

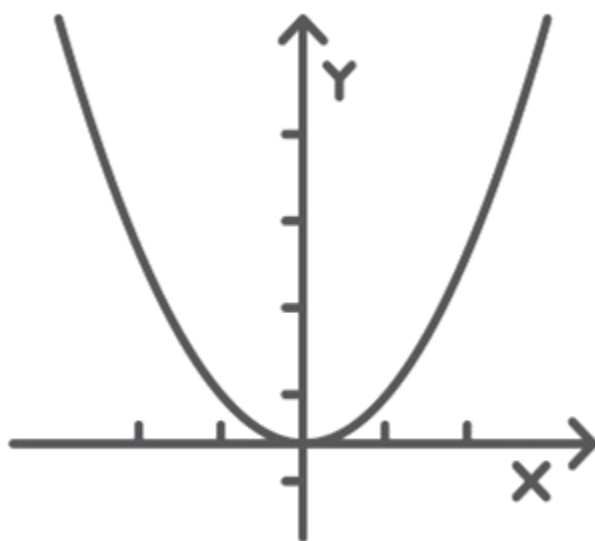


REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
DIRECÇÃO NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

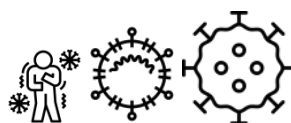
MATEMÁTICA

9ª Classe

O meu caderno de actividades



STOP Sida



STOP Covid-19

BAIXAR TODOS **LIVROS ESCOLARES** — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Classe** para Baixar todos livros em PDF

12ª CLASSE

11ª CLASSE

10ª CLASSE

9ª CLASSE

8ª CLASSE

7ª CLASSE

6ª CLASSE

5ª CLASSE

4ª CLASSE

3ª CLASSE

2ª CLASSE

1ª CLASSE

BAIXAR TODOS **MÓDULOS ESCOLARES** —

MÓDULOS DO I CICLO

MÓDULOS DO II CICLO

LIVROS POR DISCIPLINAS - TODAS

Tudo em: Biblioteca.MozEstuda.com

MozEstuda.com

contacto@mozestuda.com

BAIXAR EXAMES DA **6ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

C. NATURAIS

C. SOCIAIS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

BAIXAR EXAMES DA **10ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

FÍSICA

GEOGRAFIA

HISTORIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

BAIXAR EXAMES DA **12ª CLASSE** – MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da disciplina** para Baixar todos exames em PDF

BIOLOGIA

DGD

FILOSOFIA

FÍSICA

FRANCÊS

GEOGRAFIA

HISTÓRIA

INGLÊS

MATEMÁTICA

PORTUGUÊS

QUÍMICA

TODOS EXAMES

TODOS EDITAIS

TODOS LIVROS

BAIXAR EXAMES DE **ADMISSÃO** — MOÇAMBIQUE

Toque no **nome da Instituição** para Baixar todos exames em PDF

IFP / Formação de Professores

UEM

UJC/ ISRI

ISPG

ISPSONGO

AC. MILITAR

PRM

ISCAM

ICS — SAÚDE — ENSINO MÉDIO

ETP / Ensino técnico Profissional

UP / UniRios: Save, Rovuma, Licungo, ...

UNIZAMBEZE

ISPT

ISCISA

ACIPOL

CFJJ

IFAPA

EDITAIS

ENEM

VESTIBULARES

ENCCEJA

TODOS EXAMES

FICHA TÉCNICA

Título:	O meu caderno de actividades de Matemática – 9ª classe
Direcção:	Gina Guibunda & João Jeque
Coordenação Geral:	Manuel Biriarte
Elaboradores:	Anselmo Chuquela
Concepção gráfica da capa:	Hélder Bayat, Bui Nguyet & Manuel Biriarte
Layout:	Hélder Bayat
Impressão e acabamentos:	MINEDH
Revisão Técnica:	João Sapatinha & Cláudio Monjane
Revisão Linguística	Rui Manjate
Tiragem:	xxx exemplares.

PREFÁCIO

No âmbito da prevenção e mitigação do impacto da COVID-19, particularmente no processo de ensino-aprendizagem, o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano concebeu um conjunto de medidas que incluem o ajuste do plano de estudos, os programas de ensino, bem como a elaboração de orientações pedagógicas a serem seguidas para a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem.

Neste contexto, foi elaborado o presente Caderno de Actividades, tendo em consideração os diferentes conteúdos programáticos nas diferentes disciplinas leccionadas no Ensino Secundário. Nele é proposto um conjunto alargado de actividades variadas, destinadas a complementar as acções desenvolvidas na aula e também disponibilizar materiais opcionais ao desenvolvimento de competências pré-definidas nos programas.

A concepção deste Caderno de Actividades obedeceu à sequência e objectivos dos programas de ensino que privilegiam o lado prático com vista à resolução dos problemas do dia-a-dia e está estruturado em três (3) partes, a saber: I. Síntese dos conteúdos temáticos de cada unidade didáctica; II. Exercícios; III. Tópicos de correcção/resolução dos exercícios propostos.

Acreditamos que o presente Caderno de Actividades constitui um instrumento útil para o auto-estudo e aprimoramento dos conteúdos da disciplina ao longo do ano lectivo. O mesmo irá permitir desenvolver a formação cultural, o espírito crítico, a criatividade, a análise e síntese e, sobretudo, o desenvolvimento de habilidades para a vida.

As actividades propostas no Caderno só serão significativas se o caro estudante resolvê-las adequadamente, com a mediação imprescindível do professor.

“Por uma Educação Inclusiva, Patriótica e de Qualidade!”


CARMELITA RITA NAMASHULUA
MINISTRA DA EDUCAÇÃO E
DESENVOLVIMENTO HUMANO

ÍNDICE

ÍNDICE	4
UNIDADE TEMÁTICA I:	1
NÚMEROS REAIS E RADICIAÇÃO	1
I. RESUMO	1
1.1. <i>Números Racionais – Revisão</i>	1
1.2. <i>Números Reais</i>	1
1.3. <i>Radiciação</i>	2
1.4. <i>Operações com radicais</i>	6
1.5. <i>Potência de uma Raiz</i>	7
1.6. <i>Racionalização de denominadores</i>	8
II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	9
III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	10
3.1. <i>Exercícios propostos 1</i>	10
3.2. <i>Exercícios Propostos 2</i>	12
UNIDADE TEMÁTICA II:	16
INEQUAÇÕES LINEARES E SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL	16
I. RESUMO	16
1.1. <i>Intervalos numéricos limitados e ilimitados</i>	16
1.2. <i>Reunião e intersecção de intervalos numéricos</i>	17
1.3. <i>Inequações</i>	18
II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	20
UNIDADE TEMÁTICA III:	23
NOÇÃO DE MONÓMIOS E POLINÓMIOS.....	23
I. RESUMO	23
1.1. <i>Monômios</i>	23
1.2. <i>Polinômios</i>	25
II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	28
UNIDADE TEMÁTICA IV:.....	30
EQUAÇÃO QUADRÁTICA.....	30
I. RESUMO	30
1.1. <i>Equações Quadráticas – Definição</i>	30
II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	33
III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	34
UNIDADE TEMÁTICA V:.....	36
FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	36
I. RESUMO	36
1.1. <i>Funções Quadráticas – Definição</i>	36
II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	42
III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	43

UNIDADE TEMÁTICA VI:.....	45
QUADRILÁTEROS.....	45
I. RESUMO	45
1.1. <i>Quadrilátero</i>	45
1.2. <i>Classificação de quadriláteros</i>	45
1.3. <i>Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero</i>	46
II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS.....	47
III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	48
UNIDADE TEMÁTICA VII:.....	50
NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA	50
I. RESUMO	50
1.1. <i>Estatística</i>	50
1.2. <i>Termos e conceitos estatísticos</i>	50
1.3. <i>Recolha e organização de dados</i>	51
1.4. <i>Frequência absoluta, relativa percentual e acumuladas</i>	51
1.5. <i>Gráficos de barras</i>	52
1.6. <i>Medidas de tendência central</i>	52
II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	54
UNIDADE TEMÁTICA VIII:.....	55
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	55
I. RESUMO	55
1.1. <i>Homotetias</i>	55
1.2. <i>Semelhança de triângulos</i>	55
1.3. <i>Revisão</i>	56
II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS.....	58
III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS	59
3.1. <i>Exercícios propostos 1</i>	59
3.2. <i>Exercícios Propostos 02</i>	60
TÓPICOS DE CORRECÇÃO/RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS	63
BIBLIOGRAFIA.....	70

UNIDADE TEMÁTICA I**NÚMEROS REAIS E RADICIAÇÃO****I. RESUMO****1.1. Números Racionais – Revisão**

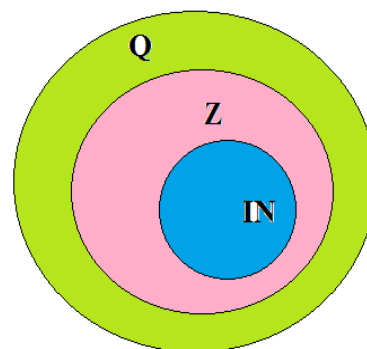
O Conjunto dos números racionais é formado pelos números inteiros relativos incluindo as fracções de termos inteiros e é representado pela letra Q .

Simbolicamente: $Q = Z \cup \{\text{fracções de termos inteiros}\}$

1.1.1 Subconjuntos de Q

Constituem principais subconjuntos de Q os seguintes conjuntos: Q^+ ; Q^- ; Q_0^+ ; Q_0^- .

- Q^+ Conjunto dos números racionais positivos;
- Q^- Conjunto dos números racionais negativos;
- Q_0^+ Conjunto dos números racionais não negativos;
- Q_0^- Conjunto dos números racionais.



São também subconjuntos do conjunto dos números racionais o conjunto dos números naturais (N), o conjunto dos números inteiros relativos (Z) incluindo os seus subconjuntos.

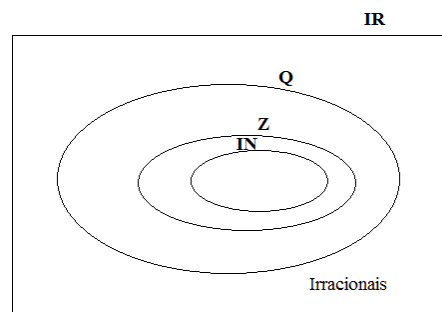
1.2. Números Reais

Como já vimos, os números racionais são todos aqueles que podem representar-se na forma de fracção de termos inteiros. Existem outros tipos de números que não se podem representar sob a forma de fracções de termos inteiros, por exemplo:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097 \dots$$

$$\sqrt[3]{4} = 1,4422495703074083823216383107801 \dots$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795 \dots$$



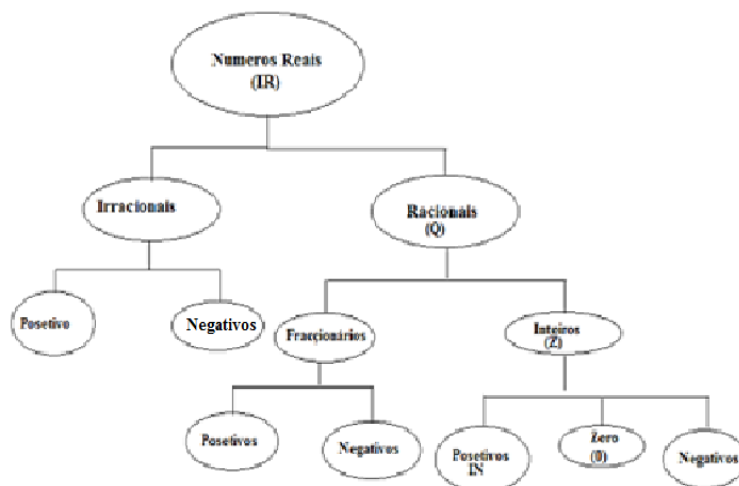
Estes números são chamados **irracionais**.

O conjunto formado pelos números racionais e irracionais chama-se **conjunto dos números reais** e representa-se por **IR**.

$$IR = Q \cup \{Irracionais\}$$

Consequentemente, na recta os números reais, encontraremos números: naturais, inteiros, racionais e irracionais:

O esquema ao lado traduz as relações entre alguns dos mais importantes subconjuntos do conjunto dos números reais:



Outros Subconjuntos de IR

- IR^- {Números reais negativos}
- IR^+ {Números reais positivos}
- IR_0^- {Números reais não positivos}
- IR_0^+ {Números reais não negativos}

1.3. Radiciação

1.3.1. Raiz quadrada de um número não negativo

A expressão $\sqrt{a}$ chama-se radical quadrático de a . $\sqrt{}$ é o radical e a é o radicando.

Consideremos a expressão: $\sqrt{16}$ - Lê-se raiz quadrada de 16.

- $\sqrt{16} = 4$;
- 16 diz-se radicando;
- $\sqrt{}$ diz-se sinal de radical;
- 4 é a raiz.

$$\sqrt{16} = 4, \text{ pois o quadrado de 4 é 16, isto é: } 4^2 = 16$$

Exemplos:

- $\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$
- $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

- $\sqrt{100} = 10$, porque $10^2 = 100$

Radical de índice “n”

Chama-se raiz de índice n de a a expressão do tipo: $\sqrt[n]{a}$ onde:

- $\sqrt{}$ é o sinal do radical;
- a é o radicando;
- n é o índice do radical.

Nota:

- O radical $\sqrt[n]{a}$ designa a raiz n -enésima de a .
- Quando n é par e a é negativo, a expressão $\sqrt[n]{a}$ não tem significado em IR.

Exemplos:

- $\sqrt{144} = 12$, porque $12^2 = 144$
- $\sqrt[3]{64} = 4$, porque $4^3 = 64$
- $\sqrt[3]{-27} = -3$, porque $(-3)^3 = -27$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$, porque $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$
- $\sqrt[4]{-16}$ não existe em IR.

1.3.2. Potência de expoente fraccionário

Potência de expoente fraccionário é qualquer potência cujo expoente é uma fracção com termos inteiros.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ com } a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z} \text{ e } (n \geq 2) \in \mathbb{N}$$

Exemplos:

- $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16^1} = \sqrt{16} = 4$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$

Nota: As propriedades da potenciação já estudadas no conjunto dos números racionais mantêm-se válidas nas potências de expoente fraccionárias.

Exemplos

- $3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{2+2}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4}$
- $2^{\frac{5}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5-1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$
- $5^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = (5 \times 3)^{\frac{2}{3}} = 15^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{15^2}$
- $7^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{7}\right)^2}$

1.3.3. Radicais equivalentes

Se multiplicarmos ou dividirmos o índice do radical e o expoente do radicando pelo mesmo número natural, diferente de zero, o valor do radical não se altera, isto é, obteremos radicais equivalentes.

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \times k]{a^{p \times k}} \text{ com } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Aplicando a definição de raiz, tem-se $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$, multiplicando os termos da fracção do expoente pelo mesmo número $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p \times k}{n \times k}}$ e aplicando novamente a definição $a^{\frac{p \times k}{n \times k}} = \sqrt[n \times k]{a^{p \times k}}$, mostra-se que $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \times k]{a^{p \times k}}$.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3 \times 4]{2^{2 \times 4}} = \sqrt[12]{2^8}$
- $\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[12 \div 4]{2^{8 \div 4}} = \sqrt[3]{2^2}$
- $\sqrt[4]{5^6} = \sqrt[4 \div 2]{5^{6 \div 2}} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt{5^3}$

1.3.4. Passagem de um factor para dentro ou fora do radical

1.3.4.1. Para dentro do radical

Uma importante propriedade dos radicais é a seguinte: $a^p \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{b^m \cdot a^{n \times p}}$

Exemplos:

- $2^2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \times 2^{2 \times 3}} = \sqrt[3]{5 \times 2^6} = \sqrt[3]{5 \times 64} = \sqrt[3]{320}$
- $x^2 \sqrt{3x} = \sqrt{3x \cdot x^{2 \times 2}} = \sqrt{3 \cdot x^{1+4}} = \sqrt{3x^5}$

Portanto, para passar um factor para dentro do radical, basta elevar este factor a um expoente igual ao índice do radical.

