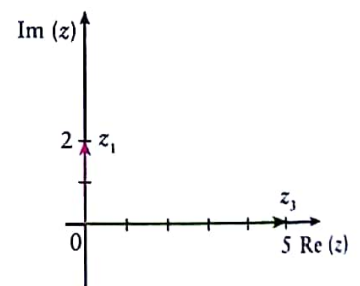
Passando o produto à forma algébrica, vem:

$$z_1 \times z_2 \times z_3 = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$z_1 \times z_2 \times z_3 = 5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

Logo:

$$z_1 \times z_2 \times z_3 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \rightarrow \text{Produto na forma algébrica}$$

**15**

15.1 Mostre que:

a) se $z = r \operatorname{cis} \theta$, então

$$\bar{z} = r \operatorname{cis} (-\theta);$$

b) $z \times \bar{z} = |z|^2$;

$$c) \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

15.2 Sendo:

$$z_1 = \frac{1}{3} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4}\right);$$

$$z_2 = 5 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$z_3 = 3 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4}\right);$$

calcule na forma trigonométrica:

a) $z_1 \times z_2$;

b) $z_1 \times z_3$;

c) $z_1 \times z_2 \times z_3$.

15.3 Escreva na forma trigonométrica dois números complexos cujo produto seja $4 \operatorname{cis} 0$.

15.4 Sendo:

$$z_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i;$$

$$z_2 = -2i;$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} (\pi);$$

calcule na forma trigonométrica:

a) $\bar{z}_1 \times z_1$;

b) $z_1 \times z_2 \times z_3$.

Potência de expoente inteiro

- Seja $z = r \operatorname{cis} \theta$ e $n \in \mathbb{N}$

Temos, por definição de potência:

$$z^n = \underbrace{z \times z \times z \times \dots \times z}_{n \text{ vezes}}$$

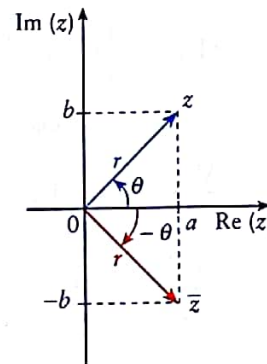
Substituindo z por $r \operatorname{cis} \theta$ e aplicando a fórmula para a multiplicação, vem:

$$z^n = \underbrace{r \times r \times r \times \dots \times r}_{n \text{ vezes}} \times \underbrace{\operatorname{cis} (\theta + \theta + \theta + \dots + \theta)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\text{Então, } z^n = r^n \operatorname{cis} (n\theta), \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1)$$

- Vejam que esta fórmula é válida se $n \in \mathbb{Z}^-$.

$$\text{Seja } z = r \operatorname{cis} \theta \text{ e } \bar{z} = r \operatorname{cis} (-\theta).$$



$$\text{Então: } z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{\bar{z}^n}{z^n \times \bar{z}^n} = \frac{\bar{z}^n}{(z \times \bar{z})^n}.$$

Como $\bar{z} = r \operatorname{cis} (-\theta)$ e $z \times \bar{z} = |z|^2$, vem:

$$z^{-n} = \frac{\bar{z}^n}{|z|^{2n}} = \frac{r^n \operatorname{cis} (-n\theta)}{r^{2n}} = r^{-n} \operatorname{cis} (-n\theta)$$

$$\text{Então, } z^{-n} = r^{-n} \operatorname{cis} (-n\theta). \quad (2)$$

- Seja $z = r \operatorname{cis} \theta$ e $n = 0$.

Então:

$$z^0 = 1 \text{ e, aplicando a fórmula definida para } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

tem-se:

$$z^0 = r^0 \operatorname{cis} (0 \times \theta) = 1 \quad (3)$$

Logo, por (1), (2) e (3), se $n \in \mathbb{Z}$, vem a seguinte fórmula de Moivre:

$$z^n = (r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis} (n\theta), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

Observação

Moivre foi um famoso matemático francês que passou grande parte da sua vida em Inglaterra.

Associando a trigonometria aos números complexos, apresentou um conjunto de resultados entre os quais aparece a fórmula (4) que ficou conhecida por fórmula de Moivre.

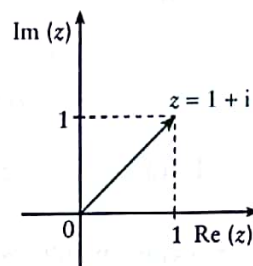
Exemplo 16 Potência de um número complexo

Calcule:

$$(1+i)^8 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{-10}.$$

Resolução

O interesse da escrita de um número complexo na forma trigonométrica é agora evidente.



$$1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis} \frac{8 \times \pi}{4} \\ = 2^4 \operatorname{cis} (2\pi) = 16 \operatorname{cis} 0 = 16$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{-10} = \left[1 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]^{-10} = 1^{-10} \operatorname{cis} \left(\frac{10\pi}{6} \right) \\ = 1 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Logo:

$$(1+i)^8 = 16 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{-10} = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

**16.1** Calcule na forma trigonométrica:a) z^{29} , sendo $z = 1 \operatorname{cis} \pi$;b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{80}$;c) $(1-i)^{-100}$.**16.2** Sendo $z = \operatorname{cis} \theta$, mostre que:a) $z + \bar{z} = 2 \cos \theta$;b) $z^2 + \bar{z}^2 = 2 \cos (2\theta)$;c) $z^n + \bar{z}^n = 2 \cos (n\theta)$;d) $\sin (n\theta) = \frac{z^n - \bar{z}^n}{2i}$.**Divisão de dois números complexos na forma trigonométrica**

Consideremos os complexos:

$$z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2 \quad \text{e} \quad z_2 \neq 0.$$

O quociente entre z_1 e z_2 é:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = z_1 \times \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Atendendo a que:

se $z = r \operatorname{cis} \theta$, então $\bar{z} = r \operatorname{cis} (-\theta)$, vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \times \frac{r_2 \operatorname{cis} (-\theta_2)}{r_2^2}$$

Simplificando, vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} \theta_1 \times \operatorname{cis} (-\theta_2)$$

Como já se demonstrou na dedução da fórmula para a multiplicação:

$$\operatorname{cis} \theta_1 \times \operatorname{cis} (-\theta_2) = \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$$

Logo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplo 17 Quociente de números complexos

São dados os números complexos:

$$z_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad z_2 = -1 + i.$$

Calcule:

$$\left(2i \times \frac{z_2}{z_1}\right)^5$$

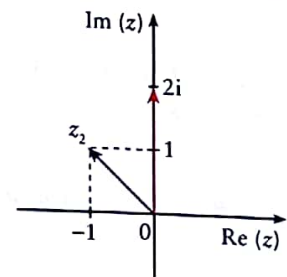
Resolução

Atendendo às operações que vamos efectuar, devemos escrever os três números complexos envolvidos na expressão na forma trigonométrica.

$$2i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$$



Temos, então:

$$\begin{aligned} \left(2i \times \frac{z_2}{z_1}\right)^5 &= \left(\frac{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \times \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}\right)^5 = \left(\frac{\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \times \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}{\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}\right)^5 \\ &= \left[\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right]^5 \\ &\quad (\times 6) \quad (\times 3) \quad (\times 4) \\ &= \left(\operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}\right)^5 \\ &= \operatorname{cis} \frac{55\pi}{12} = \operatorname{cis} \left(4\pi + \frac{7\pi}{12}\right) = \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12} \end{aligned}$$

Effectue as operações indicadas e apresente o resultado na forma trigonométrica:

17.1 $\frac{2i}{\operatorname{cis} \frac{\pi}{6}};$

17.2 $\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{1+i}\right)^2;$

17.3 $\left(\frac{-1+i^{15}}{\sqrt{3}+i}\right)^5;$

17.4 $\frac{i^{513} - (1+i)^4}{1+i} - i;$

17.5 $\left(\frac{3-4i-\frac{1}{i}}{-3i^{22}}\right)^5.$

Radiciação

Seja $z = r \operatorname{cis} \theta$.

Sendo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, chama-se raiz índice n de z a todo o número que elevado a n é igual a z .

Aplicando a definição, vem:

Seja $z = r \operatorname{cis} \theta$ um número complexo não nulo e $u = t \operatorname{cis} \gamma$ uma raiz de índice n de z .

Então:

$$u^n = z \Leftrightarrow (t \operatorname{cis} \gamma)^n = r \operatorname{cis} \theta$$

$$\Leftrightarrow r \operatorname{cis} \theta = t^n \operatorname{cis} n\gamma$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = t^n \\ \theta = n\gamma + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt[n]{r} \\ \gamma = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é o mesmo que $\theta - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Observação

Se:

$$z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta \text{ e } z_2 = r \operatorname{cis} \alpha$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r \\ \theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo:

$$\sqrt[n]{r \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{r} \times \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Note-se que se $k = n$:

$$\operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \operatorname{cis} \left(\frac{\theta}{n} + 2\pi \right) = \operatorname{cis} \frac{\theta}{n}$$

Assim, só os n valores de k :

$$0, 1, 2, \dots, n-1$$

conduzem a valores diferentes do argumento.

Podemos, então, concluir que $\sqrt[n]{z}$ tem n raízes diferentes que se obtêm substituindo na fórmula (1) k por:

$$0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\sqrt[n]{r \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{r} \times \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

18

18.1 Calcule:

- a) as raízes quadradas de $\sqrt{3} - i$;
 b) as raízes quartas de $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$;
 c) as raízes quintas de $-32i$.

18.2 Resolva, em $\mathbb{C}$, cada uma das seguintes equações:

- a) $z^3 - 1 = 0$;
 b) $z^4 + 1 = 0$;
 c) $z^6 + i - 1 = 0$;
 d) $z^3 = \bar{z}$;
 e) $z = \bar{z}^2$.

Exemplo 18 Raízes de uma equação

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 + 1 = 0$ e represente geometricamente as soluções.

Resolução

$$\begin{aligned} z^3 + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^3 = -1 \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-1} \\ -1 &= 1 \operatorname{cis}(\pi) \end{aligned}$$

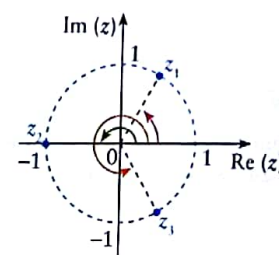
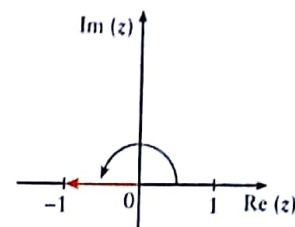
Então:

$$z = \sqrt[3]{1} \operatorname{cis} \pi = \sqrt[3]{1} \times \operatorname{cis} \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \longrightarrow z_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \longrightarrow z_2 = \operatorname{cis} \pi$$

$$k = 2 \longrightarrow z_3 = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$$

**1.9 Construção geométrica das raízes de uma equação em $\mathbb{C}$ (*)**

No exemplo anterior verificou-se que as raízes da equação pertenciam a uma circunferência de raio 1 e centro na origem. Verificou-se, ainda, que as raízes estavam igualmente espaçadas e que, portanto, dividiam a circunferência em três partes iguais.

De facto, temos:

$$\sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \theta = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

• As raízes têm todas o mesmo módulo: $\sqrt[n]{r}$.