1.3.4.2. Para fora do radical

Quando o expoente do radicando é maior ou igual ao índice, podemos passar o radicando para factor do radical, elevando-o ao quociente da divisão inteira do expoente do radicando pelo índice e deixando dentro do radical o mesmo factor do radicando elevado ao resto da divisão, isto é:

No radical $\sqrt[n]{a^m}$ se $m \geq n$ e $m \div n = q$ resto r então: $a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$

Exemplos:

- $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$, porque a divisão de 4 por 3 é 1, resto 1.
- $\sqrt[5]{x^{16}} = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^1} = x^3 \cdot \sqrt[5]{x}$, porque a divisão de 16 por 5 é 3, resto 1.

1.3.5. Comparação de radicais

1.3.5.1. Com mesmo índice

Para comparar radicais com mesmo índice, basta comparar os seus radicandos.

Exemplos:

- $\sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{50}$ porque $23 < 50$
- $\sqrt[5]{2015} > \sqrt[5]{2013}$ porque $2015 > 2013$

1.3.5.2. Com mesmo radicando e índices diferentes

Se os radicais têm o mesmo radicando, é maior o que tiver menor índice.

Exemplos:

- $\sqrt{64} > \sqrt[3]{64}$, porque $2 < 3$
- $\sqrt[5]{38} < \sqrt[3]{38}$, porque $5 > 3$

1.3.5.3. Com índices diferentes e radicandos diferentes

Se os radicais tiverem índices diferentes, primeiro reduzem-se os radicais ao mesmo índice e depois comparam-se os radicandos como se fez anteriormente.

Exemplos:

- Vamos comparar $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{7}$
- Reduzindo ao mesmo índice, teremos:

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \times 2]{5^{1 \times 2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{7} = \sqrt[2 \times 3]{7^{1 \times 3}} = \sqrt[6]{7^3} = \sqrt[6]{343} \text{ como } \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{343} \text{ então } \sqrt[3]{5} < \sqrt{7}$$

1.3.6. Radicais semelhantes

São aqueles que apenas diferem nos coeficientes.

Exemplos:

- $\sqrt{3}$ e $5\sqrt{3}$ são semelhantes;
- $\sqrt{24}$ e $\sqrt{6}$ são semelhantes, pois $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$.

1.4. Operações com radicais

1.4.1. Adição e subtracção de radicais

Para a adição e a subtracção de radicais, basta reduzir os radicais semelhantes e realizar a adição ou subtracção dos coeficientes (números).

Exemplos:

- $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (5 + 3 - 4)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = \sqrt{3} + \sqrt{3^3} - \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (1 + 3 - 5)\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

1.4.2. Multiplicação e Divisão de Radicais

1.4.2.1. Multiplicação e divisão de radicais com mesmo índice

O produto de radicais com o mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice cujo radicando é o produto dos radicandos dos factores, isto é:

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \times b}$$

Pela definição $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{m}} \times b^{\frac{1}{m}}$, aplicando a regra do produto de potências com o mesmo expoente $a^{\frac{1}{m}} \times b^{\frac{1}{m}} = (a \times b)^{\frac{1}{m}}$ e aplicando de novo a definição, tem-se $(a \times b)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a \times b}$.

Exemplos

- $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$

$$\bullet \sqrt[6]{10} \times \sqrt[6]{\frac{2}{100}} = \sqrt[6]{10 \times \frac{2}{100}} = \sqrt[6]{\frac{20}{100}} = \sqrt[6]{\frac{1}{5}}$$

O quociente de radicais com o mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice cujo radicando é o quociente dos radicandos dos factores, isto é: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$, com $b \neq 0$.

Exemplos:

- $\bullet \sqrt{18} \div \sqrt{2} = \sqrt{18 \div 2} = \sqrt{9} = 3$
- $\bullet \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$
- $\bullet \sqrt[5]{100} \div \sqrt[5]{50} = \sqrt[5]{100 \div 50} = \sqrt[5]{2}$

1.4.2.2. Multiplicação e Divisão de Radicais com índices diferentes

Para se realizar a multiplicação e a divisão de radicais com índices diferentes:

1º Reduz-se os radicais ao mesmo índice;

2º Efectuam-se as operações de multiplicação ou divisão dos radicais com mesmo índice.

Exemplos:

- $\bullet \sqrt{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{2^3 \times 4^2} = \sqrt[6]{8 \times 16} = \sqrt[6]{128}$
- $\bullet \sqrt[3]{5} \div \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^4} \div \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{5^{4-3}} = \sqrt[12]{5}$
- $\bullet \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \div \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^6} \times \sqrt[12]{2^4} \div \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{\frac{2^6 \cdot 2^4}{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^{10}}{2^3}} = \sqrt[12]{2^7}$

1.5. Potência de uma Raiz

Partindo da definição de potência, teremos:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \dots a} = \sqrt[n]{a^p}$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Exemplos:

- $\bullet (\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2}$
- $\bullet (\sqrt[5]{3^2})^7 = \sqrt[5]{(3^2)^7} = \sqrt[5]{3^{14}}$

1.5.1. Raiz de uma Raiz

Outra propriedade muito importante dos radicais é a que segue:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \times p}} = \sqrt[n \times p]{a}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

Exemplos:

- $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$
- $\sqrt[5]{4^3 \sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{2 \cdot 4^3}} = \sqrt[5 \cdot 3]{2 \cdot 2^6} = \sqrt[15]{2^7} = \sqrt[15]{128}$

1.6. Racionalização de denominadores

Racionalizar o denominador de uma fracção significa encontrar uma fracção equivalente que não contenha um número irracional no denominador. A fracção obtida pode continuar irracional, apenas o denominador não apresenta o termo irracional, facilitando os cálculos.

Como racionalizar o denominador de uma fracção?

Para racionalizar o denominador de uma fracção, basta multiplicar o numerador e denominador desta por um **termo conveniente**, denominado **Factor Racionalizante**. Saber escolher o factor racionalizante correctamente caracteriza-se como a parte mais importante da solução do problema. Vejamos alguns exemplos elucidativos:

$$a) \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3 \cdot 3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Observa que o factor racionalizante no caso acima foi $\sqrt{3}$.

$$b) \frac{2}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2}{\sqrt[3]{6}} \times \frac{\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6 \cdot 6^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{36}}{6} = \frac{\sqrt[3]{36}}{3}$$

Neste exemplo, o factor racionalizante é $\sqrt[3]{6^2}$.

Nota: Toda a fracção do tipo $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ o factor racionalizante é: $\sqrt[n]{b^{n-m}}$.

$$c) \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - \sqrt{3}$$

Nota: Toda a fracção do tipo $\frac{p}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ o factor racionalizante é: $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.



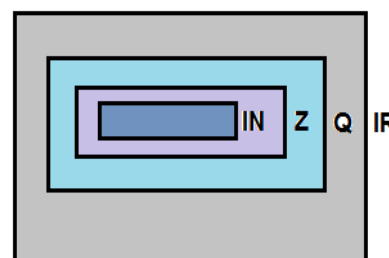
II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Assinala com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas, justificando a tua escolha:

- a) O conjunto dos números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$) é subconjunto dos números reais ($\mathbb{R}$); _____
- b) O resultado da soma $3 + \sqrt{5}$ é um número real; _____
- c) Se um elemento pertence ao conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$) então ele também pertence ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$); _____
- d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; _____

Resolução

- a) A afirmação é verdadeira, pois um dado conjunto A é subconjunto de conjunto B se todos os elementos de A são também elementos do conjunto B, ou seja: $A \subset B$. Neste caso, o diagrama ao lado justifica esta relação:



- b) A afirmação é verdadeira, porque o número três é um número inteiro, e $\sqrt{5}$ é um número irracional, os dois pertencem ao conjunto dos números reais, logo a soma dos dois também pertence ao conjunto dos números reais.
- c) A afirmação é verdadeira, dado que todo o número irracional pertence ao conjunto dos números reais.
- d) A afirmação é falsa, visto que o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) não está contido no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), apesar de ambos estarem contidos em ($\mathbb{R}$).

2. Dado o conjunto $B = \left\{-3; \sqrt{7}, \frac{3}{4}, 0,33333\right\}$, identifica a que subconjunto de $\mathbb{R}$ pertence cada elemento de B.

Resolução

- -3 é um número inteiro negativo, pertence ao conjunto Z .
- $\sqrt{7}$ é um número irracional, pertence ao conjunto (I) .
- $\frac{3}{4}$ é um número racional, pertence ao conjunto (Q) .
- $0,33333$ é um número racional, pertence ao conjunto (Q) .

**III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS****3.1. Exercícios propostos 1**

1. Usando cada um dos símbolos $\in, \notin, \subset, \supset, \not\subset$, completa as expressões de modo a obteres afirmações verdadeiras.

- | | | | |
|---------------------------|-----------------------------------|----------------------------|------------------------|
| a) $\frac{3}{5}$ ____ N | b) Z ____ N | c) $-\frac{1}{3}$ ____ Z | d) 4 ____ N |
| e) $\frac{1}{3}$ ____ Q | f) Z^+ ____ Q | g) 4 ____ Z | h) -3 ____ N |
| i) $-1,33$ ____ Z | j) $\{\frac{10}{5}, 0\}$ ____ Z | k) -3 ____ Q | l) $\sqrt{4}$ ____ Z |
| m) $\{0, 1; 5\}$ ____ N | | | |

2. Calcula os seguintes quadrados.

- | | | | |
|-----------------------|------------|-----------------------|--------------|
| a) 11^2 | b) 17^2 | c) $(-13)^2$ | d) $0,002^2$ |
| e) $(\frac{1}{20})^2$ | f) $2,1^2$ | g) $(3\frac{1}{2})^2$ | |

3. Calcula os valores das seguintes potências:

- | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|---------------|
| a) $3^4 =$ | b) $2^5 =$ | c) $1^4 =$ | d) $0^6 =$ | e) $(-2)^4 =$ |
|------------|------------|------------|------------|---------------|

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$	g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$	h) $5^0 =$	i) $(2,43)^0 =$	j) $(-0,5)^0 =$
k) $17^1 =$	l) $(1,45)^1 =$	m) $(-5)^1 =$	n) $\left(-\frac{4}{7}\right)^1 =$	o) $3^{-1} =$
p) $(-3)^{-2} =$	q) $2^{-4} =$	r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$	s) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} =$	t) $\left(\frac{-3}{4}\right)^{-3} =$
u) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} =$	v) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$	w) $(-0,75)^{-2} =$		

4. Calcula o valor numérico das seguintes expressões:

a) $5 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$	b) $\frac{3}{4} - (+7)^2 =$	c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + (-5)^2 =$
d) $(-3)^2 + 22 =$	e) $(-7)^2 - 60 =$	f) $40 - (-2)^3 =$
g) $(-2)^5 + 21 =$	h) $(-3)^3 - 13 =$	i) $(-2)^3 + (-1)^5 =$
j) $(-4)^2 + (-2)^4 =$	k) $(-3)^2 + (-2)^3 =$	l) $(-1)^6 + (-3)^3 =$
m) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 - 7^0 =$		

As questões 5, 6 e 7 são constituídas por quatro (4) alternativas, em que APENAS uma está correcta. Circula a opção certa:

5. O valor da expressão $(-1)^0 + (-6) : (-2) - 2^4$ é:

- | | | | | |
|--------------|---------------|----------------|--------------|--------------|
| a) 20 | b) -12 | c) 19,5 | d) 12 | e) 10 |
|--------------|---------------|----------------|--------------|--------------|

6. Simplificando a expressão $[2^9 \div (2^2 \cdot 2)^3]^{-3}$, obtém-se:

- | | | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|-------------|-------------|
| a) 2^{36} | b) 2^{-30} | c) 2^{-6} | d) 1 | e) 0 |
|--------------------|---------------------|--------------------|-------------|-------------|

7. Todo o número inteiro x elevado a 1 é igual a:

- | | | | |
|-------------------------|-------------|-------------|--------------|
| a) Ele mesmo x | b) 0 | c) 1 | d) 10 |
|-------------------------|-------------|-------------|--------------|

8. Aplicando as regras de potenciação, calcula:

a) $\frac{(-2)^5 \div (-2)^4 \times (-2)^7}{(2^2)^4}$

b) $(-1)^0 + (-6) \div (-2) - 2^4$

c) $[2^9 \div (2^2 \times 2)^3]^{-3}$

d) $2 \times [(-1)^6]^0 - [(-2)^0]^5$

e) $\left[\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2\right]^4 \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-8}$

f) $\frac{7^{-9} \times 5^{-9}}{[(-35)^{-4}]^2}$

g) $\frac{2^{-1} - 3^{-1}}{4^{-1} + 3^{-1}}$

h) $\frac{4^2}{\left[8^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0\right]}$

i) $\frac{3^{x+2} + 3^{x+1}}{3^{x-1}}$

3.2. Exercícios Propostos 2

1. Utilizando setas, liga os radicais da coluna à esquerda com os respectivos números equivalentes da coluna à direita:

$\sqrt[3]{-8}$	5
$-\sqrt{25}$	-2
$-\sqrt{16}$	2
$\sqrt[4]{16}$	-5
$\sqrt{25}$	-4

2. Efectua as seguintes operações com radicais e simplifica os resultados sempre que possível:

- | | | |
|---------------------------------|---|---------------------------------------|
| a) $3\sqrt{2} + \sqrt{2}$ | b) $7\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ | c) $\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$ |
| d) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{2}$ | e) $\sqrt{49} + \sqrt{16} =$ | f) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{16} =$ |
| g) $-5\sqrt{9} + 2\sqrt{169} =$ | h) $10\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} =$ | i) $\sqrt{18} + 2\sqrt{50} =$ |

3. Efectua as multiplicações:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} =$

b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} =$

c) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{7} + 2) =$

d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6} =$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} =$

g) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} =$

h) $\sqrt{5} \cdot (1 + \sqrt{5}) =$

i) $(3\sqrt{2} - 2) \cdot (\sqrt{2} + 3) =$

4. Efectua as divisões:

a) $\sqrt[3]{20} \div \sqrt[3]{10} =$

b) $\sqrt{28} \div \sqrt{7} =$

c) $30\sqrt{15} \div 5\sqrt{3} =$

d) $\sqrt{12} \div \sqrt{3} =$

e) $\sqrt{50} \div \sqrt{2} =$

f) $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} =$

g) $\frac{12\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{2}} =$

5. Calcula as potências:

a) $(\sqrt{2})^2 =$

b) $(\sqrt[3]{9})^2 =$

c) $(4\sqrt{5})^3 =$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 =$

e) $(\sqrt{15})^2 =$

f) $(3\sqrt{7})^2 =$

6. Reduza a um único radical.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} =$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{5^2}}} =$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{2^3\sqrt{5}}} =$

d) $\sqrt{\sqrt{10}} =$

e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} =$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{3}} =$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} =$

7. Assinala com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas:

a) $\frac{3}{4}$ é um número racional

b) 0 é um número racional

c) $\frac{15}{3}$ é um número inteiro

d) $-10 = 11 - 21$

e) $\frac{1}{4}$ é um número inteiro

f) $\sqrt[5]{12}$ é um número real

8. Calcula:

a) $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{81} =$

f) $\sqrt{64} + \sqrt[3]{-64} + \sqrt[6]{64} =$

b) $3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 6\sqrt{5} =$

g) $5\sqrt[5]{3} + 2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{3} =$

c) $-4 + \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} + 4 =$

h) $2\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{3} + 3\sqrt[3]{3} + \frac{2}{3}\sqrt[5]{3} =$

d) $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{8} =$

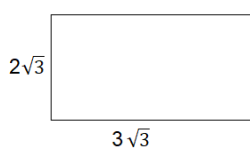
i) $2\sqrt{27} - 5\sqrt{12} =$

e) $4\sqrt{63} - \sqrt{7} =$

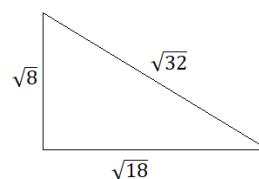
j) $\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{108} =$

9. Encontra o perímetro das figuras cujas medidas de seus lados são dadas numa mesma unidade de medida de comprimento.

a)



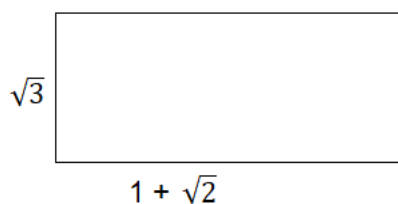
b)



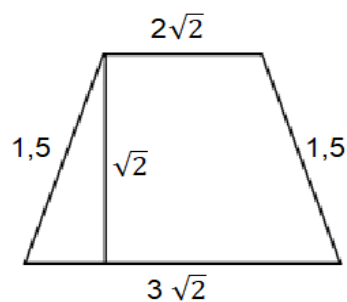
10. Calcula o valor numérico de $2x^2 - \sqrt{x} - 2$, para $x = 4$.

11. Calcula a área das figuras cujas medidas indicadas são dadas numa mesma unidade de comprimento.

a)



b)



12. Racionaliza os denominadores de cada uma das seguintes fracções:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}} =$

b) $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

c) $\frac{5}{3\sqrt{2}} =$

d) $\frac{2x}{\sqrt{x}} =$

e) $\frac{3}{\sqrt{x}} =$

f) $\frac{y}{\sqrt[3]{5}}$

g) $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

h) $\frac{x}{1 - \sqrt{x}}$

$$i) \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$$

$$j) \frac{3}{\sqrt{3\sqrt{2}}} =$$

$$k) \frac{2}{\sqrt[3]{5}} =$$

$$l) \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} =$$

$$m) \frac{5}{2+\sqrt{3}} =$$

$$n) \frac{7}{3-\sqrt{5}} =$$

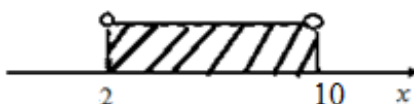
UNIDADE TEMÁTICA II**Inequações lineares e Sistemas de Inequações lineares com uma variável****I. RESUMO****1.1. Intervalos numéricos limitados e ilimitados**

Os conjuntos **numéricos** podem ser representados de diversas maneiras, e uma das mais importantes para a matemática é a **representação por intervalos**. Ela é capaz de mostrar em que ponto um conjunto começa e termina, ou seja, seu menor e maior elemento. Essa representação também pode indicar os números que não pertencem a esse conjunto, caso eles existam. Toda essa representação dos conjuntos numéricos é feita por símbolos. Geralmente, a representação por intervalos é usada para **subconjuntos** dos números reais.

Por exemplo:

O **subconjunto** A dos **números reais** maiores que 2 e menores que 10 é representado da seguinte maneira: $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 10\}$; representação em compreensão.

O mesmo conjunto pode ser representado sob forma de intervalo: $A =]2; 10[$; lê-se intervalo aberto da 2 a 10 aberto. Aberto nas duas extremidades para indicar que o 2 e 10 não pertencem ao conjunto A.

Representação Geométrica

Nota: As bolinhas nas extremidades não estão pintadas, para indicar que os valores das extremidades não fazem parte do conjunto.

Sejam a e b números reais, sendo $a < b$. Podemos representar os seguintes subconjuntos de números reais:

Em compreensão	Geométrica	Em Intervalo
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$		$[a; b]$ - Limitado, fechado em a e b.

$\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$		$]a; b[$ - Limitado, aberto em a e b.
$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$		$[a; b[$ - Limitado, fechado em a e aberto em b.
$\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$		$]a; b]$ - Limitado, aberto em a e fechado em b.
$\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$		$[a; +\infty[$ - Ilimitado, fechado em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x > a\}$		$]a; +\infty[$ - Ilimitado, aberto em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x < a\}$		$] -\infty; a[$ - Ilimitado, aberto em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$		$] -\infty; a]$ - Ilimitado, fechado em a.

1.2. Reunião e intersecção de intervalos numéricos

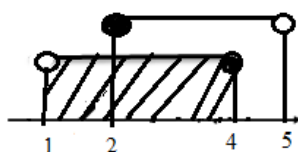
1.2.1. Intersecção de intervalos numéricos

Seja dado os conjuntos A e B, dá-se o nome de **intersecção** dos dois ao conjunto formado pelos elementos comuns a ambos os conjuntos e representa-se por **$A \cap B$** .

Exemplo:

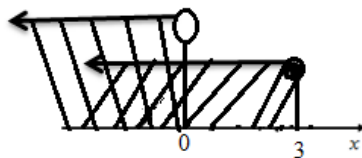
Determinar:

a) $]1; 4] \cap [2; 5[$



Logo: $]1; 4] \cap [2; 5[= [2; 4]$

b) $] -\infty; 3] \cap] -\infty; 0[$

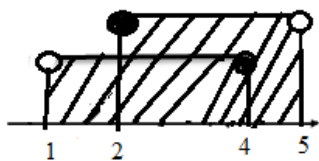


Logo: $] -\infty; 3] \cap] -\infty; 0[=] -\infty; 0[$

1.2.2. Reunião de intervalos numéricos

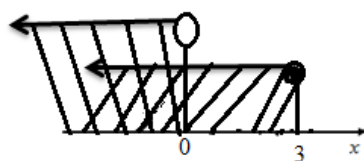
Seja dado os conjuntos A e B, dá-se o nome de **reunião** dos conjuntos ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos e representa-se por $A \cup B$.

a) $]1; 4] \cup [2; 5[$



Logo: $]1; 4] \cup [2; 5[=]1; 5[$

b) $] -\infty; 3] \cup] -\infty; 0[$



Logo: $] -\infty; 3] \cup] -\infty; 0[=] -\infty; 3]$

1.3. Inequações

Inequação é toda a desigualdade literal que é apenas satisfeita por certos valores nas incógnitas que nela figuram.

Exemplo:

- $4(x - 1) < 19$
- $x - 3 \geq 2$

1.3.1. Resolução de inequações lineares

Resolver uma equação linear é determinar o conjunto de todos os valores da incógnita que transforma a inequação numa desigualdade verdadeira. O conjunto dos valores encontrados é o **conjunto solução** da inequação.

Exemplos:

Resolve as inequações:

a) $3x - 1 < 4$

$3x < 4 + 1$ Como o 1 está a subtrair no primeiro membro, passa para o segundo membro a adicionar;
 $3x < 5$

$x < \frac{5}{3}$ Como o 3 está a multiplicar no primeiro membro, passa para o segundo membro a dividir;

Repara que o sentido da inequação não mudou porque o factor é positivo.

b) $5 - 4x > 21$

$5 - 4x > 21$ Como o 5 está a adicionar, passa para o outro membro a subtrair;

$-4x > 21 - 5$ Como o -4 está a multiplicar, passa para o segundo membro a dividir.

$-4x > 16$

$x > \frac{16}{-4}$

Repara que o sentido da inequação mudou porque o factor é negativo.

$x < -4$

c) $\frac{1}{5}x + 5 < 3$

$\frac{1}{5}x + 5 < 3$

Como o 5 está a adicionar, passa para o outro membro a subtrair.

$\frac{1}{5}x < 3 - 5$

Como o 5 está a dividir, passa para o segundo membro a multiplicar.

$\frac{1}{5}x < -2$

Repara que o sentido da inequação não mudou porque o factor é positivo.

$x < -2 \cdot 5$

$x < -10$

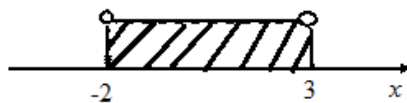
1.3.2. Resolução de sistema de inequações lineares com uma variável

Para resolver sistema de inequações é necessário resolver cada uma das inequações do sistema e determinar o conjunto de intersecção dos seus conjuntos soluções.

Exemplo:

Dada a inequação: $\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x + 2 < 5 \end{cases}$, resolve-a em IR.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x + 2 < 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -4 \\ x < 5 - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{4}{2} \\ x < 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$



Solução: $x \in]-2; 3[$



II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considera em $\mathbb{R}$ o conjunto $\left[-\frac{9}{2}; 1\right]$, indica:

- a) Três números inteiros que pertencem a este conjunto.
- b) Três números racionais não inteiros que pertencem a este conjunto.
- c) Três números irracionais que pertencem a este conjunto.

2. Representa, na forma de intervalos numéricos, cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- a) $\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{3}{2}\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{5} \leq x < 4\}$
- d) O conjunto dos números reais não inferiores a $-\frac{1}{2}$.

3. Resolve em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

- | | |
|--|--|
| a) $x - 4(x - 1) < 19$ | b) $3(2x - 1) \leq 5x + 7$ |
| c) $4(x + 3) > 2(x - 1)$ | d) $3(x + 2) > 2(2x + 4)$ |
| e) $5x - (x - 2) \leq 6$ | f) $7(x - 2) < 2(3x + 4)$ |
| g) $x + 12 \geq 4(2x - 1) - 3x$ | h) $2(3x - 1) - 4(x + 2) \leq 5x - 1$ |
| i) $7(3x - 4) - 4(2x + 3) \geq 2(3x - 5)$ | j) $\frac{x}{2} + 1 < \frac{5}{3} - x$ |
| k) $2 + \frac{3x}{5} \leq x + \frac{1}{2}$ | l) $x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ |

$$\text{m)} \quad \frac{x}{4} - \frac{3}{5} \geq \frac{x}{10} - \frac{1}{2}$$

$$\text{n)} \quad \frac{x+2}{10} - 1 \leq \frac{1-x}{4}$$

$$\text{o)} \quad \frac{x}{5} \geq \frac{1}{4} - \frac{2-x}{2}$$

$$\text{p)} \quad \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \geq \frac{x}{24} - \frac{2}{3}$$

$$\text{q)} \quad \frac{1}{3}(x-2) - \frac{3}{5} < \frac{x}{2} - 1$$

$$\text{r)} \quad \frac{x-1}{4} + \frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} > 0$$

$$\text{s)} \quad 2 - \frac{4x-1}{9} \leq \frac{1}{3} + \frac{2x-5}{6}$$

4. Resolve cada um dos seguintes sistemas de inequações lineares com uma variável:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2 - 3x < 30 - 10x \\ 3x - 1 < 4 - 2x \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x > \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{x}{3} > x - 1 \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} 2 - x \geq 5 - 4x \\ 2x - 1 \leq x + 4 \end{cases}$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} 5(x+3) - 9x < \frac{1}{3} \\ \frac{x}{6} - 2 < 7x + \frac{1+x}{4} \end{cases}$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} \frac{2x-1}{5} - x > \frac{3x-4}{2} \\ \frac{5x+3}{4} - \frac{3x}{5} > 0 \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad \begin{cases} \frac{3-x}{2} < 1 + \frac{5-2x}{3} \\ \frac{2x-3}{4} < \frac{x+5}{6} \end{cases}$$

$$\text{g)} \quad \begin{cases} \frac{4x-5}{3} - \frac{3x+1}{5} < -x \\ \frac{2+7x}{5} - \frac{3x}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\text{h)} \quad \begin{cases} \frac{x-2}{3} - \frac{2-x}{5} > 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{2-3x}{4} - \frac{x-1}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \frac{3x-2}{2} - 5 < 0 \\ \frac{1-x}{5} - \frac{x-1}{4} < 0 \end{cases}$$

5. Indica, em extensão, o conjunto das soluções naturais da inequação: $\frac{3(2x+3)}{2} < \frac{2x}{3} + 10$.

6. Qual é o menor número inteiro que não verifica a inequação? $\frac{x-3}{4} - \frac{x+5}{5} \geq \frac{x+1}{2}$.

7. Determina o menor múltiplo de 2 que verifica a condição seguinte: “ $\frac{2}{3}$ da sua diferença com 1 é maior que 5”.

8. Indica o menor número inteiro que satisfaz a inequação: $\frac{(x+\frac{1}{3})}{2} - 1 > \frac{-(x-\frac{1}{2})}{3}$.

9. Dado o sistema $\begin{cases} 9 - 3(x+1) < 2 \\ -\frac{7}{5}x \leq 0 \end{cases}$, indica:

a) O menor número inteiro que verifica o sistema;

b) O menor número inteiro que verifica apenas uma das inequações;

- c)** O maior número inteiro que não verifica qualquer das inequações;
- d)** O maior número inteiro que não é solução do sistema.

10. Determina o conjunto dos números reais que verificam simultaneamente as seguintes condições:

- b)** A soma do número com 3 é superior à diferença entre o dobro do número e 6.
- c)** A diferença entre a terça parte do número e 5 é inferior ao dobro do número.

UNIDADE TEMÁTICA III**NOÇÃO DE MONÓMIOS E POLINÓMIOS****I. RESUMO****1.1. Monómios**

Monómios são expressões algébricas definidas apenas pela multiplicação entre coeficiente (número) e a parte literal (parte da letra ou das letras).

Exemplos: $2x$; $4ab$; $10x^2$; $20xyz$; $30abc$; $2zy$; b^3 ; $100ax^3$

- ✓ No monómio $2x$ o coeficiente é **2** e parte literal é x ;
- ✓ No monómio $20xyz$ o coeficiente é **20** e parte literal é xyz .

1.1.1. Grau de um monómio

Chama-se **grau de um monómio** a soma dos expoentes das variáveis que nele figuram.

Exemplos:

O monómio $2x^2yz^5$ é de grau 8, visto que: x^2 tem expoente 2, y tem expoente 1 e z^5 tem expoente 5, logo $2+1+5=8$.

1.1.2. Monómios semelhantes

Expressões algébricas que possuem a parte literal igual.

Exemplos:

$2x$ e $4x$	$2ya$ e $6ya$
$7x^2$ e $8x^2$	$7bc$ e $9cb$
$10ab$ e $3ab$	$100z$ e $20z$

1.1.3. Adição e subtracção de monómios

A adição e a subtracção de monómios devem ser efectuadas quando as partes literais são iguais, adicionando ou subtraindo os seus coeficientes.

Exemplos:

- $2a + 7a = (2 + 7)a = 9a$
- $7bc + 3cb = (7 + 3)cb = 10bc$
- $5x - 2x = (5 - 2)x = 2x$
- $-12xy - 10xy = (-12 - 10)xy = -22xy$

1.1.4. Multiplicação entre monómios

Ao multiplicar monómios em que as partes literais são iguais, devemos seguir os seguintes passos:

1.º passo: multiplicar os coeficientes;

2.º passo: conservar a parte literal e somar os expoentes.

Exemplos:

- $2x \cdot 2x = 2 \cdot 2x \cdot x = 4x^{1+1} = 4x^2$
- $4xy \cdot 6xy^2 = 4 \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y^2 = 24 \cdot x^{1+1} \cdot y^{1+2} = 24x^2y^3$
- $10a^2b \cdot 9a^2b^3 = 10 \cdot 9 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b \cdot b^3 = 90 \cdot a^{2+2} \cdot b^{1+3} = 90a^4b^4$
- $5xyz \cdot 6x^2y^3z = 30x^3y^4z^2$

Ao multiplicar monómios com parte literal diferente, devemos:

1.º passo: multiplicar os coeficientes;

2.º passo: agrupá-las, se as letras forem diferentes.

Exemplo:

- $2x \cdot 3y = 6xy$
- $4ab \cdot 5z = 20abz$
- $20c \cdot 2ab = 40abc$
- $x \cdot 6a = 6xa$

1.1.5. Divisão entre monómios

Partes literais iguais

1.º passo: dividir os coeficientes;

2.º passo: conservar a parte literal e subtrair os expoentes.

Exemplo:

- $5x^3 \div 5x^2 = (5 \div 5)x^{3-2} = 1 \cdot x^1 = x$
- $10x^2y^2 \div 2x = (10 \div 2)x^{2-1} \cdot y^{2-0} = 5xy^2$
- $30z \div 5z = \frac{30}{5} \cdot \frac{z}{z} = 6 \cdot 1 = 6$
- $20b^3 \div 10b = \frac{20}{10} \cdot \frac{b^3}{b} = 2 \cdot b^{3-1} = 2b^2$

1.2. Polinómios

Chama-se polinómio a uma soma algébrica de monómios.