• Os argumentos são dados por:

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Ou seja, os argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Assim, pode concluir-se que:

As imagens geométricas das raízes índice n de um número complexo $z = r \operatorname{cis} \theta$, não nulo, são vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de centro na origem do plano complexo e raio $\sqrt[n]{r}$.

(*) A construção geométrica das raízes de uma equação em $\mathbb{C}$ não está referida no programa. Sugerimos que seja indicado como trabalho individual ou de grupo.

Exemplo 19 Representação geométrica das raízes de uma equação

Seja $z = 8i$.

Represente, geometricamente, as raízes cúbicas de z .

Resolução

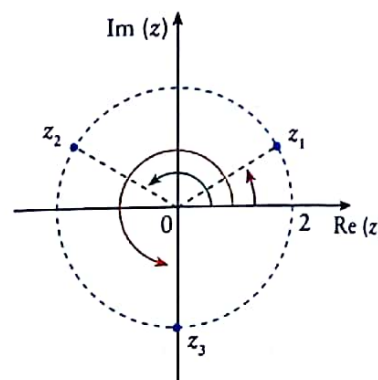
$$8i = 8 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sqrt[3]{8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

Então:

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}; \quad z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{e } z_3 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$



✓ 19

Represente geometricamente as raízes sextas de -64 .

1.10 Translação e rotação no plano de Argand

Exemplo 20 O triângulo equilátero

Sabe-se que z_1 , z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero com centro na origem.

Sabendo que $z_1 = \sqrt{3} + i$, determine:

20.1 z_2 e z_3 na forma algébrica e represente geometricamente o triângulo;

20.2 a imagem do triângulo equilátero de vértices z_1 , z_2 e z_3 pela translação $T_{\vec{u}}$, sendo $\vec{u}$ a imagem vectorial de $z_4 = 2i$;

20.3 a imagem do triângulo equilátero de vértices z_1 , z_2 e z_3 por uma rotação de centro em $(0, 0)$ e ângulo $\frac{\pi}{4}$.

Resolução

20.1 Sabemos que $z_1 = \sqrt{3} + i$.

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

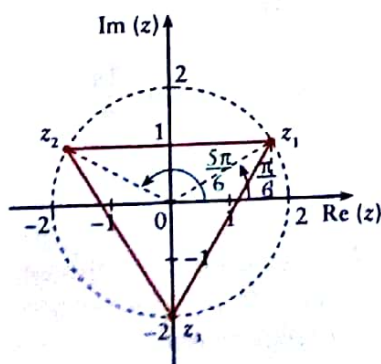
$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$$

Então:

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} + 2 \times \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -2i$$

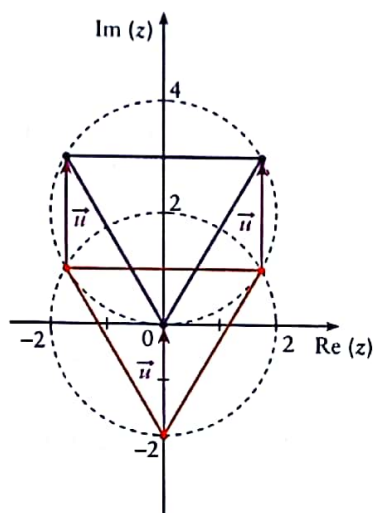


- 20.2** Calculando a soma, na forma algébrica, $z_1 + z_4$, $z_2 + z_4$ e $z_3 + z_4$, obtém-se o transformado do triângulo de vértices z_1 , z_2 e z_3 pela translação $T_{\vec{u}}$.

$$z_1' = z_1 + z_4 = \sqrt{3} + i + 2i = \sqrt{3} + 3i$$

$$z_2' = z_2 + z_4 = -\sqrt{3} + i + 2i = -\sqrt{3} + 3i$$

$$z_3' = -2i + 2i = 0$$

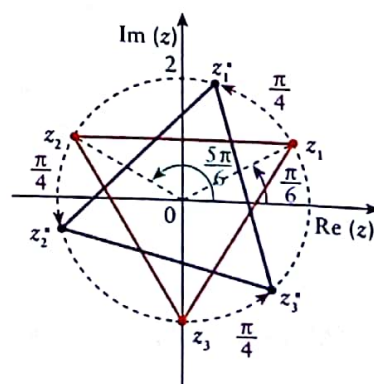


- 20.3** Uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ obtém-se multiplicando por $\text{cis } \frac{\pi}{4}$ cada um dos complexos correspondentes aos vértices do triângulo.

$$\begin{aligned} z_1'' &= 2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right) \times \text{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \text{cis} \left(\frac{5\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2'' &= 2 \text{cis} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \times \text{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \text{cis} \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \text{cis} \left(\frac{13\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3'' &= 2 \text{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right) \times \text{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \text{cis} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \text{cis} \left(\frac{7\pi}{4} \right) \end{aligned}$$



20

Os afixos z_1 , z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero de centro na origem.

Sabendo que $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, determine:

20.1 z_2 e z_3 imagens dos outros vértices, na forma algébrica;

20.2 as imagens z_1' , z_2' e z_3' de z_1 , z_2 e z_3 , respectivamente, por uma translação $T_{\vec{u}}$, sendo $\vec{u}$ a imagem vectorial de $w = 1 - i$;

20.3 os produtos de z_1 , z_2 e z_3 por $z = \text{cis } \frac{\pi}{3}$ e interprete graficamente os resultados.

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- 1** Seja z um número complexo de argumento α . Qual poderá ser o argumento do simétrico de z ?

(A) $-\alpha$; (B) $\alpha - \pi$;
(C) $\pi - \alpha$; (D) $2\pi + \alpha$.

10 pontos

- 2** Seja z um número complexo, tal que:

$$z = 3 \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$$

Para qual dos seguintes valores de θ é que z é um número imaginário puro de coeficiente positivo?

(A) $\frac{\pi}{3}$; (B) $\frac{5\pi}{6}$;
(C) $\frac{4\pi}{3}$; (D) $\frac{11\pi}{6}$.

10 pontos

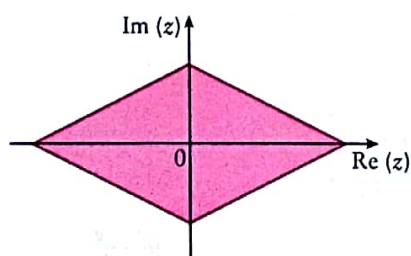
- 3** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = i^{20} + i$.

Qual é a representação trigonométrica de z ?

(A) $\sqrt{5} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} \right)$; (B) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$;
(C) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$; (D) $\sqrt{20} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$.

10 pontos

- 4** Na figura está representado um losango de centro na origem do plano complexo.



Seja z um número complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do losango.

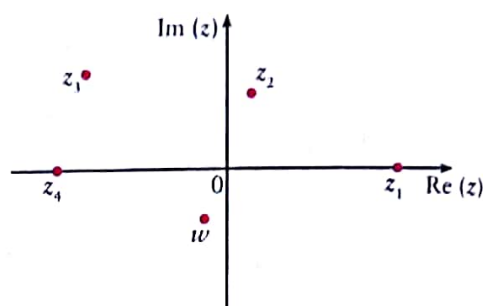
Qual dos seguintes números complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do losango?

(A) $2z$; (B) z^2 ; (C) z^3 ; (D) $\bar{z}$.

10 pontos

- 5** Na figura estão representados os afixos de cinco números complexos.

w, z_1, z_2, z_3 e z_4 .

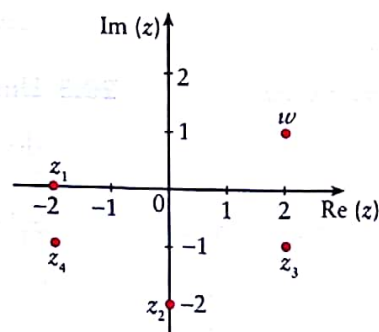


Qual é o número complexo que pode ser igual a $2w \times \operatorname{cis}(-\pi)$?

(A) z_4 ; (B) z_3 ; (C) z_2 ; (D) z_1 .

10 pontos

- 6** Na figura estão representados, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos.



Qual é o número complexo que pode ser igual a $i - w$?

(A) z_1 ; (B) z_2 ; (C) z_3 ; (D) z_4 .

10 pontos

- 7** Em $\mathbb{C}$, considere $z = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{9} \right)$.

Qual é o complexo igual a $\frac{1}{z^2}$?

(A) $\frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{9} \right)$; (B) $\frac{1}{4} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{9} \right)$;
(C) $\frac{1}{4} \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{9} \right)$; (D) $\frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{9} \right)$.

10 pontos

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

1 Em $\mathbb{C}$, considere $z = 3 - i$.

(i designa a unidade imaginária.)

1.1 Determine $w = (z - 3)^2 (1 - 2i)^2 - i^9$ na forma algébrica.

1.2 Escreva na forma trigonométrica o inverso do conjugado de w .

13 pontos

2 Em $\mathbb{C}$, considere o polinómio:

$$x^3 - 3x^2 + x + 5$$

2.1 Mostre que o polinómio é divisível por $x + 1$.

2.2 Determine todas as raízes do polinómio na forma algébrica.

13 pontos

3 Seja z um número complexo de módulo 1 e $\bar{z}$ o seu conjugado.

No plano complexo, considere os pontos A e B , tais que A é a imagem geométrica de z e B é a imagem geométrica de $\bar{z}$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao 2.º quadrante;
- o ângulo AOB tem de amplitude 60° (O designa a origem do plano complexo).

Escreva na forma algébrica:

3.1 iz ; **3.2** $\frac{\bar{z}}{i}$.

13 pontos

4 Em $\mathbb{C}$, considere:

$$z_1 = 2 + i \text{ e } z_2 = \sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z_1^3 = z_2^2 w$.

13 pontos

5 Em $\mathbb{C}$, considere $z_1 = 3i$.

No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos vértices de um losango de perímetro 16, centrado na origem do plano complexo. Determine, na forma algébrica, os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

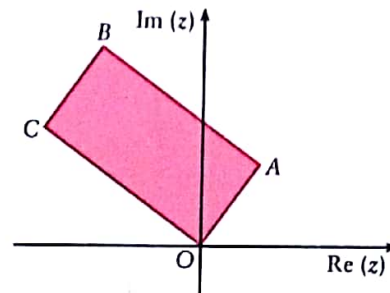
13 pontos

6 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação:

$$\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^3 \times z = 1 + i$$

13 pontos

7 Na figura está representado, no plano complexo, um rectângulo $[OABC]$.



Sabe-se que:

- O é a origem do plano complexo;
- A é a imagem geométrica de um complexo z_1 cujo argumento é $\frac{\pi}{4}$;
- C é a imagem geométrica de z_2 cujo módulo é $6\sqrt{2}$;
- a área do rectângulo é 12.

Determine, na forma algébrica, z_1 e z_2 .

13 pontos

8 Em $\mathbb{C}$ sabe-se que z_1 tem argumento $\frac{\pi}{3}$ e que z_2 tem módulo $3\sqrt{3}$.

Sem recorrer à calculadora, determine:

$$z_2 \times \bar{z}_2 + \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^{10}$$

13 pontos

9 Seja z um número complexo cuja imagem geométrica pertence ao 4.º quadrante (eixo não incluído). Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao 1.º quadrante.

13 pontos

10 Seja z um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica pertence à bissetriz dos quadrantes pares. Indique uma equação da recta à qual pertence a imagem geométrica de z^{20} .