Exemplos:

- $2x^2 + 7x - 6$
- $120x^2 - 10x + 9$
- $10x^3 + x^2 - 9x$
- $14x^4 + 7x^3 - 20x^2 - 60x - 100$
- $6x + 5$
- $\frac{2}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$
- $6xy + 2xy^3z$
- $x^2yz^5 - 7xz^4 + 4x + 12$

Cada um dos monómios que figura em cada polinómio chama-se **termo** do polinómio.

Considerando o polinómio: $14x^4 + 7x^3 - 20x^2 - 60x - 100$,

Este polinómio tem 5 termos que são: $14x^4$; $7x^3$; $- 20x^2$; $- 60x$; $- 100$

Nota:

Alguns polinómios têm nomes específicos:

- ✓ $2x + 3$ polinómio com dois termos chama-se binómio;
- ✓ $x^2 + 2x + 5$ polinómio com três termos chama-se trinómio.

1.2.1. Grau de um polinómio

Grau de um polinómio é o mais elevado grau dos seus termos.

Exemplos:

- ✓ $10x^3 + x^2 - 9x$ polinómio de grau 3 ou terceiro grau;
- ✓ $2x^2yz^5 - 3xz + \frac{1}{3}xy^2$ polinómio de grau 8.

1.2.2. Operações com polinómios

1.2.2.1. Adição de polinómios

Seja dado os polinómios $A(x) = 2x^2 + 3x - 5$ e $B(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$, calcula:

$$A(x) + B(x) .$$

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (2x^2 + 3x - 5) + \left(\frac{x^2}{2} - x + 3\right) \\ &= \left(2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + (3 - 1)x + (-5 + 3) \\ &= \frac{5}{2}x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

1.2.2.2. Subtracção de polinómios

Seja dado os polinómios $A(x) = 2x^2 + 3x - 5$ e $B(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$, calcula: $A(x) - B(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= (2x^2 + 3x - 5) - \left(\frac{x^2}{2} - x + 3\right) \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + [3 - (-1)]x + (-5 - 3) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + 4x - 8 \end{aligned}$$

1.2.2.3. Multiplicação de polinómios por um monómio

Para multiplicar um monómio por um polinómio, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

Exemplos:

- ✓ $x \cdot (x + 3) = x \cdot x + x \cdot 3 = x^2 + 3x$
- ✓ $2y \cdot (x^2y - y^2 + 2) = 2y \cdot x^2y - 2y \cdot y^2 + 2y \cdot 2 = 2x^2y^2 - 2y^3 + 4y$

1.2.2.4. Multiplicação de polinómios

O produto de dois polinómios é um polinómio que se obtém multiplicando cada termo de um por todos os termos do outro.

Exemplos:

- ✓ $(x + 2) \cdot (x - 3) = x \cdot (x - 3) + 2(x - 3) = x \cdot x - 3 \cdot x + 2 \cdot x + 2(-3)$
 $= x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$
- ✓ $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 + 2x - 4) = x \cdot (x^2 + 2x - 4) - \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2x - 4)$

$$= x^3 + 2x^2 - 4x - \frac{x^2}{2} - x + 2 = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 5x + 2$$

1.2.2.5. Casos notáveis da multiplicação de polinómios

Quadrado da soma	Quadrado da diferença	Diferença de quadrados
$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

Nota:

- $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, o primeiro lê-se quadrado de uma soma cujo seu desenvolvimento encontra-se na igualdade acima e o segundo soma de quadrados.
- $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$, o primeiro lê-se quadrado de uma diferença cujo seu desenvolvimento encontra-se na segunda coluna da tabela acima e o segundo diferença de quadrados que está na terceira coluna da tabela acima.

1.2.3. Decomposição de polinómios

Decompor ou factorizar um polinómio é obter uma expressão equivalente com a forma de um produto.

1.2.3.1. Decomposição de polinómios usando colocação do factor comum em evidência

Exemplos:

- ✓ $x^2 + 2x = x(x + 2)$
- ✓ $y^3 - 2y^2 + 3y = y(y^2 - 2y + 3)$

Nota:

Para decompor um polinómio em factores, aplicando a propriedade distributiva, temos de descobrir factores comuns e pô-los em evidência.

1.2.3.2. Decomposição de polinómios usando casos notáveis da multiplicação de polinómios

Exemplos:

- ✓ $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$. Polinómio factorizado, usando caso notável diferença de quadrados.

- ✓ $y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 = (y + 2)^2 = (y + 2) \cdot (y + 2)$ Polinómio factorizado, usando caso notável quadrado de uma soma.



II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Escreve um monómio, um binómio e um trinómio.

2. Indica o grau dos seguintes polinómios:

a) $x + 7$

b) $y^3 - \frac{1}{2}y^2 - 2$

c) $x^5 - 4x^3 - 2x^2 - x + 1$

d) $xy^2 - yx + \frac{1}{4}$

3. Efectua as seguintes multiplicações e divisões:

a) $\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[3]{ab^2}$

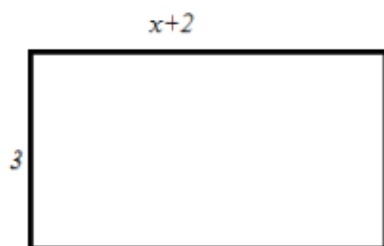
b) $2\sqrt{4a^2x} \cdot \sqrt{3a^2 \cdot x^2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{a^3}}$

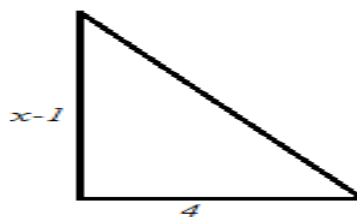
d) $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}$

4. Escreve uma fórmula que te permite calcular a área de cada figura:

a)

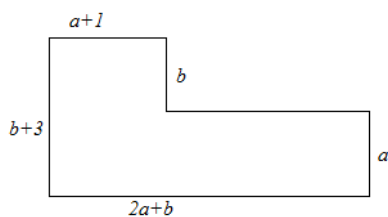


b)

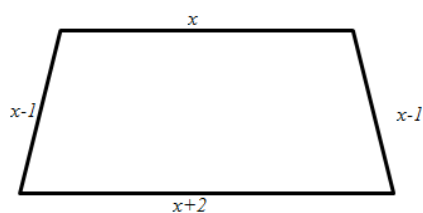


5. Dadas as figuras abaixo, encontra as fórmulas para o cálculo do perímetro de cada uma.

a)



b)



6. Sejam dados os polinómios:

$$A(x) = \frac{1}{2}x \quad B(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 - x + 1 \quad C(x) = x + 2 \quad D(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2. \text{ Calcula:}$$

a) $A(x) + C(x)$

b) $B(x) + D(x)$

c) $A(x) - C(x) + B(x)$

d) $A(x) \cdot C(x)$

e) $[C(x)]^2$

f) $[A(x)]^2 + [C(x)]^2$

g) $C(x) \cdot B(x)$

h) $[A(x)]^2 \cdot D(x)$

i) $[A(x) + C(x)] \cdot D(x)$

7. Desenvolve cada uma das expressões:

a) $(x + 1)(x + 1)$

b) $(x + 2)^2$

c) $(y - 3)(y - 3)$

d) $\left(c - \frac{1}{2}\right)^2$

e) $(z - 5)(z + 5)$

f) $(3x + 3)(3x + 3)$

8. Decompõe os seguintes polinómios:

a) $3x - 3$

b) $6a - 3a^2$

c) $4y + 2$

d) $x^2 + 6x + 9$

e) $x^2 + 2x$

f) $4y^2 - 4y + 4$

g) $x^2 - y^2$

h) $z^2 + 2z + 1$

i) $x^2 - 9$

j) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

UNIDADE TEMÁTICA IV**EQUAÇÃO QUADRÁTICA****I. RESUMO****1.1. Equações Quadráticas – Definição**

Equação quadrática ou do segundo grau é toda aquela que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são coeficientes reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$

b) $x^2 + \frac{2}{3}x = 0$; $a = 1$; $b = \frac{2}{3}$; $c = 0$

c) $-2x^2 + \sqrt{5} = 0$; $a = -2$; $b = 0$; $c = \sqrt{5}$

d) $5x^2 = 0$; $a = 5$; $b = 0$; $c = 0$

As equações quadráticas podem ser completas ou incompletas.

Equações quadráticas completas são aquelas que os coeficientes **a**, **b** e **c** não são nulos.

Exemplo:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0; \quad a = 2; \quad b = -3; \quad c = 1$$

Equações quadráticas incompletas são aquelas em que, pelo menos, um dos coeficientes **b** ou **c** é nulo.

Exemplos:

a) $x^2 + \frac{2}{3}x = 0$; $a = 1$; $b = \frac{2}{3}$; $c = 0$

b) $-2x^2 + \sqrt{5} = 0$; $a = -2$; $b = 0$; $c = \sqrt{5}$

c) $5x^2 = 0$; $a = 5$; $b = 0$; $c = 0$

1.1.1. Resolução de equações quadráticas incompletas

1. Se $b = 0$ e $c = 0$, a equação fica: $ax^2 = 0$

$$\rightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; s = \{0\}$$

Exemplo:

$$5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; s = \{0\}$$

2. Se $c = 0$, a equação fica: $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}; s = \left\{-\frac{b}{a}; 0\right\}$$

Exemplo:

$$2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}; s = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$$

3. Se $b = 0$, a equação fica: $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}; x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}; s = \{0\}$$

Exemplo:

$$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}; x = \pm 5; s = \{-5; 5\}$$

1.1.2. Resolução de equações quadráticas completas

Uma equação quadrática pode ser resolvida de duas formas:

Uso da lei do anulamento do produto

A lei do anulamento do produto: *Um produto $A \cdot B$ de factores é nulo se e só se um deles, pelo menos, for zero. Se $A=0$ ou $B=0$ ou ambos iguais a zero.*

Exemplos:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $a = 1$; $b = -6$; $c = 9$

1.º factorizar o trinómio do primeiro membro, usando casos notáveis da multiplicação dos polinómios;

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = 3 \vee x = 3 \text{ Sol. } \{3\}$$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$ $a = 1$; $b = -6$; $c = 5$

c) 1.º factorizar o trinómio do primeiro membro, usando: $x^2 + (m + n) \cdot x + m \cdot n = (x + n) \cdot (x + m)$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x - 5) = 0$$

$$x - 1 = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = 1 \vee x = 5$$

$$\text{Sol. } \{1; 5\}$$

Uso da fórmula resolvente

A equação quadrática também pode ser resolvida aplicando a fórmula resolvente que é:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente designa-se à expressão sob o radical por binómio discriminante e representa-se por Δ , ou seja: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nota:

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes;
- Se $\Delta = 0$ a equação tem duas raízes reais iguais;
- Se $\Delta < 0$ a equação não tem raízes reais.

Exemplos:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ $a = 1$; $b = -6$; $c = 9$

Para encontrar o número de soluções reais de uma equação do 2º grau, é necessário encontrar o valor do discriminante (delta). Para isso, encontraremos primeiro o valor dos coeficientes **a**, **b** e **c** na equação: $\{a = 1; b = -2; c = 1\}$

Calculando o valor do binómio discriminante (delta), teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

O valor de Δ mostra o número de soluções da equação, sem ter a necessidade de calcular os valores dessas raízes. Como $\Delta = 0$, a equação possui uma única solução real.

2. O produto entre as raízes da equação $2x^2 + 4x - 6 = 0$ é igual a:

A. - 2

B. 2

C. 1

D. - 3

Resolução: Alternativa D.

Pela fórmula do cálculo do produto, temos que: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$



III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Assinala com **V** as afirmações verdadeiro e com **F** as falsas:

a) Toda a equação do segundo grau possui pelo menos uma solução real. _____

b) A expressão $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b, c números reais e $a = 0$ representa uma equação quadrática. _____

c) Uma equação do segundo grau é conhecida como incompleta quando o coeficiente b ou c é igual a zero. _____

d) Quando o valor do discriminante é um número positivo que não possui raiz quadrada exacta, dizemos que a equação não possui solução. _____

2. Identifica os coeficientes de cada equação e diz se ela é completa ou não:

a) $5x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $3x^2 + 55 = 0$

c) $x^2 - 6x = 0$

d) $x^2 - 10x + 25 = 0$

3. Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - x - 20 = 0$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $x^2 - 8x + 7 = 0$

d) $x^2 - 7x - 9 = 0$

4. Dentre os números $-2, 0, 1, 4$, quais deles são raízes da equação $x^2 - 2x - 8 = 0$?

5. O número -3 é a raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determina o valor do coeficiente c :

6. Se multiplicar um número natural x por ele mesmo e do resultado subtrair 14, vai obter o quádruplo do número x . Qual é esse número?

7. Na equação $2px^2 + 3pqx + 3q = 0$, a soma das raízes é 9 e o produto é 12. Calcula $p + q$.

UNIDADE TEMÁTICA V**FUNÇÃO QUADRÁTICA****I. RESUMO****1.1. Funções Quadráticas – Definição**

Chama-se **função quadrática** a toda a função polinomial do 2.º grau a uma variável do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ (com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$).

Exemplos:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 9$; $a = 2, b = 3, c = 9$ c) $f(x) = x^2 - 5$; $a = 1, b = 0, c = -5$

b) $f(x) = -3x^2 + 5x$; $a = -3, b = 5, c = 0$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 0$

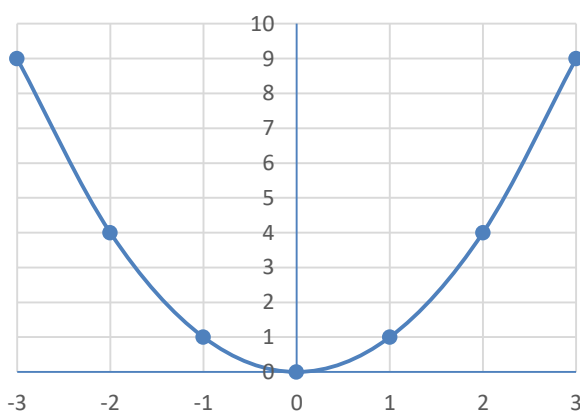
1.1.1. Gráfico de funções Quadráticas

O gráfico de uma função quadrática é uma linha curva contínua chamada **parábola**.

Para construir-se o gráfico de uma função quadrática, é necessário ter um número suficiente de pares ordenados $(x; y)$ que permitam esboçar o gráfico. Para tal, deve-se construir uma tabela de valores e em um sistema cartesiano ortogonal representar os pares ordenados determinados.

Estudo da função $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$

Construção do gráfico e estudo completo das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$.