13 pontos

Soluções

1.1 1

1.2 2

1.3 14

Pág. 8

2.1 $S = \{-2, 4\}$

2.2 $S = \left\{-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$ Pág. 9

2.3 $S = \{0, 4\}$

2.4 $\{\}$

2.5 $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2.6 $S =]-1, 2[$

2.7 $S =]-\infty, -\frac{9}{4}[\cup \left[\frac{11}{4}, +\infty\right[$

2.8 $S =]-\infty, -\frac{13}{2}[\cup \left[\frac{15}{2}, +\infty\right[$

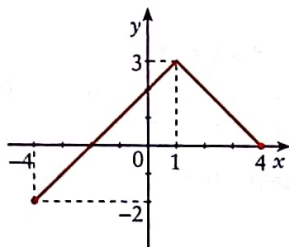
2.9 $S = \{\}$

2.10 $S = \mathbb{R}$

3.1 a) $f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{se } x \in [1, 4] \\ x+2 & \text{se } x \in [-4, 1[\end{cases}$

Pág. 10

b)



c) $D_f' = [-2, 3]$

d) Zeros: -2 e 4 ; monotonia: f é estritamente crescente em $[-4, 1]$ e é estritamente decrescente em $[1, 4]$.

$$3.2 \text{ a) } |x-1|-1 = \begin{cases} x-1-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -x+1-1 & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 1 \\ -x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

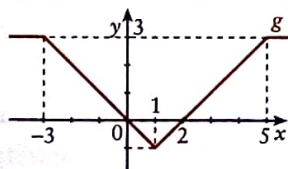
Pág. 11

Logo:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -3 \leq x < 1 \\ x-2 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ 3 & \text{se } x < -3 \vee x > 5 \end{cases}$$

Gráficos:

x	$y = -x$	x	$y = x-2$
-3	3	1	-1
1	-1	5	3



b) Zeros: 0 e 2.

Monotonia: g é estritamente decrescente em $[-3, 1]$, estritamente crescente em $[1, 5]$ e constante em $]-\infty, -3]$ e em $[5, +\infty[$.

4.1 $f(x) = -|x-3| + 5$

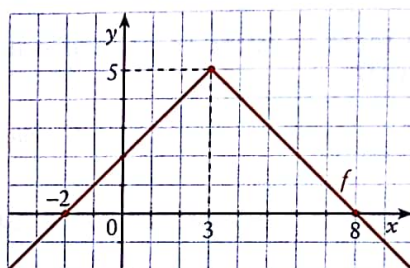
$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) + 5 & \text{se } x \geq 3 \\ -(-x+3) + 5 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+3+5 & \text{se } x \geq 3 \\ x-3+5 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+8 & \text{se } x \geq 3 \\ x+2 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

x	$y = -x+8$
3	5
8	0

x	$y = x+2$
3	5
-2	0

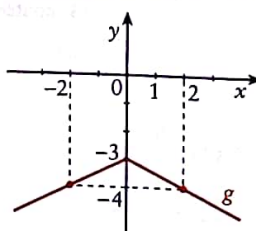


4.2 $g(x) = -\left|\frac{1}{2}x\right| - 3$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 3 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x - 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

x	$y = -\frac{1}{2}x - 3$
0	-3
2	-4

x	$y = \frac{1}{2}x - 3$
0	-3
2	-2

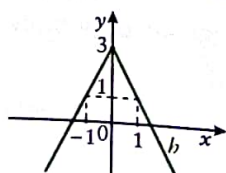


4.3 $h(x) = -2|x| + 3$

$$h(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x+3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

x	$y = -2x+3$
0	3
1	1

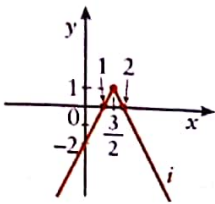
x	$y = 2x+3$
0	3
-1	1



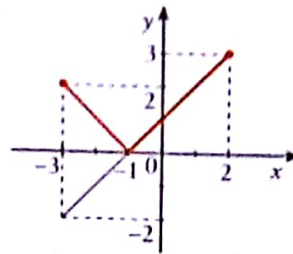
4.4 $i(x) = -|2x - 3| + 1$

$$i(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \\ 2x - 2 & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

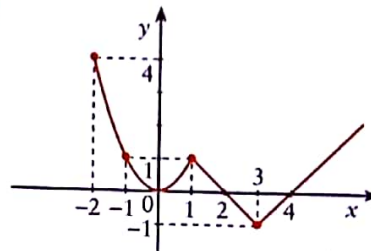
x	y = -2x + 4	x	y = 2x - 2
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1
2	0	1	0



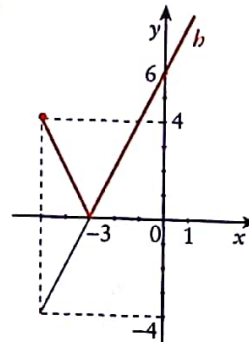
2.1



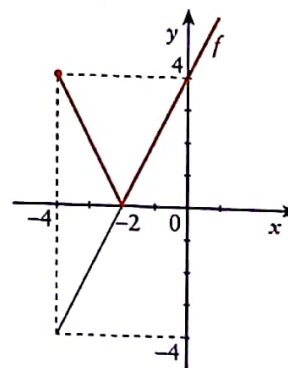
2.2



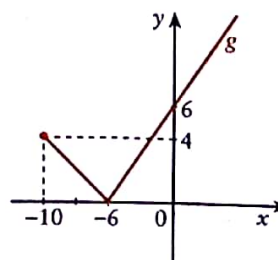
3.1



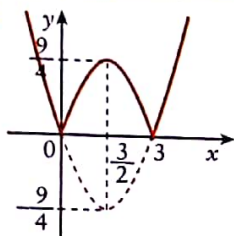
3.2 a) $f(x) = 2|x + 2| - 4$



b) $g(x) = |x + 6| - 10$

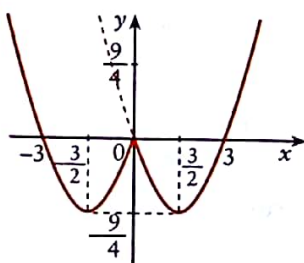


5.1 a)



Pág. 13

b)



5.2 Sim. Seja, por exemplo, a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^4 - x^2$.

f tem três zeros: -1 , 0 e 1 .

f é par, pois $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$, qualquer que seja o valor real de x .

6.1 $S = \{2\}$

6.2 $S = \{ \}$

7.1 $x \in \left[-9, \frac{3}{5}\right]$

7.2 $x \in [1, 4]$

1. (D)

2. (B)

Pág. 14

3. (D)

4. (C)

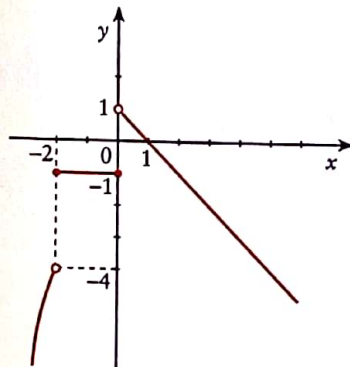
1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -9 \leq x \leq -3 \\ -x + 1 & \text{se } -3 < x \leq 0 \\ x + 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \leq 9 \end{cases}$

Pág. 15

Soluções

4. $D_h = [-5, +\infty[$; $D'_h = [0, +\infty[$
 Zeros: $\{-3\}$
 h é decrescente em $[-5, -3]$ e crescente em $[-3, +\infty[$.
 $D_f = [-4, +\infty[$; $D'_f = [0, +\infty[$
 Zeros: $\{-2\}$; f é decrescente em $[-4, -2]$ e crescente em $[-2, +\infty[$.
 $D_g = [-10, +\infty[$; $D'_g = [0, +\infty[$
 Zeros: $\{-6\}$; g é decrescente em $[-10, -6]$ e crescente em $[-6, +\infty[$.

5.1



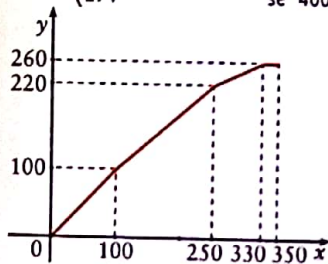
5.2 $D'_j =]-\infty, 1[$

5.3 $\{1\}$

5.4 $D'_g = [0, +\infty[$

5.5 $(-3, -9)$ e $(-\frac{1}{3}, -1)$.

$$6.1 f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 100 \\ 100 + 0,8(x - 100) & \text{se } 100 < x \leq 250 \\ 220 + 0,5(x - 250) & \text{se } 250 < x \leq 330 \\ 260 + 0,2(x - 330) & \text{se } 330 < x \leq 400 \\ 274 & \text{se } 400 < x \leq 430 \end{cases}$$



6.2 735 Mt

6.3 $C(x) = 160x$ (meticais).

23

Pág. 17

1.1 21

Pág. 20

1.2 $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

1.3 720

2.1 a) 30

b) 60

c) 5040

Pág. 21

2.2 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 e 43.

3. $n = 10$

4. 3024

Pág. 22

5.1 a) 15

c) 1

b) 1

d) $\frac{13}{17}$

Pág. 24

6.1 13 983 816

6.2 252

Pág. 25

7. 16

8.1 $2^7 = 128$

8.2 1378

Pág. 27

8.3 $2^7 = 128$; ${}^7C_3 = {}^7C_4$

8.4 $n = 6$

9.1 $32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$

Pág. 28

9.2 $243 + 135x + 30x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{5}{27}x^4 + \frac{1}{243}x^5$

9.3 $x^2 + 4x\sqrt{xy} + 6xy + 4y\sqrt{xy} + y^2$

10.1 22 termos.

10.2 $46\ 332\ x^3$

Pág. 29

10.3 $540\ x^3y^3$

10.4 $n = 15$

1. (A)

2. (D)

3. (D)

Pág. 30

4. (B)

5. (C)

6. (A)

7. (D)

8. (C)

9. (A)

1. 32

2. 4096

Pág. 31

3. 518 400

4.1 a) 20

b) 50

4.2 120; 210

5. 120; 360

6.1 252

6.2 21

6.3 4095

6.4 4466

7. 10

8. $\frac{3003}{4}x^2$

9. 15

1.1 12

1.2 $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Pág. 39

2. $P = \frac{5}{36}$

1. (D)

2. (A)

3. (D)

Pág. 40

4. (B)

5. (A)

1. Aproximadamente, 0,122.

Pág. 41

2.1 $\frac{4}{9}$

2.2 $\frac{4}{9}$

2.3 1

2.4 $\frac{1}{9}$

2.5 $\frac{7}{9}$

3.1 $\frac{1}{3}$

3.2 $\frac{1}{2}$

3.3 $\frac{2}{3}$

3.4 $\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{28}$

5. $\frac{1}{35}$

6.1 523

6.2 1999

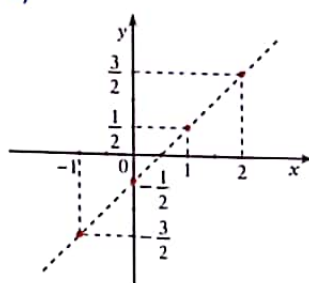
6.3 0,504

1.1

a)

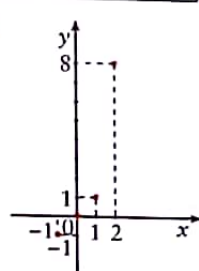
x	y = f(x)
-1	$-\frac{3}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$

b)



Pág. 45

1.2 a)


b) $g(x) = x^3$ com $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

2.1 Mínimo: $f(-3) = -3$

Máximo: $f(-6) = 7$

Pág. 48

2.2 $\{-6\}$

2.3 $\{-3\}$

3.1 $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$

Pág. 49

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$$

3.2 $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-1}{x^2-1}$$

3.3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

3.4 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

4. 4.2

Pág. 51

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, por exemplo.

Pág. 52

1. (C)

2. (C)

3. (D)

Pág. 54

4. (D)

5. (D)

6. (B)

1.1 $D_g =]-\infty, 8]$

Pág. 55

1.2 $D'_g = [-2, +\infty[$

1.3 -2

1.4 $-2, 4$ e 8 .

1.5 -3 e 1 .

1.6 $[-2, 0]$ e $[4, 6]$.

1.7 $]-\infty, -2]$, $[0, 4]$ e $[6, 8]$.

1.8 1 e -1 .

1.9 0 e 6 .

1.10 -2

1.11 $-2, 4$ e 8 .

2.1 a) $f(-1) = 3$; $f(2) = -1$

b) 0

c) -3 e 2 .

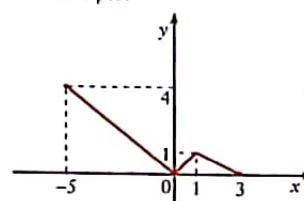
d) $-3,5$; -2 e 1 .

2.2

x	-4	-3	-1,2	-0,2	2
f(x)	1	-1	3	3	-1

Intervalos de monotonia: f é crescente em $[-3; -1,2]$, é decrescente em $[-4; -3]$ e em $[-0,2; 2]$ e é constante em $[-1,2; -0,2]$.

3.1 Por exemplo:


3.2 0 e 3 .

3.3 $[-5, 3]$

3.4 0 e 3 .

4.1 3 h, 9 h, 15 h e 21 h.

4.2 10 min, 0 h, 12 h e 24 h.

4.3 6 min, 6 h e 18 h.

4.4 a) $D'_g = [6, 10]$

b) f é estritamente crescente em $[6, 12]$ e em $[18, 24]$.
 f é estritamente decrescente em $[0, 6]$ e em $[12, 18]$.

x	0	6	12	18	24
f(x)	10	6	10	6	10

1.1 $x \in]0, 3[$

Pág. 58

1.3 A área é mínima para $x = 1,68$ cm.

2. $y = x^2 - 2x - 3$

Pág. 59

1. (B)

2.1 (D)

2.2 (A)

Pág. 60

3. (A)

4. (D)

5. (D)

1.1 $m \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

Pág. 61

1.2 $m \in]-4, 4[$

1.3 $m = -4 \vee m = 4$

2. $\Delta = 4 + 4(m-1)^2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Produto das raízes: $P = \frac{1-m}{m-1} = -1, \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3. $\overline{BC} = 25,86$ m e $\overline{AC} = 54,14$ m ou vice-versa.

4.1 a) $2x + y$ é o comprimento da rede.

b) $100 - 2x$ é o comprimento do lado paralelo ao muro, em função do comprimento do outro lado.

c) $x(100 - 2x)$ é a área do retângulo.

4.2 A área do terreno é máxima se as dimensões forem 25 m por 50 m.

5.1 8 metros.

Soluções

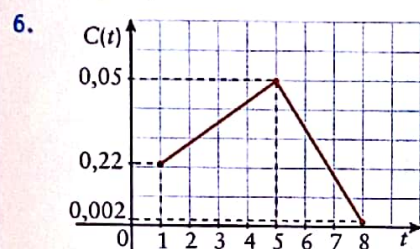
5.2 $h(5) = 10$; a 5 m, na horizontal, da linha da prancha, a atleta está a 10 metros de altura.

5.3 A altura máxima atingida pela atleta é 11,6 m.

5.4 8,39 m

5.5 $x = 1 \vee x = 5$. O atleta encontrou-se a 10 m de altura quando a distância à prancha, medida na horizontal, era de 1 m ou de 5 m.

5.6 A altura a qual se encontra o atleta é superior a 5,2 m enquanto a sua distância, na horizontal, à prancha for inferior a 7 m.



1. 1.1, 1.2 e 1.4.

Pág. 63

2.1 $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 2.2 $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.3 $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ 2.4 $\mathbb{R}$ 2.5 $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 5\}$

3.1 $x = -5$

Pág. 66

3.2 $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$. 3.3 $x = -9$

3.4 Não tem. 3.5 Não tem.

4.1 Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: $y = 0$

Pág. 68

4.2 Assíntota vertical: $x = 7$

Assíntota horizontal: $y = -2$

4.3 Assíntotas verticais: $x = -2$ e $x = 3$.

Assíntota horizontal: $y = 0$

4.4 Assíntota vertical: não existe.

Assíntota horizontal: $y = -1$

4.5 Assíntota vertical: $x = 0$

Assíntota horizontal: $y = 1$

4.6 Assíntota vertical: $x = 1$

Assíntota horizontal: não existe.

1. (A)

2. (B)

3. (B) Pág. 70

4. (D)

5. (A)

6. (A)

1.1 Assíntota horizontal: $y = 1$.

Pág. 71

Quando o número de peixes-serras introduzidos no tanque é significativamente grande a percentagem de peixes-serras tende a aproximar-se de 100%.

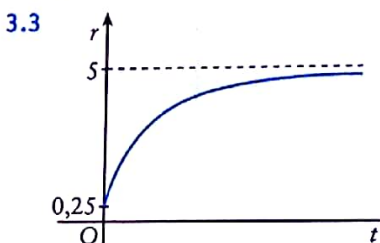
1.2 No máximo podem ser introduzidos no tanque 125 peixes-serras.

2.2 Com 10 dias de experiência é de esperar que o operário produza 25 peças.

2.3 $b = 50$. Com o decorrer do tempo o número de peças que o operador consegue produzir tende a aproximar-se de 50.

3.1 No instante em que a mancha é detectada o seu raio é de 0,25 cm.

3.2 Assíntota horizontal: $y = 5$. Com o decorrer do tempo, o raio da mancha aproxima-se dos 5 cm.



3.4 A área da mancha atingiu 40 cm² cerca de 9,3 segundos após ter sido detectada.

1.1 As funções não são iguais porque não têm o mesmo domínio.

Pág. 72

1.2 As funções não são iguais porque não têm o mesmo processo de transformação, $f(x) = |x + 3|$.

1.3 As funções são iguais.

1.4 As funções são iguais.

2.1 $f + g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 4x + \frac{1}{2}$$

Pág. 75

$f - g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x - \frac{1}{2}$$

$f \times g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 3x^2 + \frac{3x}{2}$$

$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{6x}{2x+1}$$

2.2 $f + g: \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x^2 + 7x + 12}{x(x+4)}$$

$f - g: \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{7x + 12}{x(x+4)}$$

$f \times g: \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+3}{x+4}$$

$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2}$$

2.3 $f + g: \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x^2 - 11x + 18}{x(x-3)}$$

$$f - g: \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 13x + 18}{x(x-3)}$$

$$f \times g: \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x+2}{x}$$

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{2x^2 - 12x + 18}{x(x+1)}$$

3.1 a) $(f \circ g)(-2) = -\frac{9}{2}$; $(g \circ f)(-2) = -\frac{11}{2}$ **Pág. 78**

b) $(f \circ g)(-2) = 1$; $(g \circ f)(-2) = \frac{1}{3}$

3.2 a) $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 4x^2 - 8x + 5 \quad x \mapsto 2x^2$$

b) $f \circ g: \mathbb{R}_0^+ \setminus \{16\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$

$$g \circ f:]4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-4}}$$

c) $f \circ g:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$g \circ f:]-\infty, -1] \cup]4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}+1}$$

3.3 $g(x) = x$ ou qualquer outra função g definida por $g(x) = x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

4.1 Não são permutáveis. **Pág. 78**

4.2 Não são permutáveis.

5. $g(x) = 1 - |x|$ e $f(x) = \sqrt{x-2}$, por exemplo. **Pág. 79**

6.1 $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ **Pág. 81**

$$x \mapsto \frac{6}{x}$$

6.2 $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **6.3 $h^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$**

$$x \mapsto \frac{x-1}{6} \quad x \mapsto \frac{2+3x}{x}$$

1. (D) **Pág. 82**

2.1 (C) 2.2 (A)

3.1 (C) 3.2 (B)

4. (D) 5. (D)

1.1 Nesse intervalo de tempo nasceram 3000 animais. **Pág. 83**

1.2 A diferença entre o número de animais de cada espécie, com o decorrer do tempo, tende para 10 000.

1.4 $f^{-1}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 11 \\ \frac{x-6}{11-x} & \text{se } x \neq 11 \end{cases}; D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

2.1 $A(x) = 8x$

2.2 $P(x) = 12 + \frac{5}{3}x + \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - 24x + 144}$

3.1 $N(T(h)) = 16h^2 + 580h + 1450$

3.2 Quatro horas após o início do crescimento a cultura tinha 4026 bactérias.

3.3 Para atingir 5000 bactérias, terão de decorrer 5 horas e 21 minutos.

1.1 $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ 1.2 $S = \{\}$ **Pág. 86**

2.1 $S = \{5\}$ 2.2 $S = \{-1\}$ **Pág. 87**

3. 1161,83 meticais.

4. 10,033 **Pág. 88**

5.1 $\frac{10}{3}$ 5.2 $-\frac{3}{4}$ **Pág. 91**

6.1 $S = \{3\}$ 6.2 $S = [\sqrt{3}]$ **Pág. 92**

7.1 $S = \{-1\}$ 7.2 $S = \{4\}$ **Pág. 93**

8. $x \in]0, +\infty[$ **Pág. 94**

9.1 3,59 9.2 $2,6 \times 10^{15}$ **Pág. 95**

10.1 $D_f = \mathbb{R}$ 10.2 $D_f' = [-4, 0]$ **Pág. 99**

10.3 Período: 2π .

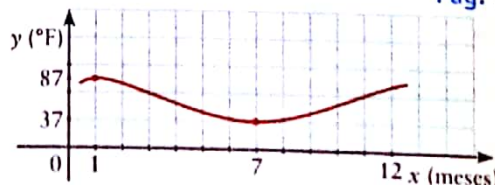
11.1 $x \in [0, \pi]$ **Pág. 102**

11.2 Zeros: 0 e 2π . 11.3 $-\pi$ e π .

12.1 Zeros: $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **Pág. 103**

12.2 Não tem máximo.

13.1 **Pág. 105**



13.2 $y = 25 \cos\left[\frac{\pi}{6}(x-1)\right] + 62$

1.2 A população da ilha tem uma taxa de crescimento de 2% ano. **Pág. 106**

Soluções

2. 122 842 3. 49,08 m/s
 4. 39 5. 26
 6.1 4 ; 3 6.2 20 ; 30 6.3 96 dias.

7.1 63 7.2 12 **Pág. 107**

7.3 Não, a população de cabritos, nunca pode ultrapassar os 200 indivíduos.

8.1 $k = -2$

8.2 1,707 dezenas de milhares de meticais.

8.3 900

9.1 5,122

9.2 $E \approx 1,259 \times 10^{21}$

10. 75 cm

É o resultado da soma da progressão geométrica **Pág. 109**

$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 263$, ou seja, 18 446 744 073 709 551 615 (aproximadamente 1000 vezes a produção mundial/ano de trigo, nos dias de hoje).