Estudo completo de $f(x) = x^2$	Construção do gráfico de $f(x) = x^2$																								
- O domínio da função: $x \in \mathbb{R}$, isto é, $x \in]-\infty; +\infty[$; - O contradomínio: $y \in \mathbb{R}_0^+$, isto é, $y \in [0; +\infty[$; - Monotonia ou variação da função: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>0</td><td></td></tr></table> - Variação do sinal: A função é positiva para $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ - Zero da função: $x = 0$; - Ordenada na origem: $y = 0$; - O eixo de simetria coincide com o eixo das ordenadas (y). Equação do eixo de simetria: $x = 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y		0		<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>-3</td><td>9</td></tr><tr><td>-2</td><td>4</td></tr><tr><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td></tr></table> 	x	y	-3	9	-2	4	-1	1	0	0	1	1	2	4	3	9
x	$-\infty$	0	$+\infty$																						
y		0																							
x	y																								
-3	9																								
-2	4																								
-1	1																								
0	0																								
1	1																								
2	4																								
3	9																								
Estudo completo de $g(x) = -x^2$	Construção do gráfico de $g(x) = -x^2$																								

- O domínio da função: $x \in \mathbb{R}$, isto é, $x \in]-\infty; +\infty[$;
- O contradomínio: $y \in \mathbb{R}_0^-$, isto é, $y \in]-\infty; 0]$;
- Monotonia ou variação da função:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y		0	

- Variação do sinal:

A função é negativa para

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

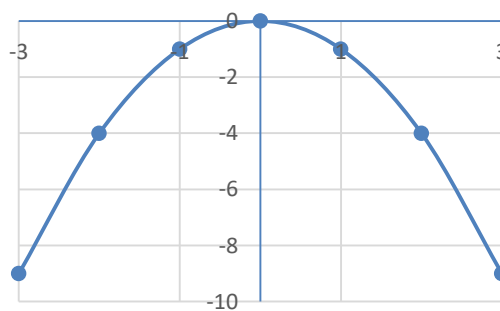
- Zero da função: $x = 0$;
- Ordenada na origem: $y = 0$;
- O eixo de simetria coincide com o eixo das ordenadas (y).

$$f(x) = ax^2$$

Equação do eixo de simetria:

$$x = 0$$

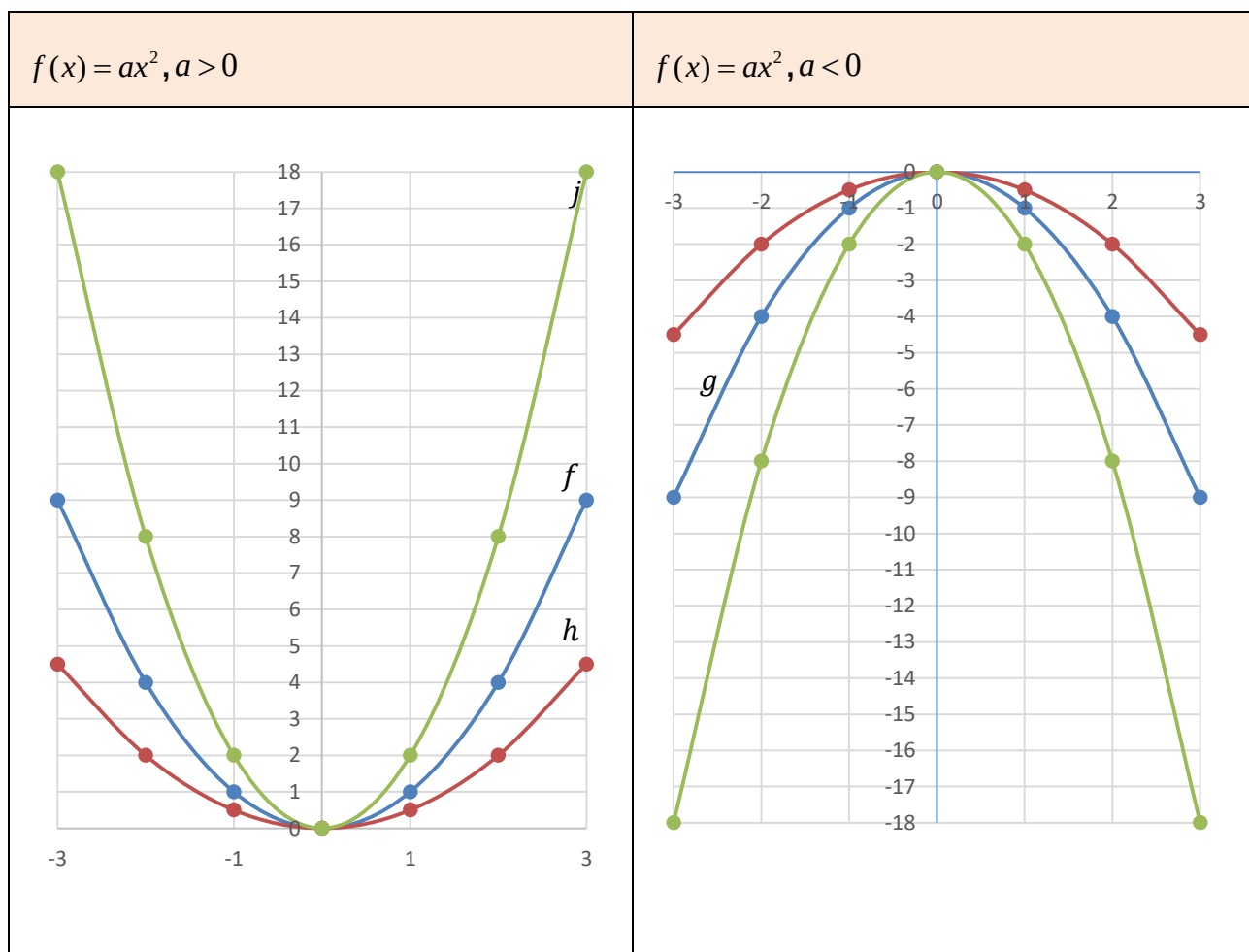
x	y
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9



1.1.2. Função do tipo $f(x) = ax^2$ ou $y = ax^2$; ($a \neq 0$)

Para estudar a função do tipo $f(x) = ax^2$, tomemos como exemplos as funções:

$$f(x) = x^2; g(x) = -x^2; h(x) = \frac{1}{2}x^2; i(x) = -\frac{1}{2}x^2; j(x) = 2x^2; l(x) = -2x^2$$



O gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2$ tem a concavidade virada para cima se $a > 0$ e virada para baixo se $a < 0$.

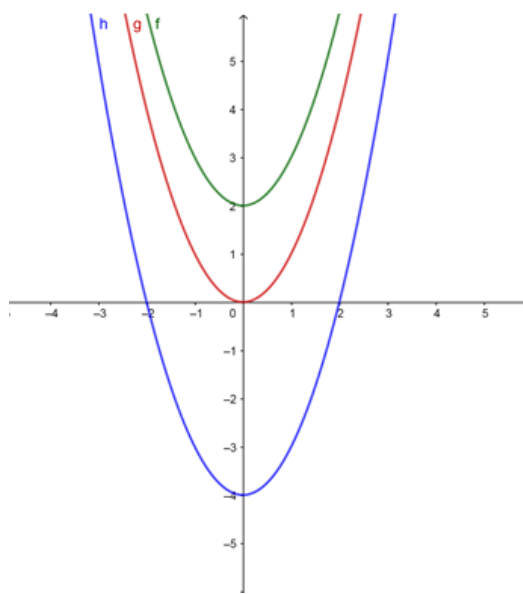
1.1.3. Função do tipo $y = ax^2 + c$, com $a \neq 0$

Para estudar a função do tipo $y = ax^2 + c$, tomemos como exemplos as funções:

$$f(x) = x^2 + 2; g(x) = x^2; h(x) = x^2 - 4$$

Todo o gráfico do tipo $y = ax^2 + c$ obedece às seguintes propriedades:

- Vértice: $(0; c)$;
- Eixo de simetria: $x = 0$;
- Sentido da concavidade: virada para cima se $a > 0$ e virada para baixo se $a < 0$;



- Contradomínio: $[c; +\infty[$ se $a > 0$ e $]-\infty; c]$ se $a < 0$.

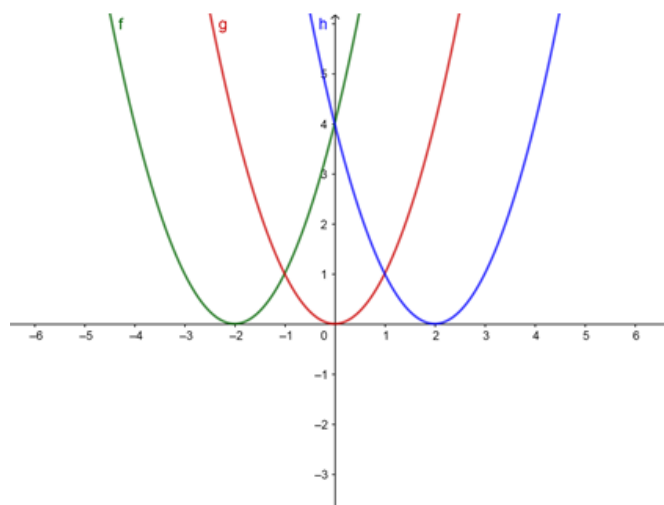
1.1.4. Função do tipo $y = a(x - p)^2$, com $a \neq 0$

Para estudar a função do tipo $y = ax^2 + c$, tomemos como exemplos as funções:

$$f(x) = (x + 2)^2 + 2; g(x) = x^2; h(x) = (x - 2)^2$$

Todo o gráfico do tipo $y = ax^2 + c$ obedece às seguintes propriedades:

- Vértice: $(p; 0)$;
- Eixo de simetria: $x = p$;
- Sentido da concavidade: virada para cima se $a > 0$ e virada para baixo se $a < 0$;
- Contradomínio: $[0; +\infty[$ se $a > 0$ e $]-\infty; 0]$ se $a < 0$;



No geral:

No âmbito da realização do estudo completo de uma função quadrática, é importante lembrar os conceitos fundamentais usados tais como:

1. **Domínio da função:** é o conjunto de partida; o conjunto de todos os valores que o x pode assumir. No caso das funções quadráticas é sempre $\mathbb{R}$. O domínio da função representamos por Df .
2. **Contra domínio:** é o conjunto de chegada, conjunto das imagens, conjunto de todos os valores que y assume após a substituição dos valores de x na função. O contradomínio da função quadrática depende de cada função dada. Sua representação simbólica é dada por $D'f$.
3. **Concavidade:** é a posição em que a parábola está voltada (virada), a concavidade depende do sinal do coeficiente a na função quadrática.
4. **Ordenada na origem:** é o valor que o y toma no ponto onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas. Este valor geralmente é dado pelo coeficiente c .

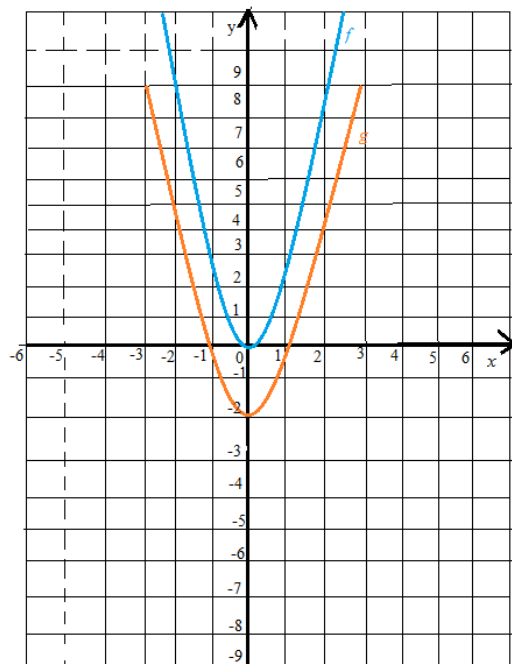
- 5. Zeros da função:** são os pontos por onde o gráfico intersecta o eixo dos xx . Esses pontos calculados anulam a função. Nas funções quadráticas no máximo encontramos dois zeros.
- 6. Vértice:** é o ponto onde o gráfico muda do “comportamento”; se o gráfico vinha crescendo, a partir desse ponto começa a decrescer. Se é que vinha decrescendo, a partir desse ponto começa a crescer.
- 7. Eixo de simetria:** é o eixo que divide o gráfico (parábola) em duas partes iguais. O eixo de simetria das funções quadráticas sempre é paralelo ao eixo dos y e passa pelo vértice.
- 8. Variação da função ou monotonia:** é verificar o crescimento e decrescimento do gráfico.
- a) Diz-se que uma **função é crescente** em um certo intervalo quando os valores de x aumentam e os valores de y também aumentam.
- b) Diz-se que uma **função é decrescente** em um certo intervalo quando os valores de x aumentam e os valores de y diminuem.
- Nota:** No estudo da monotonia das funções quadráticas pode-se usar uma tabela e indicar o crescimento e decrescimento da função na base de setas.
- 9. Variação do sinal:** verifica-se os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.
- a) **Uma função é positiva**, no intervalo onde tem ordenadas positivas, isto é, onde passa por cima do eixo dos xx .
- b) **Uma função é negativa**, no intervalo onde tem ordenadas negativas, isto é, onde passa por baixo do eixo dos xx .



II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 1: Dada a função $g(x) = 2x^2 - 2$, representa-a graficamente a partir do gráfico de $f(x) = 2x^2$ e faz o respectivo estudo completo.

x	$y = 2x^2$
-3	18
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8
3	18



- Dg:** $x \in \mathbb{R}$
- D'g:** $y \in [-2; +\infty[$
- Zeros:** $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$
- Ordenada na origem:** $y = -2$
- Vértice:** $V(0; -2)$
- Equação do eixo de simetria:** $x = 0$
- Concavidade:** voltada para cima, pois $a > 0$.
- Monotonia:**

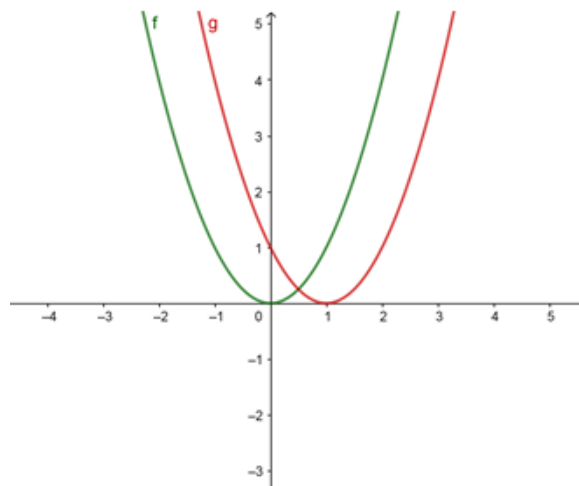
x	$] -\infty; 0[$	0	$] 0; +\infty[$
$g(x) = 2x^2 - 2$	↘	-2	↗

- Variação do sinal:**

x	$] -\infty; -1[$	-1	$] -1; 1[$	1	$] 1; +\infty[$
$g(x) = 2x^2 - 2$	+	0	-	0	+

Exercício 2: Dada a função $g(x) = (x - 1)^2$, representa-a graficamente a partir do gráfico de $f(x) = x^2$ e faz o respectivo estudo completo.

1. **Dg:** $x \in \mathbb{R}$
2. **D'g:** $y \in [0; +\infty[$
3. **Zeros:** $x_1 = x_2 = 1$
4. **Ordenada na origem:** $y = 1$
5. **Vértice:** $V(1; 0)$
6. **Equação do eixo de simetria:** $x = 1$
7. **Concavidade:** voltada para cima, pois $a > 0$.
8. **Monotonia:**



x	$] -\infty; 1[$	1	$] 1; +\infty[$
$g(x) = (x - 1)^2$	↘	0	↗

9. Variação do sinal:

x	$] -\infty; 1[$	1	$] 1; +\infty[$
$g(x) = 2x^2 - 2$	+	0	+



III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja dada a função $f(x) = a(x - p)^2$. Determina os valores de **a** e **p** se:
 - a) $f(x) = 2(x - 3)^2$
 - b) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 6)^2$
 - c) $f(x) = -2021\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$
2. Seja dada a função $g(x) = ax^2 + c$. Determina os valores de **a** e **c** se:
 - a) $g(x) = 2x^2 - 5$
 - b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5$
 - c) $g(x) = -2x^2 - \frac{3}{2}$

3. Dadas as funções $f(x) = \frac{1}{3}(x - 6)^2$; $g(x) = x^2 - 5$ e $h(x) = -x^2 + 4$, sem construir os gráficos, indica:
- Os zeros de cada função.
 - O vértice de cada função.
 - A equação do eixo de simetria de cada função.
4. Dadas as funções abaixo, faz o esboço dos gráficos de cada função e o respectivo estudo completo por cada função.
- $h(x) = -x^2 + 4$
 - $l(x) = x^2 + 2$
 - $m(x) = -(x - 1)^2$
 - $n(x) = (x + 2)^2$
5. Considera as funções quadráticas abaixo:
- $f(x) = x^2 - 6x + 8$
 - $g(x) = x^2 - 4x - 5$
 - $h(x) = -x^2 + 2x - 6$.
 - $l(x) = 2x^2 + 4x - 6$
 - $m(x) = x^2 + x - 2$
- Determina os zeros de cada uma das funções.
6. Seja dada a função $f(x) = -x^2 + 9$.
- Determina os zeros de f .
 - Determina o sinal de $f(-2)$, $f(0)$ e $f(4)$.
 - Representa graficamente a função.
 - Resolve graficamente:
 - $f(x) < 0$
 - $f(x) \geq 0$

UNIDADE TEMÁTICA VI

QUADRILÁTEROS



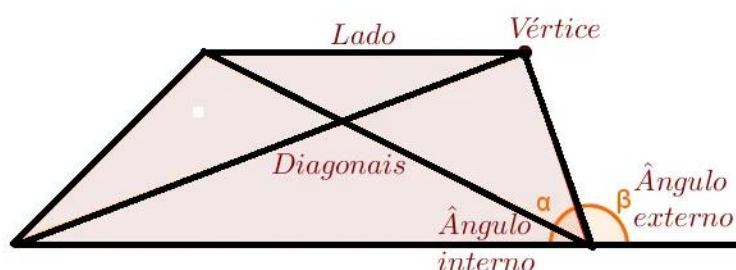
I. RESUMO

1.1. Quadrilátero

Quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados. Suas características e propriedades específicas dizem respeito aos seus lados, ângulos e diagonais.