1.1 a) (a_n) é monótona crescente em sentido estrito; **Pág. 113**

b) (b_n) não é monótona;

c) (c_n) é estritamente decrescente.

1.2 $u_1 = -3$; $u_2 = 9$ e $u_3 = -27$; $u_2 > u_1 \wedge u_3 < u_2$

1.3 $v_5 = 1$; $v_6 = 0$ e $v_7 = 1$; $v_6 < v_5$ e $v_7 > v_6$.

3.1 a) $-2, 0, 2, 4, 6$ **Pág. 118**

b) $-2, -5, -8, -11, -14$

c) $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0$

d) $-2, -2, -2, -2, -2$

3.3 É uma progressão aritmética de diferença 3.

4. $r = 3$

5.1 $-3, -6, -12, -24, -48$ **Pág. 122**

5.2 $-5, 10, -20, 40, -80$

5.3 $1, -1, 1, -1, 1$

5.4 Se $r = \sqrt{2}$: $\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}$

Se $r = -\sqrt{2}$: $-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3, -3\sqrt{2}, 6, -6\sqrt{2}$

6.1 É uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

6.2 É uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

6.3 É uma progressão geométrica de razão 1 (sucessão constante).

6.4 É uma progressão geométrica de razão 3.

6.5 É uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

6.6 Não é uma progressão geométrica.

7.1 $P_n = 3 \times 2^{1-n}$ 7.2 $S_{10} \approx 0,58$ **Pág. 125**

$$7.3 S_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]$$

8. $S_5 = 72\ 630\ 272$

1. (C) 2. (D) 3. (B) **Pág. 126**

4. (A) 5. (B) 6. (B)

7. (C) 8. (A)

1.1 $u_1 = 10$ e $r = 3$ 1.2 $S_{10} = 295\ 240$ **Pág. 127**

2.1 $r = -2$ e $u_1 = -12$ ou $r = 2$ e $u_1 = 12$.

2.2 $S_{10} = 4092$ (se $u_1 = -12$) ou $S_{10} = 12\ 276$ (se $u_1 = 12$).

$$3.1 a_{10} = \frac{\pi^{10}}{1024}$$

3.2 $S_{10} \approx 248,92$

4.1 (A) falsa (B) verdadeira (C) falsa

4.2 (A) falsa (B) falsa (C) verdadeira

4.3 (A) falsa (B) falsa

4.4 (A) verdadeira (B) falsa

4.5 Verdadeira.

4.6 (A) falsa (B) falsa

5. Os números são $-1, 1$ e 3 .

6. Ao fim de uma hora conhecem a mentira 3280 pessoas.

7. A melhor hipótese é a terceira e a pior é a primeira.

1. Por exemplo: **Pág. 132**

$$1.1 u_n = (n-9)^2$$

$$1.2 u_n = -(n-4)^2$$

$$1.3 u_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$1.4 u_n = 4 + \frac{1}{n}$$

2.1 $a_1 = 0$; $a_2 = 32$; $a_3 = 0$ **Pág. 133**

$$a_4 = 64$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = 96$$

2.2 $b_n = 32n$ e $c_n = 0$.

2.3 Não é infinitamente grande porque se $L \geq 1$, não existe uma ordem a partir da qual todos os termos sejam superiores a L uma vez que há um número infinito de termos nulos.

$$3.1 +\infty$$

$$3.2 0$$

$$3.3 0$$

4.3 (a_n) é convergente porque é monótona e limitada. **Pág. 135**

5. -15

Pág. 137

$$6.1 -\frac{2}{3}$$

$$6.2 -\frac{4}{3}$$

$$6.3 -\frac{1}{3}$$

$$6.4 -3$$

$$6.5 \frac{8}{27}$$

$$7. \sqrt[3]{2}$$

Pág. 138

8.1 0 8.2 $\frac{1}{4}$ Pág. 139

9.1 $-\infty$ 9.2 $+\infty$ 9.3 $-\infty$ Pág. 141

9.4 0 9.5 0
9.6 $+\infty$ 9.7 $-\infty$

10.1 $-\infty$ 10.2 $+\infty$ 10.3 -1 Pág. 142

10.4 1 10.5 0 10.6 $\frac{1}{2}$
10.7 0 10.8 $+\infty$

11.1 $\frac{1}{3}$ 11.2 0 11.3 -1 Pág. 144

11.4 $-\infty$ 11.5 $\frac{1}{2}$ 11.6 $+\infty$

12.1 $\frac{1}{2}$ 12.2 1

13.1 0 13.2 $\frac{1}{2}$ Pág. 145

14.1 $-\infty$ 14.2 $+\infty$ 14.3 0 Pág. 146

14.4 $\frac{1}{2}$ 14.5 0 14.6 $\frac{1}{2}$

15.1 e 15.2 e 15.3 $\sqrt{e}$ Pág. 149

15.4 e^{-3} 15.5 $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 15.6 $\sqrt[3]{e^4}$

15.7 e^{-4} 15.8 e^{-3}

1. (C) 2. (A) 3. (D) Pág. 150

4. (A) 5. (B)

6. (D) 7. (C)

1.1 3 2.1 3 2.2 4 2.3 0 2.4 0
2.5 $+\infty$ 2.6 1 2.7 1 2.8 4

3.2 $S_n = \frac{1}{n^2 + 2}$ (por exemplo)

4.1 a) $p_1 = (\pi + 2)R$; $p_2 = (\pi + 2)\frac{R}{2}$; $p_3 = (\pi + 2)\frac{R}{4}$

b) $p_n = (\pi + 2)R \times 2^{1-n}$

c) 0

4.2 a) $a_1 = \pi\frac{R^2}{2}$; $a_2 = \pi\frac{R^2}{8}$; $a_3 = \pi\frac{R^2}{32}$

b) $a_n = \pi R^2 \times 2^{1-2n}$

c) 0. A área tende para zero.

π Pág. 153

1.1 -12 1.2 -3 1.3 -26 Pág. 155

1.4 0 1.5 -3

2.1 0 2.2 Não existe. 2.3 2 Pág. 156

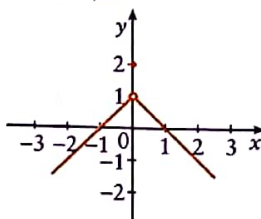
5.1 a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ Pág. 157

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

3.2 a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ não existe.

3.3 Por exemplo:



5.1 9 5.2 -3 5.3 $-\pi$ Pág. 160

5.4 0 5.5 15 5.6 64

5.7 $-\frac{243}{1024}$ 5.8 -10 5.9 $\sqrt{2}$

6.1 $+\infty$ 6.2 $-\infty$ Pág. 162

6.3 $-\infty$ 6.4 $-\infty$ 6.5 $+\infty$

6.6 $+\infty$ 6.7 $-\infty$

7.1 $+\infty$ 7.2 $+\infty$ Pág. 164

7.3 $-\infty$ 7.4 $+\infty$

8.1 0 8.2 0 Pág. 165

8.3 0 8.4 0

9.1 Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1}$. Pág. 166

9.2 Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$.

9.3 $+\infty$

10.1 $+\infty$ 10.2 $+\infty$ Pág. 167

10.3 $-\infty$ 10.4 $+\infty$

11.1 0 11.2 0 Pág. 168

11.3 0 11.4 0

12.1 -1 12.2 $-\frac{1}{3}$ 12.3 1 Pág. 169

13.1 0 13.2 0 13.3 0 Pág. 170

14.1 $+\infty$ 14.2 $+\infty$ 14.3 $-\infty$

15.1 0 15.2 $+\infty$ Pág. 171

15.3 $+\infty$

Soluções

16.1 $\frac{1}{4}$ 16.2 -6 Pág. 172

16.3 $-\frac{2}{3}$ 16.4 $-\frac{1}{2}$

17.1 $+\infty$ 17.2 -2 17.3 $\frac{1}{2}$

18.1 $+\infty$ 18.2 0 Pág. 173

18.3 $-\infty$ 18.4 $+\infty$ 18.5 0

19.1 $+\infty$ 19.2 -1 Pág. 174

19.3 $\frac{1}{2}$ 19.4 $\frac{1}{3}$ 19.5 $\frac{1}{2}$

20.1 1 20.2 1 Pág. 175

20.3 1 20.4 1

21.1 0 21.2 0

21.3 $-\infty$ 21.4 $+\infty$

22.1 3 22.2 $\frac{4}{5}$ Pág. 177

22.3 1 22.4 $\frac{1}{2}$

1. (D) 2. (A) 3. (D) Pág. 178

4. (C) 5. (A) 6. (C)

7. (C) 8. (D) 9. (A)

1.1 $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ 1.2 0 Pág. 179

2.1 $D_f = \mathbb{R}$ 2.2 a) -1 b) $-\infty$

3.1 a) 1 b) 1 c) $+\infty$ d) 0

3.2 a) $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ b) $x \in]3, 17[; +\infty[$

4.1 0 4.2 0 4.3 1

5.1 $Q(0) = 250e^{-0,05 \times 0} = 250$

Significa que no início (instante $t = 0$) o recipiente contém 250 gramas de sal.

5.2 $Q(10) = 250e^{-0,05 \times 10} = 250e^{-0,5} = \frac{250}{e^{0,5}} \approx 151,63$

Significa que no instante $t = 10$ minutos, ainda havia, aproximadamente, 151,63 gramas de sal por dissolver.

5.3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 250e^{-0,05t} = 0$

Significa que à medida que o tempo decorre e para um instante suficientemente grande a quantidade de sal por dissolver aproxima-se de zero gramas.

6.1 $V(0) = 25$. Significa que no início o automóvel tinha uma velocidade de 25 m/s.

6.2 $A = \frac{100}{9}$

6.3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{100}{9} \times 3^{-0,2t+2} \right) = 5$

Conclusão: À medida que o tempo aumenta (indefinidamente) o móvel tende a atingir a velocidade de 5 m/s.

1.1 Atendendo a que: Pág. 183

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

a função é contínua à esquerda no ponto 0 e descontínua à direita.

1.2 Atendendo a que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = g(-1) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$$

a função é contínua à direita no ponto -1 e descontínua à esquerda.

1.3 Atendendo a que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ e como neste ponto os limites laterais são infinitos, então a função não é contínua nem à direita nem à esquerda no ponto 1.

1.4 Atendendo a que:

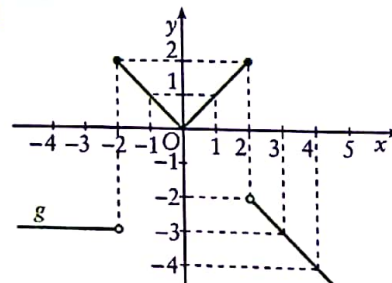
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} i(x) = i(-2) \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} i(x)$$

a função é contínua à direita de -2 e descontínua à esquerda de -2 .

2.1 $D_g = [0, 4]$ Pág. 184

2.2 Em 0, 2 e 4 a função g é contínua.
Em 1 é descontínua, mas contínua à direita.
Em 3 é descontínua.

3.1 Pág. 185



3.2 A função é contínua nos seguintes intervalos:
 $]-\infty, -2[;]-2, 2[;]2, +\infty[$.

4.1 Por exemplo: Pág. 187

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + 1$$

4.2 A função h é contínua no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$ por ser a composta de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ (funções polinomiais).

5. f é contínua por ser a composta de funções contínuas.

6.1 A recta da equação $x = 0$ é uma assíntota vertical de f . Pág. 191

O gráfico de f tem uma assíntota não-vertical (obliqua) que é a recta da equação $y = x$.

6.2 A recta da equação $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .
A recta da equação $y = x$ é uma assíntota não-vertical do gráfico de f .

6.3 A recta da equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

A recta da equação $y = -x - 1$ é uma assíntota não vertical (obliqua) do gráfico de f .

1. (D) 2. (D) Pág. 194

3. (D) 4. (B) 5. (D)

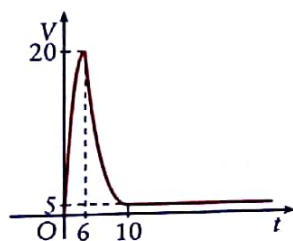
1. $y = -4x + 3$ Pág. 195

2. $\lim h(a_n) = -2$ 3. $k = 0$

5.1 f é contínua em $\mathbb{R}$. 5.2 $x = -3$

6.1 $k = -0,12$

6.2



8 km

Pág. 197

1. f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 s é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 h é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pág. 202

2.1 -2

Pág. 204

2.2 $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -2$

3.1 $s'(x) = 0$

3.2 $t'(x) = 0$

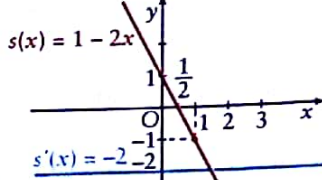
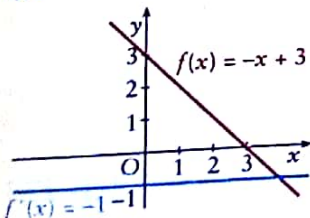
Pág. 205

3.3 $f'(x) = 0$

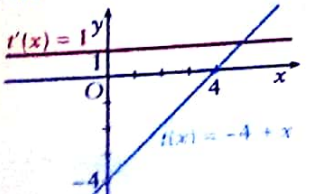
4.1

4.2

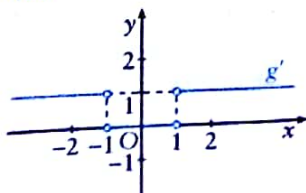
Pág. 206



4.3



4.4



$$5.1 -\frac{2}{x^3}$$

$$5.2 \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Pág. 208

$$5.3 -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$5.4 -\frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$6.1 6x$$

$$6.3 -4x$$

$$6.5 -x^2 + x + 1$$

$$7.1 y' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$$

$$7.3 y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3\sqrt{x}}{4}$$

$$7.5 y' = 6x - \frac{3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{2}{x^2}$$

$$7.7 y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^5}$$

$$6.2 15x^2 + 2x$$

$$6.4 -12x + 2$$

$$6.6 -4x^3 + 3x^2 - 6x + \frac{1}{2}$$

$$7.2 y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{6\sqrt{x^3}}$$

$$7.4 y' = 3\sqrt{x}$$

$$7.6 y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2}$$

$$8.1 6x^2 - 10x + 3$$

$$8.2 0$$

Pág. 211

$$9.1 y' = \frac{-1}{(x+3)^2}$$

$$9.2 y' = \frac{-2x^2 + 1}{(2x^2 + 1)^2}$$

Pág. 212

$$9.3 y' = \frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

$$9.4 y' = \frac{-2x^2 - 6x - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$9.5 y' = \frac{3x^4 + 9x^2 + 2x}{(1 - 3x^3)^2}$$

$$9.6 y' = \frac{x^2 + 2x + \pi x + 2}{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2}$$

$$10.1 y' = -10(-2x+1)^4$$

Pág. 213

$$10.2 y' = -\frac{x}{\sqrt{-x^2+3}}$$

$$10.3 y' = \frac{-x^2}{\sqrt{(-x^2+2)^2}}$$

$$10.4 y' = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$$10.5 y' = \frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2}$$

$$10.6 y' = \frac{-3(x-1)^2}{(x-2)^4}$$

$$10.7 y' = \frac{-x-2}{x^3}$$

$$10.8 y' = \frac{3x^2(x+2\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^4}$$

11. 0,1

$$12.1 y' = -\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$$

$$12.2 y' = -e^{-\frac{x}{3}}$$

Pág. 214

$$13.1 y' = \frac{3^{-\frac{1}{2}} \times \ln 3}{x^2}$$

Pág. 215

$$13.2 y' = \ln 2 \left(-2x - \frac{1}{x^2} \right) \times 2^{-x+\frac{1}{2}}$$

$$14.1 y' = \frac{1}{x}$$

$$14.2 y' = \frac{1}{x}$$

$$14.3 y' = \frac{1}{x}$$

Pág. 216

$$15.1 y' = \frac{2x}{(x^2-3) \times \ln 3}$$

Pág. 217

Soluções

15.2 $y' = \frac{1}{2x \times \ln 2}$

15.3 $y' = \frac{2x}{\ln 2 (x^2 - 1)}$

16.1 $y' = -3 \cos(-3x + 1)$

Pág. 218

16.2 $y' = 15 \sin^4(3x) \cos(3x)$

16.3 $y' = 6 \sin(x+1) \cos(x+1)$

16.4 $y' = 6(x+1) \cos(x+1)^2$

16.5 $y' = \sin x^3 + 3x^3 \cos x^3 + 6 \cos(3x)$

17.1 $y' = -10x \sin(5x^2 - 7)$

17.2 $y' = \sin(2x)$

17.3 $y' = 9x^2 \cos^2(x^3) \sin(x^3)$

17.4 $y' = \cos(2x)$

17.5 $y' = -6(x-3) \sin(x-3)^2 + 2 \sin(x-3) \cos(x-3)$

18.1 $v(t) = -9,8t + 2$

18.2 $a(t) = -9,8$

Pág. 219

18.3 $v(3) = -27,4 \text{ m/s}$; $a(3) = -9,8 \text{ m/s}^2$

1. (D)

2. (D)

3. (A)

Pág. 220

4. (C)

5. (D)

6. (A)

1.1 $f'\left(\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{4}$

1.2 $y = \frac{1}{4}x + \frac{31}{16}$

Pág. 221

2.1 $\frac{3}{5}$

2.2 $y = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$

3.1 $y = x + 1$

3.2 Sim, pois toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

3.3 $-\frac{\ln(2)}{8}$

4.1 $Q(t) = A \times e^{-Bt}$, $t \geq 0$

$Q(0) = A \times e^{-B \times 0} = A$

Significado: inicialmente, isto é, para $t = 0$, a quantidade de qualquer substância radioactiva é igual a A .

4.2 $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de Q .

Significado: com o decorrer do tempo a quantidade Q de qualquer substância radioactiva tende a ser igual a zero.

4.3 $Q'(t) = -ABe^{-Bt}$, $t \geq 0$

Q e Q' são directamente proporcionais se $\frac{Q(t)}{Q'(t)}$ for constante.

$\frac{Q(t)}{Q'(t)} = \frac{A \times e^{Bt}}{-ABe^{-Bt}} = -\frac{1}{B}$

logo Q e Q' são directamente proporcionais.

4.5 $\begin{cases} A = 200 \\ B = \frac{\ln(2)}{5} \end{cases}$

1.1 Se $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ num intervalo E , para todos os números reais b e c de E , se $b < c$ então $f(b) \geq f(c)$ e $f(b) \leq f(c)$ dado que $f(b) = f(c) = a$.

Pág. 223

1.2 a) $[a, b]$

b) $[a, b]$ e $[c, d]$

c) $[d, e]$

d) $[b, c]$

2.1 f é estritamente crescente em $]-\infty, -\frac{1}{6}]$ Pág. 226

e estritamente decrescente em $[-\frac{1}{6}, +\infty[$.

2.2 f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

2.3 f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$.

2.4 f é estritamente decrescente em $]0, \frac{1}{e}]$ e estritamente crescente em $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

3.1 Máximo: 20; mínimo: $-\frac{4}{3}$.

Pág. 228

3.2 Máximo: não tem; mínimo: -2 .

3.3 Máximo: $\frac{1}{e}$; mínimo: não tem.

3.4 Máximo: $\frac{2}{\ln(2)}$; mínimo: e .

4.1 A função tem um único extremo relativo.

Pág. 231

$f\left(\frac{3}{2}\right)$ é o máximo da função e é igual a $\frac{13}{4}$.

4.2 A função g tem dois extremos relativos.

$g(-2) = 32$ é o máximo da função e $g\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{467}{27}$ é o mínimo da função.

4.3 A função f tem um mínimo para $t = \frac{3}{2}$ e esse mínimo é $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$.

4.4 A função f tem dois extremos relativos.

$f(0)$ é o mínimo da função e $f(1)$ é o máximo.

Mínimo: $f(0) = 0$

Máximo: $f(1) = \frac{1}{e^2}$

4.5 A função tem um máximo relativo que é $f(e)$.

Máximo: $f(e) = \frac{1}{e}$

5. O gráfico de f tem a concavidade virada para baixo em $] -3, 0[$ e a concavidade virada para cima em $] -\infty, -3[$ e em $] 0, +\infty[$.

Pág. 234

Os pontos $(-3, f(-3))$ e $(0, f(0))$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

6.1 O gráfico de f tem a concavidade virada para cima em $] 0, 1[$ e a concavidade virada para baixo em $] 1, +\infty[$.

Pág. 235

O ponto $(0, f(1))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f .

6.2 O segundo gráfico, pois -1 é zero da função e esta muda de sinal neste ponto.

7. A função tem um mínimo relativo igual a

Pág. 237

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - 3 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

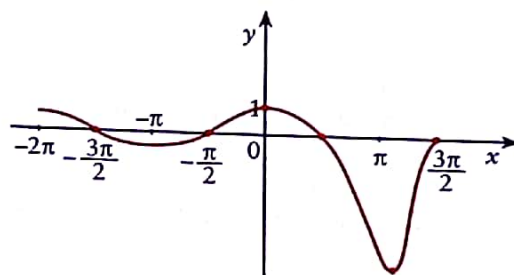
8. (i) Domínio: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **Pág. 240**
(ii) Continuidade:
A função f é contínua no seu domínio, isto é, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(iii) Intersecção com os eixos:
O gráfico de f não intersecta o eixo Ox nem Oy .
(iv) Simetria:
A função f não é par nem ímpar. O gráfico de f não é simétrico relativamente ao eixo Oy nem à origem.
(v) Monotonia e extremos:
A função f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$ e crescente em $[1, +\infty[$.
 $f(1) = e$ é um mínimo relativo da função f .
(vi) Concavidades e pontos de inflexão:
O gráfico de f tem a concavidade virada para baixo em $]-\infty, 0[$ e virada para cima em $]0, +\infty[$.
Não tem pontos de inflexão.
(vii) Assintotas:
A recta da equação $x = 0$ é uma assíntota vertical (bilateral) do gráfico de f .
A recta da equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f .
(viii) Contradomínio:
 $D_f =]-\infty, 0[\cup [e, +\infty[$.