Elementos de um quadrilátero

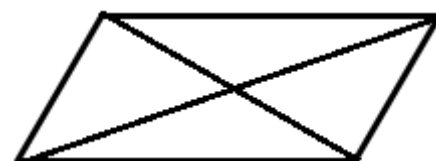
- ✓ **Lados:** são os segmentos de recta que contornam o quadrilátero;
- ✓ **Vértices:** são os pontos de encontro entre dois lados;
- ✓ **Ângulos internos:** são os ângulos determinados por dois lados consecutivos de um quadrilátero;
- ✓ **Ângulos externos:** são ângulos formados pelo prolongamento de um lado do quadrilátero. Um ângulo externo sempre é suplementar ao ângulo interno adjacente a ele;
- ✓ **Diagonais:** Segmentos de recta cujas extremidades são dois vértices não consecutivos do quadrilátero. Dessa maneira, são os segmentos de recta que ligam dois vértices e que, ao mesmo tempo, não são lados.



1.2. Classificação de quadriláteros

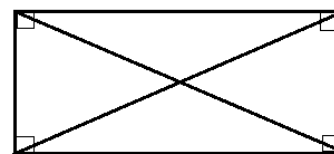
1.2.1. Paralelogramos

Os **paralelogramos** possuem lados opostos paralelos. As suas diagonais cruzam-se em seus pontos médios.



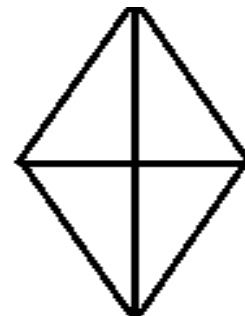
1.2.2. Rectângulo

Os **rectângulos** são **paralelogramos** cujos ângulos internos são rectos (daí o nome rectângulo). Eles possuem todas as características dos paralelogramos. As suas **diagonais são congruentes**.



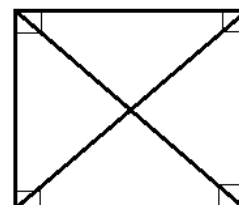
1.2.3. Losango

Os losangos são **paralelogramos** que possuem todos os lados congruentes, isto é, são paralelogramos equiláteros. Sua propriedade específica é a seguinte: As **diagonais de um losango são perpendiculares**.



1.2.4. Quadrado

Os quadrados são losangos e rectângulos simultaneamente e, por isso, possuem todos os ângulos rectos e todos os lados congruentes. Sua propriedade específica é a seguinte: **As diagonais do quadrado são perpendiculares e congruentes**.



1.2.5. Trapézios

Diferentemente dos **paralelogramos**, os **trapézios** possuem apenas um par de lados paralelos. Esses lados são chamados de bases. Os trapézios que possuem os outros dois lados que não são bases congruentes são chamados de **isósceles**.

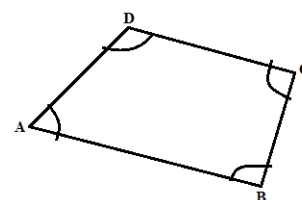


1.3. Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero

O Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero diz o seguinte: **a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual à 360° (trezentos e sessenta graus)**

Consideremos o quadrilátero ao lado:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$$





II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Determina os valores de x e y nas figuras

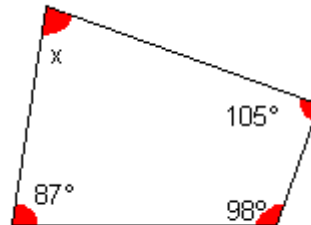
abaixo:

$$x + 105^\circ + 98^\circ + 87^\circ = 360^\circ$$

$$x + 290^\circ = 360^\circ$$

$$x = 360^\circ - 290^\circ$$

$$x = 70^\circ$$



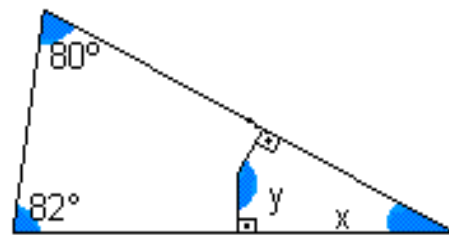
1º : Calculemos o valor do x .

$$x + 80^\circ + 82^\circ = 180^\circ$$

$$x + 162^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 162^\circ$$

$$x = 18^\circ$$



2º : Calculemos o valor do y .

$$18^\circ + 90^\circ + y + 90^\circ = 360^\circ$$

$$y + 198^\circ = 360^\circ$$

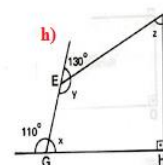
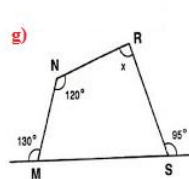
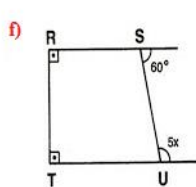
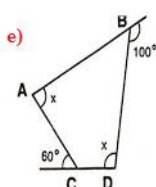
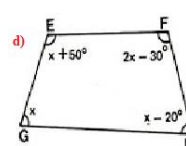
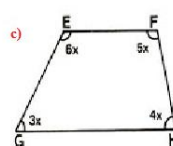
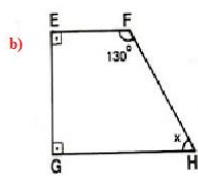
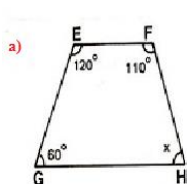
$$y = 360^\circ - 198^\circ$$

$$y = 162^\circ$$



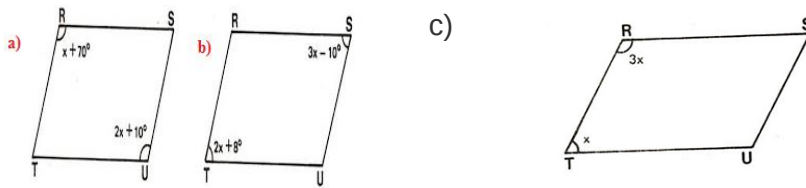
III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Assinala com **V** as afirmações verdadeiras e **F** as falsas:
 - O trapézio é um rectângulo. _____
 - O quadrado é um paralelogramo. _____
 - Um trapézio com dois ângulos rectos é um rectângulo. _____
 - Trapézio escaleno é aquele que tem todos os lados iguais. _____
 - Trapézio isósceles é aquele que tem todos os lados iguais. _____
 - Trapézio propriamente dito é aquele que só tem dois lados paralelos. _____
 - Em um paralelogramo a soma dos ângulos adjacentes é igual a 360° . _____
 - Quadrado é um quadrilátero com todos os lados iguais. _____
- Sobre as propriedades dos quadriláteros, assinala com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas:
 - A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 180° . _____
 - Em um paralelogramo, as diagonais são congruentes. _____
 - Em um paralelogramo, lados opostos são paralelos e congruentes. _____
 - Em um quadrado, as diagonais são perpendiculares e não congruentes. _____
 - Em um quadrado, todos os lados são iguais e seus ângulos podem ser rectos ou não. _____
- Qual é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois, não tem ângulos rectos e cujas diagonais bissectam-se?
- Qual é o quadrilátero que tem um par de lados paralelos e cujas diagonais não se cortam ao meio?
- Calcula os valores das incógnitas x , y e z nos quadriláteros:

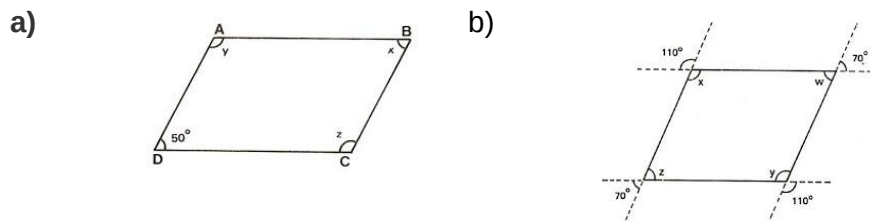


6. Calcula o valor de x nos paralelogramos

abaixo:

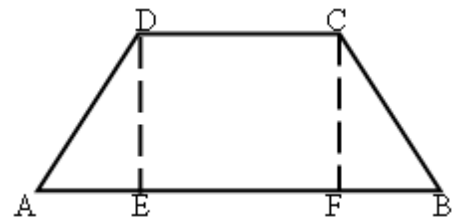


7. Determina as medidas de x , y e z no paralelogramo abaixo:



8. Dado o trapézio isósceles [ABCD], com $AB=10$ cm e $DC=DE=4$ cm. Determina:

- A medida de AD.
- O perímetro do trapézio.



UNIDADE TEMÁTICA VII**NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA****I. RESUMO****1.1. Estatística**

A **estatística** é ramo da Matemática que tem como objectivo obter, organizar e fazer análise numérica das informações.

1.2. Termos e conceitos estatísticos

População ou universo estatístico é uma colecção de seres com alguma característica comum.

Por exemplo:

- Todos os alunos de uma determinada escola;
- Conjunto dos números racionais.

Amostra é conjunto finito da população que seja representativo desta.

Variável estatístico ou Carácter estatístico é uma propriedade que permite caracterizar os indivíduos de uma população.

As variáveis estatísticas podem ser: Qualitativas (não mensuráveis) e quantitativas (mensuráveis).

Qualitativos ou nominais (não mensuráveis): Que não se podem medir.

Exemplo: A cor dos olhos, profissão, cor dos cabelos, etc.

As variáveis estatísticas qualitativas podem estabelecer-se diferenças que se chamam de **modalidades**.

Por exemplo: Na variável qualitativo “profissão”, podem-se considerar modalidades: professor, médico, electricista, mecânico, etc.

Quantitativos ou numéricas (mensuráveis): Que se podem medir.

Exemplo: Temperatura, altura, idade, etc.

As variáveis quantitativas podem ser discretas ou contínuas.

Discretas quando não podem tomar todos os valores de um determinado intervalo real.

Exemplo: Número de filhos de uma mãe, número de golos marcados num jogo de futebol.

Contínuas quando pode tomar quaisquer valores de um determinado intervalo real.

Exemplo:

- Altura dos alunos de uma turma da 9ª classe;
- As temperaturas registadas em um determinado lugar durante um dia.

Resumindo: Variáveis $\begin{cases} \text{Qualitativa} \\ \text{Quantitativa} \begin{cases} \text{Discreta} \\ \text{contínua} \end{cases} \end{cases}$

1.3. Recolha e organização de dados

Um estudo estatístico envolve a recolha, a organização e a análise dos dados. A análise e a interpretação dos dados permite fazer previsões e tomar decisões.

1.4. Frequência absoluta, relativa percentual e acumuladas

Para organizar dados e fazer a respectiva análise, usam-se tabelas e gráficos.

Exemplo:

O número de golos obtidos numa jornada de futebol no Moçambola 2021 foi o seguinte:

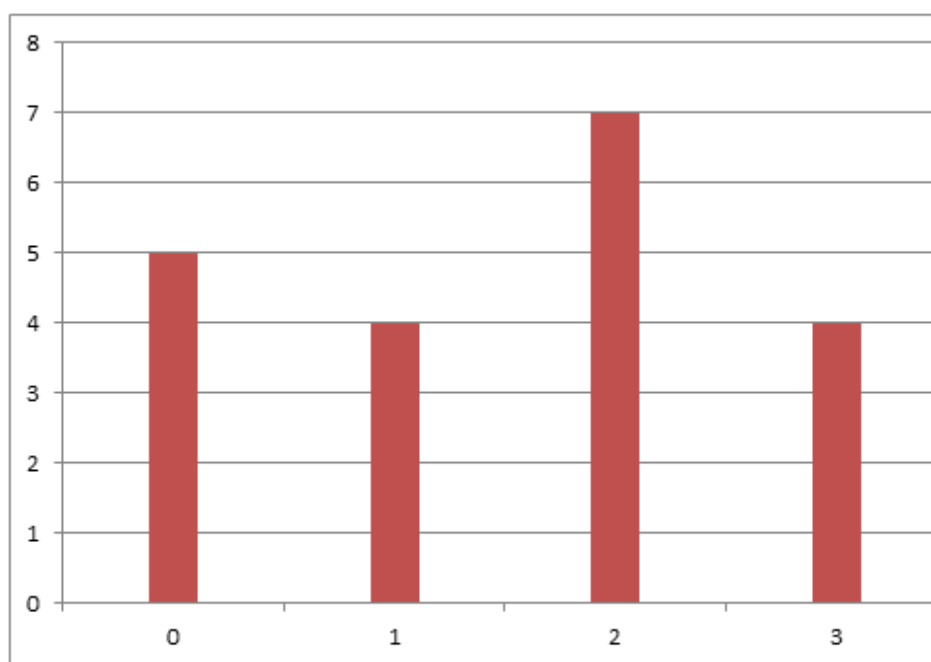
2 3 2 0 2 3 1 0 1 2
3 0 1 1 2 0 3 2 2 0

Vamos organizar esses dados numa tabela de frequências:

Nº de golos	Frequência absoluta (f)	Frequência relativa (fr) $fr = \frac{f}{n}$	Frequência absoluta acumulada (F)	Frequência relativa acumulada (Fr)
0	5	$\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$	5	0,25

1	4	$\frac{4}{20} = 0,2 = 20\%$	9	0,45
2	7	$\frac{7}{20} = 0,35 = 35\%$	16	0,8
3	4	$\frac{4}{20} = 0,2 = 20\%$	20	1,00
	n=20	1,00 = 100%	_____	_____

1.5. Gráficos de barras



1.6. Medidas de tendência central

1.6.1. Média

Sendo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, n valores de uma variável quantitativas, chama-se **média** ao valor que se obtém pela fórmula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

1.6.2. Moda

Chama-se **moda**, de um conjunto de n valores, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de uma variável estatística, ao valor que ocorre com maior frequência.

1.6.3. Mediana

Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, n dados estatísticos ordenados do menor para o maior e vice-versa, chama-se mediana ao valor que ocupa a posição central.

Considerando o exemplo dado sobre número de golos obtidos numa jornada de futebol no Moçambola 2021:

2	3	2	0	2	3	1	0	1	2
3	0	1	1	2	0	3	2	2	0

Vamos calcular:

a) A média

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 2 + 0 + 2 + 3 + 1 + 0 + 1 + 2 + 4 + 0 + 1 + 1 + 2 + 0 + 3 + 2 + 2 + 0}{20}$$

$$= \frac{31}{20} = 1,55 \cong 2$$

Logo em média marcou-se 2 golos.

b) Moda

Verificando os dados, podemos concluir que a moda é 2, pois é o valor que ocorre com maior frequência.

c) Mediana

Colocando de forma crescente os dados, teremos:

0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3

Podemos notar que o valor central é formado por dois números (2 2) sendo assim temos que somar os dois números e dividir por 2, ou seja: $\frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Logo, a mediana é 2.



II. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

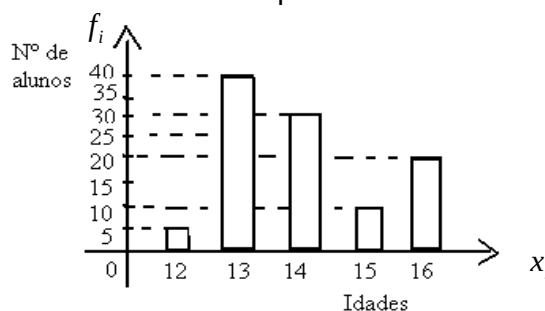
- Em uma pesquisa realizada em uma escola, identificou-se os seguintes indicadores: idade, classe, sexo, local de estudo, classificação, obtidos na última prova de Matemática e Quantidade de livros que possui.
 - Das variáveis acima, quais são as quantitativas e quais são as qualitativas?
 - Das variáveis quantitativas, diz quais são as discretas?
- As notas do João em cinco testes de Matemática foram as seguintes: 15, 16, 13, 15, 11.
 - Qual é a moda das notas?
 - Calcula a média aritmética das notas.
 - Qual deve ser a nota do sexto teste para que a média suba em 1 valor?