9. (i) Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$ **Pág. 242**
(ii) Continuidade:
A função é contínua no seu domínio.
(iii) Simetria:
Como o domínio é $\mathbb{R}^+$, a função não é par nem ímpar.
(iv) Monotonia e extremos:
 $f(1) = 1$ é um mínimo relativo da função f .
(v) Concavidades e pontos de inflexão:
O gráfico de f tem a concavidade virada para cima em todo o seu domínio. Não tem pontos de inflexão.
(vi) Assintotas:
A recta da equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .
O gráfico de f não tem assíntotas não-verticais.
(vii) Contradomínio:
 $D_f = [1, +\infty[$.

- 10.1 a) f tem um mínimo para $x = 0$ que é **Pág. 243**
 $f(0) = 1$ e tem outro para $x = \frac{3\pi}{2}$ que é
 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
Tem, também, dois máximos para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = 2\pi$
que são, respectivamente, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ e $f(2\pi) = 1$.
b) $D_f = \left[\frac{1}{e}, e\right]$

- 10.2 a) Extremos: tem mínimos para $x = -2\pi$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ e
 $x = \frac{5\pi}{4}$; $\frac{1}{e^{2\pi}}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{3\pi}{4}}}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$.
Tem máximos para $x = -\frac{7\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$;
 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{4}}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ e 0 .

- b) $(-\pi, -\frac{1}{e^{\pi}})$; $(0, 1)$ e $(\pi, -e^{\pi})$.
c)



11. Devem ser dobrados 7 cm de cada lado **Pág. 245**
da folha para que a caleira tenha capacidade máxima.
12. O custo mínimo dos materiais para construir **Pág. 246**
as embalagens cilíndricas obtém-se para cilindros com
2,68 cm de raio da base e 6,69 cm de altura.
13. Catetos: $10\sqrt{2}$ cm e hipotenusa: 20 cm; **Pág. 247**
o triângulo, quanto aos lados, classifica-se como isósceles.
14.1 É no ponto de abscissa 20 que é mínima **Pág. 248**
a função f . Como a distância de A a B é 40 m e
 $40 : 2 = 20$, a distância mínima de um ponto da linha
 DC obtém-se no ponto em que a linha dista igualmente
de A e de B .
15.1 Tal como a figura sugere, é no ponto de **Pág. 249**
abscissa zero que a altura do arco é máxima.
15.2 A distância de A a B é igual à soma dos valores absolu-
tos dos zeros da função f , ou seja, $\overline{AB} = 2\sqrt{15}$.

16. A única solução possível seria o João dirigir-se **Pág. 250**
ao ponto P , que dista 3,46 km do ponto F e, em
seguida, dirigir-se por terra para o ponto N .

- 17.1 A função é mínima para $x = 0$. **Pág. 251**
Assim, $f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$.
A distância mínima da rampa ao solo, representada por
 $\overline{AB}$, é igual a 1.
17.2 $\overline{AD} = f(-2) = \frac{e^{-2} + e^2}{2}$.

1. (B) 2. (A) 3. (A) Pág. 252
4. (D) 5. (D) 6. (C)

1.1 A função f é decrescente no intervalo Pág. 253

$]-\infty, 2]$ e crescente em $[2, +\infty[$.

A função f tem um mínimo relativo para $x = 2$.

- 1.2 Como $f''(x)$ não se anula, então a função f não tem qualquer ponto de inflexão.

- 1.3 O gráfico de f tem a concavidade virada para cima, uma vez que $f''(x) = 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. • $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Assíntotas verticais:

A recta da equação $x = 1$ é uma assíntota vertical unilateral.

• Assíntotas não-verticais:

A recta da equação $y = e$ é uma assíntota horizontal.

• Extremos:

$f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, então f é decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$ e não tem extremos.

• Pontos de inflexão:

A função tem um ponto de inflexão para $x = 0$, sendo esse o ponto de coordenadas $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

3. A caixa tem capacidade máxima quando a dimensão dos cantos a cortar for igual a 4,53 cm.

4. Dimensões dos terrenos:

Rectangular: $\frac{2520}{17}$ m de largura e $\frac{5040}{17}$ m de comprimento.

Quadrangular: $\frac{3360}{17}$ m de lado.

5. O volume máximo do cilindro é $\frac{8000}{9} \pi \text{ cm}^3$.

6. $f(n) = 30(200 + 10n) - (200 + 10n) \times n \Leftrightarrow$

$$f(n) = -10n^2 + 100n + 6000$$

A função tem um máximo para $n = 5$.

Assim, para que o lucro obtido pelo proprietário do restaurante seja máximo, cada refeição deverá custar:

$$(200 + 10 \times 5) = 250 \text{ meticais.}$$

1. $F(x) = 2\sqrt{x}$ Pág. 257

- 2.1 $-7x + C$ 2.2 $-\frac{2}{3}x + C$ Pág. 258

- 2.3 $\sqrt{2}x + C$ 2.4 $-\frac{7}{2}x^2 + C$

- 2.5 $\frac{7}{10}x^2 + C$ 2.6 $\frac{x^4}{4} + C$

- 2.7 $\frac{x^{21}}{81} + C$ 2.8 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

- 2.9 $-\frac{1}{9x^9} + C$ 2.10 $\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} + C$

- 2.11 $\frac{8}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + C$

- 3.1 $\frac{x^{11}}{11} + C$ 3.2 $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ Pág. 260

- 3.3 $-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{x}} + C$ 3.4 $e^x + \frac{3^x}{\ln 3} + \cos x + 3x + C$

- 4.1 $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ Pág. 261

- 4.2 $\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$ 4.3 $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$

1. (A) 2. (C) 3. (B) Pág. 262

4. (C) 5. (B) 6. (D)

7. (A) 8. (B)

- 1.1 $\frac{1}{3}x^3 + C$ 1.2 $\frac{1}{8}x^3 + C$ Pág. 263

- 1.3 $\frac{1}{2}x^2 + C$ 1.4 $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

- 1.5 $\frac{1}{2}x^6 + C$ 1.6 $-\frac{7}{2x^2} + C$

- 1.7 $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$ 1.8 $3\sqrt[3]{x} + C$

- 1.9 $\frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x + \frac{4}{x} + C$ 1.10 $-\cos x + C$

- 1.11 $\sin x + C$ 1.12 $\ln|x| + x + C$

- 1.13 $e^x + C$ 1.14 $\frac{a^x}{\ln a} + C$

- 1.15 $\frac{2^x}{\ln 2} + C$ 1.16 $\frac{x^3}{3} + 10\sqrt{x} + C$

- 1.17 $\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C$ 1.18 $x - \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C$

- 1.19 $2\sqrt{2}\sqrt{x} - 2x + \frac{\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x} + C$

- 1.20 $\frac{e^{2x}}{2} + C$ 1.21 $\frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + C$

- 1.22 $\frac{8^x}{3\ln 2} + C$ 1.23 $\frac{9^x}{2\ln 3} + \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + x + C$

- 1.24 $\frac{1}{2}\sin(2x) + C$ 1.25 $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

- 1.26 $x + \frac{1}{2}\sin(2x - 1) + C$ 1.27 $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}\cos(3x + 2) + C$

- 1.28 $2\ln|x| - \cos x + C$ 1.29 $-\frac{1}{4}\cos(2x) + C$

- 1.30 $x - \frac{1}{2}\cos(2x) + C$

- 2.1 $e^x(x - 1) + C$

- 2.2 $\frac{1}{20}(x + 3)^4(4x - 3) + C$

- 2.3 $\frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C$

- 2.4 $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

- 2.5 $\sin x - x \cos x + C$

- 2.6 $x \sin x + \cos x + C$

- 2.7 $\frac{(\ln x)^2}{2}$ 2.8 $2\sqrt{x}(\ln x - 2)$

- 2.9 $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

- 2.10 $3^{-x}\left(\frac{-x}{\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}\right)$

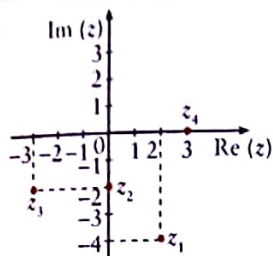
- 2.11 $x \ln x - x + C$

- 2.12 $\frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C$

Não.

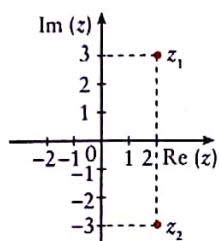
Pág. 265

1.1

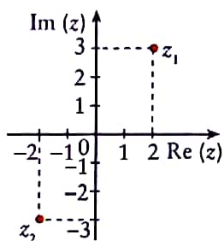


Pág. 268

1.2 a)



b)



2.1 a) $6 - 4i$ b) $-3 + 4i$

Pág. 269

c) $2 - 2i$ d) $\frac{3}{4} + 2i$ e) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

2.2 $(a + c) + (b + d)i$

2.3 a) $-3 + 5i$ b) $-1 + i$

3.1 a) $-1 + 2i$

b) $5 + i$

Pág. 270

c) $\frac{17}{2} + 2i$ d) $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$

3.2 $(ac - bd) + (ad + bc)i$

4.1 13

4.2 2

4.3 -2

5.1 $-5 - 12i$

5.2 $\frac{3}{4} + i$

5.3 $2 + 2i$

5.4 $(a^2 - b^2) + 2abi$

6.1 $-2 - i$

6.2 $-1 - 2i$

Pág. 271

6.3 $-\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$

6.4 $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

6.5 $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

6.6 $\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

7.1 $-i$

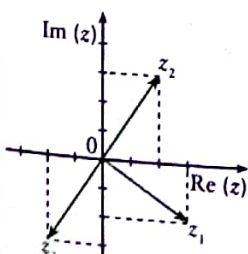
7.2 $-2i$

Pág. 272

8. As raízes quadradas de $-3 + 4i$ são $-1 - 2i$ e $1 + 2i$.

Pág. 273

9.1



9.2 a) $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow R(0, 90^\circ)$

b) $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow R(0, -90^\circ)$

11.1 $z = -2i \vee z = 2i$

Pág. 275

11.2 $z = -5 - i \vee z = -5 + i$

11.3 $z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i \vee z = -\frac{1}{4} + 2i$

11.4 $z = 0 \vee z = -4i \vee z = 4i$

11.5 $z = 0 \vee z = -3 - 2i \vee z = -3 + 2i$

11.6 $z = -2 + i \vee z = 2 + i$

11.7 $z = 0 \vee z = 1 - 3i \vee z = -1 - 3i$

12.1 Módulo: $|z_1| = 3$; argumento: $\arg z_1 = 0$

Pág. 277

12.2 Módulo: $|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

argumento: $\arg z_2 = \frac{\pi}{4}$

12.3 Módulo: $|z_3| = 5$; argumento: $\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$

12.4 Módulo: $|z_4| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$;

argumento: $\arg z_4 = \frac{5\pi}{6}$

12.5 Módulo: $|z_5| = 2$; argumento: $\arg z_5 = \pi$

12.6 Módulo: $|z_6| = |-\sqrt{2}i| = \sqrt{2}$;

argumento: $\arg z_6 = \frac{3\pi}{2}$

12.7 Módulo: $|z_7| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$;

argumento: $\arg z_7 = -\frac{\pi}{3}$

13.1 $z_1 = 3 \text{ cis } 0$

13.2 $z_2 = 2 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{6}\right)$ Pág. 278

13.3 $z_3 = 4 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{2}\right)$

13.4 $z_4 = 4\sqrt{2} \text{ cis } \frac{5\pi}{4}$

13.5 $z_5 = 2 \text{ cis } \frac{3\pi}{2}$

14.1 $1 + \sqrt{3}i$

14.2 $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$ Pág. 279

15.2 a) $\frac{5}{3} \text{ cis } (0)$

b) $\text{cis } \pi$

Pág. 280

c) $5 \text{ cis } \left(\frac{3\pi}{4}\right)$

15.3 Por exemplo:

$z_1 = 2 \text{ cis } (\pi)$ e $z_2 = 2 \text{ cis } (-\pi)$

$z_1 = 4 \text{ cis } \left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = \text{cis } \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

15.4 a) $8 \text{ cis } 0$

b) $8\sqrt{2} \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3}\right)$

16.1 a) $\text{cis } \pi$ b) $\text{cis} \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$ Pág. 282

c) $\frac{1}{2^{50}} \text{cis } \pi$

17.1 $2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$ 17.2 $\frac{1}{2} \text{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$ Pág. 283

17.3 $\frac{\sqrt{2}}{8} \text{cis} \left(\frac{17\pi}{12} \right)$ 17.4 $\frac{5\sqrt{2}}{2} \text{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

17.5 $4\sqrt{2} \text{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)$

18.1 a) $\sqrt{2} \text{cis} \left(\frac{-\pi}{12} \right)$ e $\sqrt{2} \text{cis} \left(\frac{11\pi}{12} \right)$ Pág. 285

b) $\sqrt[4]{1} \text{cis} \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{4}; k = 0, 1, 2, 3$

Se $k = 0 \rightarrow \text{cis} \left(\frac{3\pi}{16} \right)$

Se $k = 1 \rightarrow \text{cis} \left(\frac{11\pi}{16} \right)$

Se $k = 2 \rightarrow \text{cis} \left(\frac{19\pi}{16} \right)$

Se $k = 3 \rightarrow \text{cis} \left(\frac{27\pi}{16} \right)$

c) $2 \text{cis} \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5}; k = 0, 1, 2, 3, 4$

Se $k = 0 \rightarrow 2 \text{cis} \left(\frac{3\pi}{10} \right)$

Se $k = 1 \rightarrow \text{cis} \left(\frac{7\pi}{10} \right)$

Se $k = 2 \rightarrow 2 \text{cis} \left(\frac{11\pi}{10} \right)$

Se $k = 3 \rightarrow 2 \text{cis} \left(\frac{15\pi}{10} \right) = 2 \text{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right)$

Se $k = 4 \rightarrow 2 \text{cis} \left(\frac{19\pi}{10} \right)$

18.2 a) $S = \left\{ \text{cis } 0, \text{cis } \frac{2\pi}{3}, \text{cis } \frac{4\pi}{3} \right\}$

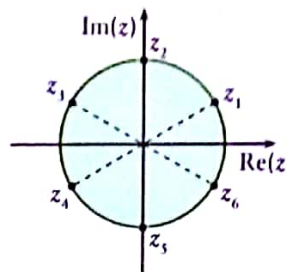
b) $S = \left\{ \text{cis } \frac{\pi}{4}, \text{cis } \frac{3\pi}{4}, \text{cis } \frac{5\pi}{4}, \text{cis } \frac{7\pi}{4} \right\}$

c) $S = \left\{ \sqrt[12]{2} \text{cis} \left(-\frac{\pi}{24} \right), \sqrt[12]{2} \text{cis} \left(\frac{7\pi}{24} \right), \sqrt[12]{2} \text{cis} \left(\frac{5\pi}{8} \right), \sqrt[12]{2} \text{cis} \left(\frac{23\pi}{24} \right), \sqrt[12]{2} \text{cis} \left(\frac{31\pi}{24} \right), \sqrt[12]{2} \text{cis} \left(\frac{13\pi}{8} \right) \right\}$

d) $S = \{-1, 0, 1\}$

e) $S = \left\{ 0, \text{cis } 0, \text{cis } \frac{2\pi}{3}, \text{cis } \frac{4\pi}{3} \right\}$

19. Pág. 286



20.1 $z_2 = -2; z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ Pág. 287

20.2 $z_1' = 1 + (\sqrt{3} - 1)i; z_2' = -2 - i; z_3' = 1 + (-\sqrt{3} - 1)i$

20.3 $z_1 \times z = 2 \text{cis} \left(\frac{2\pi}{3} \right); z_2 \times z = 2 \text{cis} \left(\frac{4\pi}{3} \right);$

$z_3 \times z = 2 \text{cis} (2\pi)$

Interpretação: O produto de $\text{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$ por cada número

complexo correspondente a cada vértice do triângulo

significa que se obtém uma rotação de centro $(0, 0)$ e ângulo igual a $\frac{\pi}{3}$ de cada um dos vértices do triângulo.

1. (B) 2. (B) 3. (C) Pág. 288

4. (D) 5. (C)

6. (A) 7. (C)

1.1 $3 + 3i$ 1.2 $\frac{1}{w} = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$ Pág. 289

2.1 $P(-1) = 0$

2.2 $-1; 2 + i$ e $2 - i$.

3.1 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3.2 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. $w = \frac{11\sqrt{3} - 2}{6} - \frac{11 + 2\sqrt{3}}{6}i$

5. $-3i, \sqrt{7}$ e $-\sqrt{7}$ 6. $z = \frac{1}{2} \text{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right)$

7. $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -6 + 6i$.

8. $\frac{53 - \sqrt{3}i}{2}$

9. A imagem geométrica de z pertence ao 4.º quadrante (eixos não incluídos), logo z será da forma:

$z = r \text{cis } \theta$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$.

$z^3 = r^3 \text{cis} (3\theta)$

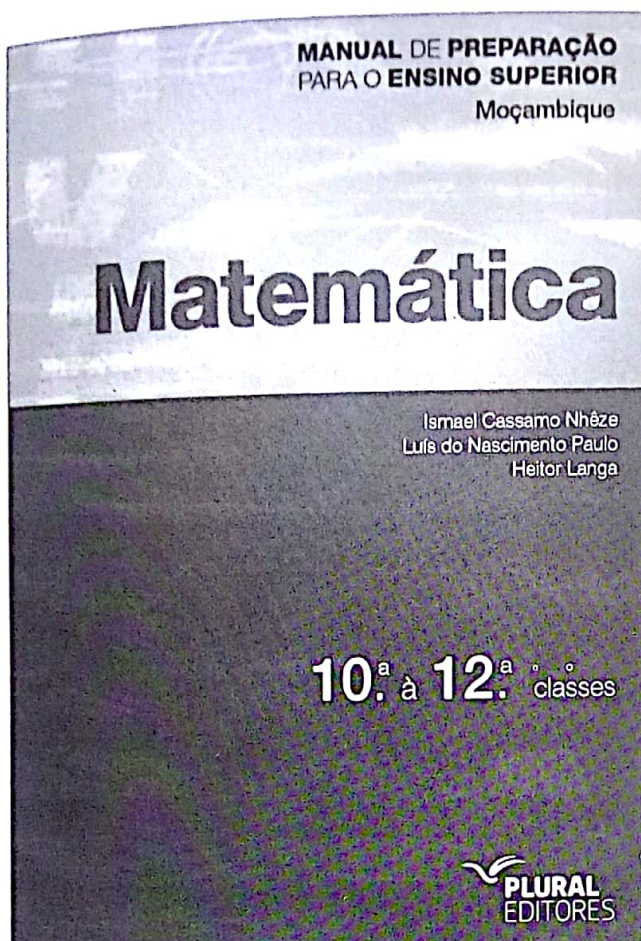
E como $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, então:

$-\frac{3\pi}{2} < 3\theta < 0$, ou seja, $\frac{\pi}{2} < 3\theta < 2\pi$.

Daí que se $z^3 = r^3 \text{cis} (3\theta)$, com $\frac{\pi}{2} < 3\theta < 2\pi$, a sua imagem geométrica não pode pertencer ao 1.º quadrante, mas pode pertencer aos 2.º, 3.º ou 4.º quadrantes.

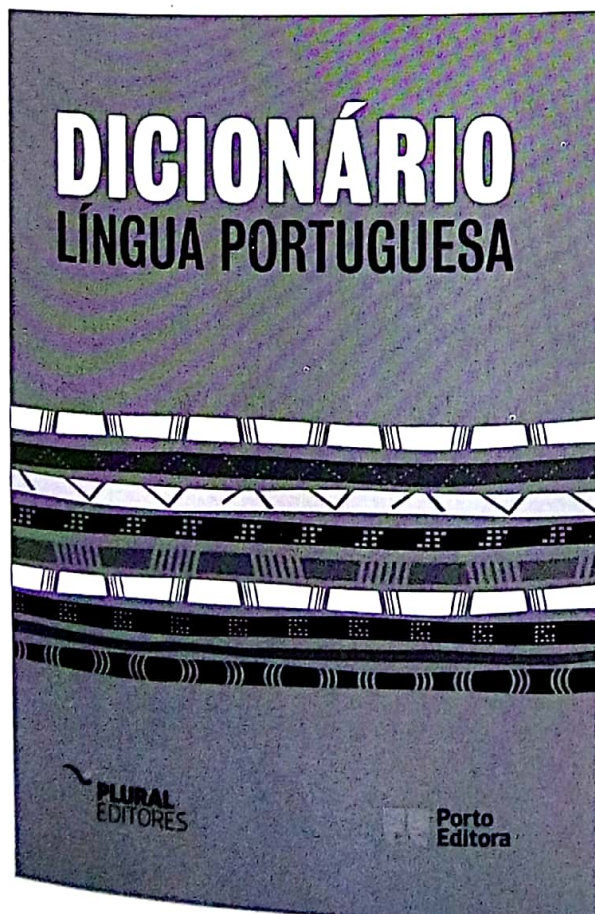
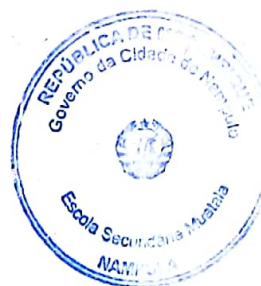
10. $y = 0$ ou $\text{Im}(z) = 0$.

Outros títulos de apoio



Manual de Preparação para o Ensino Superior

Esta obra foi concebida para os alunos de Matemática da 10.ª à 12.ª classes, assumindo particular importância para os estudantes que se preparam para realizar o exame de Matemática de admissão ao ensino superior. Este livro contém resumos teóricos acompanhados de exemplos elucidativos para a resolução dos exercícios e problemas que são propostos. Para a concepção desta obra pesquisaram-se e analisaram-se enunciados de exames de vários anos e procurou-se, através deles, ir ao encontro das maiores dificuldades que os alunos sentem.



Dicionário da Língua Portuguesa

O **Dicionário da Língua Portuguesa** é o dicionário recomendado para os estudantes do ensino secundário moçambicano. Com mais de 55 000 definições de vocabulário actual e cerca de 3000 exemplos e frases idiomáticas, é uma ferramenta de trabalho e um auxiliar de estudo indispensável. É, sem dúvida, uma obra fundamental, editada pela Porto Editora/Plural Editores, especialista em Dicionários.

12^a
classe

Matemática

Maria Augusta Ferreira Neves

Jorge Nuno Silva

Colaboração Manuel Joaquim Alves

0

**Outros títulos disponíveis brevemente para
a 12.^a classe**

- Língua Portuguesa
- Inglês
- História
- Química
- Física
- Introdução à Filosofia
- Geografia

**PLURAL
EDITORES**

www.pluraleditores.co.mz