- Na cidade da Maxixe fez-se um levantamento do número de pessoas de cada agregado familiar. Em um dos bairros obteve-se os seguintes resultados:

5 2 4 4 3 5 1 5 5 6 3 3 4 4 5 6 6 4 2 3

- Constrói uma tabela de frequências de acordo com os dados.
 - Determina:
 - A média das pessoas de cada agregado familiar.
 - A mediana.
 - A moda.
- Determina, para cada um dos conjuntos de números seguintes, o valor de x , de modo que a média seja 7:
 - 8 7 3 x 14
 - 4 2 6 10 x 8 1
 - O gráfico mostra a distribuição das idades de alunos de uma certa escola por anos.

- Determina a média aritmética das idades.
- Qual é a moda das idades?



UNIDADE TEMÁTICA VIII**SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS****I. RESUMO****1.1. Homotetias**

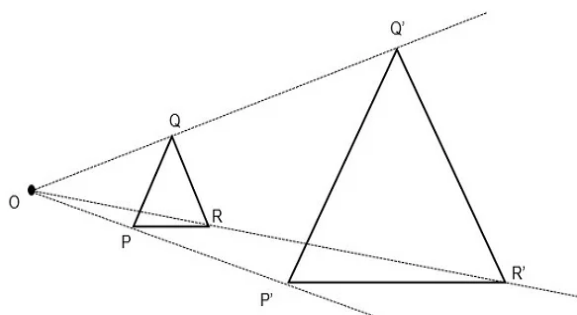
Homotetia é uma transformação geométrica entre segmentos ou figuras.

1.1.1. Ampliação e redução de figuras planas simples

Seja dado o triângulo PQR, vamos encontrar sua imagem através da homotetia do centro em O e razão 3.

Procedimentos de determinação da imagem:

1. Marquemos o centro O, que é um ponto exterior ao triângulo PQR;
2. Determinemos as imagens de cada vértice do triângulo PQR, para encontrar os vértices do triângulo P'Q'R'. Para encontrar a marcação do ponto P', Q', R', teremos que:



$$\overline{OP'} = 3 \cdot \overline{OP}$$

$$\overline{OQ'} = 3 \cdot \overline{OQ}$$

$$\overline{OR'} = 3 \cdot \overline{OR}$$

No geral:

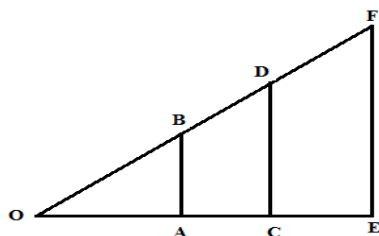
Homotetia de centro O e razão r é a aplicação que a cada ponto P faz corresponder um ponto P' tal que: $\overline{OP'} = r \cdot \overline{OP}$. Habitualmente escreve-se H_O^r .

O triângulo P'Q'R' é semelhante ao triângulo PQR. E $r = 3$ denomina-se razão de semelhança.

1.2. Semelhança de triângulos

A Viana tirou uma fotografia tipo passe para um documento. Depois mandou reproduzir a mesma foto em A4 para colocar no seu álbum e outra em A3 para colar no seu quarto. As três fotos são parecidas diferindo apenas no tamanho. Elas são semelhantes. As duas fotos tipo passe que a Viana recebeu do fotógrafo são iguais.

Dada a figura:



Observe que na figura, os triângulos OCD e OEF são uma ampliação do triângulo OAB. Também se pode dizer que o triângulo OCD é uma redução do triângulo OEF. Eles são triângulos rectângulos, têm a mesma forma e, por isso, dizem-se semelhantes.

Lembre-se que:

- ❖ Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes; isto é:

$$\text{Se } \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \text{ então } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

- ❖ Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes; isto é:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}, \text{ logo } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

- ❖ Se dois triângulos têm dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual, então eles são semelhantes;

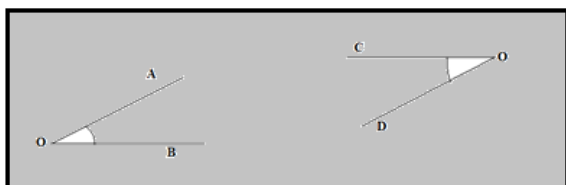
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \text{ logo } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

1.3. Revisão

Ângulos suplementares - são aqueles cujas medidas somam 180° . Dizemos que cada um deles é o suplemento do outro.

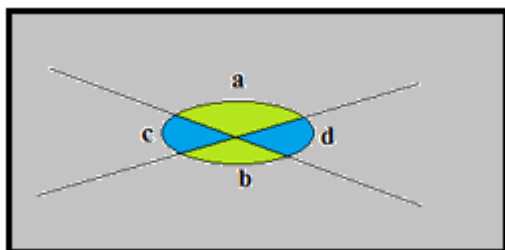
Exemplo: 48° é o suplemento de 132° e vice-versa, pois $48^\circ + 132^\circ = 180^\circ$.

Ângulos congruentes - são aqueles que possuem medidas iguais. Assim, por exemplo todos os ângulos rectos são congruentes, todos os ângulos de medida 60° são congruentes, etc.



$\hat{A}Ô\hat{B} \cong \hat{C}Ô\hat{D}$ o símbolo $\cong$ significa “é congruente a”.

Ângulos opostos pelo vértice - como o próprio nome indica, são aqueles cujos lados de um são os prolongamentos dos lados do outro. Vale aqui, a seguinte proposição, facilmente demonstrável:

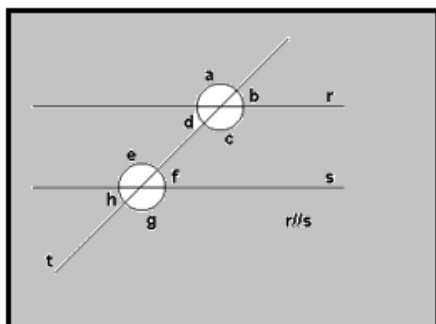


"Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida".

Veja que os ângulos de medidas a e b , e os ângulos de medidas c e d são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida.

1.3.1. Ângulos formados por duas rectas paralelas cortadas por uma secante

$r \parallel s$ Dadas duas rectas paralelas, chama-se *recta transversal* qualquer recta que intercepte ambas as rectas. Observamos na figura que ficam determinados oito ângulos de medidas a , b , c , d , e , f , g e h que recebem denominações especiais a saber:



- Ângulos correspondentes: $b e f, a e e, d e h, c e g$.
- Ângulos alternos internos: $d e f, c e e$.
- Ângulos alternos externos: $b e h, e a e g$.
- Ângulos colaterais internos: $d e e, c e f$.
- Ângulos colaterais externos: $b e g, a e h$.

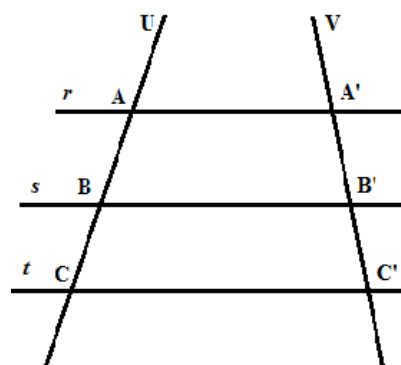
Observa-se que:

- Os ângulos correspondentes são congruentes (medidas iguais);
- Os ângulos alternos são congruentes (medidas iguais);
- Os ângulos colaterais são suplementares, isto é, somam 180° .

1.3.2. Teorema de Tales

A intersecção de um feixe de rectas paralelas por duas rectas transversais forma segmentos proporcionais. Na figura, as rectas r , s e t são paralelas u e v são transversais.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

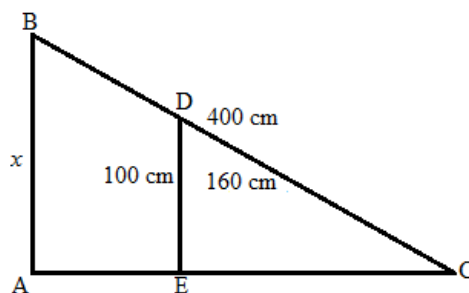


$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$$



II. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Na figura abaixo, os segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Determine a medida de x .



Quando um triângulo é cortado por um segmento de recta paralelo a um de seus lados, esse segmento forma um segundo triângulo menor e semelhante ao primeiro.

$$\frac{400}{x} = \frac{160}{100}$$

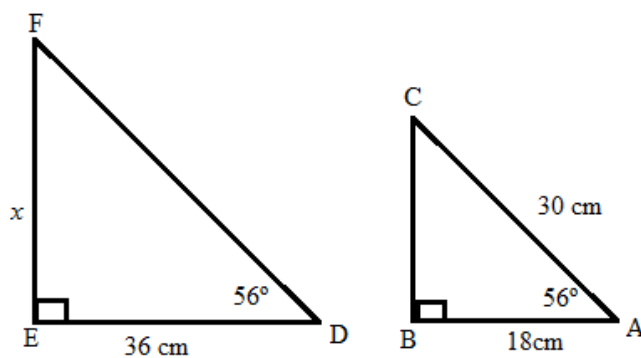
$$160x = 400 \cdot 100$$

$$160x = 40000$$

$$x = \frac{40000}{160}$$

$$x = 250 \text{ m}$$

2. Nos triângulos abaixo, determina o valor de x .



Resolução

Observe que os dois triângulos são semelhantes pelo caso AA. Entretanto, x é a medida do lado EF do triângulo maior, que, por sua vez, é correspondente ao lado CB do triângulo menor. Para descobrir a medida desse lado, podemos usar o teorema de Pitágoras.

$$30^2 = 18^2 + \overline{BC}^2$$

$$900 = 324 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 900 - 324$$

$$\overline{BC}^2 = 576$$

$$\overline{BC} = \sqrt{576}$$

$$\overline{BC} = 24 \text{ cm}$$

Como os lados dos triângulos são proporcionais, para descobrir a medida de x , basta usar a proporção entre os lados:

$$\frac{18}{36} = \frac{24}{x}$$

$$18x = 36 \cdot 24$$

$$18x = 864$$

$$x = \frac{864}{18}$$

$$x = 48 \text{ cm.}$$

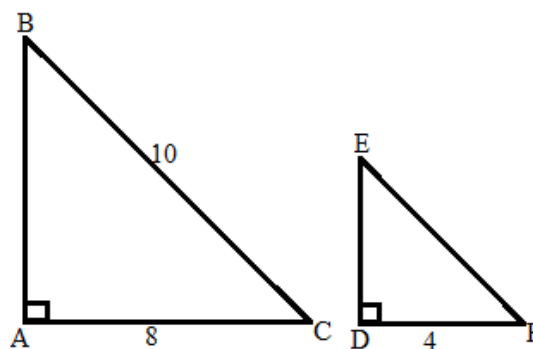


III. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3.1. Exercícios propostos 1

1. Com base nos critérios de semelhanças dos triângulos, nas afirmações a baixo, assinala com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas. _____
- a) Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que eles tenham três ângulos correspondentes congruentes. _____

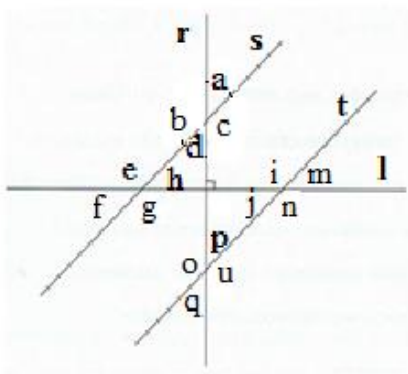
- b) Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que eles tenham dois lados proporcionais e um ângulo congruente, em qualquer ordem. _____
- c) Para que dois triângulos sejam congruentes, basta que eles tenham os três lados correspondentes com medidas proporcionais. _____
- d) Dois triângulos que possuem dois lados correspondentes proporcionais não serão semelhantes em qualquer hipótese. _____
- e) Dois triângulos que possuem apenas dois ângulos correspondentes congruentes não podem ser considerados semelhantes. _____
2. Para descobrir a altura de um prédio, Maria mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Maria, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual é a altura desse prédio?



3. Qual é a medida do segmento $\overline{DE}$?
4. Constrói o triângulo $A'B'C'$ homotético de ABC de centro em A e razão $k = 3$.

3.2. Exercícios Propostos 02

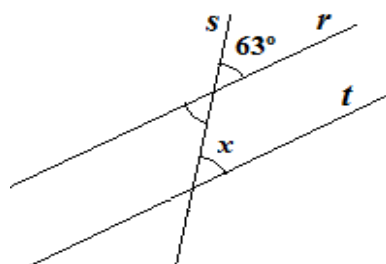
1. Observa a figura seguinte e, fazendo a anotação adequada, indica:



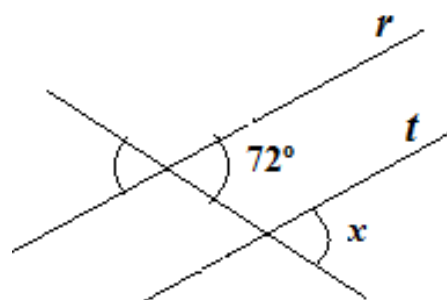
- a) Duas rectas paralelas.
- b) Duas rectas perpendiculares.
- c) Ângulos correspondentes.
- d) Ângulos alternos internos.
- e) Ângulos alternos externos.

2. Duas rectas perpendiculares formam entre si um ângulo com medida de:
 - a) menor que 180° e maior que 90° .
 - b) exactamente 180° .
 - c) exactamente 90° .
 - d) maior que 180° .
3. Um ângulo com medida exacta de 90° corresponde a:
 - a) uma volta completa.
 - b) um terço de uma volta.
 - c) metade de uma volta.
 - d) um quarto de uma volta.
4. Um ângulo com medida de 160° é classificado como:
 - a) recto
 - b) raso
 - c) obtuso
 - d) agudo
5. Duas rectas perpendiculares são concorrentes e formam um ângulo:
 - a) raso.
 - b) recto.
 - c) giro.
 - d) agudo.
6. Dois ângulos opostos pelo vértice medem, em graus, $(3x + 10)$ e $(x + 50)$. A amplitude de cada ângulo em graus é:
 - a) 20°
 - b) 30°
 - c) 70°
 - d) 50°
7. As rectas r e t são paralelas ($r // t$). Determina a medida do ângulo x em cada caso:

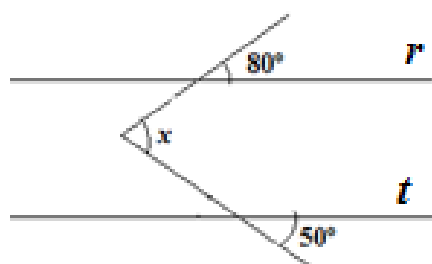
a)



b)

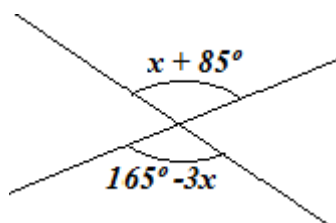


c)

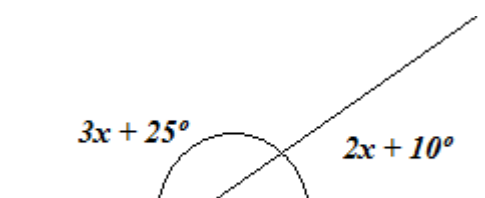


8. Obtém as medidas dos ângulos assinalados:

a)



b)



TÓPICOS DE CORRECÇÃO/RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

UNIDADE TEMÁTICA

I: NÚMEROS REAIS E RADICIAÇÃO

3.1. Exercícios propostos 01

1. a) $\notin$ b) $\supset$ c) $\notin$ d) $\in$ e) $\in$ f) $\subset$ g) $\in$ h) $\notin$ i) $\notin$ j) $\subset$
 k) $\in$ l) $\in$ m) $\subset$

2. a) 121 b) 289 c) 169 d) 0,00004 e) $\frac{1}{400}$ f) 4,41 g) $\frac{49}{4}$

3. a) 81 b) 32 c) 1 d) 0 e) 16 f) $\frac{27}{64}$ g) $-\frac{8}{27}$ h) 1 i) 1 j) 1
 k) 17 l) 1,45 m) -5 n) $-\frac{4}{7}$ o) $\frac{1}{3}$ p) $\frac{1}{9}$ q) $\frac{1}{16}$ r) $\frac{9}{4}$ s) $-\frac{3}{2}$ t) $-\frac{64}{27}$
 u) 5 v) 9 w) $\frac{16}{9}$

4. a) $\frac{46}{9}$ b) $-\frac{193}{4}$ c) $-\frac{621}{25}$ d) 31 e) -11 f) 48 g) -11 h) -40
 i) -9 j) 32 k) 1 l) -26 m) $\frac{335}{343}$

5. Alternativa: b)

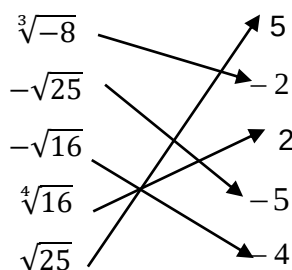
6. Alternativa: d)

7. Alternativa: a)

8. a) 1 b) -12 c) 1 d) 1 e) 1 f) $\frac{1}{35}$ g) $\frac{2}{7}$ h) 8 i) 36

3.2. Exercícios propostos 02

1.



2. a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{7}$ d) $\sqrt{2}$ e) 11 f) 0 g) 11 h) $13\sqrt{2}$ i) $13\sqrt{2}$
 3. a) $\sqrt{10}$ b) 2 c) $\sqrt{14} + 2\sqrt{2}$ d) $\sqrt[3]{30}$ e) 4 f) 6 g) $\sqrt[3]{24}$ h) $5 + \sqrt{5}$ i) $7\sqrt{2}$
 4. a) $\sqrt[3]{2}$ b) 2 c) $6\sqrt{5}$ d) 2 e) 5 f) $\frac{7}{5}$ g) $4\sqrt[3]{3}$
 5. a) 2 b) $3\sqrt[3]{3}$ c) $20\sqrt{5}$ d) $5 + 2\sqrt{6}$ e) 15 f) 63

6. a) $\sqrt[6]{7}$ b) $\sqrt[6]{5}$ c) $\sqrt[24]{40}$ d) $\sqrt[4]{10}$ e) $\sqrt[8]{2}$ f) $\sqrt[6]{3}$ g) $\sqrt[18]{3}$
7. a) V b) V c) V d) V e) F f) V
8. a) 12 b) $-2\sqrt{5}$ c) $3\sqrt[3]{5}$ d) $6\sqrt{2}$ e) $11\sqrt{7}$ f) 8 g) $6\sqrt[5]{3}$ h) $\frac{11}{3} \cdot \sqrt[5]{3}$ i) $-4 \cdot \sqrt{3}$ j) $13\sqrt{3}$
9. a) $10\sqrt{3}$ b) $9\sqrt{2}$
10. 28
11. a) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ b) 5
12. a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{x\sqrt{x+1}}{x+1}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ d) $2\sqrt{x}$ e) $\frac{3\sqrt{x}}{x}$ f) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ g) $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ h) $\frac{x(1+\sqrt{x})}{1+x}$ i) $\frac{4\sqrt[3]{x^2}}{x}$ j) $\frac{\sqrt[4]{18^3}}{6}$ k) $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ l) 1 m) $10 - 5\sqrt{3}$ n) $\frac{7(3+\sqrt{5})}{4}$

UNIDADE TEMÁTICA II: INEQUAÇÕES LINEARES E SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL

1. a) $\{-3; -2; -1\}$ b) $\left\{-\frac{9}{3}; -\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ c) $\left\{-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right\}$
- 2.
3. a) $x > -5$ b) $x \leq 10$ c) $x > -7$ d) $x < -2$ e) $x \leq 1$ f) $x < 22$
 g) $x \leq 4$ h) $x \geq -3$ i) $x \geq 5$ j) $x < \frac{4}{9}$ k) $x \geq \frac{15}{4}$ l) $x > \frac{7}{6}$
 m) $x \geq \frac{2}{3}$ n) $x \leq 3$ o) $x \leq \frac{5}{2}$ p) $x \geq -\frac{23}{4}$ q) $x > -\frac{8}{5}$ r) $x > \frac{1}{3}$
 s) $x \geq \frac{47}{14}$
4. a) $x < 1$ b) $\begin{cases} x > -2 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases}$ d) $x > \frac{11}{3}$ e) $\begin{cases} x > -\frac{15}{13} \\ x < \frac{6}{7} \end{cases}$
 f) $x < \frac{19}{4}$ g) $x < \frac{14}{13}$ h) $\emptyset$ i) $\begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases}$
5. $\{0; 1; 2\}$
6. -4
7. 10
8. 2
9. a) 2; b) 0; c) -1 d) 1
10. $x < 9 \wedge x > -3$

UNIDADE TEMÁTICA III: NOÇÃO DE MONÓMIOS E POLINÓMIOS

1. Exemplo:

- Monómio: $2x^2$
- Binómio: $3x + 2$
- Trinómio: $y^2 + 2xy + x^2$

2. a) grau 1; b) grau 3; c) grau 5; d) grau 3.

3. a) $a^2\sqrt[3]{b^2}$ b) $4a^2x\sqrt{x}$ c) $\sqrt[3]{a^2}$ d) $x^3\sqrt{x}$

4. a) $3(x + 2)$ b) $2(x + 1)$

5. a) $5a + 4b + 3$ b) $4x$

6. a) $\frac{3}{2}x + 2$ b) $x^5 - 3x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + 1$ c) $x^5 - 4x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ d)

$$\frac{x^2}{2} + x \text{ e) } x^2 + 4x + 4 \text{ f) } \frac{5}{4}x^2 + 4x + 4 \text{ g) } x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 10x^3 - 5x^2 - x + 2 \text{ h) } \frac{x^5}{4} -$$

$$\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{2} \text{ i) } \frac{3x^4}{2} + \frac{5x^3}{4} - x^2 - 3x - 4$$

7. a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 + 4x + 4$ c) $y^2 - 6y + 9$ d) $c^2 - c + \frac{1}{4}$ e)

$$z^2 - 25 \text{ f) } 9x^2 + 18x + 9$$

8. a) $3(x - 1)$ b) $3a(2 - a)$ c) $2 \cdot (2y + 1)$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)$ e)

$$x \cdot (x + 2) \text{ f) } (2y - 2) \cdot (2y - 2) \text{ g) } (x - y) \cdot (x - y) \text{ h) } (z + 1) \cdot (z + 1) \text{ i) } (x -$$

$$3) \cdot (x + 3) \text{ j) } \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

UNIDADE TEMÁTICA IV: EQUAÇÃO QUADRÁTICA

1. a) F

b) F

c) V

d) F

2. a) completa

b) incompleta

c) incompleta

d) completa

3. a) $x_1 = -4$ e $x_2 = 5$ b) $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$ c) $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$

4. -2 e 4

5. 15

6. 7

7. $-\frac{27}{4}$

UNIDADE TEMÁTICA V: FUNÇÃO QUADRÁTICA

1. a) $a = 2$; $p = 3$ b) $a = \frac{1}{3}$ e $p = 6$ c) $a = -2021$, $p = -\frac{3}{4}$

2. a) $a = 2$ e $c = -5$ b) $a = \frac{1}{3}$ e $c = 5$ c) $a = -2$ e $c = -\frac{3}{2}$

3. a) Os zeros de cada função

Função $f(x) = \frac{1}{3}(x-6)^2$: $x_1 = x_2 = 6$

Função $g(x) = x^2 - 5$: $x_1 = -\sqrt{5}$ e $x_2 = +\sqrt{5}$

Função $h(x) = -x^2 + 4$: $x_1 = -2$ e $x_2 = +2$

b) O vértice de cada função

Função $f(x) = \frac{1}{3}(x-6)^2$: V(6;0)

Função $g(x) = x^2 - 5$: V(0;-5)

Função $h(x) = -x^2 + 4$: V(0;4)

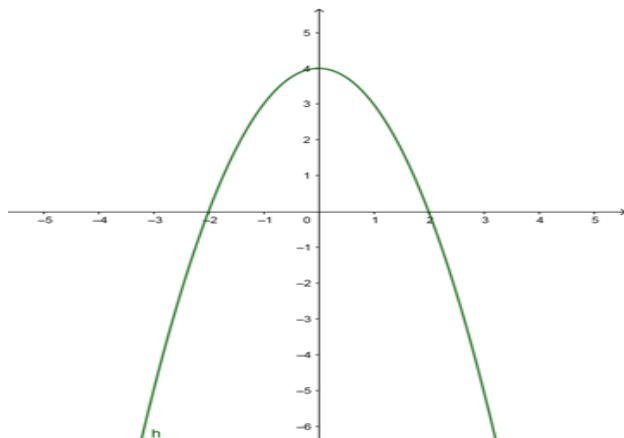
c) A equação do eixo de simetria de cada função

Função $f(x) = \frac{1}{3}(x-6)^2$: $x = 6$

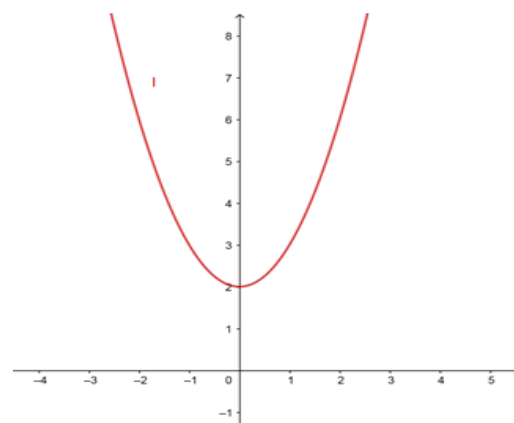
Função $g(x) = x^2 - 5$: $x = 0$

Função $h(x) = -x^2 + 4$: $x = 0$

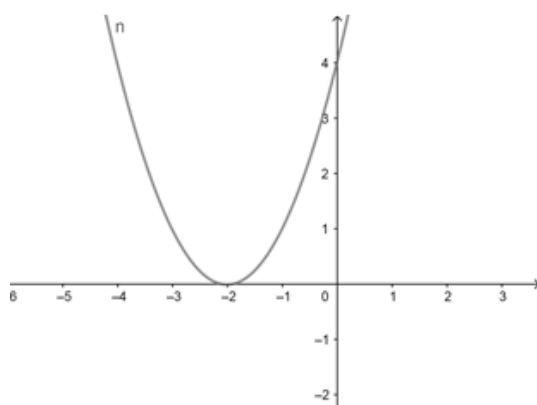
4. a)



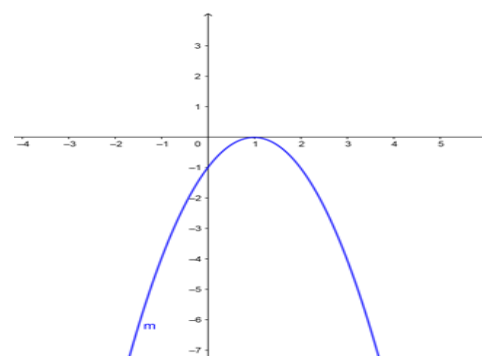
b)



d)



c)



5. a) $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$

b) $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$

c) Não tem raízes

d) $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$

e) $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$

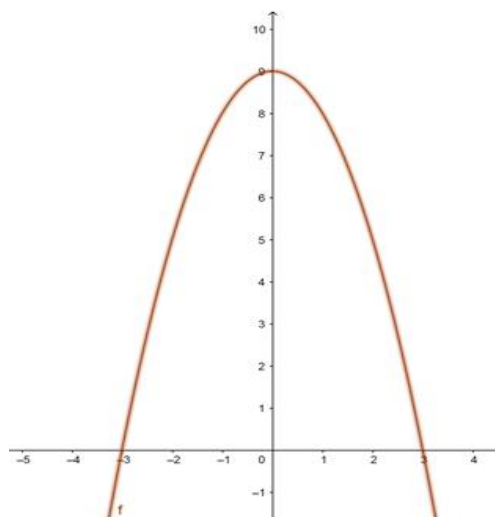
6. a) $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$

b) $f(-2)$ é positivo; $f(0)$ é positivo e $f(2)$ é negativo.

c)

b) $f(x) < 0 : x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

$$f(x) \geq 0 : x \in [-3; 3]$$



UNIDADE TEMÁTICA VI: QUADRILÁTEROS

1. a) F b) V c) V d) F e) F f) V g) F h) V
2. a) F b) V c) V d) F e) F
3. Losango
4. Trapézio
5. a) $x = 70^\circ$ b) $x = 40^\circ$ c) $x = 20^\circ$ d) $x = 72^\circ$ e) $x = 80^\circ$ f) $x = 24^\circ$ g) $x = 105^\circ$ h) $x = 70^\circ$; $x = 50^\circ$ e $x = 150^\circ$
6. a) $y = 130^\circ$; $z = y = 130^\circ$ e $x = 50^\circ$
7. $x = y = 110^\circ$ e $z = w = 70^\circ$
8. a) $\overline{AD} = 5cm$ b) $24cm$

UNIDADE TEMÁTICA VII: NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

1.

- a) Quantitativas: Idade; classe; classificação, obtidos na última prova de Matemática e Quantidade de livros que possui. Qualitativas: sexo e local de estudo.
- b) Discretas: Idade; classe e Quantidade de livros que possui

2. a) Moda: 15 b) Média aritmética: 14 c) 20

3.

Nº de pessoas de cada agregado	Frequência absoluta (f)	Frequência relativa (fr) $fr = \frac{f}{n}$	Frequência absoluta acumulada (F)	Frequência relativa acumulada (Fr)
1	1	$\frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$	1	0,05
2	2	$\frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$	3	0,15
3	4	$\frac{4}{20} = 0,2 = 20\%$	7	0,35
4	5	$\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$	12	0,60
5	5	$\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$	17	0,85
6	3	$\frac{3}{20} = 0,15 = 15\%$	20	1,00
	n=20	1,00 = 100%	_____	_____

b) Média: 4 Mediana: 4 Moda: 4 e 5.

4. a) $x = 3$ b) 18

5. a) 14 b) 13

UNIDADE TEMÁTICA VIII: SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

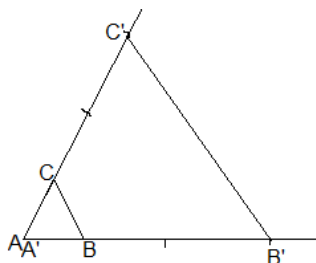
3.1. Exercícios propostos 1

1. a) F b) F c) V d) F e) F

2. 56 m

3. $\overline{DE} = 3$

4.



3.2. Exercícios Propostos 02

1. a) s e t b) r e l c) a e p d) c e o e) a e q.
2. c)
3. d)
4. c)
5. b)
6. c)
7. a) $x = 63^\circ$ b) $x = 72^\circ$ c) $x = 130^\circ$
8. a) 105° b) 112° e 68°

Referências Bibliográficas

- Abrantes, P., & Carvalho, R. F. (1989). *M9 Exercícios de Matemática 9º ano*, Lisboa, Texto Editores.
- Carvalho, R. F., & Martins, Z. A. (1999). *Matemática pela prática*, 1ª edição, Maputo, Moçambique Editora.
- Chuquela, A., Muthemba, B., Guibunda, G., & Machango, O. (2016). *Manual Básico de Ensino Técnico Profissional*, 1ª edição, Maputo.
- INDE (2008). *Programa de Matemática da 9ª classe*. Maputo-Moçambique.
- Martins, Z. (2011). *Matemática 9ª Classe*, 2ª edição, Moçambique, Texto Editores.